



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ  
Факултет инжењерских наука  
Број: 01-1/3648-19  
20.10.2022. године  
Крагујевац

На предлог Катедре за примењену механику и аутоматско управљање (број 01-1/3523 од 07.10.2022. године) и захтев проф. др Владимира П. Миловановића (број 01-1/3424 од 05.10.2022. године) а на основу Правилника о поступку, начину вредновања и квантитативном исказивању научноистраживачких резултата истраживача ("Сл. гласник РС", бр. 24/2016 и 21/2017) и члана 173 Статута Факултета инжењерских наука у Крагујевцу (број 01-1/932 од 01.04.2021. године – пречишћен текст и број 01-1/1638-7 од 27.05.2022. год.), Наставно-научно веће Факултета инжењерских наука у Крагујевцу, на седници одржаној 20.10.2022. године, донело је

## ОДЛУКУ

- I Усваја се пријава техничког решења под насловом: **„Уређај за одређивање кинематског коефицијента трења динамички оптерећених контаката“**, чију су аутори: др Бранко Тадић, редовни професор; др Владимир П. Миловановић, ванредни професор; Александар Петровић, истраживач приправник, др Слободан Митровић, редовни професор и Љиљана Брзаковић, асистент.
- II Техничко решење се упућује Матичном одбору за машинство и индустријски софтвер.

Одлуку доставити:

- Матичном одбору Министарства
- Ауторима
- Архиви



ДЕКАН ФАКУЛТЕТА ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА

*S. Savić*

Др Слободан Савић, редовни професор

бр. 01-11 3424

5.10. 2024 год

КРАГУЈЕВАЦ

Наставно-научном већу Факултета инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу  
Матичном научном одбору за машинство и индустријски софтвер Министарства просвете,  
науке и технолошког развоја

У складу са одредбама Правилника о поступку, начину вредновања и квантитативном  
исказивању научноистраживачких резултата истраживача („Службени гласник РС“, бр.  
24/2016 и 21/2017) подносим

## ЗАХТЕВ

За пријаву техничког решења, под називом „**Уређај за одређивање кинематског  
коэффицијента трења динамички оптерећених контаката**“, које припада категорији **M85**  
– Ново техничко решење у фази реализације.

Аутори техничког решења су: др Бранко Тадић, редовни професор; Др Владимир П.  
Миловановић, ванредни професор; Александар Петровић, истраживач-приправник; Др  
Слободан Митровић, редовни професор; Др , Љиљана Брзаковић, асистент.

У прилогу достављам:

1. Документацију предложеног техничког решења са списком раније прихваћених  
техничких решења за сваког од аутора
2. Рад публикован у међународном часопису „*Tehnički vjesnik - Technical Gazette*“, и  
рад прихваћен за публикавање у међународном часопису „*Romanian Journal of  
Physics*“, којим су верификовани резултати предложеног техничког решења

05.10.2019. године,  
у Крагујевцу

Подносилац захтева

  
др Владимир П. Миловановић ванр. проф.

ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА  
УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

## ТЕХНИЧКО РЕШЕЊЕ

M85 Ново техничко решење у фази реализације

Метода за одређивање кинематског коефицијента  
трења динамички оптерећених контаката

АУТОРИ

Бранко Тадић  
Владимир П. Миловановић  
Александар Петровић  
Слободан Митровић  
Љиљана Брзаковић

## **Врста техничког решења**

M85 – Ново техничко решење у фази реализације

## **Аутори техничког решења**

- Др Бранко Тадић<sup>1</sup>, редовни професор
- Др Владимир П. Миловановић<sup>1</sup>, ванредни професор
- Александар Петровић<sup>2</sup>, истраживач-приправник
- Др Слободан Митровић<sup>1</sup>, редовни професор
- Љиљана Брзаковић<sup>3</sup>, асистент

<sup>1</sup> Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

<sup>2</sup> Институт "Михајло Пупин", Београд

<sup>3</sup> Академија Струковних Студија Шумадија, Одсек Трстеник

## **Назив техничког решења**

- Метода за одређивање кинематског коефицијента трења динамички оптерећених контаката

## **Кључне речи**

- убрзање; енергија; трење; удар

## **Наручилац техничког решења**

- Центар за инжењерски софтвер и динамичка испитивања, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

## **Корисник техничког решења**

- Центар за инжењерски софтвер и динамичка испитивања, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

## **Начин верификације резултата**

- Резултати техничког решења су верификовани објављеним радом у међународном часопису категорије M23 и још једним радом који је прихваћен за штампу у међународном часопису категорије M23.

## **Година када је техничко решење урађено**

- 2019-2022.

## **Начин коришћења техничког решења**

- Уређај и развијена метода се примењују за експериментално одређивање кинематског коефицијента трења динамички оптерећених контаката

## **Ко је прихватио техничко решење**

- Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

## **Област технике на коју се техничко решење односи**

- Трибологија, Контактни проблеми, Експериментална механика

## 1 Листа раније прихваћених техничких решења за сваког од аутора појединачно

### 1.1 Бранко Тадић

[M82] Budak I., **Tadić B.**, Jeremić B., Vukelić Đ., Miljanić D., Todorović P., Hodolić J., Industrijski prototip uređaja za ispitivanje statičke popustljivosti i nosivosti spoja elemenata za stezanje i radnog predmeta, TR-35020, Metalik DOO, Nikšić, Crna Gora, Novi Sad, 2012

[M83] Janko Hodolić, **Branko Tadić**, Đorđe Vukelić, NOVO EKSPERIMENTALNO POSTROJENJE ZA SAVIJANJE TANKOZIDNIH CEVI PRIMENOM TOPLOTE GENERISANE TRENJEM, ALKA DOO, Kragujevac, Republika Srbija, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, Mašinski fakultet u Kragujevcu, 2010

[M83] **Tadić B.**, Babić, M., Mitrović, S., Lazić, M., Vukelić, Đ., Univerzalni tribometar, TR-04/2010, Laboratorija za tribologiju Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

[M83] **Branko Tadić**, Đorđe Vukelić, Petar Todorović, Branislav Jeremić, Ivan Mačužić, Bojan Bogdanović, Novo eksperimentalno postrojenje za određivanje dinamičke popustljivosti steznih i oslonih elemenata pribora, TR-78/2013, GOMMA LINE, Kragujevac, 2013

[M84] Bobić I., Babić M., Mitrović S., Vencl A., Bobić B., **Tadić B.**, Keramički lonac elektrootporne peći za izvođenje kompokasting postupka, TR-08/2010, Preduzeće „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, INN „Vinča“, 2008

[M84] Bobić I., Bobić B., Babić M., Mitrović S., Vencl A., **Tadić B.**, Električna metoda za kontrolu reološkog nanošenja poluočvrstih rastopa osnovnih legura I kompozita pri izvođenju reo/kompokasting postupka, TR-07/2010, Preduzeće „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, INN „Vinča“, 2009

[M84] Đorđe Vukelić, **Branko Tadić**, Janko Hodolić, Jelena Mitrović, Nenad Simeunović, Specijalni modularni sistem steznih pribora za obradni centar HURCO-500, IMT, Boljevac, Republika Srbija, FTN Novi Sad, MF Kragujevac, 2010

[M84] **Branko Tadić**, Saša Randelović, Petar Todorović, Đorđe Vukelić, Vladimir Kočović, Bojan Bogdanović, Marija Jeremić, Kruti alat namenjen za završnu obradu metala kotrljanjem kuglice, TR-88/2015, Metalik d. o. o., Trebješka 6/26, Nikšić, Crna Gora, Nikšić, Crna Gora, 2015

[M84] Saša Randelović, Đorđe Vukelić, Petar Todorović, Vladimir Kočović, Bojan Bogdanović, Lozica Ivanović, **Branko Tadić**, Optimizacija procesa završne obrade kotrljanjem kuglice po površini predmeta obrade na osnovu dubine penetracije kuglice u materijal predmeta obrade, TR-89/2015, Metalik d. o. o., Trebješka 6/26, Nikšić, Crna Gora, Nikšić, Crna Gora, 2015

[M85] **Tadić B.**, Babić M., Mitrović S., Todorović P, Bobić I., Zajednički merni sistem za univerzalni tribometar-tribološki merni centar, TR-05/2010, Laboratorija za tribologiju Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

[M85] **Tadić B.**, Marjanović N., Vukelić Đ., Galović S., Uređaj za ostvarivanje ekstremno visokih pritisaka, TR-16/2010, Laboratorija za obradu metala rezanjem, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

### 1.2 Владимир П. Миловановић

[M83] Miroslav Živković, Aleksandar Dišić, Radovan Slavković, Miroslav Ravlić, Rodoljub Vujanac, Dragan Rakić, Milan Blagojević, **Vladimir Milovanović**, Uređaj za ispitivanje materijala pri velikim brzinama deformacije - Zatezni Hopkinsonov štap, TR-70/2012, Univerzitet u Kragujevcu, Fakultet inženjerskih nauka, Kragujevac, 2012

[M85] Rodoljub Vujanac, Radovan Slavković, Miroslav Živković, Nenad Marjanović, Snežana Vulović, **Vladimir Milovanović**, Nova metoda za projektovanje i proračun skladišnih sistema, TR-53/2010, Ministarstvo za nauku Republike Srbije, Privatno preduzeće „IC“ Inženjering d.o.o., Privatno preduzeće „Milanović Inženjering“ d.o.o., DP Zastava Mašine, Kragujevac, Srbija, 2010

**1.3 Александар Петровић**

-

**1.4 Слободан Митровић**

[M83] Tadić B., Babić, M., **Mitrović, S.**, Lazić, M., Vukelić, Đ., Univerzalni tribometar, TR-04/2010, Laboratorija za tribologiju Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

[M84] Ilija Bobić, Miroslav Babić, **Slobodan Mitrović**, Aleksandar Vencl, Biljana Bobić, Tehnologija dobijanja kompozitnih materijala sa osnovom od ZA27 legure uz dodatak čestica  $Al_2O_3$ , TR-09/2010, „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, Kragujevac, 2008

[M84] Bobić I., Babić M., **Mitrović S.**, Vencl A., Bobić B., Tadić B., Keramički lonac elektrootporne peći za izvođenje kompokasting postupka, TR-08/2010, Preduzeće „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, Kragujevac 2008

[M84] Ilija Bobić, Aleksandar Vencl, Miroslav Babić, **Slobodan Mitrović**, Biljana Bović, Tehnološki postupak dobijanja kompozita sa osnovom od  $Al7Si0,03Mg$  (A356 legure uz dodatak sitnih čestica  $Al_2O_3$ , TR-06/2010, „Petar Drapšin“, Mladenovac, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, Kragujevac, 2009

[M84] Bobić I., Bobić B., Babić M., **Mitrović S.**, Vencl A., Tadić B., Električna metoda za kontrolu reološkog nanošenja poluočvrstih rastopa osnovnih legura I kompozita pri izvođenju reo/komnokasting postupka, TR 07/2010, Preduzeće „RAR“, Batajnica, Laboratorija za materijale, INN „Vinča“, INN „Vinča“, 2009

[M85] M. Erić, M. Pavlović, S. Arsovski, M. Stefanović, D. Tadić, M. Lazić, S. Grubor, **S. Mitrović**, Softver za reinženjering tehnoloških procesa, 04-2800, Centar za revitalizaciju industrijskih sistema, MF Kragujevac, Kragujevac, 2008

[M85] Tadić B., Babić M., **Mitrović S.**, Todorović P, Bobić I., Zajednički merni sistem za univerzalni tribometar-tribološki merni centar, TR-05/2010, Laboratorija za tribologiju Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, 2010

[M85] B. Nedić, **S. Mitrović**, Softver za analizu signala i proračun parametara topografije površina, TR-81/2014, Laboratorija za obradu metala i tribologiju, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, Kragujevac, 2014

**1.5 Љиљана Брзаковић**

-

## 2 Опис проблема који се решава техничким решењем

Техничко решење категорије М85, Метода за одређивање кинематског коефицијента трења динамички оптерећених контаката, припада области научно-техничких услуга, трибологији као интердисциплинарној науци и технологији, посвећеној интеракцији контактних површина при релативном кретању.

Прва публикована теоријска истраживања у вези са одређивањем кинематског коефицијента трења преко динамичке једначине кретања тела низ стрму раван објавио је *Euler* 1748. године. Слободно се може рећи да ова метода, нажалост, ни после 274 године у сфери науке, а посебно у сфери технологије пројектовања савремене трибо-дијагностичке опреме, није доживела ширу експанзију. У сфери науке, мањи број публикованих истраживања (претежно у часописима који покривају област едукације из области физике) базира се на *Euler*-овим истраживањима или је тангентан са њима.

Метода одређивања кинематског коефицијента трења на бази диференцијалних једначина кретања је у суштини везана за мерење три основне јединице СИ система мера (маса, времена и дужине), што у теоријском, експерименталном и технолошком смислу представља веома значајну предност.

Проблем који се решава предложеним техничким решењем припадаја трибологији као интердисциплинарној науци и технологији која се бави интеракцијом контактних површина при релативном кретању једног тела у односу на друго тело у присуству оптерећења зоне контакта. Оптерећења контакта, са аспекта нивоа оптерећења, врсте оптерећења (статичко, динамичко) и услови у којима се остварује контакт (присуство мазива, повећане температуре, агресивна средина, ...) могу бити различити.

Развој методе представља, у суштини развој уређаја за одређивање кинематског коефицијента трења. Развој методе подразумева: развој теоријске базе методе, развој прототипа уређаја, развој софтвера и експерименталну верификацију методе. Добијени резултати треба да укажу на предности методе и области могуће примене предложене методе и уређаја у односу на постојеће, у свету развијене методе одређивања кинематског коефицијента трења.

Кинематски коефицијент трења се, генерално посматрано, у свим условима оптерећења контакта, може одредити другачијим методама у односу на постојеће методе које се заснивају на мерењу нивоа оптерећења контакта и мерењу силе трења. Метода која се предлаже заснива се на одређивање кинематског коефицијента трења преко динамичке једначине кретања тела при обртању око непомичне осе. При чему активна сила на обртно тело делује само у тренутку иницирања кретања.

Иницирање кретања (обртања) може се извести мануелно (ручно), импулсом силе удара, преко електромагнетне спојнице или на другачији начин. Иницирање кретања активном силом има за циљ да у систему кретања акумулира одређену количину енергије и да систем на бази акумулиране енергије настави кретање и после престанка дејства активне силе која је иницирала кретање, пролазећи кроз читав спектар брзина, од максималне инициране брзине па до нулте вредности брзине обртања у тренутку заустављања кретања.

Идеја предложене методе своди се на чињеницу да се познавањем (праћењем и мерењем) промене угла обртања у функцији времена, преко диференцијалне једначине кретања тела при обртању око непомичне осе, могу одредити тренутне вредности кинематског коефицијента трења у читавом спектру брзина обртања кроз које тело пролази од тренутка иницирања кретања до тренутка престанка обртања.

## 3 Стање решености проблема код нас

Колико је ауторима познато, у Србији не постоји ниједна друга група која се бави развојем метода за одређивање кинематског коефицијента трења како у машинству тако и у области трибологије.

#### 4 Стање решености проблема у свету – приказ и анализа постојећих решења

Прво објављено теоријско истраживање везано за одређивање кинетичког коефицијента трења коришћењем динамичких једначина кретања за тело које се креће надоле низ стрму раван објавио је *Euler* 1748. године. Радови засновани на (или повезани са) *Euler*-овим истраживањима углавном се објављују у часописима који се тичу образовања из области физике. Примере таквих истраживања представљају радови у којима се на основу анализе кретања тела по стрмој равни које полазе од једначина кретања и успостављених односа између коефицијента трења котрљања и убрзања [1], [2] или прате нелинеарне промене коефицијента трења котрљања као функцију „губитака“ енергије [3].

Поједини аутори [4] се баве динамиком ротационог кретања, развијајући једноставан метод за експериментално одређивање губитака због трења. Примењујући односе између трансляторног и ротационог кретања, указују на линеарну зависност губитака услед трења, тј момента трења, на угаону брзину. Публикација [5] представља примену једноставног лабораторијског уређаја за проучавање ефекта трења између два диска који долазе у контакт, од којих је један покретан а други не. Кинематски коефицијент трења одређен је на основу неколико основних параметара, наиме, закључено је да зависи од полупречника стационарног диска, убрзања земљине теже, и угаоног убрзања другог диска.

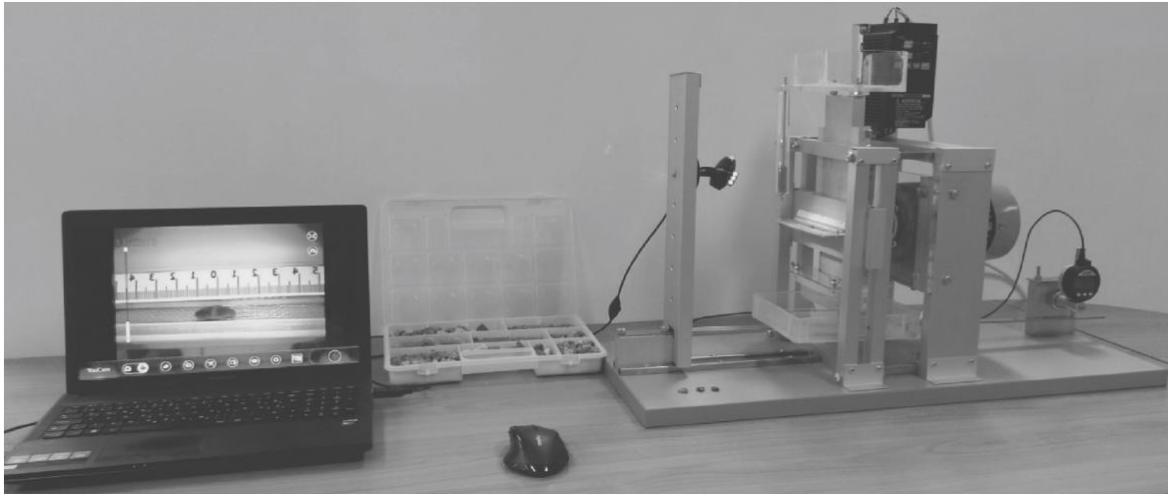
Постоје различите експерименталне технике за испитивање динамичког понашања трења између два материјала у зависности од брзине клизања. Да би се постигле веће брзине и већи нормални притисци од оних који се виде у апарату на *pin-on-disk*, различите методе су коришћене за тестове динамичког трења. У овој студији је представљена нова експериментална метода која користи *Kolski* затезну шипку за одређивање динамичког коефицијента трења између металних материјала. Трибофрикциони уређај је пажљиво дизајниран да олакша клизање на интерфејсима када је подвргнут динамичком затезном оптерећењу. Као начин да се процени нова експериментална методологија, одређен је коефицијент трења између челика и алуминијума са две различите храпавости при брзини клизања од 8 m/s. Метода представљена у овој студији показала се као поуздан и поновљив начин мерења динамичког коефицијента трења између металних материјала. Примарна предност ове методе у односу на друге у литератури је у томе што су потребне минималне модификације постојећих објеката *Kolski* затезних шипки [6].

