



**УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА**

Александар Радаковић

**ПРИМЕНА СМИЦАЈНИХ ДЕФОРМАЦИОНИХ
ТЕОРИЈА ВИШЕГ РЕДА У МАКРОМЕХАНИЧКОЈ
АНАЛИЗИ КОМПЗИТНИХ ЛАМИНАТА**

Докторска дисертација

Крагујевац, 2015. година

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ	
<i>I. Аутор</i>	
Име и презиме:	Александар Радаковић
Датум и место рођења:	11.05.1982. Крагујевац
Садашње запослење:	Асистент на Државном универзитету у Новом Пазару
<i>II. Докторска дисертација</i>	
Наслов:	ПРИМЕНА СМИЦАЈНИХ ДЕФОРМАЦИОНИХ ТЕОРИЈА ВИШЕГ РЕДА У МАКРОМЕХАНИЧКОЈ АНАЛИЗИ КОМПОЗИТНИХ ЛАМИНАТА
Број страница:	234
Број слика:	59
Број библиографских података:	171
Установа и место где је рад израђен:	Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу
Научна област (УДК):	Примењена механика (531/534.011.012)
Ментор:	Др Драган Милосављевић, ред. проф. Факултета инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу
<i>III. Оцена и одбрана</i>	
Датум пријаве теме:	10. 03. 2014. год
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:	01-1/1855-5 од 19. 06. 2014.
Комисија за оцену подобности теме и кандидата:	<ol style="list-style-type: none"> 1. Др Драган Милосављевић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу. 2. Др Мирослав Живковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу. 3. Др Драган Јовановић, доцент, Машински факултет у Нишу, Универзитет у Нишу. 4. Др Љиљана Вељовић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу. 5. Др Гордана Богдановић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу.
Комисија за оцену докторске дисертације:	<ol style="list-style-type: none"> 1. Др Драган Милосављевић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу. 2. Др Мирослав Живковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу. 3. Др Драган Јовановић, ванр. проф., Машински факултет у Нишу, Универзитет у Нишу. 4. Др Љиљана Вељовић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу. 5. Др Гордана Богдановић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу.
Комисија за одбрану докторске дисертације:	<ol style="list-style-type: none"> 1. Др Драган Милосављевић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу. 2. Др Мирослав Живковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу. 3. Др Драган Јовановић, ванр. проф, Машински факултет у Нишу, Универзитет у Нишу. 4. Др Љиљана Вељовић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу. 5. Др Гордана Богдановић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу.
Датум одбране дисертације:	2015. година

Резиме

У макромеханичкој линеарно-еластичној анализи композитних ламината могуће је користити два усвојена теоријска приступа: приступ континуалности напона и принцип континуалности деформација. У овој дисертацији примарно је развијен поступак анализе ламината заснован на континуалности деформација. У ту сврху разрађене су смицајне деформационе теорије вишег реда.

Недостатке класичне теорије плоча и смицајне деформационе теорије првог реда, које не узимају у обзир геометријску нелинеарност, при деформисању, нормале на средњу површ ламинатне плоче, могуће је отклонити увођењем смицајних деформационих теорија вишег реда. У овој дисертацији детаљно су описане деформационе теорије засноване на функцијама облика, као и полиномне деформационе теорије другог и трећег реда. На основу претпостављених облика померања изведене су компоненте вектора деформације и урађена макромеханичка анализа ламината уз дефинисања матрица које настају као резултат слагања слојева у ламинату.

Приказане су основе варијационог рачуна који се користи за добијање статичких једначина равнотеже и динамичких једначина кретања. Разрађени су најбитнији варијациони принципи који се користе у поменуте сврхе.

Разрађене су аналитичке методе за проучавање статичких проблема савијања и извијања слободно ослоњених ламинатних плоча уз примену смицајних деформационих теорија вишег реда. Такође су разрађени поступци за проучавање модова слободног осциловања ламинатних плоча. Имплементиран је нов поступак за анализу слободних вибрација укрштених и умрежених симетричних и антисиметричних ламинатних плоча. Уведен је и нов поступак за одређивање слободних вибрација умрежених антисиметричних ламината уз примену произвољне смицајне деформационе теорије трећег реда.

Анализирана је пропагација еластичних таласа у композитним ламинатима. Пажња је усредсређена на Ламбове таласе. Проблеми пропагације су посматрани са аспекта 3D еластичне теорије, као и са аспекта примене деформационих теорија вишег реда. Приказан је детаљан поступак примене 3D еластичне теорије за добијање дисперзионих релација у потпуно анизотропном слоју са триклиничким типом симетрије. Такође је приказан поступак раздвајања на симетрични и антисиметрични таласни мод код материјала са моноклиничким типом симетрије. Дате су једначине дисперзионих релација за оба поменута таласна мода. Други део описује примену смицајних деформационих теорија другог реда, као апроксимативних теорија, за добијање дијаграма фазних брзина и дисперзионих релација. Разматрани су материјали чије су конститутивне матрице дефинисане преко инжењерских константи, као и материјали са конститутивним матрицама дефинисаним преко поља привилегованих праваца. За сваки од материјала описана је појава квазимодова који настају као резултат слагања слојева.

Abstract

In macro mechanical linear-elastic analysis of composite laminates, it is possible to use two adopted theoretical approaches: stress continuity approach and the principle of strain continuity. This thesis primarily develops the process of strain continuity based laminate analysis. With this aim higher-order shear deformation theories are developed.

The disadvantages of the classical plate theory and the first-order shear deformation theory, which do not take into consideration geometric non-linearity of the line normal to the middle plane of a laminate plate upon deformations, can be eliminated by introducing higher-order shear deformation theories. The present thesis presents in details deformation theories based on shape functions as well as second and third order polynomial deformation theories. Based on the assumed displacement fields, components of deformation vector are derived and macro mechanical analysis of laminates is done defining the matrices which occur as a result of stacking of plies in a laminate.

Moreover, the basics of variation calculations are presented, which is used for obtaining static equations of equilibrium and dynamic equations of movement. The thesis develops the most important variation principles that are used for these purposes.

Analytical methods are developed for examining bending and buckling static problems of simply supported laminate plates using higher-order shear deformation theories. The thesis also elaborates the models of examining the modes of laminate plate free vibrations. A new approach is implemented for analysing free vibrations of cross-ply and angle-ply symmetric and anti-symmetric laminate plates. Moreover a new approach is introduced for determining free vibrations of angle-ply anti-symmetric laminates applying any third-order shear deformation theory.

The propagation of elastic waves in composite laminates is analysed with the focus on Lamb's waves. Propagation problems are considered from the aspect of 3D elasticity theory as well as from the aspect of higher-order deformation theories application. The process of applying 3D elasticity theory for obtaining dispersion relations in a completely anisotropic layer with triclinic type of symmetry is presented in details. Moreover, the process of separation into symmetric anti-symmetric wave mode in materials with monoclinic type of symmetry is presented. Equations of dispersion relations for both mentioned wave modes are given. The second part describes application of second-order shear deformation theory, as approximation theories, for obtaining phase velocity diagrams and dispersion relations. The thesis also considers materials the constitutive matrices of which are defined through engineering constants, as well as materials with constitutive matrices defined through privileged direction fields. For each material, quasi-modes are described which occur as a result of stacking of plies.

Готово несвестан да је изради ове докторске дисертације дошао крај, користим ову прилику да се захвалим свима који су веровали у мене и пружали ми подршку да истрајем и верујем у себе у тренуцима када ми је понестајало воље и снаге за даљи рад.

Посебну захвалност дугујем свом ментору, професору др. Драгану Милосављевићу, на стручности, професионалној помоћи, стрпљењу и огромном разумевању током рада. Његови животни савети, охрабрујуће речи и корисне сугестије, константно су ми давали вољу и мотивацију за рад.

Захвалио бих се и доценту др. Љиљани Вељовић на свему што је за мене учинила почев од студентских дана, па до дана данашњег. Академски пут којим корачам је пут који је добрим делом утабан и њеним знањем, које ми је безрезервно поклањала, родитељским саветима и подршком коју је речима тешко описати. Доценту др. Гордани Богдановић дугујем захвалност за непрекидан подстицај, подршку и несебичну помоћ у сваком проблему који је превазилазио моје могућности и који би без њене помоћи тешко био решив. За корисне сугестије захваљујем се и члановима комисије, професорима др. Мирославу Живковићу и др. Драгану Јовановићу.

Такође се захваљујем колегама и пријатељима, Драгану Чукановићу, на пријатељској подршци и техничкој помоћи и Цеваду Долићанину на искреној бризи и жељи за мојим успехом.

Највећу захвалност дугујем својој породици. Мајци Ружици, оцу Богољубу и сестри Катарини чија је огромна љубав надјачала све моје слабости и увек ме водила путем успеха. На самом крају, желим да се захвалим онима без којих, са моје тачке гледишта, читав рад не би имао правог смисла. Својој супрузи Горани, која је имала снаге, воље и љубави да прихвати сва одрицања која смо морали заједно да прођемо и свом сину Вуку, чији је сваки корак осмехом обасјавао моје лице и који је моја највећа звезда водиља.

Захвалницу не могу да завршим а да се не осврнем на успомену на најдражу професорку, др. Веру Николић - Станојевић. Срећан сам што сам је познавао и са жаљењем се сећам топлих речи охрабрења које ми је пружала.