Резултати истраживања дати у оквиру литературног навода [7] представљају оптималну анализу за тачну процену динамичког коефицијента трења помоћу трибометарског уређаја. Тродимензионални модел коначних елемената (FEM) је развијен да би се боље разумео тестни *setup* и придружени метод за прецизно дефинисање коефицијента трења под динамичким оптерећењем. Аспект експерименталне методологије која се тренутно користи за дефинисање закона динамичког трења и његови главни недостаци су идентификовани и дискутовани. На основу FEM анализе, предложена је нова методологија за процену динамичког трења увођењем концепта фактора корекције који се може користити за корекцију старих експерименталних података.

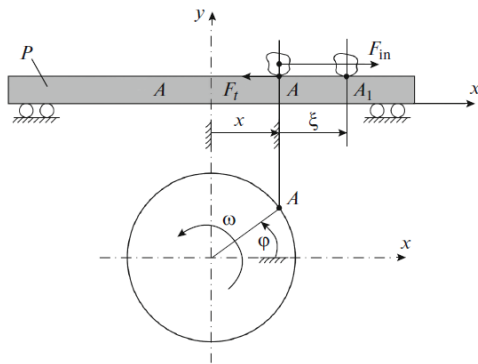
У студији [8] разматрано је испитивање и упоређивање неколико модела сила трења који се баве различитим феноменима трења у контексту динамике вишестелесног система. У овој студији је описан укупно 21 различит модел силе трења и њихове основне физичке и рачунске карактеристике су размотрене и упоређене у детаље. Из добијених резултата може се констатовати да и избор модела силе трења и укључених параметара трења могу значајно утицати на симулирани/моделовани динамички одзив механичких система са трењем. Ова студија илуструје да за правилно моделирање, анализу и симулацију понашања трења у системима са више тела, мора се усвојити одговарајући модел трења када је значајна природа расипања енергије и њена квантификација, онда се препоручују динамички модели [8].

Један од ретких радова који не базира на стрмој равни, већ на *Euler*-овој идеји да се преко диференцијалне једначине кретања одреди кинематски коефицијент трења објављен је у тематском часопису из области трибологије [9]. На Сликама 1. (а-в) приказан је реализовани уређај широког спектра могућности који симулира рад вибрационе платформе (1.а), механички модел распореда сила на вибрационој платформи (1.б) и фотографски приказ грануле песка на ситу.

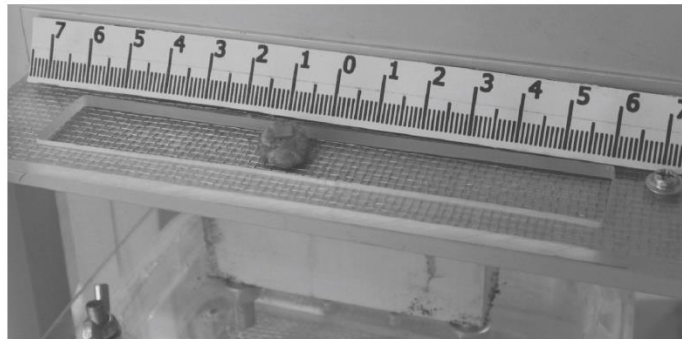




(a)



(б)



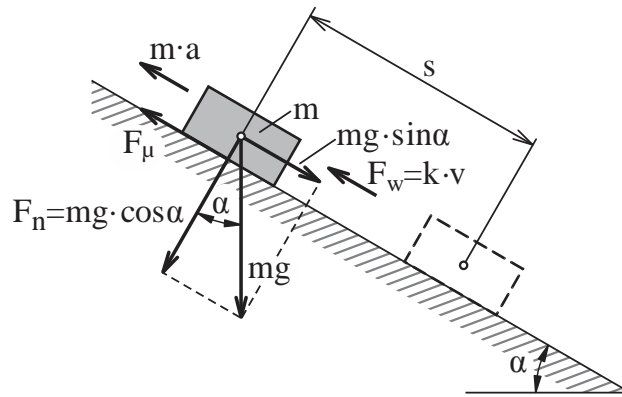
(в)

**Слика 1.** Реализовани уређај широког спектра могућности који симулира рад вибрационе платформе (а), механички модел распореда сила на вибрационој платформи (б) и фотографски приказ грануле песка на ситу (в)

На основу теоријских разматрања изложених у литературном наводу [9] коефицијент трења је одређен на основу диференцијалне једначине кретања грануле песка по ситу. У наведеном раду изложен је веома комплексан теоријски модел који математички презентира услове динамичке равнотеже грануле песка и ефекте преносног и релативног кретања на промену убрзања и положаја (координате) грануле песка у функцији времена.

Кинематски коефицијент трења се, генерално посматрано, у свим условима оптерећења контакта, може одредити потпуно другачијим методама у односу на постојеће методе које се заснивају на мерењу нивоа оптерећења контакта и мерењу силе трења. Прва публикована теоријска истраживања везана за одређивање кинематског коефицијента трења преко динамичке једначине кретања тела низ стрму раван објавио је *Euler* 1748. године [10].

Пратећи *Euler*-ову идеју, велики број трибометара намењених за одређивање кинематског коефицијента трења развијени су у оквиру Центра за Ревитализација индустријских система на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. Резултати истраживања који представљају једну од ретких публикованих експерименталних верификација *Euler*-ове методе за одређивање кинематског коефицијента трења представљени су и публикацији [11]. У теоријском и експерименталном смислу група аутора [11], [12] надградила је *Euler*-ов теоријски модел додавањем реално постојеће силе отпора ваздуха која се, са аспекта грешака мерења мора узети у обзир у условима кретања тела низ стрму раван при већим брзинама кретања и/или малим вредностима коефицијента. Основе надграђеног *Euler*-овог теоријског модела базирају на мерењу времена које је потребно телу масе  $m$  да низ стрму раван пређе пут дужине  $s$ , што је илустровано шемом датом датом на Слици 2.



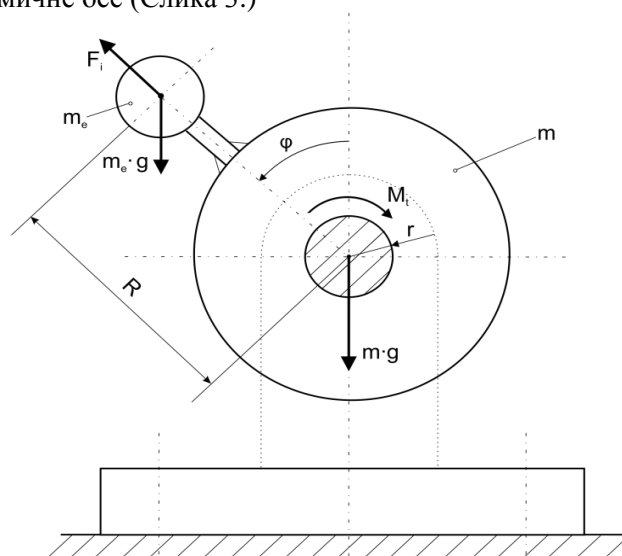
Слика 2. Кретање тела низ стрму раван – анализа сила [11]

У оквиру даљег развоја *Euler*-ове методе и резултата публикованих истраживања [12] показано је да се овем методом могу квантификовати енергетски губици настали услед трења и несавршености геометрије контактних парова реда величине  $0,01 J$ .

## 5 Суштина техничког решења

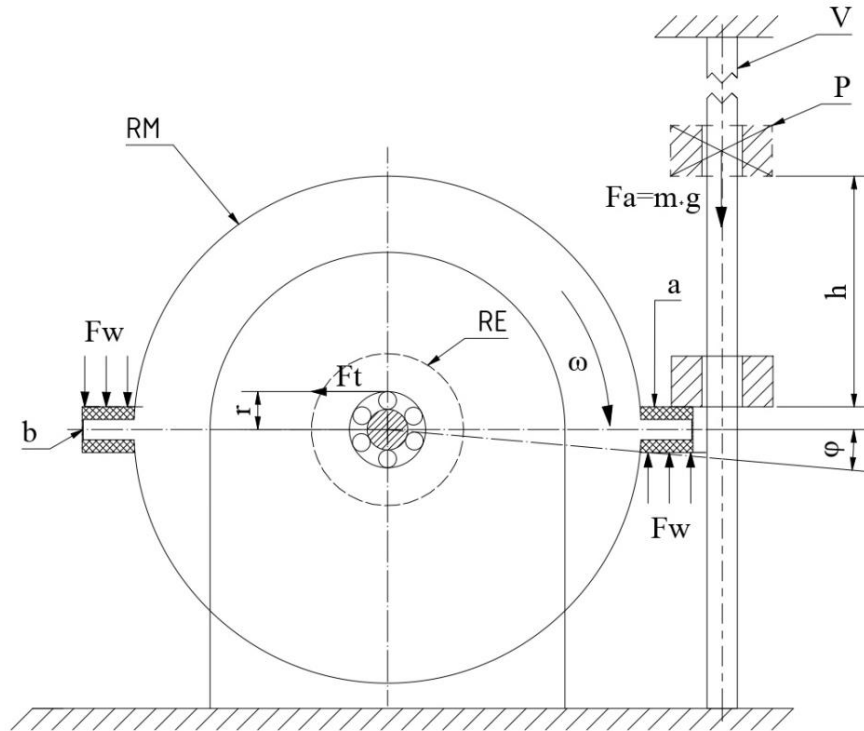
Суштина предложене методе своди се на чињеницу да се познавањем (праћењем и мерењем) промене угла обртања у функцији времена, преко диференцијалне једначине кретања тела при обртању око непомичне осе, могу одредити тренутне вредности кинематског коефицијента трења у читавом спектру брзина обртања кроз које тело пролази од тренутка иницирања кретања до тренутка престанка обртања. Предложеном методом разматрају се само два од већег броја могућих случајева иницирања кретања и постизања динамичког оптерећења клизних или котрљајних контактних парова.

**Први разматрани случај** се односи на мануелно (ручно) иницирање кретања. У овом случају разматра се контакт, типа "рукавац -лежај". Статичку и динамичку компоненту жељеног оптерећења контакта, обезбеђују масе тела, концентрично и ексцентрично распоређене у односу на осу обртања. Ако се експерименталним путем одреди зависност промене угла обртања тела у функцији времена, онда је на основу динамичке једначине кретања могуће одредити тренутне вредности коефицијента трења у читавом периоду времена, од иницирања кретања до тренутка престанка обртања тела. Метода одређивања кинематског коефицијента трења у динамичким условима оптерећења контакта, у општем случају, базира је на диференцијалној једначини кретања тела око непомичне осе (Слика 3.)



Слика 3. Шематски приказ распореда активних и отпорних сила при обртању тела око непомичне осе

**Други разматрани случај** односи се на могућност одређивања кинематског коефицијента трења котрљања у условима иницирања обртног кретања динамичком ударном силом (Слика 4.). Након иницирања кретања и престанка дејства спољашње силе (Ударног импулса) кретање се наставља, при чему оптерећени лежај (зона лежаја у којој дејствују силе отпора трења) пролази читав спектар брзина, од максималне брзине у тренутку иницирања кретања, до њене нулте вредности при заустављању кретања.



Слика 4. Иницирање кретања (обртања) ударном импулсном силом

Кретање тела се описује диференцијалном једначином

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum M_i = M_a + M_t + M_w \quad (1)$$

где је  $I$  - масени момент инерције,  $\omega$  - угаона брзина обртања,  $M_a$  - активни момент којим је иницирано кретање,  $M_t$  - резултујући момент интегралног збира елементарних отпорних момената трења по површини контакта,  $M_w$  - резултујући момент отпора ваздуха.

Ако се експерименталним путем одреди зависност промене угла обртања тела у функцији времена, онда је на основу динамичке једначине кретања могуће одредити тренутне вредности коефицијента трења у читавом периоду од иницирања кретања до тренутка престанка обртања тела.

Занемаривањем отпора ваздуха као величине нижег реда и посматрањем периода кретања тела након иницирања кретања, диференцијална једначина 1 своди се на облик

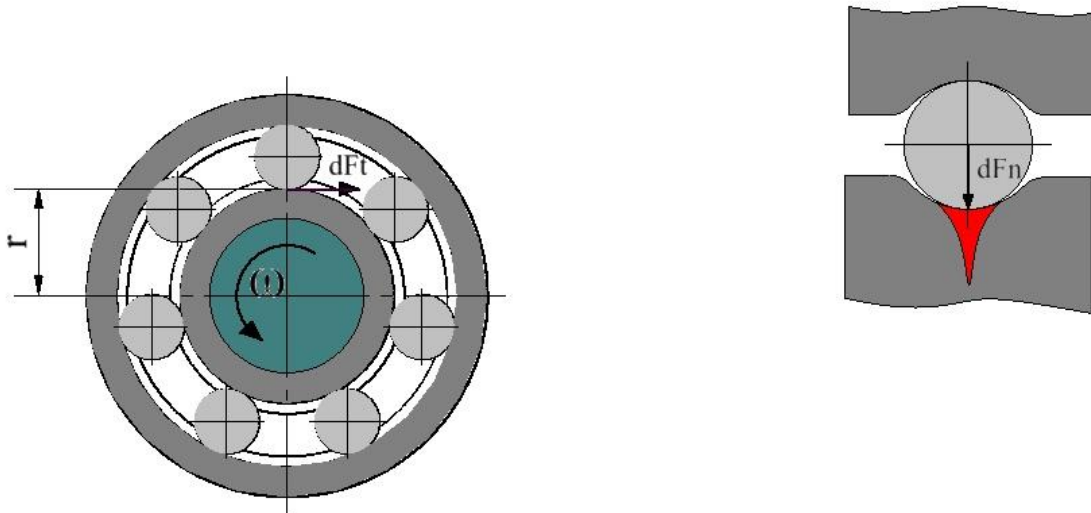
$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum M_i = M_t = F_t r \quad (M_a = 0, M_w = 0) \quad (2)$$

где је  $M_t$  - момент трења,  $F_t$  - резултујућа сила трења у контакту,  $r$  - радијус на којем делују елементарне силе трења (Слика 4.).

Резултујући момент трења је једина непозната величина у диференцијалној једначини кретања 2 и на основу Слика 5. одређена је изразом:

$$M_t = \iint r dF_t = F_t r \quad (3)$$

који укупну силу трења дефинише као интегрални збир елементарних сила трења по површини контакта.



Слика 5. Шематски приказ распореда отпорних сила трења клизања или трења котрљања при обртању тела око непомичне осе

На основу шеме дате на Сlici 3. сила трења  $F_t$  се може дефинисати у функцији коефицијента трења  $\mu$ , компоненте силе статичког отерећења контакта  $F_s$  и компоненте силе динамичког оптерећења контакта  $F_d$  преко израза

$$\begin{aligned} F_t &= \mu F_N = \mu [(m + m_e)g - m_e R \omega^2 \cos \varphi] \\ F_s &= (m + m_e)g \\ F_d &= m_e R \omega^2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

Заменом вредности силе трења из једначине 4 у једначину 2. добија се једначина:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \mu [(m + m_e)g - m_e R \omega^2 \cos \varphi] \quad (5)$$

Из које следи коначни израз за прорачун вредности кинематског коефицијента трења при динамичком оптерећењу контакта у функцији угла обртања и угаоне брзине

$$\mu = \frac{I \frac{d\omega}{dt}}{(m + m_e)g - m_e R \omega^2 \cos \varphi} \quad (6)$$

Угаона брзина  $\omega$  и угаоно убрзање  $\varepsilon$  могу се, на основу познатих теоријских израза одредити нумеричким диференцирањем, па за довољно мале вредности прираштаја важе једнакости:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \quad (8)$$

Из наведених теоријских разматрања произилази да експериментално одређивање зависности промене угла обртања тела у функцији времена, омогућава одређивање вредности кинематског коефицијента трења при динамичком оптерећењу контакта у читавом периоду времена, од иницирања кретања до тренутка престанка обртања тела. Методологија одређивања кинематског коефицијента трења, која се предлаже овим техничким решењем, нема суштинских ограничења. Коефицијент трења се може

одредити у било којим условима остваривања контакта. Могу се испитивати клизни и котрљајни парови различитих трболошких карактеристика, при чему се ниво симулираног оптерећења, распон брзина клизања или котрљања, могу кретати у широком распону. При чему се овом методом, много једноставније, у односу на конвенционалне методе, испитивања могу вршити при симулацији различитих нивоа температурама контакта, и уопште, различитих услова који ближе дефинишу рад реалних трибомеханичких система (агресивна средина, систем подмазивања,...).

## 6 Детаљан опис техничког решења (укључујући и пратеће илустрације и техничке цртеже)

### 6.1 Пројектовање првог прототипа уређаја

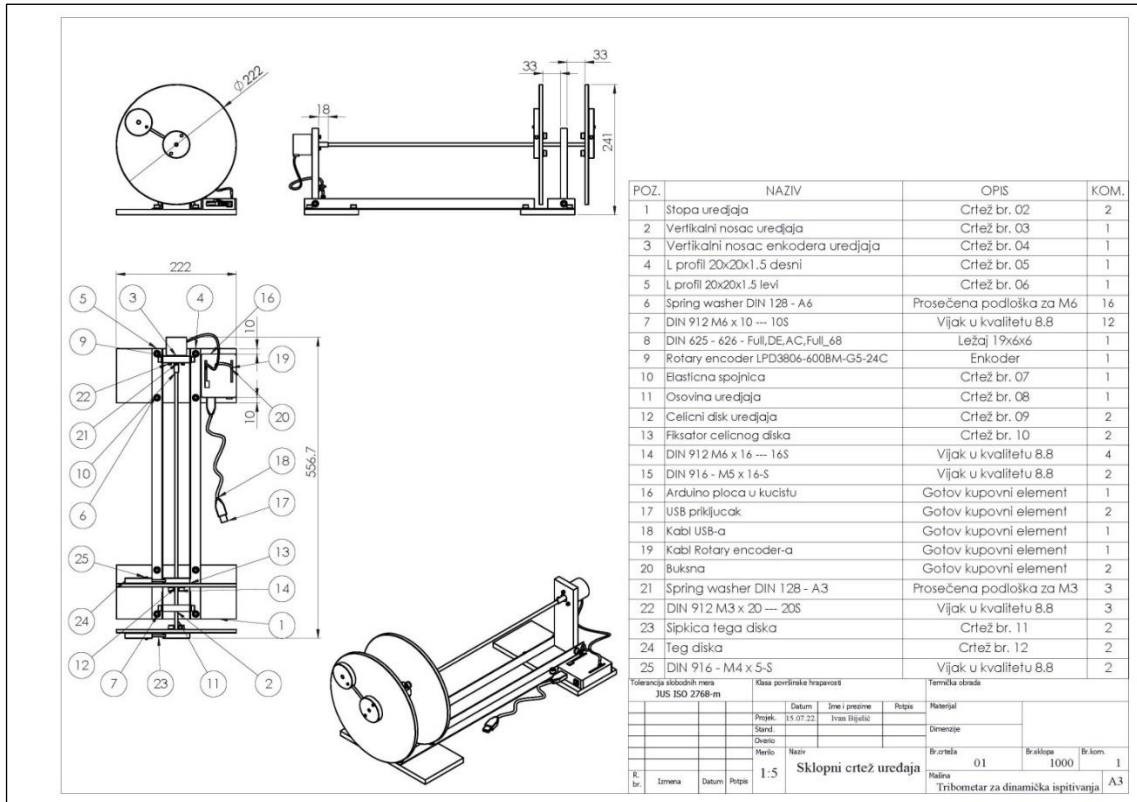
Први прототип уређаја реализован је за потребе експерименталног одређивања кинематског коефицијента трења у условима динамички оптерећених контаката. При чему се динамичка компонента оптерећења обезбеђује преко ексцентричних маса а иницирање кретања врши ручно. Уређај је компонован из 25 елемената-позиција (Табела 1.) од којих је 9 специјално израђених елемената, 9 стандардних механичких елемената а 7 елемената чине стандардне мерне и електронске компоненте. На Слици 6. приказан је склопни цртеж уређаја са спецификацијом свих елемената уређаја.