САДРЖАЈ

Увод	1
1 Основни појмови теорије еластичности	8
1.1 Успостављање веза између напона и деформација - појам конститутивних релација..	13
1.2 Класе симетрије у зависности од броја независних коефицијената у конститутивној матрици.....	17
1.3 Трансформације матрице еластичности.....	18
1.4 Изражавање елемената конститутивне матрице преко инжењерских константи.....	21
1.5 Извођење конститутивних релација помоћу поља привилегованих праваца	28
2 Теорије ламинатних плоча са посебним освртом на смицајне деформационе теорије вишег реда	33
2.1 Подела ламинатних плоча	34
2.2 Теоријске основе ламинатних плоча - Ламинатне теорије засноване на принципу континуалности деформација	36
2.2.1 Класична ламинатна теорија - Classical lamination theory (CLT).....	37
2.2.2 Смицајна деформациона теорија првог реда - First-order shear deformation theory (FSDT)	39
2.2.3 Смицајне деформационе теорије вишег реда – Higher-order shear deformation theories (HSDT)	40
2.2.3.1 Смицајне деформационе теорије вишег реда са различитим смицајним деформационим функцијама облика	42
2.2.3.2 Смицајна деформациона теорија другог реда – Second-order shear deformation theories (SSDT).....	46
2.2.3.3 Смицајна деформациона теорија трећег реда – Third-order shear deformation theories (TSDT).....	47
2.2.3.4 Смицајне деформационе теорије трећег реда према Редију и Робинсону	49
3 Примена различитих деформационих теорија у макромеханичкој анализи композитних ламината	52
3.1 Анализа композитног ламината заснована на класичној теорији плоча	53
3.2 Анализа композитног ламината заснована на смицајној деформационој теорији првог реда.....	57
3.3 Макромеханичка анализа композитног ламината заснована на смицајним деформационим теоријама вишег реда	60
3.3.1 Примена деформационих теорија заснованих на функцијама облика.....	61
3.3.2 Примена смицајне деформационе теорије другог реда	63
3.3.3 Примена смицајне деформационе теорије трећег реда	67
3.3.4 Примена деформационе теорије уведене од стране Редија и Робинсона	71
4 Примена варијационих метода у статичкој и динамичкој анализи композитних ламината	77
4.1 Виртуално померање и виртуални рад.....	77
4.2 Варијациони оператор.....	79
4.3 Принцип виртуалних померања.....	80
4.3.1 Принцип минималне укупне потенцијалне енергије	81
4.3.2 Хамилтонов принцип	82
4.4 Примена варијационих принципа у статичкој анализи композитних ламината	83
4.5 Примена варијационих принципа у динамичкој анализи композитних ламината	85

5	Математичке методе за решавање проблема статичке и динамичке анализе композитног ламината.....	89
5.1	Примена аналитичких метода у анализи извијања композитних ламината (<i>buckling analyses</i>).....	89
5.1.1	Примена HSDT заснованих на смицајним функцијама облика у анализи извијања симетричних укрштених композитних ламината.....	90
5.2	Примена аналитичких метода у анализи савијања укрштених симетричних композитних ламината (<i>bending analysis</i>).....	96
5.2.1	Примена HSDT заснованих на смицајним функцијама облика у анализи савијања симетричних укрштених композитних ламината.....	97
5.2.2	Примена смицајне деформационе теорије трећег реда уведене од стране Канта у анализи савијања симетричних укрштених композитних ламината.....	103
5.3	Примена аналитичких метода у анализи слободних вибрација симетричних композитних ламината (<i>free vibration analyses</i>).....	108
5.3.1	Примена HSDT заснованих на смицајним функцијама облика у анализи слободних вибрација симетричних укрштених композитних ламината.....	109
5.3.2	Примена HSDT заснованих на смицајним функцијама облика у анализи слободних вибрација антисиметричних умрежених композитних ламината.....	113
5.3.3	Примена Смицајне деформационе теорије трећег реда уведене од стране Канта у анализи слободних вибрација укрштених симетричних и антисиметричних ламината.....	120
5.3.4	Примена Смицајне деформационе теорије трећег реда уведене од стране Канта у анализи слободних вибрација умрежених антисиметричних ламината.....	123
6	Примена метода коначних елемената у анализи композитних ламината	128
6.1	Интерполационе функције.....	129
6.1.1	Интерполациони полиноми у функцији броја степени слободе чворова коначног елемента.....	131
6.2	Природне координате раванских четроугаоних елемената са четири и девет чворова.....	132
6.3	Примена изопараметарске формулације коначних елемената у анализи линеарног коначног елемента са четири чвора.....	135
6.4	Моделирање ламинатних плоча коришћењем коначног елемента под називом - ламинат (<i>laminat</i>).....	137
7	Еластични таласи као вид динамичког оптерећења	143
7.1	Пропагација еластичних таласа заснована на принципу континуалности напона - 3D еластична теорија.....	144
7.1.1	Метод трансфер матрице.....	155
7.2	Примена HSDT теорија у анализи пропагације еластичних таласа.....	158
7.2.1	Примена смицајне деформационе теорије другог реда у анализи пропагације еластичних таласа кроз симетричне композитне ламинате.....	159
8	Имплементација развијених теорија у програмски пакет Матлаб. Креирање софтвера.....	176
8.1	Кратак приказ интерфејса програма.....	177
9	Закључна разматрања.....	181
	Литература:	188
	Додатак.....	197

ЛИСТА СЛИКА

Слика 1.1.	Напони на инфинитезималном делу запремине облика паралелопипеда.....	9
Слика 1.2.	Равнотеже инфинитезималног дела запремине облика тетраедра.....	10
Слика 1.3.	Коначни део запремине оптерећен површинским напонима и унутрашњим силама	11
Слика 1.4.	Приказ ортотропног лејера	23
Слика 1.5.	Анизотропни танки лејер за моноклиничким типом симетрије гледано у односу на глобални x, y, z координатни систем	25
Слика 1.6.	Геометрија влакана материјала ојачаног двама фамилијама влакана	31
Слика 2.1.	Слојевити композитни материјал-ламинат конституисан од једнодирекционих слојева различите оријентације	34
Слика 2.2.	Два типа деформисања ламината под дејством аксијалног оптерећења.....	35
Слика 2.3.	Слојевити композитни материјал-ламинат конституисан од једнодирекционих слојева различите оријентације	36
Слика 2.4.	Претпоставке ротације нормале за смицајну деформациону теорију првог реда.....	41
Слика 2.5.	Упоредни приказ деформационих теорија.....	42
Слика 2.6.	Дијаграми функција облика датих у табели под редним бројевима 1,2,3,4,8,9,13,14 за различите вредности h	46
Слика 2.7.	Дијаграми функција облика датих у табели под редним бројевима 11, 16 за различите вредности h	46
Слика 2.8.	Дијаграми функција облика које не спадају у две јасно издвојене групе функција при вредности $h=4$	47
Слика 3.1.	Компоненте резултирајућег оптерећења	57
Слика 3.2.	Оптерећења по јединици ширине.....	61
Слика 5.1.	Ламинатна плоча на којој се дефинишу контурни услови	95
Слика 5.2.	Дијаграмски приказ бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$	99
Слика 5.3.	Дијаграми нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{xy}$ у зависности од односа z/h , а при односу $a/h=10$	106
Слика 5.4.	Дијаграми нормализованих вредности напона $\bar{\sigma}_{xx}$ у зависности од односа z/h , а при фиксираној вредности $a/h=10$	106
Слика 5.5.	Дијаграми нормализованих вредности напона $\bar{\sigma}_{yy}$ у зависности од односа z/h , а при фиксираној вредности $a/h=10$	106
Слика 5.6.	Дијаграми максималних нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{xz}$ у зависности од односа a/h , а при фиксираној вредности $a/h=10$	107
Слика 5.7.	Дијаграми максималних нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{yz}$ у зависности од односа a/h , а при фиксираној вредности $a/h=10$	107
Слика 5.8.	Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\sigma}_{xx}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h=10$	112
Слика 5.9.	Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\sigma}_{yy}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h=10$	112
Слика 5.10.	Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{xy}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h=10$	112
Слика 5.11.	Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{xz}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h=10$	112

Слика 5.12.	Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\epsilon}_{yz}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h = 10$	112
Слика 5.13.	Дијаграми зависности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ у функцији односа a/h за умрежене антисиметричне ламинате	124
Слика 5.14.	Дијаграми зависности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ у функцији односа E_1/E_2 за умрежене антисиметричне ламинате	125
Слика 5.15.	Дијаграми зависности бездимензионе фреквенције у функцији односа a/h и E_1/E_2 за укрштене антисиметричне ламинате састављене од 2,4 и 6 слојева	128
Слика 5.16.	Дијаграми зависности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ у функцији односа a/h за умрежене антисиметричне ламинате	132
Слика 6.1.	Приказ општег дводимезионог елемента са девет чворова	138
Слика 6.2.	Приказ пресликавања четвороугаоног линеарног елемента са четири чвора из Декартовог у локални координати систем	138
Слика 6.3.	Деформација нормале услед савијања и трансверзалног смицања	143
Слика 6.4.	Четвртина модела слободно ослоњене квадратне плоче	147
Слика 7.2	Правац пропагације Ламбових таласа, у равни слоја, у односу на глобални Декартов координатни систем	152
Слика 7.3.	Редни бројеви слојева у ламинату	162
Слика 7.4.	Дијаграми фазних брзина пропагације таласа у слоју при вредности односа $fh/c_L = 0.25$	171
Слика 7.5.	Дијаграми фазних брзина пропагације таласа у ламинату конституисаном од материјала 1 при вредности односа $fh/c_L = 0.25$	171
Слика 7.6 .	Дисперзионе криве, пропагације таласа у једном слоју за фиксирани угао пропагације таласа $\phi = 45^\circ$ и изабран материјал 1.	172
Слика 7.7.	Дисперзионе криве, пропагације таласа у ламинату $[90^\circ/60^\circ/90^\circ/-60^\circ/0^\circ]_s$ за фиксирани угао пропагације таласа $\phi = 45^\circ$ и изабран материјал 1	173
Слика 7.7.ц.	Детаљ приближавања, али не и поклапања модова SH_0 и S_0 у ламинату $[90^\circ/60^\circ/90^\circ/-60^\circ/0^\circ]_s$ за фиксирани угао пропагације таласа $\alpha = 45^\circ$ и изабран материјал 1	174
Слика 7.9.	Дијаграми фазних брзина пропагације таласа у једном слоју при промени угла пропагација за фиксирану вредности односа $fh/c_L = 0.25$	174
Слика 7.10.	Дијаграми фазних брзина пропагације таласа у ламинату при промени угла пропагација за фиксирану вредност односа $fh/c_L = 0.25$	175
Слика 7.11.	Дисперзионе криве пропагације таласа у слоју ојачаном једном фамилијом влакана за фиксирани угао пропагације таласа $\phi = 45^\circ$ и изабран материјал 1 ..	176
Слика 7.12.	Дисперзионе криве у ламинату ојачаном једном фамилијом влакана при вредности бездимензионе фреквенције $fh = 0.25c_L$	176
Слика 7.14.	Дијаграми фазних брзина антисиметричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двома фамилијама влакана при различитим вредностима углова између влакана и фиксираној вредности односа $fh/c_L = 0.25$	177
Слика 7.15.	Дијаграми фазних брзина симетричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двома фамилијама влакана при различитим вредностима углова између влакана и фиксираној вредности односа $fh/c_L = 0.25$	178
Слика 7.16.	Дисперзионе криве антисиметричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двома фамилијама влакана при различитим вредностима углова између влакана и фиксираном углу пропагације $\alpha = 45^\circ$	180

Слика 7.17.	Дисперзионе криве симетричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двома фамилијама влакана при различитим вредностима угла између влакана и фиксираном углу пропагације $\alpha = 45^\circ$	181
Слика 7.17.е.	Детаљ приближавања, али не и поклапања модова SH_0 и S_0 у материјалу ојачаном двома фамилијама влакан за угао пропагације таласа $\alpha = 45^\circ$ и изабран материјал 3.....	182
Слика 8.1.	Визуелни приказ уводног прозора програма	184
Слика 8.2.	Визуелни приказ интерфејса симболичког мода програма	184
Слика 8.3.	Визуелни приказ падајућег менија програма.....	184
Слика 8.4.	Визуелни приказ падајућег менија класе симетрије	185
Слика 8.5.	Визуелни приказ падајућег менија деформационе теорије	185
Слика 8.5.	Визуелни приказ падајућег менија влакнима ојачани материјали	186
Слика 8.6.	Визуелни приказ падајућег менија ламинати	187

ЛИСТА ТАБЕЛА

Табела 1.1	Косинуси углова између два усвојена ортогонална Декартова координатна система	19
Табела 2.1.	Смицајне деформационе функције облика дефинисане од стране различитих аутора	44
Табела 5.1.	Вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$ при извијању симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ за фиксирани однос $a/h=10$ и усвојен материјал 1	97
Табела 5.2.	Вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$ при извијању симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/0^0]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 40$ и усвојен материјал 1	98
Табела 5.3.	Вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$ при извијању симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/0^0]$ за фиксирани однос $a/h=10$ и усвојен материјал 1	100
Табела 5.4.	Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ за фиксирани односе $E_1/E_2 = 25$ и $a/h = 4$ и усвојен материјал 2	103
Табела 5.5.	Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и $a/h = 10$ и усвојен материјал 2	104
Табела 5.6.	Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и $a/h = 20$ и усвојен материјал 2.....	105
Табела 5.7.	Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и $a/h = 100$ и усвојен материјал 2.....	106
Табела 5.8.	Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и усвојен материјал 2	111
Табела 5.9.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ при променљивом односу E_1/E_2 , фиксираним односу $a/h = 5$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1	114
Табела 5.10.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/0^0]$ при променљивом односу E_1/E_2 , фиксираним односу $a/h = 10$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1	115
Табела 5.11.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ при променљивом односу a/h , фиксираним односу $E_1/E_2 = 40$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1	116
Табела 5.12.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/0^0]$ при променљивом односу a/h , фиксираним односу $E_1/E_2 = 25$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 2	117
Табела 5.13.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 30^0$ при променљивом односу a/h ,	

	фиксираном односу $E_1/E_2 = 40$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1	119
Табела 5.14.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 45^\circ$ при променљивом односу a/h , фиксираном односу $E_1/E_2 = 40$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1	120
Табела 5.15.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 30^\circ$ при променљивом односу E_1/E_2 , фиксираном односу $a/h = 10$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1	121
Табела 5.16.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 45^\circ$ при променљивом односу E_1/E_2 , фиксираном односу $a/h = 10$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1	122
Табела 5.17.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta]$, $\theta = 30^\circ$ при променљивом односу a/h , фиксираном односу $E_1/E_2 = 40$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1 ...	123
Табела 5.18.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta]$, $\theta = 30^\circ$ при променљивом односу a/h , фиксираном односу $E_1/E_2 = 40$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1 ...	124
Табела 5.19.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричних и антисиметричних укрштених ламината при променљивом односу a/h , фиксираном односу $E_1/E_2 = 40$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1 ...	127
Табела 5.20.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричних и антисиметричних укрштених ламината при променљивом односу E_1/E_2 , различитом броју слојева, фиксираном односу $a/h = 5$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1	127
Табела 5.21.	Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta\dots]$ при променљивом односу a/h , различитом броју слојева, фиксираном односу $E_1/E_2 = 40$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1	132
Табела 6.1.	Интерполациони полиноми линеарног, квадратног и кубног модела.....	135
Табела 6.2.	Интерполационе функције општег четвороугаоног коначног елемента са девет чворова.....	141
Табела 6.3.	Бездимензионе вредности померања \bar{w} при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и усвојен материјал 2 из поглавља 5.....	147
Табела 6.4.	Бездимензионе вредности померања \bar{w} при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и усвојен материјал 2 из поглавља 5.....	147

Увод

Непрекидни развој индустрије наметнуо је потребу да се конвенционални материјали, где год је то могуће, замене новим савременим материјалима. Тако, на пример, вишеслојни композитни материјали - ламинати се све више употребљавају у авио индустрији, машинству, грађевинарству, аутомобилској индустрији итд. Основне предности ових материјала су велика чврстоћа и јачина у односу на тежину, као и мали трошкови одржавања. Код конвенционалних композитних материјала уочавају се различита механичка својства на међуслојевима услед спајања два дискретна материјала. Као резултат тога обично се јавља концентрација напона на међуслоју, што може да доведе до оштећења ламината попут раслојавања или ломљења матрице и слабљења међусобних веза. Да би се превазишли ови проблеми настали су функционално градијентни (FG) материјали. FG материјал је напредан композитни материјал направљен од две или више фаза са континуалном променом својстава материјала од једне до друге површине, што елиминише концентрацију напона која се јавља код конвенционалних ламинатних композита. Типичан FG материјал је сачињен од мешавине керамике и метала. Генерално, понашање функционално градијентних плоча или љуски под дејством механичког или термичког оптерећења може се анализирати употребом 3D еластичне теорије или еквивалентним теоријама слоја (ESL).

Модел ESL су развијени из 3D еластичне теорије уз одговарајуће претпоставке о кинематици деформације или стању напона дуж дебљине ламинатне плоче или љуске. Самим тим што су ESL теорије изведене из 3D теорије оне се могу сматрати апроксимативним теоријама које су нашле широку примену. У зависности од уведених претпоставки ове теорије могу, али не увек, дати објашњења и за смицајне и за нормалне деформационе ефекте. На пример, класична теорија плоче (CPT), такође позната као Кирхофова теорија (Kirchoff theory) [1], не узима у обзир смицајне ефекте деформације. Према овој теорији нормала на средњу раван плоче у недеформисаној конфигурацији, остаје нормална на средњу раван плоче и након деформације.

Оваква претпоставка о деформацији нормале елиминише појаву смицајних и нормалних деформација дуж дебљине ламината. Стога CPT представља најједноставнији ESL модел и његова употреба је ограничена на танке плоче. Иако наизглед доста једноставна, CPT се и данас доста користи, о чему сведочи велики број радова новијег датума заснованих на овој теорији. Тако су, на пример, *Feldman* и *Aboudi* [2] проучавали еластично извијање (*buckling*) FG плоча под дејством једноосног оптерећења на сабијање користећи комбинацију микромеханичког и структуралног приступа. Кључне једначине изведене из CPT су аналитички решене за оптерећење које изазива извијање FG плоча при различитим контурним условима. *Javaheri* и *Eslami* [3] су искористили CPT да испитају извијања FG плоча под дејством термичког оптерећења. Употребом ове теорије, *Kiani* и остали [4] су представили аналитичка решења за критичне температуре извијања за фиксиране FG еластичне плоче под дејством три различите врсте термичког оптерећења. Извијање FG плоча при неравномерном сабијању испитивао је *Mahdavian* [5] коришћењем CPT и Фуријерових решења. *Mohammadi* и остали [6] су одредили аналитичко решење за проблем извијања FG плоче са две слободно ослоњене стране и две стране са произвољним контурним условима. Основне једначине које су развијене из CPT су аналитички решене коришћењем Левијевог типа решења (*Levy-type*). Померање централне тачке и одзив FG плоча на извијање у области еластичности под дејством раванског и смицајног оптерећења испитивали су *Yanga* и *Shen* [7] користећи CPT са вон Кармановим (*von Karaman*) претпоставкама. *Alinia* и *Ghannadpour* [8]

су такође користили СРТ са вон Кармановим претпоставкама за проучавање нелинеарних одзива FG плоча под дејством трансверзалног притиска. Они су користили принцип минималне потенцијалне енергије за добијање аналитичких решења слободно ослоњене плоче. *Woo* и остали [9] проучавали су нелинеарне вибрације FG плоча у термичком окружењу. Нелинеарне једначине изведене из СРТ са вон Кармановим претпоставкама решене су за FG плоче са произвољним граничним условима користећи методе развоја у редове.