**Табела 1.** Спецификација специјалних, стандардних, мерних и електронских компоненти реализованог уређаја са којим се врши ручно иницирање кретања

ПОЗ.	НАЗИВ	ОПИС	КОМ.
1	Стопа уређаја	Цртеж бр. 02	2
2	Вертикални носач уређаја	Цртеж бр. 03	1
3	Вертикални носач енкодера уређаја	Цртеж бр. 04	1
4	L профил 20x20x1.5 десни	Цртеж бр. 05	1
5	L профил 20x20x1.5 леви	Цртеж бр. 06	1
6	Spring washer DIN 128 – А6	Просечена подлошка за М6	16
7	DIN 912 М6 x 10 – 10S	Вијак у квалитету 8.8	12
8	DIN 625 – 626 – Full, DE, AC, Full_68	Лежај 19x6x6	1
9	Rotary encoder LPD3806-600BM-G5-24C	Енкодер	1
10	Еластична спојница	Цртеж бр. 07	1
11	Осовина уређаја	Цртеж бр. 08	1
12	Челични диск уређаја	Цртеж бр. 09	2
13	Фиксатор челичног диска	Цртеж бр. 10	2
14	DIN 912 М6 x 16 – 16S	Вијак у квалитету 8.8	4
15	DIN 912 М5 x 16 – S	Вијак у квалитету 8.8	2
16	Ардуино плоча у кућишту	Готов куповни елемент	1
17	USB прикључак	Готов куповни елемент	2
18	Кабл USB-а	Готов куповни елемент	1
19	Кабл Rotary encoder-а	Готов куповни елемент	1
20	Буксна	Готов куповни елемент	2
21	Spring washer DIN 128 – А3	Просечена подлошка за М3	3
22	DIN 912 М3 x 20 – 20S	Вијак у квалитету 8.8	3
23	Шипкица тега диска	Цртеж бр. 11	2
24	Тег диска	Цртеж бр. 12	2
25	DIN 916 – М4 x 5-S	Вијак у квалитету 8.8	2

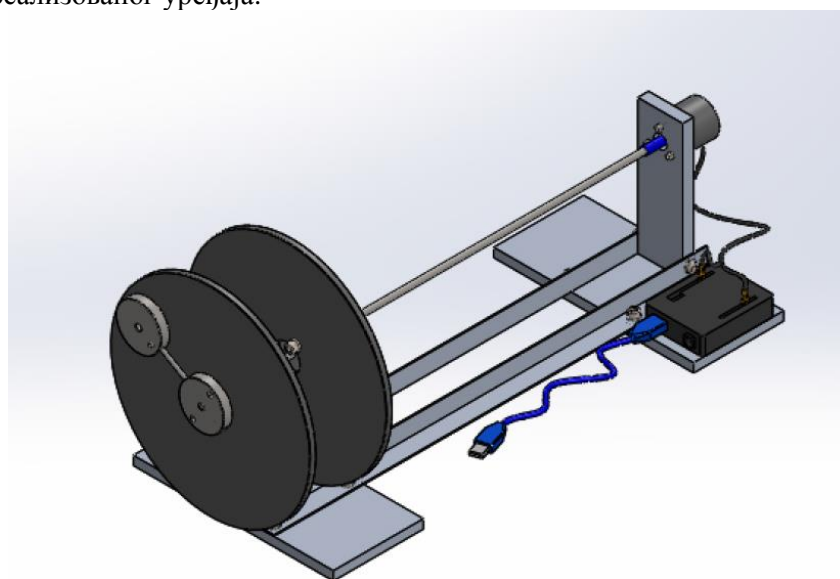
Иницирање кретања врши се ручно преко ексцентра челичног диска (позиција 13.). Ручно инициран импулс преноси кретање (обртање) преко осовине (Позиција 11.) и еластичне спојнице (Позиција 10.) до ротационог енкодера који је једина мерна компонента уређаја. Оптерећени

лежај (Позиција 8.) смештен је у носачу уређаја (Позиција 2.) и симетрично центриран у односу на попречну осу носача тј. лежаја упресованог у носачу, и оптерећен гравитационим силама масама два диска (Позиција 12.). С обзиром да су на дисковима (Позиција 12.) причвршћена оба ексцентрира (позиција 13.) под истим углом, произилази да испитивани лежај прима комплетно статичко и динамичко оптерећење.

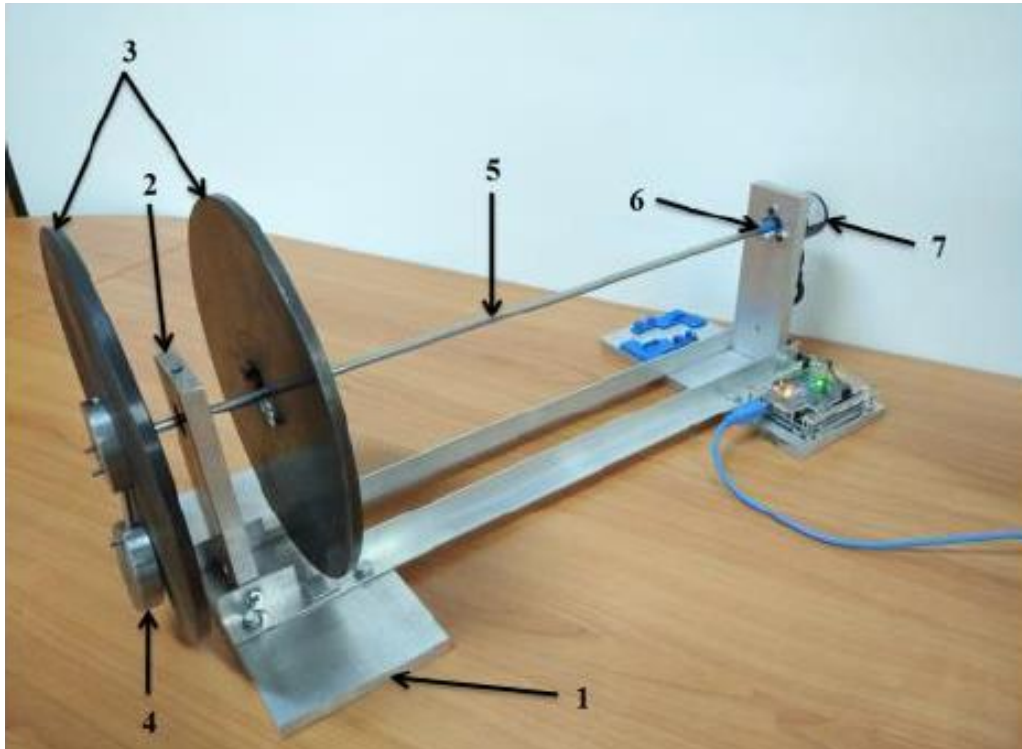


Слика 6. Скlopни цртеж реализованог уређаја са спецификацијом специјалних и стандардних елемената

На Слици 7. дат је изометријски приказ CAD модела уређаја док је на Слици 8. приказана фотографија реализованог уређаја.



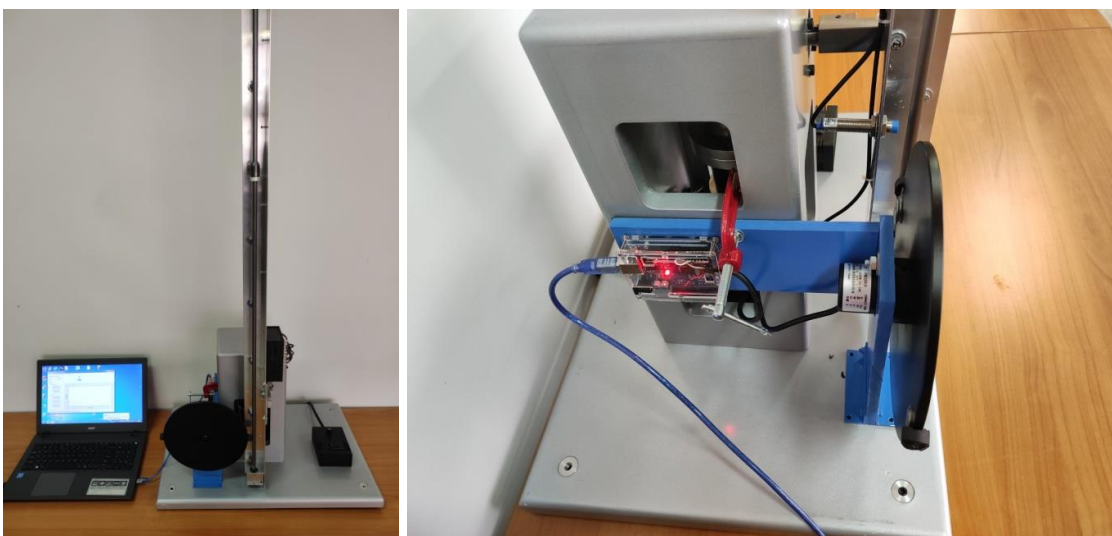
Слика 7. Изометријски приказ CAD модела уређаја



Слика 8. Фотографски приказ реализованог уређаја

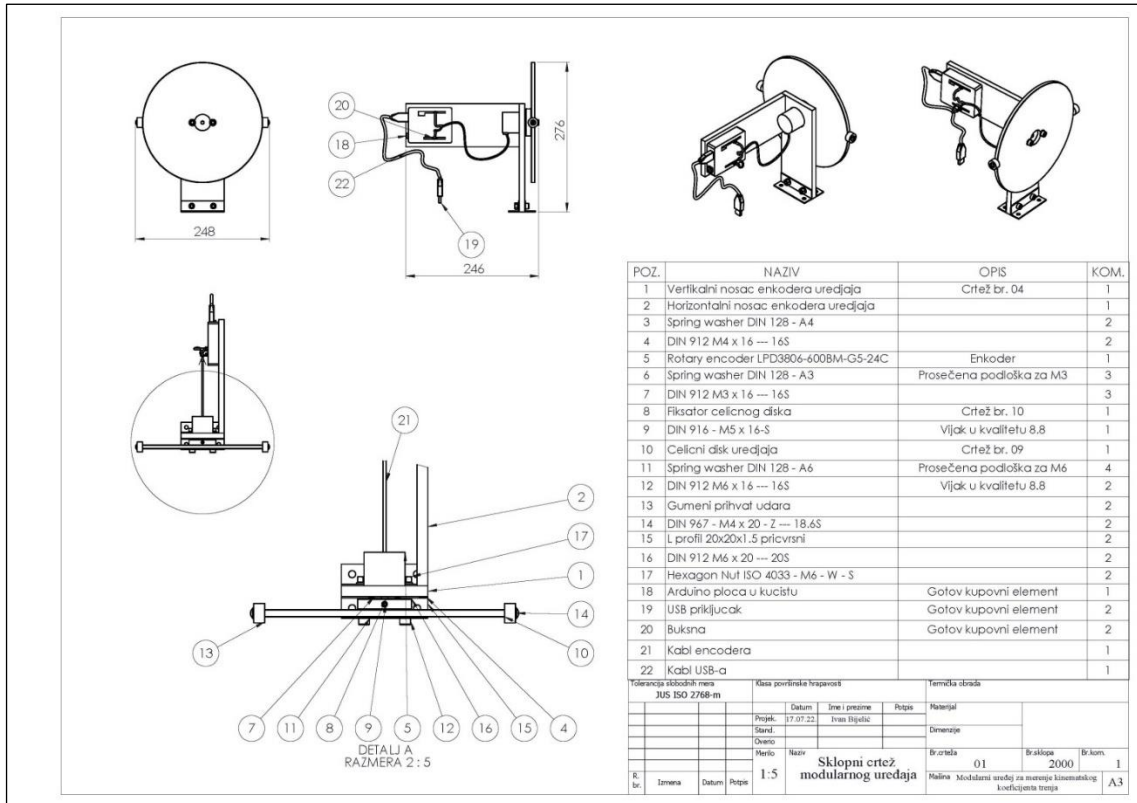
### 6.2 Пројектовање другог прототипа уређаја

Други прототип уређаја реализован је за потребе експерименталног одређивања кинематског коефицијента трења у условима израженог динамичког оптерећења контаката при иницирању кретања. У овом случају иницирање кретања врши се импulsном силом удара. Уређај је креиран из подскопа уређаја веома сличном првом прототипу уређаја. Комбиновањем постојећег уређаја и развојем новог подскопа формирана је веома функционална експериментална целина (Слика 9.), што је великим делом разјашњено у оквиру поглавља теоријских разматрања (Слика 4.). Уређај функционише по идентичном принципу као и претходно описани уређај. У овом случају нема ексцентричних маса које стварају динамичку компоненту оптерећења. Код овог уређаја константну масу побуђује импулс ударне силе, а мерни систем квантификује период трајања импулса удара.



Слика 9. Фотографски приказ функционалне експерименталне целине креиране из развијеног подскопа уређаја и постојећег уређаја

На Слици 10. приказан је склопни цртеж развијеног уређаја - подскопа са спецификацијом свих елемената уређаја. Уређај је компонован из 22 елемената-позиција (Табела 2.) од којих је 6 специјално израђених елемената, 9 стандардних механичких елемената и 7 елемената чине стандардне мерне и електронске компоненте. CAD модел развијеног уређаја приказан је на Слици 11.

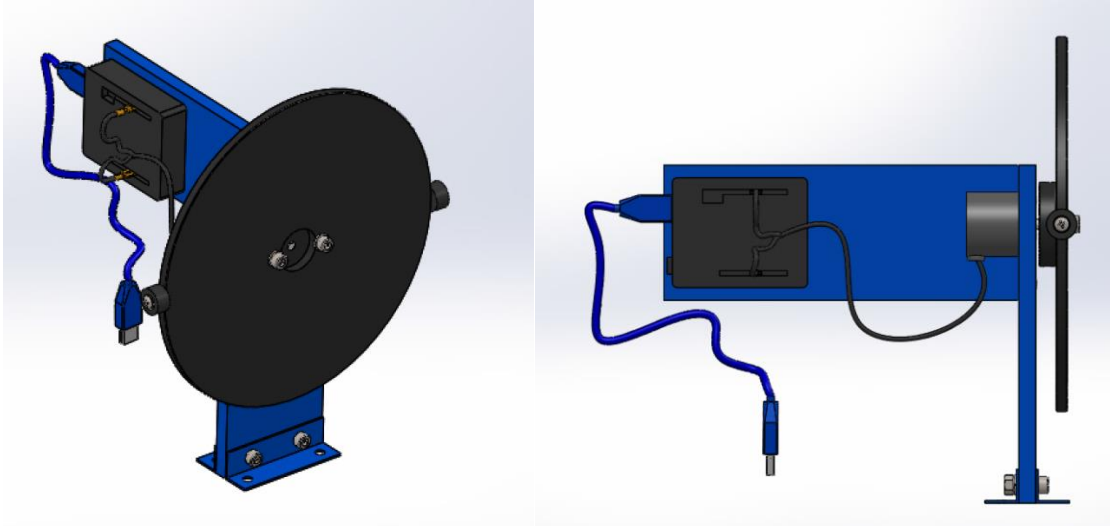


Слика 10. Склопни цртеж развијеног уређаја (Подскопа) са спецификацијом свих специјално развијених и стандардних елемената уређаја. Фотографски приказ реализованог уређаја

Табела 2. Спецификација специјалних, стандарних, мерних и електронских компоненти реализованог уређаја са којим се врши ручно иницирање кретања импулсном силом удара

ПОЗ.	НАЗИВ	ОПИС	КОМ.
1	Вертикални носач енкодера уређаја	Цртеж бр. 04	1
2	Хоризонтални носач енкодера уређаја		1
3	Spring washer DIN 128 – A4		2
4	DIN 912 M4 x 16 – 16S		2
5	Rotary encoder LPD3806-600BM-G5-24C	Енкодер	1
6	Spring washer DIN 128 – A3	Просечена подлошка за M3	3
7	DIN 912 M3 x 16 – 16S		3
8	Фиксатор челичног диска	Цртеж бр. 10	1
9	DIN 912 M5 x 16 – S	Вијак у квалитету 8.8	1
10	Челични диск уређаја	Цртеж бр. 09	1
11	Spring washer DIN 128 – A6	Просечена подлошка за M6	4
12	DIN 912 M6 x 16 – 16S	Вијак у квалитету 8.8	2
13	Гумени прихват удара		2
14	DIN 967 M4 x 20 – Z – 18.6S		2
15	L профил 20 x 20 x 1.5 причврсни		2
16	DIN 912 M6 x 20 – 20S		2
17	Hexagon Nut ISO 4033 – M6 – W – S		2
18	Ардуино плоча у кућишту	Готов куповни елемент	1
19	USB прикључак	Готов куповни елемент	2
20	Буксна	Готов куповни елемент	2
21	Кабл енкодера		1
22	Кабл USB-а		1





Слика 11. Приказ CAD модела реализованог уређаја

### 6.3 Развој наменског софтвера

Читав мерни систем уређаја своди се на ротациони енкодер који у току једног обртаја, преко броја импулса, може квантификовати 360, 640 или више различитих промена угла у времену. У оквиру теоријског дела показано је да се преко низа нумеричких вредности прираштаја угла у времену могу одредити нумерички низови везани за промене угаоних брзина, угаоних убрзања, као и нумерички низови везани за промене коефицијента трења.

Наменски софтвер треба, посредством ардуино електронике, да омогући добијање и обраду нумеричких вредност поменутих низова промене угла, угаоне брзине, угаоног убрзања и коефицијента трења у функцији услова оптерећења контаката.

На Слици 12. приказан. алгоритам тока софтверске подршке мерном систему уређаја. Шемом на Слици 13. приказан је алгоритамски ток везан за креирање извештаја и могуће излазне резултате које програм нуди.