Hu и *Zhang* [10] су такође прихватили СРТ са вон Кармановим претпоставкама за спровођење анализе слободних вибрација и анализе стабилности FG плоча. Слободне вибрације FG плоча коришћењем СРТ при различитим контурним условима у области еластичности истраживали су *Chakraverty* и *Pradhan* [11] користећи Рејли-Рицову методу (Rayleigh–Ritz). *Li* и остали [12] су такође разматрали нелинеарно понашање FG цилиндричних плоча под механичким и термичким оптерећењем користећи СРТ са вон Кармановим претпоставкама. У њиховој студији узете су у обзир геометријске несавршености FG плоча.

Важно је напоменути да спрезање истезања и савијања постоји код FG плоча услед варијација својстава материјала по дебљини. Стога се неутрална површина FG плоче не поклапа са средњом равни плоче. Ово спрезање би се могло елиминисати уколико би се главне једначине извеле на основу неутралне површине. Ову тврдњу су дали *Zhang* и *Zhou* [13] преформулацијом СРТ за FG плоче на основу неутралне површине и након тога добијањем главних једначина кретања у форми изотропних плоча. *Bodaghi* и *Saidi* [14] су прихватили СРТ засновану на неутралној површини како би испитали извијање FG плоча у области еластичности при неравномерном сабијању.

Са циљем да уклони недостатке СТР теорије Миндлин (*Mindlin*) [15] је развио смицајну деформациону теорију првог реда (FSDT) узимајући у обзир смицајне деформационе ефекте линеарном расподелом раванских померања дуж дебљине ламинатне плоче. С обзиром на то да и у овом случају нема деформације нормале на средњу површ ламината, већ она остаје права линија за добијање реалних решења, било је неопходно увести смицајне корекционе факторе. Смицајне корекционе факторе није једноставно одредити због тога што они зависе, не само од геометријских параметара, већ и од оптерећења и контурних услова. Још једна теорија која узима у обзир смицајне деформационе ефекте развијена је од стране Рајзнера (*Reissner*) [16,17]. У литератури је често присутан назив Миндлин-Рајзнерова теорија, мада многи аутори оспоравају такав назив сматрајући да се те две теорије у многоме разликују. Разлике између ових теорија разматрали су *Wang* и остали [18]. Као најбитнију разлику навели су да, из разлога што је Рајзнерова теорија заснована на претпоставци линеарне дистрибуције напона при савијању и параболичке дистрибуције смицајних напона, њена формулација неизбежно води до тога да варијација померања неће нужно бити линеарна дуж дебљине плоче, што је директно супротстављено Миндлиновој претпоставци поља померања. FSDT теорија се најчешће користи у анализи композитних ламината. Треба нагласити да је на овој теорији заснован коначан елемент ламината имплементиран у програмски пакет за анализу конструкција *NX-Nastran*. Мада је FSDT теорија разматрана у великом броју радова, слично као и СРТ, и данас се ова теорија прилично користи, али претежно у нелинеарним проблемима. Тако, на пример, *Della Croce* и *Venini* [19] су представили хијерархијски преглед коначних елемената за анализу FG плоча на савијање под механичким и термичким оптерећењем користећи FSDT и варијационе формулације. *Kim* и остали [20] су испитивали нелинеарно понашање услед савијања код FG плоча и љуски коришћењем FSDT са пуним дефинисањем Гриновог (*Green*) тензора деформације. *Alijani* и други [21] су проучавали нелинеарне вибрације слободно ослоњених FG плоча у термичким окружењима коришћењем

FSDT са вон Кармановим претпоставкама у области линеарне еластичности. Проблеме слободних вибрација разматрали су Fallah и други [22] користећи FSDT и полуаналитички приступ заснован на комбинацији бесконачних степених редова и Канторовичеве (*Kantorovich*) методе. Lanhe [23] и Bouazza и други [24] су извели аналитичка решења за температуру извијања слободно ослоњених FG плоча под дејством термичког оптерећења користећи FSDT и Навијеова (*Navier*) решења. Yaghoobi и остали [25] су проучавали извијање FG сендвич плоча у области еластичности које су под термичким и механичким оптерећењем. Аналитичка решења за анализу слободних вибрација Левијевог (*Levy*) типа плоча у области еластичности дали су Hosseini-Hashemi и други [26] користећи FSDT и Левијево решење. Hosseini-Hashemi и други [27] су унапредили претходни рад [26] објашњавајући ефекат спрезања између раванског и трансверзалног померања. Mohammadi и други [28] су од пет главних једначина равнотеже добијених применом FSDT-а креирали две независне једначине. Добијене једначине су затим решене за оптерећење на извијање FG плоча под раванским оптерећењем користећи приступ Левијевог типа решења. Овај приступ су искористили Saidi и Jomehzadeh [29] да изведу Левијев тип решења за дефлекцију и напоне FG плоча под трансверзалним оптерећењима. Yaghoobi и Torabi [30] прате сличан приступ да изведу Левијев тип решења за оптерећење на извијање FG плоча у области еластичности под дејством термичких оптерећења.

Како би се избегла употреба смицајних корекционих фактора, уведене су смицајне деформационе теорије вишег реда. Смицајне деформационе теорије вишег реда (HSDT) се могу развити проширивањем компоненти померања у степене редове по координати дебљине. У принципу, теорије развијене на овај начин могу бити прецизне колико је потребно што се постиже укључивањем довољног броја чланова у редове. Најчешће коришћена смицајна деформациона теорија вишег реда (HSDT) је уведена од стране Редија (*Reddy*) [31]. Преглед смицајних деформационих теорија за изотропне и ламинатне плоче дали су Ghugal и Shimpi [32] и Khandani остали [33]. Свеобухватан преглед различитих аналитичких и нумеричких модела за анализу савијања, извијања и слободних вибрација FG плоча под механичким и термичким оптерећењима недавно су дали Swaminathan и остали [34].

Смицајна деформациона теорија трећег реда (TSDT) коју је развио Реди [31] за ламинатне композитне материјале узима у обзир ефекте смицајних деформација и задовољава услов да су горња и доња површ ламината слободне од напона. Задовољавање овог услова јасно указује на чињеницу да при употреби ове теорије није потребно користити корекционе факторе.

Треба поменути да је поље померања Редијеве теорије идентично са оним из Левинсонове (*Levinson*) теорије [35]. Међутим, једначине кретања код ове две теорије се разликују, због чињенице да је Левинсон користио једначине равнотеже FSDT које се не поклапају са онима које су изведене из варијационог приступа Редија. Реди [36] је представио и аналитичку формулацију и формулацију коначним елементом применом TSDT. Shen [37] је представио нелинеарну анализу FG плоча под трансверзалним оптерећењем у термичким срединама. Сличне проблеме обрађивали су и Yang и Shen [38] користећи TSDT са вон Кармановим претпоставкама. Јанг и други [39] су испитивали извијање, слободне вибрације и динамичку стабилност FG сендвич плоча под комбинованим деловањем равномерне промене температуре и периодичног раванског сабијања користећи TSDT и полуаналитички метод. Akbarzadeh и други [40] су проучавали статичке и динамичке одзиве FG плоча под дејством бочног оптерећења користећи TSDT и развоје у Фоуриерове редове. Zhang [41] је искористио TSDT засновану на неутралној површини заједно са вон Кармановим претпоставкама за

проучавање нелинеарног одзива на савијање FG плоча у области еластичности у термичким срединама. Аналитичка решења за FG плоче са шест различитих контурних услова добијена су коришћењем Рицовог (*Ritz*) метода.

Велики број аутора је покушао да увођењем функција облика (*shape function*) у облик претпостављених поља померања, елиминише потребу за увођењем корекционих фактора. На тај начин је настала група сродних теорија под заједничким називом HSDT теорије засноване на функцијама облика. Анализа употребе ових теорија представља значајан део ове дисертације. За разлику од CPT и FSDT ове теорије не предвиђају да нормала на средњу површ ламинатне плоче остаје права линија, већ се њима претпоставља да ће током деформације доћи до кривљења нормале. Начелно, функције облика могу бити полиномне, хиперболичке, експоненцијалне, параболичке итд. Полиномне HSDT теорије у овом раду су развојене од других врста ових теорија и у складу са степеном полинома по координати дебљине су сврстане у групу теорија другог или трећег реда. Генерално, употреба HSDT у последњих десетак година доживљава експанзију, тако да постоји јако велики број радова из ове области.

Полиномне теорије начелно представљају квази 3D теорије. *Qian* и други [42,43] и *Gilhooley* и други [44] су користили безмрежни Petrov–Galerkinov метод за проучавање савијања и вибрације FG плоча. Ову квази 3D теорију су такође користили *Sheikholeslami* и *Saidi* [45] за проучавање вибрације FG плоча у области еластичности користећи Навијеова решења.

Pandya и *Kant* [46] су формулисали HSDT са 7 непознатих, а која објашњава кубне варијације раванских померања и константно трансверзално померање дуж дебљине. *Matsunaga* [47,48] је развио квази 3D теорију за анализу извијања и слободних вибрација FG плоча. Ова теорија је заснована на развоју раванских и трансверзалних компоненти померања у степене редове. *Matsunaga* је проширио своју теорију на проблеме термичког извијања [49].