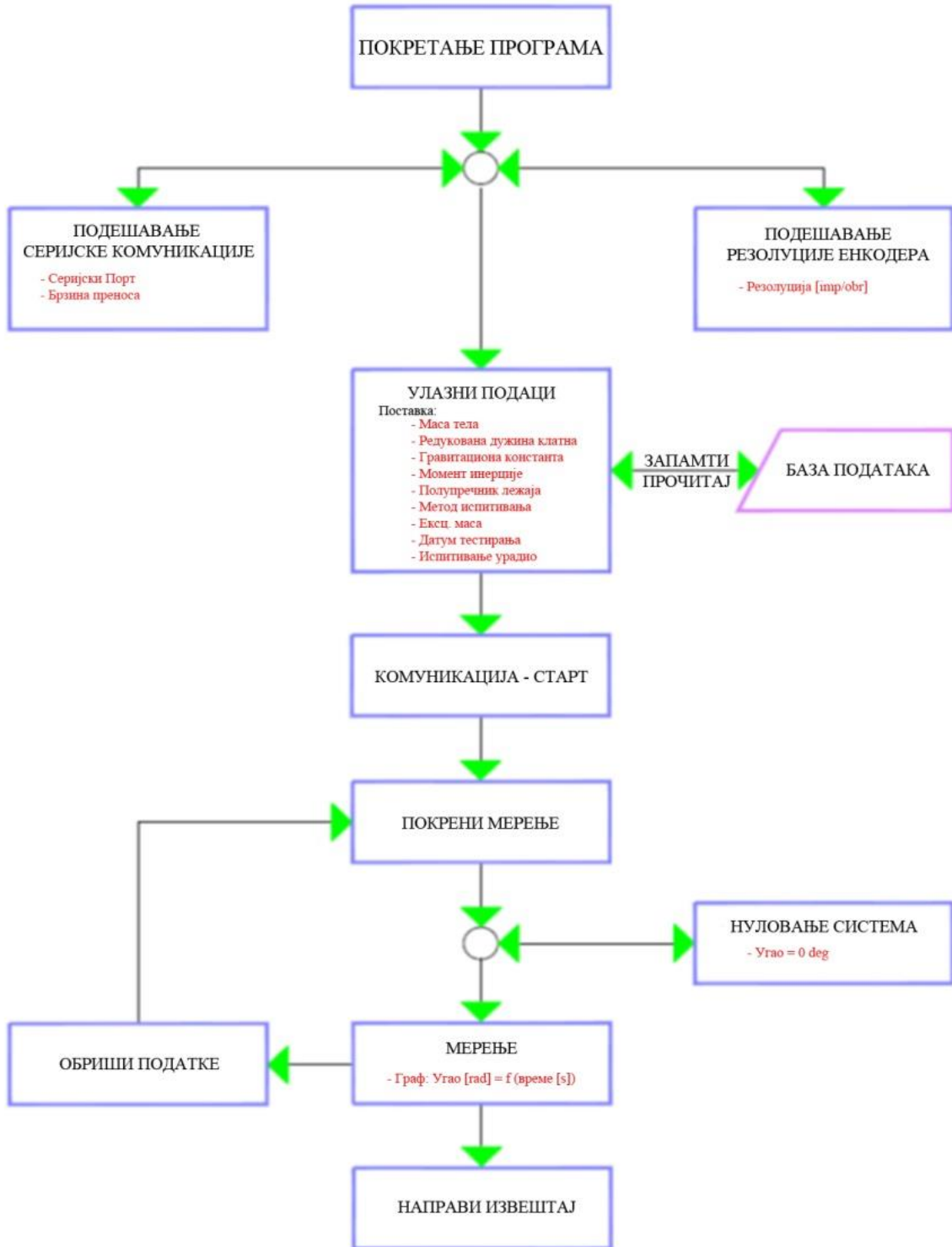
У оквиру креирања извештаја програм нуди две опције: Филтер укључен/искључен. То подразумева приказ филтрираних или "сирових" нефилтрираних података. Такође програм нуди опцију уноса коментара и чување података у облику *EXCEL* фајла, при чему се ти подаци могу обрађивати различитим математичко статистичким програмима. Програм нуди излазне резултате у облику дијаграмских приказа експериментално добијене зависности одређених физичких и триболошких величина, облика (Слика 14.):

- промене угла обртања у функцији времена,
- промене угаоне брзине у функцији времена,
- промене угаоног убрзања у функцији времена,
- промене коефицијента трења у функцији времена,
- промене коефицијента трења у функцији динамичке силе оптерећења контаката.),
- промене коефицијента трења у функцији угаоне брзине и
- промене коефицијента трења у функцији брзине клизања у зони контаката.

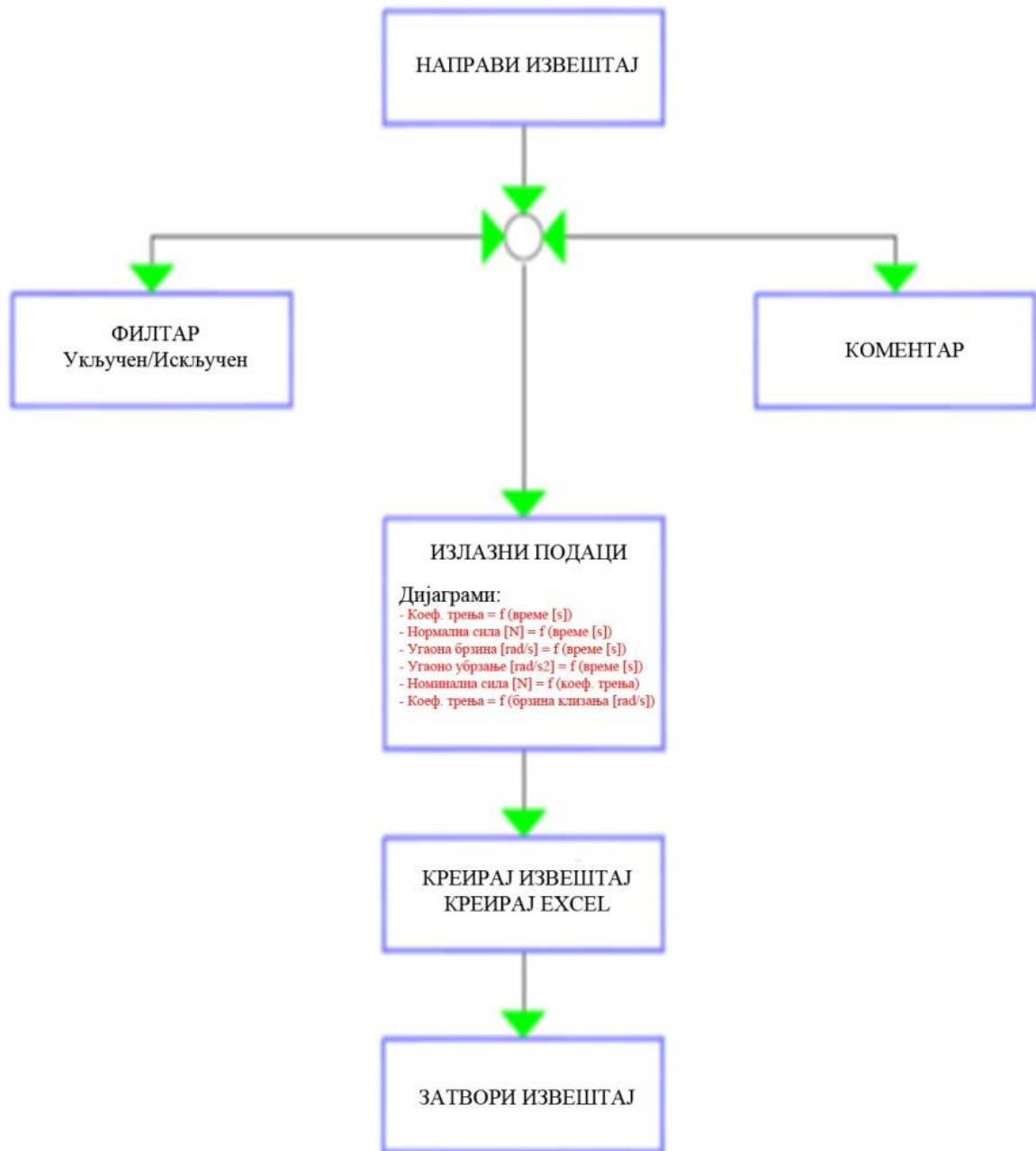
Процедуре везане за коришћење уређаја и софтвера садржане су у наведеним активностима:

1. Прикључење апаратуре на USB порт
2. Покретање Windows апликације
3. Провера комуникационих параметара (*comport*, брзина преноса)
4. Провера резолуције коришћеног енкодера (подешавања → основна подешавања)
5. Покретање комуникације (комуникација → комуникација старт)
6. Унос улазних података и избор методе испитивања (подаци се могу сачувати у бази – улазни подаци → улазни подаци запамтити/прочитати)
7. Покренути мерење
8. Поставити угао на нулу
9. Одрадити мерење (добије се крива угао =  $f$ (време) на графу)

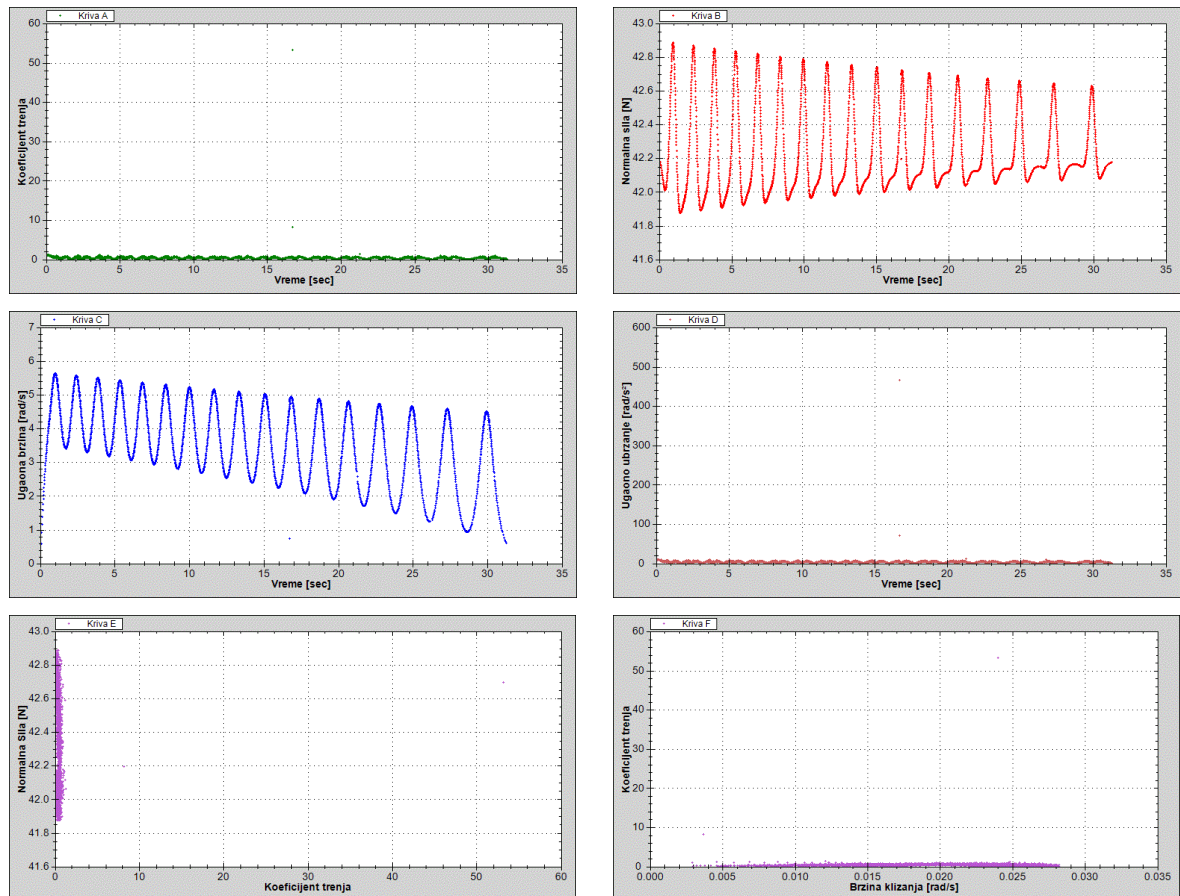
10. Заустави мерење
11. Обрисати мерење (опционо)
12. Направити извештај
13. Укључење филтра (опционо)
14. Креирање извештаја са добијеним дијаграмима
15. Креирање *EXCEL* фајла са добијеним подацима



Слика 12. Алгоритам тока софтверске подршке мерном систему уређаја



Слика 13. Алгоритамски ток везан за креирање извештаја и излазне резултате које програм нуди



Слика 14. Дијаграмски прикази из извештаја о обављеном испитивању

## 7 Публикације везане за техничко решење

Пре пријаве техничког решења, резултати добијени на уређају за одређивање кинематског коефицијента трења динамички оптерећених контаката публиковани су у једном раду у међународном часопису категорије M23 и један рад је прихваћен за штампу у међународном часопису категорије M23.

### 7.1 *Рад у међународном часопису M23*

Ljiljana BRZAKOVIC, Vladimir MILOVANOVIC, Vladimir KOCOVIC, Goran SIMUNOVIC, Djordje VUKELIC, Branko TADIC, Relation between Kinetic Friction Coefficient and Angular Acceleration during Motion Initiated by Dynamic Impact Force, Tehnički vjesnik - Technical Gazette, Vol.29, No.5, pp. 1622-1628, ISSN 1330-3651,2022, <https://doi.org/10.17559/TV-20220408155435>

### 7.2 *Рад у међународном часопису M23 – прихваћен за штампу*

Lj. Brzaković, V. Kočović, S. Mitrović, N. Busarac, B. Tadić, A method for determining of kinetic friction coefficient under dynamic loading conditions, Romanian Journal of Physics, ISSN 1221-146X, 2022. [https://rjp.nipne.ro/accepted\\_papers.html](https://rjp.nipne.ro/accepted_papers.html)

## 8 Закључак

На основу резултата теоријских и експерименталних истраживања, приказаних у овом техничком решењу, произилази да се кинематски коефицијент трења и у условима сложених динамичких оптерећења контакта може веома поуздано одредити на бази диференцијалне једначине кретања тела у присуству силе отпора трења.

Методологија одређивања коефицијента трења своди се на мерење две основне физичке величине, угла обртања и времена, што у теоријском и експерименталном смислу има значајну предност у односу на конвенционалне методе одређивања коефицијента трења.

Убрзање такође дефинише комплетну динамику самог процеса трења без увођења побуда и потенцијалних грешака мерења, које у знатно већој мери могу изазвати мерни инструменти (динамометри-сензори силе) за квантификовање нормалног оптерећења контакта и силе трења. Чињеница да се ова метода базира на мерењу основних физичких величина (време, пређени пут, угао обртања) омогућава формирање поузданих мерних ланаца и њихов смештај ван зоне контакта, што знатно поједностављује триболошка истраживања у условима високих температура, контролисане дубине вакуума, агресивној средини и осталим сложенијим условима испитивања.

Изложену методу карактерише висок ниво поузданости добијених резултата као и велики потенцијал могуће примене методе у сфери образовања, истраживања и развоја трибодијагностичке опреме.

Методологија одређивања кинематског коефицијента трења, која се разматра овим техничким решењем, нема суштинских ограничења. Коефицијент трења се може одредити у било којим условима остваривања контакта. Могу се испитивати клизни и котрљајни парови различитих трболошких карактеристика, при чему се ниво симулираног оптерећења и распон брзина клизања или котрљања, могу кретати у широком опсегу. Овом методом се, много једноставније, у односу на конвенционалне методе, испитивања могу вршити при симулацији различитих нивоа температурама контакта, и уопште, различитих услова који ближе дефинишу рад реалних трибомеханичких система (Агресивна средина, систем подмазивања, ниво оптерећења, ..).

## 9 Референце

[1]

[1] V. L. B. D. J. D. G. G. K. Maslova, "Understanding the effect of rolling friction in the inclined," *Physics Education*, vol. 55, no. 5, p. 055010, 2020.

[2] Z. X. H. L. Y. & X. J. Yan, "Variation of the friction coefficient for a cylinder rolling down an inclined board," *Physics Education*, vol. 53, no. 1, p. 015011, 2017.

[2] Maslova, K., De Jesus, V. L. B., & Sasaki, D. G. G., Understanding the effect of rolling friction in the inclined track experiment. *Physics Education*, 55(5), 055010, 2020. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ab9217>

[3] Yan, Z., Xia, H., Lan, Y., & Xiao, J., Variation of the friction coefficient for a cylinder rolling down an inclined board. *Physics Education*, 53(1), 015011, 2017. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/aa8974>

[4] Chakrabarti, S., Khaparde, R. B., & Kachwala, A. H., Experimental study of the coefficient of rolling friction of the axle of a Maxwell's wheel on a soft horizontal surface, *European Journal of Physics*, 41(3), 035803, 2020. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ab78a5>

[5] Alam, J., Hassan, H., Shamim, S., Mahmood, W., & Anwar, M. S., Precise measurement of velocity dependent friction in rotational motion. *European Journal of Physics*, 32(5), 1367, 2011. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/32/5/024>

[6] Drosd, R. & Minkin, L., (2020). Measuring the coefficient of kinetic friction by exploring dynamics of rotational motion, *The Physics Teacher*, 58(3), 176-178, 2020. <https://doi.org/10.1119/1.5145409>

[7] B. Sanborn, B. Song, E. Nishida, Development of a New Method to Investigate the Dynamic Friction Behavior of Interfaces Using a Kolsky Tension Bar, *Experimental Mechanics* 58, 335–342, 2018. <https://doi.org/10.1007/s11340-017-0350-7>

- [8] T. Jankowiak, A. Rusinek, G. List, G. Sutter, F. Abed, Numerical analysis for optimizing the determination of dynamic friction coefficient, *Tribology International* Vol. 95, 86-94, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2015.10.039>
- [9] F. Marques, P. Flores, J. C. Pimenta Claro, H. M. Lankarani, A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems, *Nonlinear Dyn* 86, 1407–1443, 2016. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2999-3>
- [10] G. Mihajlović (2017), M. Gašić, M. Savković, S. Mitrović, B. Tadić, Vibroplatform modeling with allowance for tribological aspects, *Journal of Friction and Wear*, 38(3), 184-189, 2017. <https://doi.org/10.3103/S1068366617030102>
- [11] L. Euler, Sur le frottement des corps solides, *Memoires de l'academie des sciences de Berlin*, 122-132. Retrieved from <http://eulerarchive.maa.org/>
- [12] Đ. Vukelić, P. Todorović, K. Šimunović, J. Miljojković, G. Šimunović, I. Budak, B. Tadić, A Novel Method for Determination of Kinetic Friction Coefficient using Inclined Plane, *Technical Gazette*, Vol. 28 No. 2, 2021. <https://doi.org/10.17559/TV-20201101051835>
- [13] J. Miljojković, V. Kočović, M. Luković, A. Živković, K. Šimunović, Development of a Modular Didactic Laboratory Set for the Experimental Study of Friction, *Tehnički Glasnik* 29(1):269-277, 2022. <https://doi.org/10.17559/TV-20210925171045>

# Relation between Kinetic Friction Coefficient and Angular Acceleration during Motion Initiated by Dynamic Impact Force

Ljiljana BRZAKOVIC, Vladimir MILOVANOVIC, Vladimir KOCOVIC\*, Goran SIMUNOVIC, Djordje VUKELIC, Branko TADIC

**Abstract:** The paper presents theoretical and experimental analyses of the kinetic friction coefficient of a ball bearing in conditions of rotational motion initiated by dynamic impact force. A method has been developed and a measurement system allows the measurement of a kinetic coefficient of friction through the measurement of the angular acceleration. This paper considers the friction caused by rotational motion initiated by the force impact impulse. After the external force (impact impulse) stops acting, the motion continues, and the loaded bearing (i.e. the zone of the bearing in which the frictional resistance forces act) exhibits a broad spectrum of velocities, from the maximum value at the moment of motion initiation to the zero value when motion stops, where the whole measuring system acts as a rotary encoder. Experimental results indicate a high dependency between angular velocity and friction coefficient, similar to functional dependency. This paper proves that kinetic friction coefficient can be reliably measured using the measurements of angle change and angular velocity. Analysed method has high potential in the diagnostics of energy loss in the tribo-mechanical systems.