Према Лоу (*Lo*) и осталима [50,51] све полиномне HSDT теорије трећег реда се могу класификовати тако да претпостављена поља померања садрже једанаест непознатих. Раванска померања су кубне функције координате дебљине, док је смицајно померање квадратна функција исте координате. Кант (*Kant*) и остали [52, 53] су проширили формулацију Лоа и осталих [50,51] тако да су сва три облика претпостављених померања кубне функције координате дебљине, односно претпостављена поља померања садрже дванаест независно променљивих. Добијена су аналитичка решења за проблеме савијања и слободних вибрација. У овој дисертацији је имплементиран нов аналитички поступак за примену ове теорије у анализи савијања и слободних вибрација укршених симетричних FG плоча. Даље је поступак проширен и на проблеме слободних вибрација умрежених ламинатних плоча.

Pradyumna и *Vandyopadhyay* [54] су развили четворочворни C^0 континуални елемент љуске (*continuous shell element*) са девет степени слободе по чвору за анализу слободних вибрација ламинатних плоча. Та формулација је заснована на HSDT *Kanta* и *Kharea* [55] у којој су раванска померања проширена као кубна варијација координате дебљине, док је трансверзално померање константно. *Talha* и *Singh* [56] су развили квази 3D теорију за статичку анализу савијања и слободних вибрација FG плоча. Поље померања њихове теорије добијено је модификацијом поља померања Лоа и других како би задовољили нулте контурне напонске услове горње и доње површине плоче. Развијен је деветочворни C^0 континуални изопараметријски елемент (*continuous isoparametric element*) са 13 степени слободе (*DOFs*).

Xiang и други [57] су предложили смицајну деформациону теорију n -тог реда за анализу слободних вибрација FG и композитних сендвич плоча. Поље померања њихове теорије добијено је модификовањем поља померања TSĐT-а да би се објаснили полиномни чланови

n -тог реда. TSDT је редукована као специфични случај. Ова теорија је проширена на проблем савијања FG плоча [58] и проблем слободних вибрација изотропних плоча [59], FG сендвич плоча [60] и FG плоча у области еластичности [61]. *Xiang* и *Kang* [62] су процењивали различите смицајне деформационе теорије са пет непознатих за савијање FG плоча.

CPT, FSDT, TSDT и HSDT са горњом и доњом површином слободном од напона могу се извести из опште HSDT. Ову теорију је такође искористио Кант и други [63] за проучавање статичког одзива при савијању и слободним вибрацијама FG плоча. *Jha* и други [64–67] су проучавали статичко савијање и слободне вибрације FG плоча користећи квази 3D теорију *Kanta* и *Manjunatha* [68] са 12 непознатих. Аналитичка решења су добијена за слободно ослоњене плоче коришћењем Навиеровог решења. Испитан је и утицај чланова вишег реда у пољу померања природне фреквенције FG плоча. Ову квази 3D теорију су такође искористили *Swaminathan* и *Naveenkumar* [69] за проучавање извијања FG сендвич плоча.

У овој дисертацији урађена је детаљна компаративна анализа HSDT теорија заснованих на функцијама облика у анализи извијања, савијања и слободних вибрација, умрежених и укрштених симетричних и антисиметричних ламината. Дата су објашњења и смисао употребе сваке од функција облика. Под смицајним деформационим теоријама заснованим на функцијама облика сматране су теорије код којих су претпостављена раванска поља померања дефинисана као композиција линеарне функције по координати дебљине и производа функције облика са ротацијама нормале у односу на средњу раван око x , односно у осе, респективно, док је трансверзално померање константно померање дуж дебљине ламинатне плоче. Код ових теорија функције могу бити тригонометријске, хиперболичке, експоненцијалне, инверзне тригонометријске и инверзне хиперболичке. Неполиномну синусну функцију облика први је представио Леви (*Levy*) [70] (погледати табелу у поглављу 2) за анализу изотропних дебелих плоча. Исту функцију употребили су *Stein* [71] и *Touratier* [72] за развијање синусоидне смицајне деформационе теорије (SSDT) са пет непознатих за изотропне и ламинатне композитне плоче, тим редом. *Soldatos* [73] је први употребио хиперболичку функцију облика за развијање HSDT-а за ламинатне композитне плоче. Експоненцијалну функцију за развијање HSDT-а за композитне греде су први искористили *Karama* и други [74]. *Aydogdu* [75] је проширио претходни рад на композитне плоче. Велики број радова заснованих на функцијама облика објавили су још *Mantari* и остали [76-83], затим *Viola* и остали [84], *ElMeiche* [85], *Akavci* и *Tanrikulu* [86], *Mechaib* [87] и *Grover* [88].

Проблемима пропагације таласа у ламинату бавили су се *Green* [89], *Green* и *Milosavljevic* [90], *Green*, *Rogerson*, и *Milosavljević* [92].

У оквиру ове дисертације на основу постојеће литературе описани су неки од поступака макромеханичке анализе композитног ламината, са акцентом на компарацији примењених деформационих теорија вишег реда које још увек нису у потпуности заживеле као саставни део комерцијалних софтвера који се заснивају на анализи конструкција применом методе коначних елемената.

У првом поглављу дати су основни појмови теорије еластичности, са посебним акцентом на физичке величине неопходне за детаљно сагледавање макромеханичке анализе композитних ламината. Како ламинат представља скуп више слојева који могу имати различите класе симетрије у односу на усвојени глобални координатни систем, дата је и подела ламината према класама симетрије, са посебним акцентом на анизотропне групе материјала са моноклиничком и ортотропном класом симетрије. У оквиру овог поглавља такође су дефинисани елементи конститутивне матрице са два различита аспекта. Први аспект подразумева дефинисање конститутивне матрице преко инжењерских константи где је неопходно користити ортогоналне трансформације напона, деформација, па и саме

конститутивне матрице. Други приступ изражавања елемената конститутивне матрице, који је описан у оквиру овог поглавља, се заснива на увођењу материјалних константи дефинисаним преко поља привилегованих праваца од стране Спенсера (Spencer) [93],[94] које су детаљно објашњене у [95], [96], као и у радовима [97], [98], [99]. На тај начин су створени предуслови за имплементацију смицајних деформационих теорија вишег реда.

У другом поглављу дата је подела ламинатних плоча. Иако због различитих могућности комбиновања конституената не постоји јасна класификација, у оквиру овог поглавља дата је најопштија применљива класификација. Даље су поменута два основна принципа помоћу којих је могуће вршити макромеханичку анализу композитних ламината. Како основу принципа анализе ламинатних плоча на основу континуалности деформација чине ламинатне теорије, овде је дат приказ ламинатних теорија почев од најелементарније класичне теорије плоча, преко смицајне деформационе теорије првог реда, до теорија вишег реда. Извршена је кратка подела теорија вишег реда у зависности од степена полинома који се појављује у претпостављеним облицима померања. У делу који описује деформационе теорије засноване на функцијама облика дат је приказ петнаест функција облика са циљем касније анализе њихове примене у макромеханичким проблемима. Дати су графици ових функција и објашњене сличности и разлике између појединих функција облика. Као репрезенти деформационих теорија заснованих на полиномним функцијама приказане су деформациона теорија другог реда коју су дефинисали *Witney* и *Sun* [100], као и деформационе теорије трећег реда дефинисане од стране *Reddy* и *Robinson* [101], односно Канта [52,53]. За сваку од ових теорија дата су детаљна извођења сваке од компоненти вектора деформација. Такође је дат и кратак преглед аутора који су користили сваку од поменутих теорија понаособ.

У трећем поглављу је на основу усвојене деформационе теорије из поглавља два вршена макромеханичка анализа у смислу напона и деформација. За различите деформационе теорије разматране су појаве матрица које се јављају као резултата слагања слојева. Приказани су одговарајући типови матрица као што су матрица екстензионе крутости, затим матрица савојне крутости, матрице спрезања и тако даље. Приказана је јасна разлика у типовима ових матрица, а за потребе овог поглавља у оквиру Матлаб програмског језика у домену симболичког програмирања написани су подпрограми који на основу претпостављених облика поља померања дефинишу ког типа је неопходно да буду матрице. Извршена је подела на матрице које одговарају раванском и смицајном моду. Такође су посматране компоненте резултирајућих оптерећења по јединици ширине чији број такође зависи од типа деформационе теорије. Дефинисање резултујућих оптерећења по јединици површине има пресудну улогу при креирању статичких једначина равнотеже и динамичких једначина кретања заснованих на варијационим принципима. У оквиру поменутог програма у матлабу у симболичком облику омогућено је одређивање поменутих компоненти оптерећења.

У четвртном поглављу дефинисана је употреба варијационих метода у проблемима макромеханичке анализе композитних ламината. Дефинисани су основни варијациони принципи који се користе за дефинисање једначина статичке и динамичке равнотеже ламината. Дат је детаљан опис употребе принципа виртуелних померања и виртуелног рада. Такође је дат опис рада са варијационим оператором δ и показана његова аналогија са диференцијалним оператором d . Даље су описани поступци принципа минималне укупне потенцијалне енергије и Хамилтоновог принципа, као основе статичке и динамичке анализе, респективно. За тако дефинисане поступке, поља померања уведена деформационим теоријама, дефинисана у поглављу 2, и њихову макромеханичку везу, дефинисану у поглављу 3 у оквиру симболичког дела софтвера написаног у Матлабу, одређени су општи облици

једначина равнотеже и једначина кретања. Ове једначине су дате за сваку од поменутих деформационих теорија из поглавља 2, са детаљним извођењем.