**Keywords:** acceleration; energy; friction; impact

## 1 INTRODUCTION

The first published theoretical research related to the determination of kinetic friction coefficient using the dynamic equation of motion for a body moving down an inclined plane was published by Euler in 1748 [1]. In the paper "On the friction of solid bodies" [2], Euler analysed the motion and expressed the coefficient of friction as a function of time. His approach enables the determination of the kinetic coefficient of friction based on experimental measurements. Unfortunately, this method has not experienced a broader expansion in the scientific field, especially in the design of modern tribodiagnostic equipment.

Papers based on (or related to) Euler's research are mainly published in journals regarding physics education [3-5]. For example, Alam et al. [6] deals with the dynamics of rotational motion, developing a simple method for experimental determination of friction losses. Applying the relations between translational and rotational motion, they indicated a linear dependence of the friction losses, i.e. the moment of friction, on the angular velocity. Drosd and Minkin [7] also used a simple laboratory device to study the effects of friction between two discs coming into contact while one disc rotates. The paper discussed the dependence of kinetic friction coefficient on the stationary disk radius, gravitational acceleration, and angular acceleration of the disk. Sari [8] designed an Arduino-based experiment to examine the sliding motion of the object on an inclined plane. The acceleration and the kinetic friction coefficient were determined. Siretean et al. [9] proposed a device for finding the coefficient of rolling friction using a sphere in contact with the inner surface of a ring that rotates about a horizontal axis. The nonlinear differential equation of motion was obtained for the intended dynamic model. The oscillatory motion of the ball and the eccentric equilibrium position have been confirmed, and a dependency of equilibrium position on the coefficient of rolling friction has been found. Marques et al. [10] discussed the modelling of frictional effects in the context of multibody dynamics formulation. The example considered the impact motion of a simple journal - bearing system. A static friction model was the most

suitable choice for modelling friction since it captures the most relevant friction characteristics, requires a small number of parameters and does not significantly increase the computational time. On the other hand, a dynamic model helps capture some more detailed phenomena, such as frictional lag or pre-sliding displacement. Harris [11] developed a prediction method considering elasto-hydrodynamic lubrication. The effects of the bearing load, inner ring speed, and the number of rolling elements on skidding of bearing were analysed. Jones [12] proposed a mathematical model to calculate the motion of the bearing. This theory was appropriate for the high-speed bearing with a larger friction coefficient. Sapanen and Mikkola [13, 14] proposed a dynamics model of a deep-groove ball bearing, including the effect of a defect. Nakhaeinejad et al. [15] developed a planar dynamics model of bearing to analyse the dynamic responses of healthy or faulty bearings. Laniado-Jacome et al. [16] discussed the skidding behavior of bearing by using the finite element method. Shao et al. [17] established a bearing finite element model to investigate fault vibration characteristics by seeding small defects at inner race, outer race, and balls, respectively. The results indicated that the vibration response excited by the defect at the outer race was most intensive.

In the paper related to the microhardness test, Deng et al. [18] provided a diagram of changes in friction coefficient as a function of normal load and sliding duration. Their results indicate that, under different contact conditions, the friction coefficient increases with decreasing normal load and increasing the number of load change cycles. Results of the research related to the slippage effect on wear loss induced by the rolling sliding friction [19] show the variation in the friction coefficient curves for three typical slippages at different friction cycles. Under 0,17% slippage, the friction coefficient remained at a low, stable value. However, the friction coefficient value gradually increased to a high value when the slippage increased, with some fluctuation. Results also indicated that the cycle parameters have a negligible effect on the contact state during the friction process. The paper [20] proposed high-frequency vibration to mitigate the effects of pre-rolling/pre-sliding friction on the settling

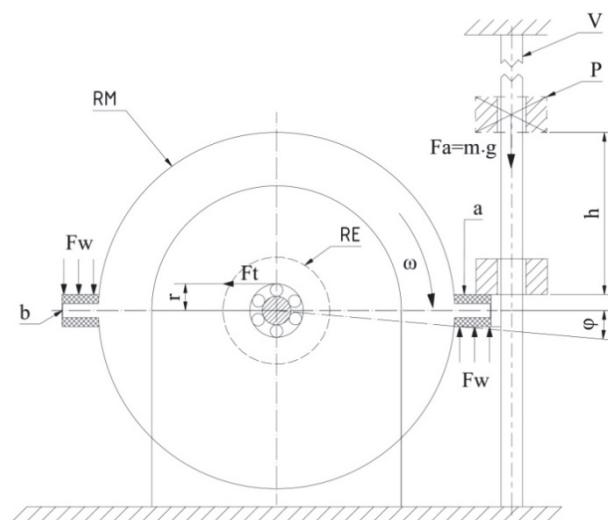
time of rolling bearing nanopositioning stages. The proposed method resulted in a 52% reduction in mean settling time, i.e. the time needed to reach the target positions in point-to-point positioning tasks, which would otherwise be significantly prolonged due to pre-rolling/pre-sliding friction. This research indicates the complexity of the friction phenomenon and the need to manage friction in an industrial environment. Duan et al. [21] established a new static mechanical model to study the rolling-sliding contact in the real-time non-clearance precision ball drive, using the coupling coefficient determined by the Carter narrow theory. The diagrams of mechanical and geometric parameters simulated by the finite element method indicate that the trend of change in normal load has the shape of a sine function. It should be noted that the value of the friction coefficient in [21] is taken as a constant computer-simulated value. At the same time, in this paper, the normal load of a bearing, achieved by a rotating mass, is an actual constant value, which could not be said for the kinetic coefficient of friction. Namely, depending on the contact conditions, the kinetic coefficient of friction oscillates over time around the dynamic trend. Hu et al. [22] analysed the rolling friction performance of hollow spherical nano-MoS<sub>2</sub>/nano-TiO<sub>2</sub> (HSMT) and its conversion from lubricant to photocatalyst. In all experiments, values of friction coefficient ranged from 0,02 to 0,05. The friction coefficient values presented in this paper were obtained at normal contact load of 21,5 N and rolling velocities ranging from 0,03 to 0,06, not exceeding 0,1 m/s. Considering the test conditions (normal load up to 50 N and rolling velocities up to 0,1 m/s), the obtained results are very compatible with the results obtained by the conventional method [22], both from the aspect of the friction coefficient scattering limits and from the aspect of the dynamics of its change. One of a few papers based on Euler's idea to determine the kinetic friction coefficient using the differential equation of motion was published [23]. In order to study the friction between grains of granular material at motion, Mihajlovic et al. [23] developed a method and physical model of a vibrating platform. They have theoretically and experimentally proven that the coefficient of friction between sand grains and sieve can be reliably determined using the dynamic equation of motion in real operating conditions of the vibrating platform. The obtained results are very compatible with the results obtained by standard and considerably more complex methods. Although based on Euler's approach, the presented research further generalises the application of the method for significantly more complex tribological processes than the study of friction on an inclined plane.

Following Euler's idea, several tribometers intended for the determination of kinetic friction coefficient were realised [23-26]. The published results indicate a great potential for this method in terms of an essential understanding of dynamic processes, friction phenomena, and a wide range of possible applications. Furthermore, the determination of kinetic friction coefficient based on differential equations of motion is, in essence, related to the measurement of three base units of the SI system (mass, time, and length), which is a significant advantage in a theoretical, experimental, and technological sense.

## 2 METHODOLOGY

Methodology of the determination of the kinetic friction coefficient proposed by this paper is based on the initiation of the motion (of the rotating disk) using active rotational moment acting over a short time interval, as well as on the tracking of the changes in the rotational angle over time. Fig. 1 provides a schematic view of the method. Weight  $P$  with mass  $m$  freefalls from the height  $h$ , hitting a damper  $a$  which absorbs the energy which initiates the rotation of the disk  $RM$  with angular velocity  $\omega$ . Weight  $P$ , upon impact, continues the fall along the guide  $V$  until its end, where it stops. The rotating disk is connected via ball bearing to the rotational encoder  $RE$  which measures the change of the angle  $\varphi$  over time. Rotational disk and the contact zone in which friction is caused passes through an entire spectre of angular velocities, from maximal, initiated by the active moment, to the zero value of angular velocity at the moment when the rotation stops. In this, dynamic, system, the kinetic energy invested at the initiation of the motion is reduced with every moment after the initiation of the motion, by the effect of the friction force  $F_t$ , until the rotation stops.

Thus, the motion of the body upon the initiation of the motion is based on the accumulated energy, in which case the law of the rotational angle change over time defines the value of the friction force  $F_t$ . Motion can be initiated manually, using an electromagnetic coupling, by the impulse of the impacting force, or in some other manner. This paper considers the motion initiated by the impacting force, which is the most complex method of initiation, which is why it is taken into consideration.



**Figure 1** The distribution of active and resistive forces when the body rotates around a fixed axis

(RM - rotating masses, RE - rotary encoder,  $F_a$  - impulse impact force,  $F_w$  - air resistance force,  $F_t$  - resulting friction force at contact,  $\omega$  - angular velocity,  $\varphi$  - the angle of rotation,  $h$  - height,  $r$  - radius at which elementary friction forces act, P - pin, V - cylindrical guide)

The method for determining kinetic friction coefficient under dynamic loading conditions is generally based on the differential equation of motion. The following equation describes the motion of a body rotating around a fixed axis (Fig. 1):



$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum M_i = M_a - M_t - M_w \quad (1)$$

where:  $I$  - the mass moment of inertia;  $\omega$  - angular velocity;  $M_a$  - active moment initiating motion;  $M_t$  - resulting moment as the integral sum of the resistant moments of friction over the contact surface;  $M_w$  - the resulting moment of air resistance.

If the change in the body's rotation angle is determined experimentally as a function of time, then, based on the dynamic equation of motion, it is possible to determine the current values of friction coefficient from the moment of motion initiation to the moment when rotation ends.

After the action of an impulse of a force that initiates the motion in a short time interval  $\Delta t_1$ , from the differential Eq. (1) follows that the active moment equals zero ( $M_a = 0$ ), where  $\Delta t_1 < t$ . It means that in the stated time interval ( $\Delta t_1 < t$ ) the motion continues without the active moment, using the energy accumulated by the moment of impulse.

The air resistance force that creates the moment of resistance  $M_w$  can be determined based on the drag coefficient, the rotational velocity, and the size of a surface the air resistance force acts on [26]. Based on the previous research [26], it follows that for the velocity interval  $v < 3$  m/s the drag force can be neglected as a lower order quantity, i.e.

$$M_a = 0, F_w \rightarrow 0 \quad (2)$$

Having that in mind, differential Eq. (1) can be written in the following form:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_t = F_t r \quad (3)$$

where:  $M_t$  - moment of friction;  $F_t$  - resulting friction force at contact;  $r$  - radius at which elementary friction forces act (Fig. 2).

The resulting moment of friction is the only unknown variable in the differential equation of motion. Based on Fig.1, it is determined by using the expression:

$$M_t = \iint r dF_t = F_t r \quad (4)$$

which defines the total friction force as an integral sum of elementary friction forces over the contact surface.

Based on the schematic representation provided in Fig. 1, the friction force  $F_t$  can be defined as a function of the friction coefficient:

$$\mu = \frac{I \frac{d\omega}{dt}}{rg[\sum m]} \quad (5)$$

where  $\sum m$  denotes the sum of all rotating masses loading the bearing, and  $g$  denotes the gravitational acceleration.

Based on the known theoretical expressions, the angular velocity and acceleration can be determined by numerical differentiation:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \quad (6)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \quad (7)$$

The stated theoretical considerations indicate that experimentally determined change in rotation angle as a function of time enables the determination of kinetic friction coefficient from the moment when the effect of active moment ceases and until the rotating body stops.

### 3 RESULTS

Experimental validation of the theoretical model was realised on a preliminary device shown in Fig. 2.



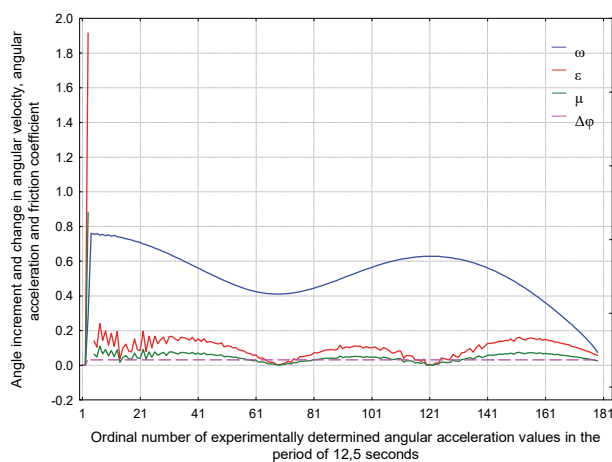
Figure 2 Photographs of the device

The measuring system (rotary encoder), together with accompanying Arduino electronics and developed software, enables the formation of a database, online monitoring of processes, and creation of test reports in tabular and diagrammatic form for different experimental conditions.

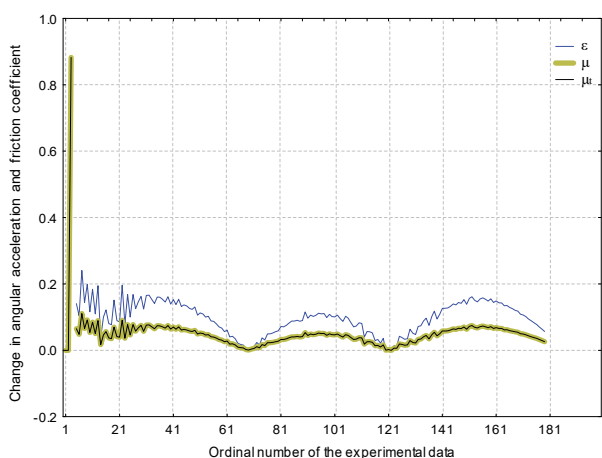
A total of 60 experiments were performed. In the first series of 30 experiments, the dynamic loading was initiated by the impulse impact force of a pin weighing 0,0487 kg from a height of 0,21 m. During the second series of 30 experiments, the same mass initiated the dynamic loading but from the height of 1,21 m.

Fig. 3 shows the experimentally obtained changes in the angle and angular velocity increment, angular acceleration and friction coefficient as functions of time during one of 30 experiments in the first series.

For the same experiment, in Fig. 4 are given changes in angular acceleration and a comparative presentation of changes and differences between the experimentally obtained friction coefficient and the friction coefficient determined based on the presented theoretical model.

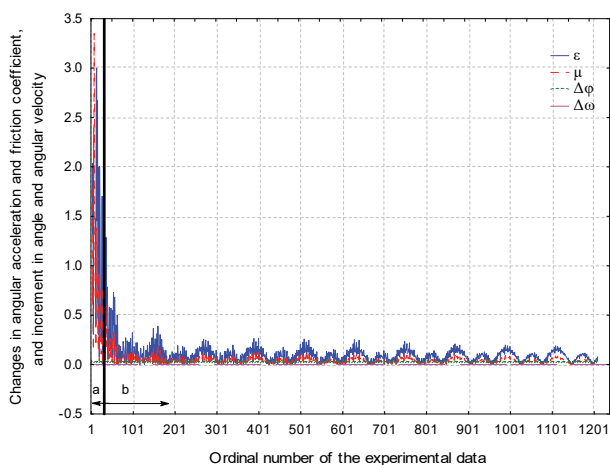


**Figure 3** Angle increment ( $\Delta\varphi$ ) and change in angular velocity ( $\omega$ ), angular acceleration ( $\varepsilon$ ) and friction coefficient ( $\mu$ ) determined based on 177 measurements data in the period from the moment of motion initiation to the moment when the rotation ends



**Figure 4** Change in angular acceleration ( $\varepsilon$ ), experimentally determined friction coefficient ( $\mu$ ) and theoretically determined friction coefficient ( $\mu_t$ ) during the period from the motion initiation by the impact impulse to the moment when the rotation ends

The diagram in Fig. 5 refers to the experimental data obtained during one of the 30 experiments performed in the second series. A combined diagram of the increment of angle and angular velocity and the changes in angular acceleration and friction coefficient (Fig. 5) provides a more integrated picture of the process.



**Figure 5** Changes in angular acceleration ( $\varepsilon$ ) and friction coefficient ( $\mu$ ), and increment of angle ( $\Delta\varphi$ ) and angular velocity ( $\Delta\omega$ ) during the motion initiated by impact impulse energy of higher values

High values of friction coefficient (Fig. 5, zone a) are related to the moment of the effect of the active force and active moment which initiate motion. The values of the friction coefficient during the initiation of the motion are not relevant and are not considered in this paper. Upon the cessation of the active moment the motion is based on the accumulated energy of the impact (Fig. 5, zone b). The diagram in the Fig. 5 presents a highlighted border between the time (vertical line) after which the motion and the kinetic friction process act based on the accumulated energy.

The diagram in Fig. 5 indicates that in a short period of time after the motion initiation, the data scattering reduces and increments of angle and angular velocity maintain approximately constant values. Also, the dynamics of the change in angular acceleration and friction coefficient are identical.