У петом поглављу описан је поступак примене математичких метода у добијању аналитичких решења у статичким проблемима извијања и савијања, као и у динамичким проблемима слободних вибрација. За изабране деформационе теорије вишег реда дат је комплетан математички поступак решавања парцијалних диференцијалних једначина аналитичким путем. Акцент је стављен на употребу HSDT теорија заснованих на функцијама облика, кроз вид компаративне анализе. Табеларно су приказане упоредне вредности резултата добијене коришћењем свих функција облика детаљно описаних у поглављу 2. Вршено је поређење са резултатима датим у референтној литератури из ове области. За анализу поменутих проблема у оквиру овог поглавља такође су коришћене смицајне деформационе теорије другог и трећег реда дефинисане од стране аутора у [100], [101]. Приказана је сврха употребе ових теорија код дебелих и умерено дебелих ламинатних плоча. Такође је показан утицај класе симетрије ламината на поступак добијања решења. Примарно су разматране слободно ослоњене ламинатне плоче и то у облицима симетричних и антисиметричних укрштених ламината, као и антисиметричних умрежених ламината.

У шестом поглављу описана је нумеричка метода коначних елемената која се користи у проблемима макромеханичке анализе. Дати су основни појмови ове методе и описан је коначни елемент ламинат. Моделирана је квадратна плоча оптерећена синусним оптерећењем са циљем компаративне анализе са теоријама вишег реда.

У седмом поглављу анализирана је пропација еластичних таласа у композитним ламинатима. Пажња је усредсређена на Ламбове таласе. Проблеми пропације су посматрани са аспекта 3D еластичне теорије, као и са аспекта примене деформационих теорија вишег реда. Приказан је детаљан поступак примене 3D еластичне теорије за добијање дисперзионих релација у потпуно анизотропном слоју са триклиничким типом симетрије. Такође је приказан поступак раздвајања на симетрични и антисиметрични таласни мод код материјала са моноклиничким типом симетрије. Дате су једначине дисперзионих релација за оба поменута таласна мода. Други део овог поглавља описује примену SSDT теорија, као апроксимативних теорија, за добијање дијаграма фазних брзина и дисперзионих релација. Разматрани су материјали чије су конститутивне матрице дефинисане преко инжењерских константи, као и материјали са конститутивним матрицама дефинисаним преко поља привилегованих праваца. За сваки од материјала описана је појава квазимодова који настају као резултат слагања слојева.

У осмом поглављу дат је кратак визуелни приказ креираног софтвера у матлабу, за проблеме симболичке и нумеричке анализе композитних ламината употребом смицајних деформационих теорија вишег реда. Такође је описана веза са проблемима пропације таласа развијеним од стране других аутора који се баве овом проблематиком на Факултету инжењерских наука у Крагујевцу.

1 Основни појмови теорије еластичности

Теорија еластичности представља само једну од теорија механике непрекидних средина односно механике континуума. Механика континуума представља део механике који проучава проблеме равнотеже и кретања континуално распоређеног скупа материјалних тачака. Под материјалном тачком се сматра бесконачно мали део непрекидно распоређене материје чији је положај одређен геометријском тачком простора. Како се у механици континуума претпоставља непрекидан распоред материје у телу, то значи да механичке величине које описују стања равнотеже и кретања континуума морају бити непрекидне функције положаја и времена. Узимајући у обзир претходне напомене, може се закључити да се механика континуума у математичком смислу може сматрати теоријом поља. За описивање појединих поља најсврхисходнији алат који се користи је тензорски рачун. Математичке основе тензорског рачуна детаљно су описане у [102], [103], [104]. Поред претпоставке о непрекидности, битне за механику континуума, значајне су још две претпоставке о природи материјала, а то су хомогеност и изотропност. Под хомогеним материјалом подразумева се такав материјал који у односу на неку његову особину поседује једнаке особине свих честица, док се материјал код кога овај услов није задовољен сматра нехомогеним. Изотропност материјала се, такође, дефинише у односу на неку његову особину и, у зависности од тога ли је она иста у свим правцима или не, каже се да је материјал изотропан или анизотропан респективно.

Према [102] механика континуума се може поделити на три дела:

1. **Општи принципи применљиви на све врсте непрекидних средина** (закон конзервације масе, баланс количине кретања, баланс момента количине кретања, баланс енергије итд.),
2. **Конститутивне једначине,**
3. **Специјалне теорије разних идеалних материјала** које су засноване на општим принципима и конститутивним једначинама тог материјала (теорија еластичности, теорија пластичности, итд.).

У механици чврстог тела разликујемо статичко поље променљивих, које представља напон, и кинематичке променљиве, које представљају померања и деформације.

Као што је познато, напон представља меру унутрашњег дејства између појединих материјалних тачака и као такав представља основу механике непрекидних средина. Тензор напона у Декартовом координатном систему може се записати у облику:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{km} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_m, \quad (1.1)$$

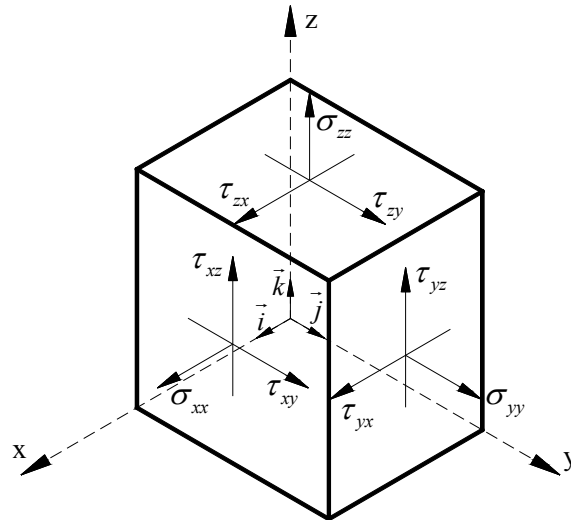
где су:

σ_{km} -компоненте тензора напона,

\mathbf{i}_k и \mathbf{i}_m - јединични вектори Декартовог правоуглог координатног система,

$\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_m$ - општи тензорски или дијадски производ. Поновљени индекси према Ајнштајновој конвенцији означавају сабирање.

На слици 1.1. дат је приказ напона на произвољном издвојеном сегменту запремине облика паралелопипеда. Напони на главној дијагонали матрице тензора напона код којих су оба индекса међусобно једнака називају се **нормални напони**, док су напони са различитим индексима **смицајни напони**.



Слика 1.1. Напони на инфинитезималном делу запремине облика паралелопипеда

У матричном облику тензор напона се може записати као:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Под деформацијом се подразумева механичка величина којом се дефинише стање деформисаности материјала. Основна подела деформација је на велике и мале деформације. Мале деформације су основа линеарне еластичности, док се велике деформације користе као мера у нелинеарној еластичности, вискоеластичности, еласто-пластичности, пластичности итд.

Мале деформације могу да се поделе на **линијске** (нормалне) и **угаоне** (смичуће). У области линеарне еластичности деформације се могу представити преко градијента вектора померања као:

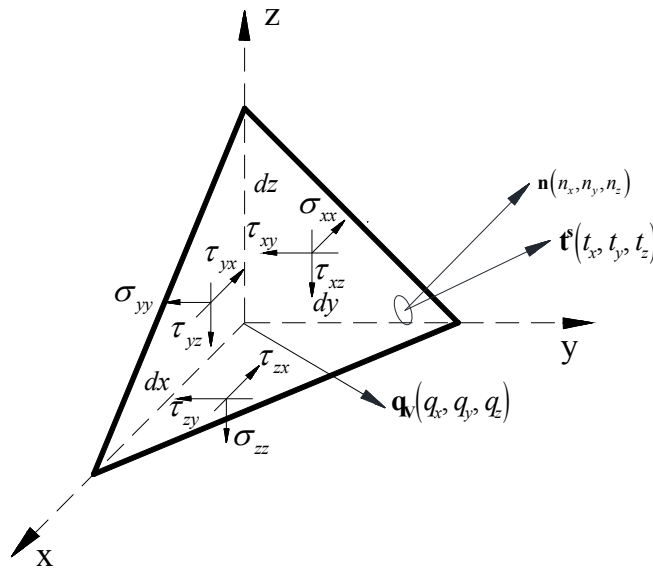
$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j) = (1, 2, 3), \quad (1.3)$$

где су u_k , $k = 1, 2, 3$ одговарајуће компоненте вектора померања. Према томе, тензор деформације може да се прикаже помоћу матрице 3x3 на следећи начин:

$$\mathbf{e} = \{e_{ij}\} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Статичко поље је статички прихватљиво ако напони задовољавају једначине равнотеже. Детаљан опис извођења једначина равнотеже дат је у [105].

За повезивање компонената напона на произвољној елементарној површини потребно је посматрати инфинитезимални део запремине облика тетраедра, тела које се налази у равнотежи. Тетраедар се посматра тако да су три његове стране паралелне координатним равнима усвојеног координатног система xuz (слика 1.2), док четврта страна није паралелна координатним равнима и означена је са S_σ .



Слика 1.2. Равнотеже инфинитезималног дела запремине облика тетраедра

Нека су компоненте напона на равнима паралелним координатним равнима σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy} . (слика 1. 2), а вектор површинског напона $\mathbf{t}^{(s)}$ –на равни S_σ , где је \mathbf{n} нормала на површ S_σ , са пројекцијама $[n_x, n_y, n_z]$. Пројекције вектора површинског напона на раван S_σ су $[t_x, t_y, t_z]$. Тетраедар је оптерећен и запреминским силама \mathbf{q}_v чије су пројекције на осе Декартовог правоуглог координатног система $[q_x, q_y, q_z]$. Ако се сада напише једначина равнотеже у правцу осе x , добија се:

$$-\sigma_{xx} dS_x - \tau_{yx} dS_y - \tau_{zx} dS_z + t_x dS_\sigma + q_x dV = 0 \quad (1.5)$$

где су dS_σ и dV елементи површине тела и запремине тетраедра, док су dS_x , dS_y , dS_z пројекције dS_σ на одговарајуће координатне осе и имају облик:

$$dS_x = dS_\sigma l_x, \quad dS_y = dS_\sigma l_y, \quad dS_z = dS_\sigma l_z \quad (1.6)$$

Како је запремина dV , као елементарна запремина, мала величина трећег реда у односу на елементарне површине, које су мале величине другог реда, следи да је у једначини (1.5) задњи сабирак занемарив у односу на прва четири сабирка. Занемаривањем задњег сабирка у једначини (1.5) и коришћењем једначине (1.6) добија се:

$$-\sigma_{xx} dS_\sigma n_x - \tau_{yx} dS_\sigma n_y - \tau_{zx} dS_\sigma n_z + t_x dS_\sigma = 0, \quad (1.7)$$

односно:

$$-dS_\sigma (\sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z - t_x) = 0, \quad (1.8)$$

из чега следи да је:

$$\sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = t_x \quad (1.9)$$

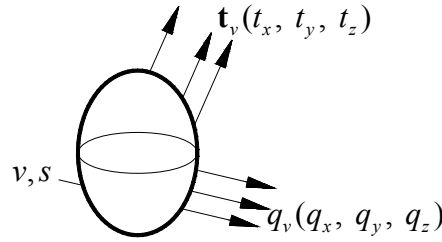
Аналогно поступку за једначину равнотеже у правцу осе x , могуће је написати једначине равнотеже и у правцима оса y и z чиме се добијају друге две пројекције површинског напона. Из свега наведеног закључује се да се пројекције површинског напона, у равни S_σ , могу представити у облику:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Из претходно изведених једначина уочава се да се вектор површинског напона може записати у тензорској нотацији као:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (1.11)$$

Ова једначина показује да се напон на произвољној равни може одредити као функција тензора напона датог обликом (1.2) и назива се Кошијева формула. Овај облик је инваријантан у односу на координатне трансформације и важи у било ком координатном систему.



Слика 1.3. Коначни део запремине оптерећен површинским напонима и унутрашњим силама

Даље се посматра коначни део запремине, који припада неком деформабилном телу и који је оптерећен површинским напонима $\mathbf{t}^{(n)}$ и запреминским силама \mathbf{q}_v , дат на слици 1.3.

Због тога што збир компонената које одговарају оси x мора бити једнак нули може се писати:

$$\iiint_v q_x dv + \iint_s t_x ds = 0 \quad (1.12)$$

где су :

v, s -запремина и површина области коју посматрамо, респективно.

Заменом (1.9) у (1.12) добија се:

$$\iiint_v q_x dv + \iint_s (\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z) ds = 0, \quad (1.13)$$

Исти поступак се може применити и на осе y и z чиме се добијају три интегралне једначине равнотеже дефинисане обликом (1.13) и слично за z и y осу. За конвертовање ових једначина у одговарајући диференцијални облик потребно је искористити Гринову формулу:

$$\iiint_v \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) dv = \iint_s (f_x n_x + f_y n_y + f_z n_z) ds \quad (1.14)$$

која важи за било које три непрекидне коначне и једнозначне $\mathbf{f}(x, y, z)$ функције и омогућавају трансформисање површинског интеграла у запремински. Ако се подинтегрална функција у Гриновој формули $\mathbf{f}(x, y, z)$ дефинише тако да су $f_x = \sigma_{xx}$, $f_y = \tau_{yx}$, $f_z = \tau_{zx}$, и примени на једначину (1.13) добија се:

$$\iiint_v \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dv + \iiint_v q_x dv = 0 \quad (1.15)$$

односно:

$$\iiint_v \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + q_x \right) dv = 0 \quad (1.16)$$

Како ова једначина, и њој аналогне једначине, за преостале две осе, важе за било који део тела (запремине морају бити различите од нуле), добија се да за равнотежу тела мора да буде испуњен услов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Једначине (1.17) представљају једначине равнотеже тела и могу се извести на сличан начин као и Кошијева формула формирањем једначина равнотеже у правцима одговарајућих оса, или постављањем једначина промене количине кретања.

Статички гледано, да би посматрани део запремине био у равнотежи, поред једначина (1.17) морају да буду задовољене и једначине равнотеже момената, односно суме момената за одговарајуће осе усвојеног Декартовог координатног система морају бити једнаке нули. Ако се сада напише сума момената за осу z добија се:

$$\iiint_v (q_x y - q_y x) dv + \iint_s (p_x y - p_y x) ds = 0, \quad (1.18)$$

односно:

$$\iiint_v (q_x y - q_y x) dv + \iint_s ((\sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z) y - (\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z) x) ds = 0. \quad (1.19)$$

Поновно коришћење Гринеове формуле, дате једначином (1.14) и једначине (1.10) доводи до:

$$\iiint_v \left((q_x y - q_y x) + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) y - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) x \right) dv = 0. \quad (1.20)$$

Сличне једначине могу да се напишу и за моменте око оса x и y , па се њиховим поређењем долази до закључка да је тензор напона симетричан тензору другог реда, тако да су:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.21)$$

Због симетрије тензора напона једначине равнотеже могу да се прикажу на следећи начин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + q_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

Симетрија тензора напона показује да уместо са 9 компоненти напон може да се репрезентује са шест компонената, три нормалне и три смицајне, па се тензор напона може представити као шестодимензиони вектор напона $\sigma = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T$. Кинематичко поље је кинематички прихватљиво ако су померања и деформације повезани једначинама (1.3) и померања задовољавају кинематичке граничне услове на површини S_σ . Веза између

статичких (напона) и кинематичких (померања и деформација) променљивих се успоставља уз помоћ конститутивних релација.

1.1 Успостављање веза између напона и деформација - појам конститутивних релација

Веза између напона и деформација у зони еластичности, успостављена је још у 17. веку када је Роберт Хук (*Robert Hook*), вршећи тестове материјала на истезање до тачке, која је позната под називом граница пропорционалности, успоставио функционалну зависност између напона и деформација изотропног материјала у облику $\sigma = E\varepsilon$, где је E Јангов (*Young*) модул еластичности изотропног материјала. Касније је извршена генерализација овог закона за различите класе симетрије материјала. Генерализовани Хуков закон представља везу између компонената тензора напона и тензора деформације у следећем облику:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1.23)$$

где су:

C_{ijkl} - тензор еластичности четвртог реда,

σ_{ij} - тензор напона другог реда,

ε_{ij} - тензор деформације другог реда.

Ова једначина одговара линеарно еластичном материјалу и представља **генерализовани облик Хуковог закона** и чини основу читаве теорије еластичности. Узимајући у обзир математичку комбинаторику (варијације са понављањем $V = n^r$, n - број елемената скупа чије се варијације одређују, а r број елемената који треба да буду изабрани) у општем случају тензор еластичности има $V = 3^4 = 81$ независну компоненту. Узимајући у обзир симетричност тензора напона $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, односно тензора деформација $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ може се писати:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \\ \text{б) } \sigma_{ji} &= C_{jikl} \varepsilon_{kl}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

односно:

$$\begin{aligned} \text{ц) } \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \\ \text{д) } \sigma_{ij} &= C_{ijlk} \varepsilon_{lk}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Одузимањем (а-б) из једначине (1.24), односно (ц-д) из једначине (1.25), добија се:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} - C_{jikl} &= 0, \\ C_{ijkl} - C_{ijlk} &= 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

одакле се директно види да је:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl}, \\ C_{ijkl} &= C_{ijlk}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ако се погледају коефицијенти у једначини (1.27) лако се закључује да, ако су фиксиране вредности индекса i и j , за преостала два места конкуришу три односно два броја, па је укупан број комбинација шест. Аналогно томе, за фиксирано l и k , такође постоји шест могућих комбинација, што јасно показује да је максималан број независних коефицијената тензора еластичности једнак $6 \times 6 = 36$.

Ако се изврши сажимање индекса у складу са Војтовом (Voight) конвенцијом:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \sigma_1, & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1, \\
 \sigma_{22} &= \sigma_2, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2, \\
 \sigma_{33} &= \sigma_3, & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_1, \\
 \sigma_{23} &= \sigma_4, & 2\varepsilon_{23} &= \varepsilon_4, \\
 \sigma_{13} &= \sigma_5, & 2\varepsilon_{13} &= \varepsilon_5, \\
 \sigma_{12} &= \sigma_6, & 2\varepsilon_{12} &= \varepsilon_6,
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

добија се генерализовани Хуков закон у сажетој нотацији као:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \tag{1.29}$$

Даља анализа тензора еластичности може се вршити уз помоћ специфичне енергије деформације, која може да се дефинише као што следи.

Посматра се тело оптерећено унутрашњим силама и површинским напонима слично као на слици (1.3). Ако се усвоји да су пројекције вектора инфинитезималних померања \mathbf{du} у правцу оса x, y, z , редом du_x, du_y, du_z , тада се једначина везе између деформација и померања у диференцијалном облику може писати као:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(du_x), & d\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(du_y), & d\gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(du_x) + \frac{\partial}{\partial x}(du_y), \\
 d\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z}(du_z), & d\gamma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y}(du_z) + \frac{\partial}{\partial z}(du_y), & d\gamma_{xz} &= \frac{\partial}{\partial z}(du_x) + \frac{\partial}{\partial x}(du_z),
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Како су померања инфинитезимална, може да се претпостави да се спољашње силе не мењају услед таквих варијација померања. Ако се изврши скаларно множење вектора унутрашњих сила и напона са вектором инфинитезималних померања редом, добиће се рад ових сила. Укупан рад у диференцијалном облику биће:

$$dW = \iiint_V (q_x du_x + q_y du_y + q_z du_z) dV + \iint_S (t_x du_x + t_y du_y + t_z du_z) dS. \tag{1.31}$$

где је:

V - запремина тела,

S - спољашња површина тела.