Statistical processing of the first series of 30 experimental results confirmed that the theoretical expression for calculating the friction coefficient (Eq. (5)) agrees with the expression obtained by processing experimental data. Namely, the results of statistical data processing define the friction coefficient as a product of a constant and the angular acceleration, i.e.

$$\mu = C \frac{d\omega}{dt} \tag{8}$$

where the correlation coefficient equals one ( $R = 1$ ). Also, the experimentally determined constants in all 30 experiments are equal to 0,46073, which is identical to the value of the constant defined by the presented theoretical model (Eq. (5)), i.e.

$$C = \frac{I}{rg[\Sigma m]} = \frac{0,0485875}{0,005 \cdot 9,81 \cdot 2,15} = 0,46073 \tag{9}$$

In the second series of 30 experiments, where the motion was initiated by impulse energy of significantly higher values, deviations of experimentally determined values of constants in relation to the theoretical value of 0,46073 ranged from zero to 5%, with high values of correlation coefficients ( $R > 0,995$ ).

Tab. 1 presents the range of the measured output values depending on the free fall height of the body  $h$  in the motion zone based on the accumulated impact energy.

**Table 1** The range of the measured output values depending on the free fall height of the body  $h$  in the motion zone based on the accumulated impact energy

$h / m$		$\Delta t / s$	$\Delta\omega / \text{rad/s}$	$\varepsilon / \text{rad/s}^2$	$\mu$
0,21	min	0,03736	0,000168	0,00203	0,00093
	max	0,14508	0,010386	0,26751	0,12325
1,21	min	0,01918	0,000001	0,00005	0,00002
	max	0,04146	0,021788	1,13550	0,52315

Energy balances, i.e. curves of changes in the kinetic energy and energy of friction force work and the differences between these energies, are provided in Figs. 6 and 7. The diagrams were obtained by statistical processing of the results from one of the 30 experiments performed in the first series with lower impact energy and one of the 30 experiments performed in the second series with significantly higher impact energy.

For each of the 184 measurements data from one of the experiments in the first series (Fig. 6) and each of the 1406 measurements data from one of the experiments in the second series (Fig. 7), energies were calculated according to the following expressions:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (10)$$

$$A_t = E_t = r g [\Sigma m] \mu \Delta \varphi \quad (11)$$

$$\Delta E = E_k - A_t \quad (12)$$

Here,  $\Delta \varphi$  refers to the experimentally determined value of the angle increment as the difference between the  $(i + 1)$ -th and  $i$ -th angle data. Angle change is a constant whose value is equal to  $\Delta \varphi = 0,03141592$  rad. The constants that appear in the expressions above have the following values:  $J = 0,048587$  kgm<sup>2</sup>,  $r = 0,005$  m,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> and  $\Sigma m = 2,15$  kg.

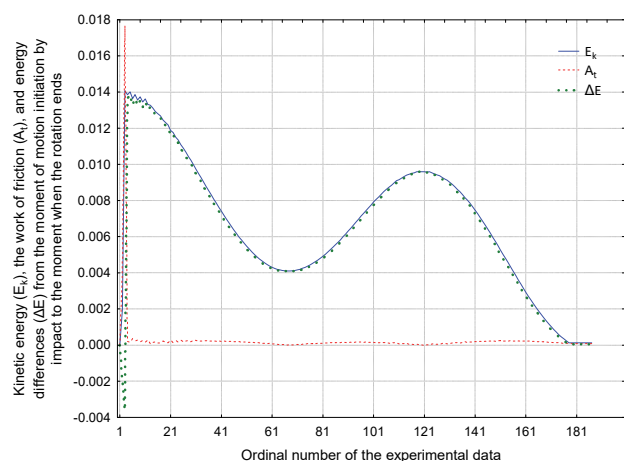


Figure 6 Energy balances at small levels of impact impulse energy

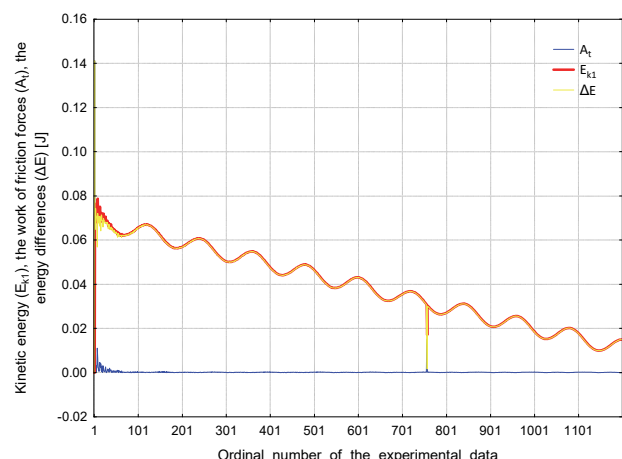


Figure 7 Energy balances at significantly higher levels of impact impulse energy

## 4 DISCUSSION

The proposed theoretical model for calculating the kinetic friction coefficient agrees with experimentally obtained results presented in the third chapter. The scattering limits of obtained values for rolling friction coefficients (Figs. 3 to 7) correspond to the scattering limits

of the results obtained by conventional methods based on the measurement of friction force and contact load [22]. In addition, the measurement repeatability was confirmed through a large number of experiments.

The change dynamics in friction coefficient follow the changes in angular acceleration and indicate the theoretical, experimentally confirmed connection between these quantities (Fig. 4) as a physical law. The energy balance diagrams in Figs. 6 and 7 indicate that the work of friction forces causes a decline in kinetic energy. Accordingly, when the motion ends (Fig. 6), the difference between kinetic energy and friction work is close to zero. The energy balance diagram in Fig. 7 shows that the motion did not stop and that the difference between kinetic energy and friction works is of the order of 0,01 J, which indicates the method's potential in quantifying very small energy losses.

The literature analysis leads to the conclusion that energy losses and friction phenomena are problems of great interest in the field of research and development of modern tribodiagnostic equipment. Tribometry methods for experimental determination of the kinetic friction coefficient are based on the measurement of friction force at certain levels of normal contact load and velocity of one contact element motion relative to another. Other contact conditions (e.g. microgeometry of contact pairs, temperature level in the contact zone, type of lubricant) can vary within wide limits. Literature sources related to the determination of kinetic friction coefficient under dynamic loading conditions [9-22] indicate excellent compatibility of conventional methods with the method presented in this paper. The stated compatibility between the methods follows from comparing the trends in the dynamic of change in friction coefficient and the values of friction coefficients.

## 5 CONCLUSIONS

Based on the theoretical and experimental research results presented in this paper, it can be concluded that the kinetic friction coefficient can be reliably determined based on the differential equations of motion. The theoretical relation between angular acceleration and coefficient of friction was experimentally verified. Regardless of their amplitude and frequency, changes in acceleration exist in every dynamic system, and they can, to a great extent, explain the enigma of the kinetic friction coefficient. The authors of this paper consider acceleration as a kind of physical and energy indicator of friction and energy dissipation in tribomechanical systems.

The fact that this method is based on the measurement of base physical quantities (time, distance travelled, and angle of rotation) allows the formation of reliable measurement chains and their location outside the contact zone. It considerably simplifies tribological research in the conditions of high-temperature levels, controlled vacuum levels, or aggressive environments.

The high reliability of the results indicates a great potential of the proposed method in the fields of research and development of tribodiagnostic equipment.

The proposed methodology for determining the kinetic coefficient of friction has no essential limitations. The friction coefficient can be determined in any contact

conditions. Sliding and rolling pairs of different tribological characteristics can be tested, where the level of simulated load and the range of sliding or rolling velocities can vary in a wide range. With this method, tests can be performed much simpler than using conventional methods by simulating different levels of contact temperatures and, in general, different conditions that more closely define the operation of real tribomechanical systems (aggressive environment, lubrication system, etc.).

Future research shall be directed towards the application opportunities of the proposed method in the conditions of the dynamic load of the contacts, in which case shall the dynamic load be achieved with the masses position excentrically in relation to the rotation axis, that is, in relation to the inertia forces which these masses initiate. Also, future research shall be directed in the domain of the motion initiation using contactless electromagnetic coupling which will significantly improve the motion initiation system and expand the application range of the proposed method. Future research should focus on implementing the proposed method in tribo-diagnostics of real industrial tribomechanical systems, in terms of quantifying energy losses caused by friction in finished industrial assemblies related to the drive shafts and bearing.

## 6 REFERENCES

- [1] Zhuravlev, V. P. (2013). On the history of the dry friction law. *Mechanics of Solids*, 48(4), 364-369. <https://doi.org/10.3103/S002565441304002X>
- [2] Euler, L. (1750). Sur le frottement des corps solides. *Memoires de l'academie des sciences de Berlin*, 4, 122-132. Retrieved from <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/143/>
- [3] Maslova, K., De Jesus, V. L. B., & Sasaki, D. G. G. (2020). Understanding the effect of rolling friction in the inclined track experiment. *Physics Education*, 55(5), 055010. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ab9217>
- [4] Yan, Z., Xia, H., Lan, Y., & Xiao, J. (2017). Variation of the friction coefficient for a cylinder rolling down an inclined board. *Physics Education*, 53(1), 015011. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/aa8974>
- [5] Chakrabarti, S., Khaparde, R. B., & Kachwala, A. H. (2020). Experimental study of the coefficient of rolling friction of the axle of a Maxwell's wheel on a soft horizontal surface. *European Journal of Physics*, 41(3), 035803. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ab78a5>
- [6] Alam, J., Hassan, H., Shamim, S., Mahmood, W., & Anwar, M. S. (2011). Precise measurement of velocity dependent friction in rotational motion. *European Journal of Physics*, 32(5), 1367. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/32/5/024>
- [7] Drosd, R. & Minkin, L. (2020). Measuring the coefficient of kinetic friction by exploring dynamics of rotational motion. *The Physics Teacher*, 58(3), 176-178. <https://doi.org/10.1119/1.5145409>
- [8] Sari, U. (2019). Using the Arduino for the experimental determination of a friction coefficient by movement on an inclined plane. *Physics Education*, 54(3), 035010. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ab0919>
- [9] Siretean, S. T., Muscă, I., Alaci, S., & Ciornei, F.-C. (2018). Use of Hypocycloidal Motion in the Study of Rolling Friction. *Mechanisms and Machine Science*, 467-476. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-79111-1\\_46](https://doi.org/10.1007/978-3-319-79111-1_46)
- [10] Marques, F., Flores, P., Claro, J. C. P., & Lankarani, H. M. (2018). Modeling and analysis of friction including rolling effects in multibody dynamics: a review. *Multibody System Dynamics*, 45(2), 223-244. <https://doi.org/10.1007/s11044-018-09640-6>
- [11] Harris, T. A. (1971). An Analytical Method to Predict Skidding in Thrust-Loaded, Angular-Contact Ball Bearings. *Journal of Lubrication Technology*, 93(1), 17-23. <https://doi.org/10.1115/1.3451511>
- [12] Jones, A. B. (1960). A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings under Arbitrary Load and Speed Conditions. *Journal of Basic Engineering*, 82(2), 309-320. <https://doi.org/10.1115/1.3662587>
- [13] Sopanen, J. & Mikkola, A. (2003). Dynamic model of a deep-groove ball bearing including localised and distributed defects. Part 1: Theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-Body Dynamics*, 217(3), 201-211. <https://doi.org/10.1243/14644190360713551>
- [14] Sopanen, J. & Mikkola, A. (2003). Dynamic model of a deep-groove ball bearing including localised and distributed defects. Part 2: Implementation and results. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-Body Dynamics*, 217(3), 213-223. <https://doi.org/10.1243/14644190360713560>
- [15] Nakhacinejad, M. & Bryant, M. D. (2011). Dynamic Modeling of Rolling Element Bearings with Surface Contact Defects Using Bond Graphs. *Journal of Tribology*, 133(1). <https://doi.org/10.1115/1.4003088>
- [16] Laniado-Jácome, E., Meneses-Alonso, J., & Diaz-López, V. (2010). A study of sliding between rollers and races in a roller bearing with a numerical model for mechanical event simulations. *Tribology International*, 43(11), 2175-2182. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2010.06.014>
- [17] Shao, Y., Tu, W., & Gu, F. (October 27-30, 2010). A simulation study of defects in a rolling element bearing using FEA. *International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2010)*. <https://doi.org/10.1109/iccas.2010.5669813>
- [18] Deng, G., Tieu, A. K., Su, L., Wang, P., Wang, L., Lan, X., & Zhu, H. (2020). Investigation into reciprocating dry sliding friction and wear properties of bulk CoCrFeNiMo high entropy alloys fabricated by spark plasma sintering and subsequent cold rolling processes: Role of Mo element concentration. *Wear*, 460, 203440. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2020.203440>
- [19] Zhou, Y., Gui, Z. Z., Mo, J. L., Peng, J. F., Xu, Z. B., & Zhu, M. H. (2021). Slippage effects on the crack behavior of pearlitic steel induced via rolling-sliding friction. *Wear*, 482, 203959. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2021.203959>
- [20] Dong, X., Yoon, D., & Okwudire, C. E. (2017). A novel approach for mitigating the effects of pre-rolling/pre-sliding friction on the settling time of rolling bearing nanopositioning stages using high frequency vibration. *Precision Engineering*, 47, 375-388. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2016.09.011>
- [21] Duan, L., An, Z., Yang, R., & Fu, Z. (2016). Mechanical model of coupling rolling and sliding friction in real-time non-clearance precision ball transmission. *Tribology International*, 103, 218-227. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2016.06.032>
- [22] Hu, K. H., Xu, Y., Hu, E. Z., Guo, J. H., & Hu, X. G. (2016). Rolling friction performance and functional conversion from lubrication to photocatalysis of hollow spherical nano-MoS<sub>2</sub>/nano-TiO<sub>2</sub>. *Tribology International*, 104, 131-139. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2016.08.029>
- [23] Mihajlović, G., Gašić, M., Savković, M., Mitrović, S., & Tadić, B. (2017). Vibroplatform modelling with allowance for tribological aspects. *Journal of Friction and Wear*, 38(3), 184-189. <https://doi.org/10.3103/s1068366617030102>
- [24] Lukovic, M., Miljojkovic, J., & Tadic, B. (2021). An inclined plane based instrument for determining the static

coefficient of friction at high temperatures. *Romanian Journal of Physics*, 66(9-10), 909.

- [25] Miljojković, J., Kočović, V., Luković, M., Živković, A., & Šimunović, K. (2022). Development of a modular didactic laboratory set for the experimental study of friction. *Tehnicki vjesnik - Technical Gazette*, 29(1), 269-277. <https://doi.org/10.17559/TV-20210925171045>
- [26] Vukelic, D., Todorovic, P., Simunovic, K., Miljojkovic, J., Simunovic, G., Budak, I., & Tadic, B. (2021). A novel method for determination of kinetic friction coefficient using inclined plane. *Tehnicki vjesnik - Technical Gazette*, 28(2), 447-455. <https://doi.org/10.17559/tv-20201101051835>

**Contact information:**

**Ljiljana BRZAKOVIĆ**, M.Sc., Teaching Assistant  
Academy of Professional Studies Sumadija, Department in Trstenik,  
Radoja Krstica 19, 37240 Trstenik, Serbia  
E-mail: ljbrzakovic@asss.edu.rs

**Vladimir MILOVANOVIC**, PhD, Assistant Professor  
University of Kragujevac, Faculty of Engineering,  
Sestre Janjic 6, 34000 Kragujevac, Serbia  
E-mail: vladicka@kg.ac.rs

**Vladimir KOCOVIC**, PhD, Assistant Professor  
(Corresponding author)  
University of Kragujevac, Faculty of Engineering,  
Sestre Janjic 6, 34000 Kragujevac, Serbia  
E-mail: vladimir.kocovic@kg.ac.rs

**Goran SIMUNOVIC**, PhD, Full Professor  
University of Slavonski Brod, Mechanical Engineering Faculty in Slavonski Brod,  
Trg Ivane Brlic Mazuranic 2, 35000 Slavonski Brod, Croatia  
E-mail: gsimunovic@unisb.hr

**Djordje VUKELIC**, PhD, Full Professor  
University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences,  
Trg Dositeja Obradovica 6, 21000 Novi Sad, Serbia  
E-mail: vukelic@uns.ac.rs

**Branko TADIC**, PhD, Full Professor  
University of Kragujevac, Faculty of Engineering,  
Sestre Janjic 6, 34000 Kragujevac, Serbia  
E-mail: btadic@kg.ac.rs

**ACCEPTED MANUSCRIPTS**

Please, do not link to PDF files on this page. For early-citing of accepted articles please, contact the Editorial Office.

N <sup>o</sup> Pages	Title & Author(s)	
11	<i>Mechanical Analysis for Generation IV Structural Materials Using FEA Approach</i> <b>D. TOMA, AL. NITU</b>	<a href="#">Full text</a>
10	<i>Defect Mode Modulation to Detect Various Bacteria in Defective One-Dimensional Photonic Crystals</i> <b>ABINASH PANDA, FRANCIS SEGOVIA-CHAVES</b>	<a href="#">Full text</a>
9	<i>Characterization of Genetic Mutations Using DNA Walks and Multifractal Detrended Fluctuation Analysis</i> <b>E. M. ANITAS</b>	<a href="#">Full text</a>
14	<i>A Method for Determination of Kinetic Friction Coefficient under Dynamic Loading Conditions</i> <b>LJILJANA BRZAKOVIC, VLADIMIR KOCOVIC, SLOBODAN MITROVIC, NINA BUSARAC, BRANKO TADIC</b>	<a href="#">Full text</a>
10	<i>On the Aerosol Optical Depth Series in the Arabian Gulf Region</i> <b>A. BĂRBULESCU, N. POPESCU-BODORIN, C.S. DUMITRIU</b>	<a href="#">Full text</a>
11	<i>Ferromagnetic Core-Shell Coaxial Nanostructures on Gallium Arsenide Substrates</i> <b>E. V. MONAICO, V. MORARI, M. KUTUZAU, V. V. URSAKI, K. NIELSCH, I. M. TIGINYANU</b>	<a href="#">Full text</a>
11	<i>Physicochemical and Optical Properties of Hybrid Films Containing Tio<sub>2</sub>-Based Silica Materials</i> <b>VIOLETA PURCAR, VALENTIN RĂDIȚOIU, FLORENTINA MONICA RADULY, ALINA RĂDIȚOIU, SIMONA CĂPRĂRESCU, ADRIANA NICOLETA FRONE, CRISTIAN-ANDI NICOLAE</b>	<a href="#">Full text</a>
5	<i>Exponential Stabilization of Spin-1/2 Systems Based on Switching State Feedback</i> <b>JIE WEN, YUANHAO SHI, JIANFANG JIA, JIANCHAO ZENG</b>	<a href="#">Full text</a>

- 11 *Enhanced Machine Learning Model for Meteo-Oceanographic Time-Series Prediction*  
**GIANINA CHIROSCA, MARIA EMANUELA MIHAILOV, MARIA IONELA TOMESCU-CHIVU, ALECSANDRU VLADIMIR CHIROSCA**  
[Full text](#)
- Nº Pages Title & Author(s)
- 13 *New (3+1)-Dimensional Painlevé Integrable Extensions of Mikhailov-Novikov-Wang Equation: Variety of Multiple Soliton Solutions*  
**ABDUL-MAJID WAZWAZ, WEAAM ALHEJAILI, S. A. EL-TANTAWY**  
[Full text](#)
- 11 *New (3+1)-Dimensional Integrable Extensions of the (modified) Vakhnenko-Parkes Equation*  
**WEAAM ALHEJAILI, ABDUL-MAJID WAZWAZ, S. A. EL-TANTAWY**  
[Full text](#)
- 12 *Hysteresis Behaviors of a Core-Shell Ising Nanotube*  
**N. HACHEM, Y. AL QAHOOM, R. AHARROUCH, M. MADANI, M. EL BOUZIANI**  
[Full text](#)
- 9 *Structural and Performance Properties of Quasicrystal Al–ni–co Alloys in Aggressive Media*  
**O. SUKHOVA, V. POLONSKYY**  
[Full text](#)
- 14 *Some Effects of Proton Irradiation in Young Seedlings of Wheat*  
**L. OPRICA, S. SHVIDKIY, A. MOLOKANOV, G. VOCHITA, D. CREANGA**  
[Full text](#)
- 17 *Optical Properties of Oxidized Terfenol-D Thin Films Obtained by Pulsed Laser Deposition*  
**RUXANDA MIREANU, VALENTIN ION, STINGESCU M. LUIZA, OVIDIU TOMA**  
[Full text](#)
- 15 *Software Application to Investigate Coincidences of the Muonic Radiation When Passing through the Multi Pixel Photon Counter (MPPC) Underground Detector*  
**L. NIȚĂ**  
[Full text](#)

- 19 *Spinor Field in Bianchi Type-II Universe*  
**BIJAN SAHA** [Full text](#)
- 15 *Dynamics of the Smooth Positon of a Derivative Nonlinear Schrödinger Equation*  
**XIAONA DONG, MAOHUA LI, AIJUAN HU, CAIFENG CHEN** [Full text](#)
- Nº Pages Title & Author(s)
- 14 *Polarization of Charged Spherical Dielectric Core-Shell*  
**A. MARIN, O. IANC, T. O. CHECHE** [Full text](#)
- 15 *Pulsatory Liposome – a Two-Stroke Bionic Biomicroengine*  
**DUMITRU POPESCU, DUMITRU PETRU IGA, ALIN GABRIEL POPESCU, VALENTIN I. R. NICULESCU** [Full text](#)
- 17 *Chaotic Dynamics of the Relative Phase between Two Coupled Bose-Einstein Condensates*  
**FEI LI, WENWU LI, ZHIJIAN HE** [Full text](#)
- 18 *Comparison of Parameters of Two-Dimensional (2D) and Three-Dimensional (3D) P-N-Junction Diodes*  
**G. GULYAMOV, M.G. DADAMIRZAEV, M.O. KOSIMOVA** [Full text](#)
- 18 *Cryptanalysis of a Random Number Generator Based on a Fractional-Order Chaotic Memcapacitor Oscillator*  
**KAYA DEMIR** [Full text](#)
- 17 *Development of E-Learning Asynchronous Course in Radiation Protection*  
**C. IONAȘCU, G. STĂNESCU, G. ROȘCA-FÂRTAT, M. SAHAGIA** [Full text](#)



# A METHOD FOR DETERMINATION OF KINETIC FRICTION COEFFICIENT UNDER DYNAMIC LOADING CONDITIONS

LJILJANA BRZAKOVIC<sup>1</sup>, VLADIMIR KOCOVIC<sup>2</sup>, SLOBODAN MITROVIC<sup>2</sup>, NINA BUSARAC<sup>2</sup>, BRANKO TADIC<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Academy of Professional Studies Sumadija, Department in Trstenik, Trstenik 37240, Serbia  
*E-mail:* [lbrzakovic@asss.edu.rs](mailto:lbrzakovic@asss.edu.rs)

<sup>2</sup>University of Kragujevac, Faculty of Engineering, Kragujevac 34000, Serbia  
*Email:* [vladimir.kocovic@kg.ac.rs](mailto:vladimir.kocovic@kg.ac.rs) *Email:* [boban@kg.ac.rs](mailto:boban@kg.ac.rs) *Email:* [busaracn@gmail.com](mailto:busaracn@gmail.com) *Email:* [btadic@kg.ac.rs](mailto:btadic@kg.ac.rs)

*Received June 1, 2022*

*Abstract.* In general, the kinetic friction coefficient can, under any contact loading condition, be determined using methods completely different from the existing methods based on the measurements of contact load and friction force. The proposed method refers to the determination of kinetic friction coefficient using the dynamic equation of motion for a rotating body, where the active force acts on the rotating body only at the initial moment of motion, while body masses, which are concentrically and eccentrically distributed in relation to the axis of rotation, provide a static and dynamic component of a desired 'sleeve-bearing' contact load. If the body angle of rotation change is experimentally determined as a function of time, then, based on the dynamic equation of motion, it is possible to determine the current friction coefficient values for the entire time period from the start of the motion to the rotation stop. It can be said that acceleration is a physical and energy indicator for friction and energy dissipation in tribomechanical systems, and that it defines the complete dynamics of the friction process itself.

**Key words:** Kinetic friction coefficient, dynamic contact load, dynamic equation of motion, angular acceleration.

## 1. INTRODUCTION

The first published theoretical research related to the determination of kinetic friction coefficient via the dynamic equation of motion for a body moving down an inclined plane was published by Euler in 1748 [1]. In a paper "On the friction of solid bodies" [2], published in 1750, Euler analyzed the motion of a body down an inclined plane and expressed the coefficient of friction as a function of time. His approach enables the determination of the kinetic coefficient of friction based on experimental measurements. Unfortunately, it is safe to say that this method has not experienced a wider expansion in the scientific field and, especially in the field of design of contemporary tribodiagnostic equipment.

Papers based on (or related to) Euler's research are mainly published in journals regarding education in the field of physics. Examples of this are papers based on analysis of the motion of a body on an inclined plane, that start from the equation of motion and establish relations between the coefficient of rolling friction and acceleration [3, 4] or follow nonlinear changes in the coefficient of rolling friction as a function of energy 'losses' [5].

In the education field, Alam J. et al. [6] deals with the dynamics of rotational motion, developing a simple method for experimental determination of friction losses based on the moment of inertia of a disk that is alternately rotating clockwise and counterclockwise. Applying the relations between translational and rotational motion, they indicated a linear dependence of the friction losses, i.e. the moment of friction, on the angular velocity. Drosd R. and Minkin L. [7] also used a simple laboratory device to study the effects of friction between two discs coming into contact while one of the discs rotates. The kinetic friction coefficient was determined based on a few basic parameters, namely, it was concluded to be dependent on the stationary disk radius, gravitational acceleration, and angular acceleration of the disk.

The specifics of motion of a disk rotating on a flat surface, in the field of education also known as 'Euler's disc', have often been examined in a literature. In addition to a review of papers on this topic, C. Le Saux et al. [8] proposed a numerical model of such motion, using Euler parameters, i.e. quaternions for parametrization of the variable orientation of the disc, taking into consideration limitations of contact parameters and different types of friction models.

In the field of applied research, Fujii, Y. et al. [9] proposed a method for the determination of the dynamic coefficient of friction in a linear bearing, which is based on a modification of the Levitation Mass Method (LMM) and the application of a laser interferometer. Unlike conventional methods for determining bearing friction, which employ force transducers [10] or standard-defined inclined plane-based tests [11], Fujii, Y. et al. [9] directly measure the force acting on the moving part of the bearing, expressing it as a product of mass and acceleration of the center of mass.

T. Jankowiak et al. [12] provide an optimal analysis for an accurate assessment of the dynamic coefficient of friction using a tribometric device. To better understand this method of precise coefficient of friction definition under dynamic loading, a three-dimensional finite element model (FE) has been developed. Based on the FE analysis, a new methodology for the determination of the dynamic coefficient of friction by introducing a correction factor has been proposed. This correction factor depends on the initial velocity and pressure for any coefficient of friction value.

F. Marques et al. [13] examined and compared several friction force models concerning different friction phenomena in the context of multibody system dynamics. On one hand, static friction models are generally simpler and they describe the stationary behavior of the friction force. However, most of them display an inability to properly 'capture' the effects of friction. Several static models present a discontinuity of the friction force at zero velocity, which can cause numerical instability during

dynamic simulation. On the other hand, dynamic models use extra state variables in order to account for additional physical friction phenomena. These models are more complex and require the determination of a larger number of parameters. Friction models show a more significant difference in acceleration, mainly with the presence of changes in the velocity direction. In general, for detailed modeling of the friction phenomenon, it is necessary to use a friction model with a large number of parameters. In the most cases, these parameters need to be experimentally determined.

One of a few papers based on Euler's idea to determine the kinetic friction coefficient using the differential equation of motion was published in a thematic journal in the field of tribology [14]. In order to study the friction between grains of granular material at motion, Mihajlovic et al. [14] developed a method and physical model of a vibrating platform. They have theoretically and experimentally proven that the coefficient of friction between sand grains and sieve can be reliably determined using the dynamic equation of motion in real operating conditions of the vibrating platform. The results of this research indicate that the coefficient of friction can, even in this otherwise very complex process, be determined based on the differential equation of motion for a granule of sand. The obtained results are very compatible with the results obtained by standard and considerably more complex methods. This research is based on Euler's research but at the same time, it generalizes the application of the method for significantly more complex tribological processes compared to the study of friction for a body moving down an inclined plane.

Following Euler's idea, a large number of tribometers intended for the determination of kinetic friction coefficient were realized within the Center for Revitalization of Industrial Systems at the Faculty of Engineering, University of Kragujevac. Results of the published research [14-17] indicate a great potential for this method in terms of an essential understanding of dynamic processes, friction phenomena, and a wide range of possible applications. The method of determination of kinetic friction coefficient based on differential equations of motion is, in essence, related to the measurement of three base units of the SI system (mass, time, and length), which is a significant advantage in a theoretical, experimental, and technological sense.

## 2. THEORETICAL BASIS OF THE METHOD

The method for the determination of kinetic friction coefficient under dynamic loading conditions is, in general, based on the differential equation of body motion. The motion of a body rotating around a fixed axis (Figure 1) is described by a differential equation:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum M_i = M_a - M_t - M_w \quad (1)$$

where:  $I$  - mass moment of inertia;  $\omega$  - angular velocity;  $M_a$  - active moment initiating motion;  $M_t$  - resulting moment of the integral sum of the elementary resistant moments of friction over the contact surface;  $M_w$  - resulting moment of air resistance.

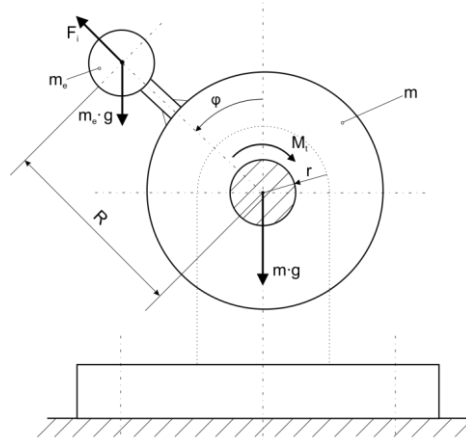


Fig 1. – Schematic representation of the distribution of active and resistive forces when the body is rotating around a fixed axis.

If the body's angle of rotation change is experimentally determined as a function of time, then, based on the dynamic equation of motion, it is possible to determine the current friction coefficient values for the entire time period from motion initiation to the moment body stops to rotate.

After the action of an impulse of a force which, in a short time interval  $\Delta_{tI}$  initiates motion via the active moment  $M_a$  from the differential equation (1), for a time interval  $\Delta_{tI} < t$  it follows that  $M_a = 0$ , which means that in the stated time interval ( $\Delta_{tI} < t$ ) the body's motion continues without the presence of the active moment, using the energy accumulated by the moment of impulse.

The drag force which creates the moment of resistance  $M_w$  can be determined based on the drag coefficient, the rotational speed and the size of a surface the air resistance force acts on [17]. Based on the research results [17] it follows that for the speed interval  $V < 3 \text{ m/s}$  the drag force can be neglected as a lower order quantity, i.e:

$$M_a = 0, F_w \rightarrow 0 \quad (2)$$

Having that in mind, differential equation (1) can be written in the following form:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_t = F_t \cdot r \quad (3)$$

where:  $M_t$  - moment of friction;  $F_t$  - resulting friction force at contact;  $r$  - radius at which elementary friction forces act (Figure 2).

The resulting moment of friction is the only unknown variable in the differential equation of motion and based on Figure 2 it is determined by the expression:

$$M_t = \iint r \cdot dF_t = F_t \cdot r \quad (4)$$

which defines the total friction force as an integral sum of the elementary friction forces over the contact surface.

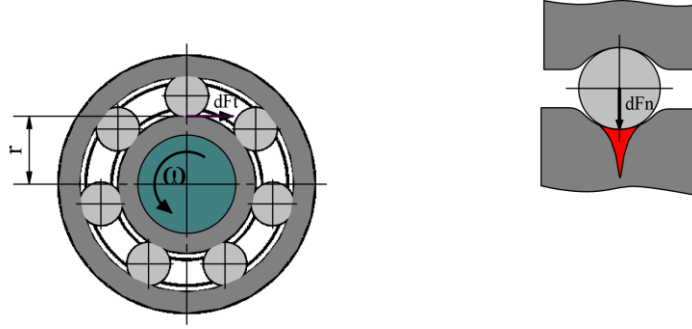


Fig. 2. – Schematic representation of the distribution of the sliding friction or rolling friction resistive forces when the body rotates around a fixed axis.

Based on the schematic representation given in Figure 1, the friction force  $F_t$  can be defined as a function of the coefficient of friction, the component of the static contact load  $F_s = (m + m_e) \cdot g$  and the component of the dynamic contact load  $F_d = m_e \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi$  by equation:

$$F_t = \mu \cdot F_N = \mu \cdot [(m + m_e) \cdot g - m_e \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi] \quad (5)$$

Substituting the friction force value from equation (5) to equation (3) gives the equation:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = \mu \cdot r \cdot [(m + m_e) \cdot g - m_e \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi] \quad (6)$$

From (6) follows the final expression for the calculation of the kinetic friction coefficient value under dynamic loading conditions as a function of the angle of rotation and angular velocity.

$$\mu = \frac{I \cdot \frac{d\omega}{dt}}{r \cdot [(m + m_e) \cdot g - m_e \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi]} \quad (7)$$

Based on the known theoretical expressions, angular velocity and angular acceleration can be determined by numerical differentiation using expressions:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \quad (8)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \quad (9)$$

From the previously stated theoretical considerations, it can be concluded that experimental determination of change in angle of rotation, as a function of time, enables the determination of kinetic friction coefficient value under dynamic loading conditions, for the entire time period, from motion initiation to the moment when body stops to rotate.

### 3. EXPERIMENTAL VERIFICATION OF THE THEORETICAL MODEL

Experimental verification of the previously stated theoretical model was realised at a preliminary device shown in Figure 3.

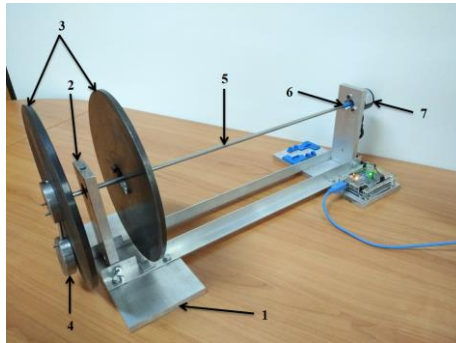


Fig. 3. – Device for determining the coefficient of friction of dynamically loaded bearings.

The device consists of a mount (position 1) to which the bearing housing is rigidly attached (position 2) in which the test specimen is situated (a rolling-element bearing). Two discs of the same shape and mass (position 3) are placed at the same distance on both sides of the rolling bearing, representing a symmetrical loading of the bearing  $m$ . Smaller weights (position 4) are attached to the discs (position 3) at a distance  $R$  from the bearing axis, representing an eccentric mass  $m_e$ . The  $m_e$  mass provides the dynamic bearing load during the testing. Thin shaft (position 5) transmits motion from the rolling bearing inner ring, via an elastic coupling (position 6) to a rotary encoder (position 7) which registers the change in angle of rotation as a function of time and which is the only measuring component necessary to determine the kinetic friction coefficient.

Customized software has been developed, based on the previous equations, which enables the display of current kinetic friction coefficient values, for the given loading conditions, throughout the entire time period of rotation, by using Arduino.

This software provides numerical values and diagrams of the friction coefficient as a function of time, as well as change in sliding speed, change in the normal contact load  $F_n$ , and changes in the angular velocity  $\omega$  and angular acceleration  $\varepsilon$  with time, for the known input values (total mass  $m = 4.3$  kg, eccentric mass  $m_e = 0.3$  kg, mass moment of inertia  $I = 0.02441$  kgm<sup>2</sup>, eccentricity  $R = 0.075$  m and bearing radius  $r = 0.005$  m). Figures 4 to 8 show the corresponding diagrams.

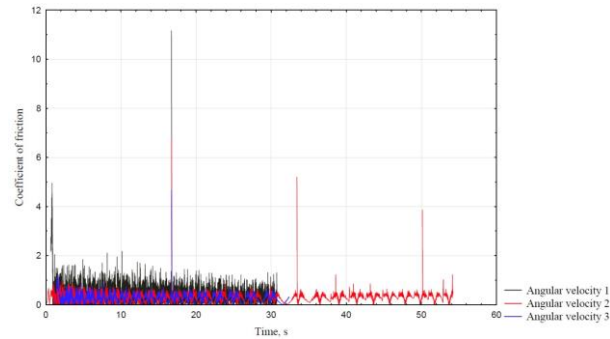


Fig. 4. – Friction coefficient change during time, for three different dynamic contact load levels.

The change in angle with time is shown in Figure 5a, the change in angular velocity with time is shown in Figure 5b, and the change dynamic contact load with time is shown in Figure 6, and they all in correspondence with the change in the coefficient of friction diagram shown in Figure 4.

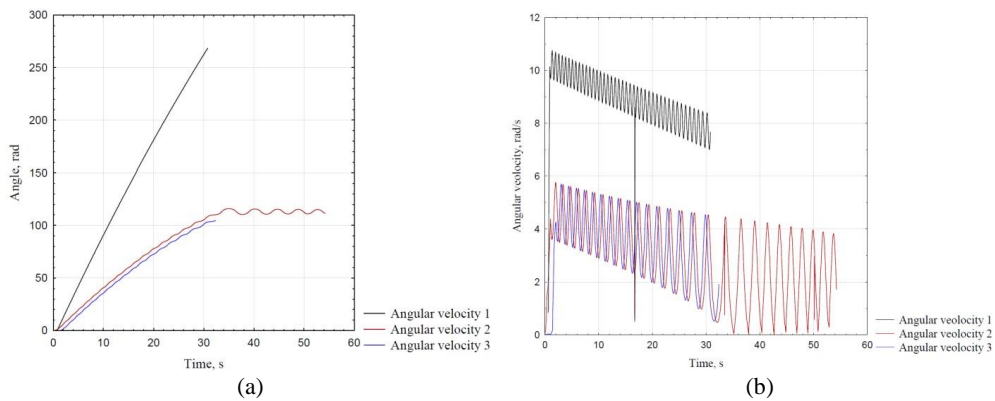


Fig. 5. – (a) Change in the angle of rotation as a function of time, (b) Change in the angular velocity as a function of time.

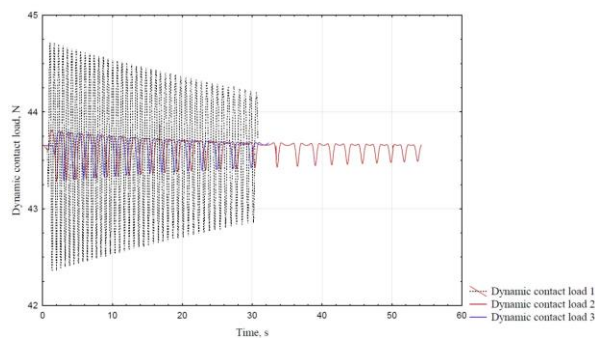


Fig. 6. – Change in the level of the dynamic contact load as a function of time.

Comparative diagrams of change in angular acceleration and change in the coefficient of friction as functions of time are shown in Figures 7a and 7b.

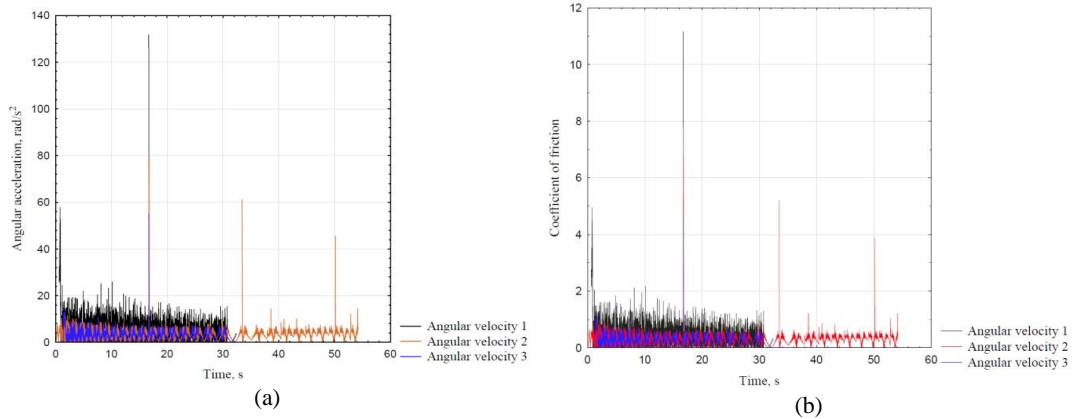


Fig. 7 – Diagrams of change in angular acceleration (a) and change in the coefficient of friction (b) as functions of time.

A comparative diagram of change in the coefficient of friction with time, due to elimination – disassembly of the eccentrically positioned mass (shown in Figure 3 at position 4) and a large reduction in the dynamic contact load component is shown in Figure 8.

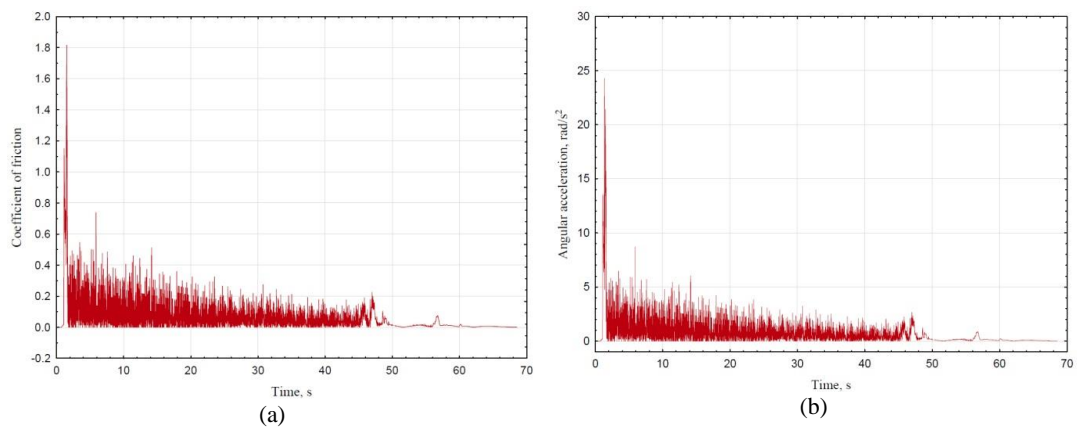


Fig. 8. – Diagrams of change in the coefficient of friction (a) and angular acceleration (b) with time due to a reduction in the dynamic contact load component.

Diagrams of change in angular velocity and change in the normal contact load level shown in Figure 9 (a, b) correspond to the diagrams shown in Figure 8.



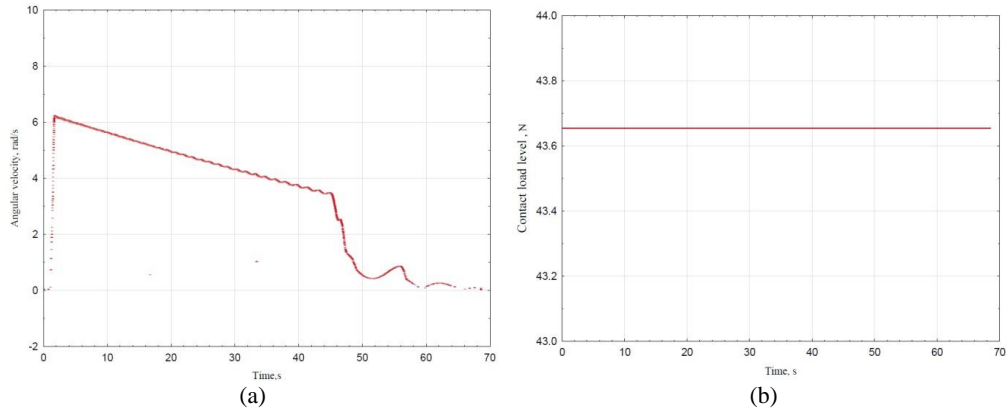


Fig. 9. – Diagram of change in angular velocity (a) and contact load level (b) with time.

Levels of change in the speed of rolling at the friction zone in the rolling-element bearing are shown by the diagram in Figure 10.

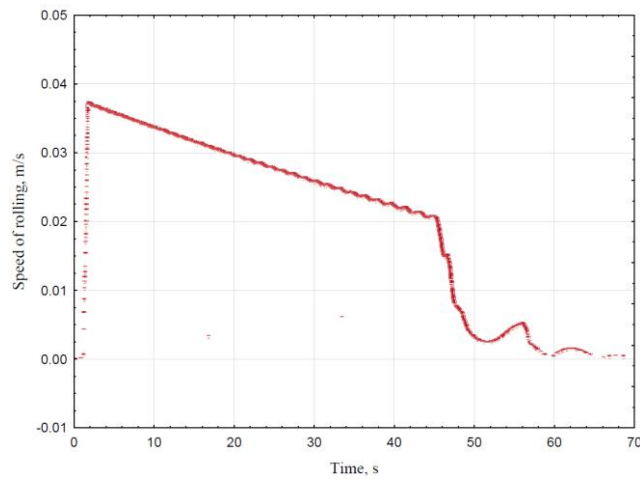


Fig. 10. – Levels of change in the speed of rolling at the friction zone in the rolling-element bearing.

The influence of the dynamic contact load component for the stated test conditions is illustrated in Figure 11 by a comparative diagram of the change in the coefficient of friction for a relatively short time interval.

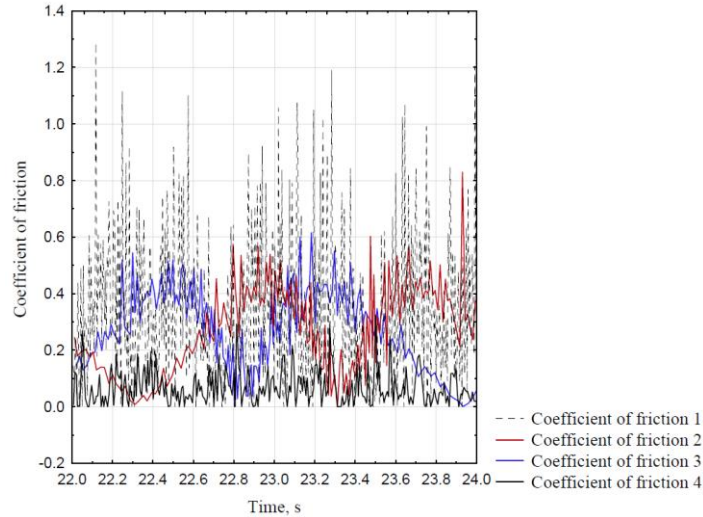


Fig. 11. – The influence of the dynamic contact load component illustrated by a diagram of the change in the coefficient of friction for a relatively short time interval.

#### 4. DISCUSSION

From the literature analysis, it can be concluded that energy losses and the friction phenomenon are very interesting problems in the field of education, research, and development of contemporary tribodiagnostic equipment. Kinetic friction occurs during the relative motion of two bodies in contact, during the action of a force or a moment that provides the motion. Tribometry methods for experimental determination of the kinetic friction coefficient are based on the measurement of friction force at a certain level of normal contact load and a certain speed of relative motion of one contact element in regards to another, while the other contact conditions (microgeometry of contact pairs, temperature level in the contact zone, type of lubricant, etc) can be varied within wide limits. Research results related to the determination of the kinetic friction coefficient under dynamic loading conditions, using the conventional methods, are presented in papers [12, 18] and, in general, they indicate great compatibility of conventional methods with the method presented in our article. The stated conclusion of compatibility between the methods arises from the comparison of trends in the dynamics of changes in the coefficient of friction and the obtained values of coefficients of friction according to conventional methods and the method proposed here.

Based on analysis of differential equation (1) describing the motion of a body rotating in the presence of the resistive force of friction, that equation should be valid regardless of the tribometry method used for determination and measurement of the friction force value.

In the case of conventional methods based on friction force measurement, it follows that differential equation (1) will be satisfied only when the angular acceleration is  $\varepsilon = d\omega / dt \rightarrow 0$ , which these methods already imply. In order for the angular acceleration value to be zero, the angular velocity must be constant. Different types of electric motors (synchronous, induction, and DC motors) are the most common driving elements in tribometers. It is a fact that the actual number of revolutions of an electric motor in real operating conditions can significantly deviate from the nominally declared number of revolutions, especially for induction and DC motors. That depends on the installed engine power, engaged engine power, and other factors. Even the small short-term deviations in angular velocity can lead to significant changes in angular acceleration value ( $\varepsilon = d\omega / dt$ ) that, when multiplied by the mass moment of inertia ( $I$ ), leads to a certain measurement error value.

The proposed method for determination of the kinetic friction coefficient under dynamic loading conditions indicates a theoretical dependence between angular acceleration and the coefficient of friction. The diagrams in Figures 7 and 8 clearly show that the trend of changes in the coefficient of friction follows the trend of changes in the angular acceleration.

From the equation (7), when  $m_e = 0$ , follows:

$$\mu = \frac{I \cdot \frac{d\omega}{dt}}{r \cdot m \cdot g} \quad (10)$$

This means that the coefficient of friction under 'static' contact loading conditions is equal to the product of a constant and the angular acceleration, i.e.:

$$\mu = \frac{I \cdot \frac{d\omega}{dt}}{r \cdot m \cdot g} = C \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (11)$$

where constant  $C$  depends on the contact conditions and equals:

$$C = \frac{I}{r \cdot m \cdot g} \quad (12)$$

From the diagrams in Figures 7 and 8, it can be seen that the experimentally obtained functions of the change in the coefficient of friction and the change in the angular acceleration have an identical responses at all times. Experimental functions which are shown in Figures 7 and 8 are graphical illustration of the software processing of more than 6000 raw data points related to the current values of measured angle and time. The values of angular velocity, acceleration and coefficient of friction were calculated according to the theoretical model presented in this paper. Almost identical shape of the curves exhibited for the angular acceleration and the friction coefficient strongly indicate that we can consider acceleration to be closely connected with friction coefficient and can be taken as its indicator.

Equation (7) for a general case, which defines the coefficient of friction, for specific experiment conditions, can be written in the form:

$$\mu = \frac{C_1 \cdot \varepsilon}{C_2 - C_3 \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi} \quad (13)$$

where constants  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) have defined values, i.e.:

$$C_1 = I; C_2 = r \cdot [(m + m_e) \cdot g]; C_3 = r \cdot m_e \cdot R$$

Coefficient of friction  $\mu$  defined by the equation (13), in a mathematical sense, represents a complex function of angle  $\varphi$  and angular velocity squared  $\omega^2$ .

If regression analysis with linear function:

$$\mu = k \cdot \varepsilon \quad (14)$$

is performed on experimentally obtained series of values of acceleration and coefficient of friction, which for one performed and shown experiment amounts to around 6000 data for each of them, very high correlation were obtained with correlation coefficients close to one, for all performed experiments. Obtained constant values  $K_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) were almost the same and for the demonstrated experiments they are in the range of  $0.08358 \div 0.0849$ , with a maximum deviation of as little as 1.3%.

Based on the equations (13) and (14) it follows that the experimental data processing provided very similar equation:

$$k \cdot \varepsilon = \frac{C_1 \cdot \varepsilon}{C_2 - C_3 \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi} \quad (15)$$

where the constant  $k$  is:

$$k = \frac{C_1}{C_2 - C_3 \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi} \quad (16)$$

From the equation (3) arises the theoretical relation between the friction force and angular acceleration, as:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_t = F_t \cdot r \rightarrow F_t = \frac{I \cdot \frac{d\omega}{dt}}{r} = \frac{I}{r} \cdot \varepsilon \quad (17)$$

It is obvious that the friction force is, in this case, the product of the ratio of two constants,  $I/r$  and angular acceleration  $\varepsilon$ , which, in a theoretical sense, shows the angular acceleration as a kind of indicator for the friction phenomenon.

## 5. CONCLUSIONS

Based on the results of theoretical and experimental research presented in this paper, it can be concluded that the kinetic friction coefficient, under complex dynamic

contact loading conditions, can be quite reliably determined based on the differential equations of body in motion, in presence of the resistive friction force. The methodology for determining the coefficient of friction has been reduced to measuring the two basic physical quantities, angle of rotation and time, which has a significant advantage over conventional methods for determination of the friction coefficient, from both the theoretical and experimental approaches. Our experimental verification has indicated theoretical relation between angular acceleration and coefficient of friction. Changes in acceleration, at any amplitude and frequency, exist in every dynamic system and they can largely explain the enigma of the kinetic friction coefficient. The authors of this paper consider acceleration as a kind of physical and energy indicator of friction and of energy dissipation in tribomechanical systems.

This method is especially significant in the field of education and essential understanding of the friction phenomenon. The fact that this method is based on the measurement of basic physical quantities (time, distance traveled, angle of rotation) allows the formation of reliable measurement chains and their location outside the contact zone, which considerably simplifies tribological research in high-temperature environments, controlled vacuum levels, aggressive environments, and other extreme conditions.

Here presented method showed high reliability of the results, thus indicating great potential for the application in research, and development of tribodiagnostic equipment.

#### REFERENCES

1. V. P. Zhuravlev, On the history of the dry friction law. *Mech. Solids*, **48**, 364–369 (2013).
2. L. Euler, Sur le frottement des corps solides. *Memoires de l'academie des sciences de Berlin* 4, 122-132 (1750). <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/143/>. Accessed 23 January 2022
3. K. Maslova, V. L. B. De Jesus, D. G. G. Sasaki, Understanding the effect of rolling friction in the inclined track experiment. *Phys. Educ.*, **55**, 055010 (2020).
4. Z. Yan, H. Xia, Y. Lan, J. Xiao, Variation of the friction coefficient for a cylinder rolling down an inclined board. *Phys. Educ.*, **55**, 015011 (2017).
5. S. Chakrabarti, R. B. Khaparde, A. H. Kachwala, Experimental study of the coefficient of rolling friction of the axle of a Maxwell's wheel on a soft horizontal surface. *Eur. J. Phys.*, **41**, 035803 (2020).
6. J. Alam, H. Hassan, S. Shamim, W. Mahmood, M. S. Anwar, Precise measurement of velocity dependent friction in rotational motion. *Eur. J. Phys.*, **32**, 1367 (2011).
7. R. Drosd, L. Minkin, Measuring the coefficient of kinetic friction by exploring dynamics of rotational motion. *Phys. Teach.*, **58**, 176 (2020).
8. C. Le Saux, R. I. Leine, C. Glocker, Dynamics of a rolling disk in the presence of dry friction. *J. Nonlinear Sci.*, **15**, 27-61 (2005).
9. Y. Fujii, K. Maru, T. Jin, P. P. Yupapin, S. Mitatha, A method for evaluating dynamical friction in linear ball bearings. *Sensors*, **10**, 10069-10080 (2010).
10. E. Durak, C. Kurbanolu, A. Bıyıklıolu, H. Kaleli, Measurement of friction force and effects of oil fortifier in engine journal bearings under dynamic loading conditions. *Tribol. Int.*, **36**, 599-607 (2003).
11. K. Budinski, An inclined plane test for the breakaway coefficient of rolling friction of rolling element bearings. *Wear*, **259**, 1443-1447 (2005).
12. T. Jankowiak, A. Rusinek, G. List, G. Sutter, F. Abed, Numerical analysis for optimizing the determination of dynamic friction coefficient. *Tribol. Int.*, **95**, 86-94 (2016).

- 
13. F. Marques, P. Flores, J. C. Pimenta Claro, H. M. Lankarani, A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems. *Nonlinear Dyn.*, **86**, 1407-1443 (2016).
  14. G. Mihajlović, M. Gašić, M. Savković, S. Mitrović, B. Tadić, Vibroplatform modelling with allowance for tribological aspects. *J. Frict. Wear*, **38**, 184-189 (2017).
  15. M. Lukovic, J. Miljojkovic, B. Tadic, An inclined plane based instrument for determining the static coefficient of friction at high temperatures. *Rom. J. Phys.* **66**, 909 (2021)
  16. V. Kočović, M. Luković, A. Živković, K. Šimunović, Development of a modular didactic laboratory set for the experimental study of friction. *Teh. Vjesn.*, 29, 269-277 (2022).
  17. Dj. Vukelic, P. Todorovic, K. Simunovic, J. Miljojkovic, G. Simunovic, I. Budak, B. Tadic, A novel method for determination of kinetic friction coefficient using inclined plane. *Teh. Vjesn.*, 28, 447-455 (2021).
  18. B. Sanborn, B. Song, E. Nishida, Development of a new method to investigate the dynamic friction behavior of interfaces using a Kolsky tension bar. *Exp. Mech.*, **58**, 335-342 (2018).