Начелно би површински интеграл требало писати само за површину S_σ која је оптерећена спољашњим силама и на којој се јављају површински напони, али како инфинитезимална померања припадају кинематички дозвољеном пољу, они су једнаки нули на неоптерећеном делу површине, па интеграл може да се напише за целу површину тела. Даље се уз помоћ једначине (1.14) врши превођење површинског интеграла у запремински, аналогно поступку описаном у једначинама (1.15), односно (1.19), што значи посматрањем само x компоненте сила и померања из једначине (1.31). На тај начин се добија да је рад ових сила у правцу x -осе дефинисан као:

$$\begin{aligned}
 dW_x &= \iiint_V q_x du_x dV + \iint_S p_x du_x dS = \iiint_V q_x du_x dV + \iint_S (\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z) du_x dS \\
 &= \iiint_V \left[q_x du_x + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x du_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} du_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} du_x) \right] dV_{prov} \\
 &= \iiint_V \left[\left(q_x du_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) du_x + \sigma_x \frac{\partial}{\partial x}(du_x) + \tau_{yx} \frac{\partial}{\partial y}(du_x) + \tau_{zx} \frac{\partial}{\partial z}(du_x) \right] dV
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

$$= \iiint_V \left[\sigma_x d\varepsilon_x + \tau_{yx} \frac{\partial}{\partial y} (du_x) + \tau_{zx} \frac{\partial}{\partial z} (du_x) \right] dV.$$

Аналогно, радови сила у правцу оса y и z су дефинисани као:

$$dW_y = \iiint_V \left[\sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \tau_{yx} \frac{\partial}{\partial x} (du_y) + \tau_{yz} \frac{\partial}{\partial z} (du_y) \right] dV, \quad (1.33)$$

$$dW_z = \iiint_V \left[\sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \frac{\partial}{\partial x} (du_z) + \tau_{yz} \frac{\partial}{\partial y} (du_z) \right] dV$$

Сабирањем једначина (1.32) и (1.33) добија се:

$$dW = dW_x + dW_y + dW_z = \iiint_V (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z) dV + \iiint_V \left(\tau_{xy} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y} (du_x) + \frac{\partial}{\partial x} (du_y) \right)}_{d\gamma_{xy}} + \tau_{xz} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z} (du_x) + \frac{\partial}{\partial x} (du_z) \right)}_{d\gamma_{xz}} + \tau_{yz} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z} (du_y) + \frac{\partial}{\partial y} (du_z) \right)}_{d\gamma_{yz}} \right) dV. \quad (1.34)$$

Коначно, једначина (1.31) добија облик:

$$dW = \iiint_V (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}) dV \quad (1.35)$$

Како подинтегрална функција последњег интеграла садржи само унутрашње променљиве, односно напоне и деформације, рад спољашњих сила се може трансформисати у рад унутрашњих сила или у потенцијалну енергију акумулирану у телу, па се може писати:

$$dW = \iiint_V \underbrace{(\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz})}_{dU} dV = \iiint_V dU dV \quad (1.36)$$

где је:

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.37)$$

Према [105] не може се уопштено говорити да је U функција тј. да је dU диференцијал. За еластичан материјал разлика између потенцијалне енергије тела која одговара неком почетном стању A и енергије која одговара неком другом стању B не зависи од тога на који начин се трансформише тело из стања A у стање B , другим речима интеграл:

$$\int_A^B \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = U(B) - U(A) \quad (1.38)$$

не зависи од путање интеграције, па самим тим, на основу особина криволинијског интеграла, функција dU представља тотални диференцијал функције U , која зависи од ε_{ij} .

Сада се може писати:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}. \quad (1.39)$$

Поређењем (1.39) са (1.37) добија се Гринова формула за одређивање напона, која важи искључиво у области еластичности:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (1.40)$$

Функција $U(\varepsilon_{ij})$ назива се **функцијом специфичне енергије деформације или еластичним потенцијалом** и представља енергију акумулирану у јединици запремине тела. Развојем ове функције у Тејлоров ред по деформацији добија се:

$$U(\varepsilon_{ij}) = C_0 + C_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \dots \quad (1.41)$$

где је

$$C_0 = U(\varepsilon_{ij} = 0), \quad C_{ij} = \left. \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{\varepsilon_{ij}=0}, \quad C_{ijkl} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right|_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{kl}=0}. \quad (1.42)$$

Ако се претпостави да је тело у почетном тренутку ненапрегнуто, тј. да су $\varepsilon_{ij} = 0$, $\sigma_{ij} = 0$, $U=0$, тада је $C_0 = 0$, и $C_{ij} = 0$ у складу са једначином (1.41). За мале деформације могу се занемарити чланови вишег реда у једначини (1.41) и могуће је задржати се само на квадратним члановима, па се добија:

$$U = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad (1.43)$$

Заменом у једначини (1.43) и (1.40) добија се:

$$dU = \sigma_i d\varepsilon_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.44)$$

Ако се сада у једначини (1.44) замени једначина (1.29) добија се да је диференцијал специфичне енергије деформације облика:

$$dU = C_{ij}\varepsilon_i d\varepsilon_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.45)$$

Из једначина (1.40) и (1.43) јасно се види да је:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} \quad (1.46)$$

Узимајући у обзир особине парцијалних извода следи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} \quad (1.47)$$

па се лако закључује:

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6), \quad (1.48)$$

што указује на симетричност тензора еластичности. Матрица тензора еластичности, у сажетој нотацији, сада има облик:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

па, имајући у виду симетричност ове матрице по индексима i и j ,

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$$

поседује 21 независну константу (6 на главној дијагонали и $5+4+3+2+1=15$ изван главне дијагонале).

Према [96] да би тензор еластичности имао свој физички смисао мора да задовољи следеће услове:

1. Тензор треба да буде позитивно дефинитан,
2. Дијагонални елементи тензора треба да буду позитивни,
3. Детерминанта матрице тензора еластичности треба да је несингуларна $\det(\mathbf{C}) > 0$,
4. Сви квадратни минори који садрже дијагоналне елементе треба да имају позитивну детерминанту.

Инверзијом генерализованог Хуковог закона се добија:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1.50)$$

где је:

S_{ijkl} - тензор попустљивости четвртог реда.

Тензор попустљивости такође мора да буде позитивно дефинитан и симетричан.

Инверзија генерализованог Хуковог закона такође се може записати у сажетој нотацији као:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.51)$$

1.2 Класе симетрије у зависности од броја независних коефицијената у конститутивној матрици

Класе симетрије материјала имају велики утицај у макромеханичкој анализи композитних ламината, као представника анизотропних материјала. Тако, на пример, многе изведене теорије не важе за све класе композитних материјала. Број независних коефицијената у конститутивној матрици може утицати на могућност налажења решења. Подела материјала према класи симетрије у зависности од броја независних елемената конститутивне матрице детаљно је описана у [96], па се, из тог разлога, овде неће вршити детаљно извођење, већ ће се само укратко представити класе симетрије материјала које су значајне са аспекта макромеханичке анализе композитних ламината. У том раду вршене су ортогоналне трансформације између два усвојена координатна система уз помоћ ортогоналне матрице Ω која мора да задовољи услов:

$$\Omega \cdot \Omega^T = \Omega^T \cdot \Omega = \mathbf{I}, \quad \Rightarrow \quad \Omega^T = \Omega^{-1} \quad (1.52)$$

Везу између два различита координатна система \bar{x}_i и x_j , уз помоћ ортогоналне трансформације, је могуће представити као:

$$\bar{\mathbf{x}} = \Omega \cdot \mathbf{x}, \quad (1.53)$$

па се коефицијенти \bar{C}_{ijkl} , који одговарају координатном систему \bar{x}_i , преко C_{pqrs} могу представити релацијом:

$$\bar{C}_{ijkl} = \Omega_{ip} \Omega_{jq} \Omega_{kr} \Omega_{ls} C_{pqrs} \quad (1.54)$$

Такође је приказано да материјали, чија је конститутивна матрица у сажетој нотацији дата обликом (1.49), спадају у групу потпуно анизотропних материјала са **триклиничким типом симетрије**.

Даље је показано да ако материјал поседује раван еластичне симетрије, која је рецимо одређена осама (x, y) , а оса z је нормална на раван симетрије, број независних коефицијената се своди са 21 на 13. У том случају конститутивна матрица, у сажетој нотацији, добија облик:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

Облик (1.55) одговара анизотропном материјалу са **моноклиничким типом симетрије**, односно материјалу који поседује једну раван материјалне симетрије.

За још једну уведена равна симетрије, рецимо (y, z) , број независних коефицијената се додатно смањује на 9, чиме се добија конститутивна матрица **ортотропне групе материјала**. Матрица, којом се ови материјали репрезентују, има облик:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Специјално, ако се, код ортотропне групе материјала, равна (x, y) дефинише тако да свака равна управна на њу буде равна еластичне симетрије добија се **трансверзално изотропни материјал**, као специјалан случај ортотропне групе материјала. Како је равна (x, y) била дефинисана тако да свака равна управна на њу буде равна еластичне симетрије, види се да равна симетрије садржи осу z , која у овом случају представља осу трансверзалне изотропије. Конститутивна матрица овако дефинисаног материјала садржи 5 независних коефицијената и има облик:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Слично, ако би се увело да и осе x и y буду додатне осе трансверзалне изотропије, добио би се материјал са бесконачно много равни симетрије који се назива **изотропним материјалом**. Изотропни материјал садржи само два независна елемента (рецимо C_{11} и C_{12}) у конститутивној матрици и представља најједноставнију групу материјала чија је конститутивна матрица облика:

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})
 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Додатну класификацију материјала у зависности од типа симетрије могуће је наћи у [106], [107].

1.3 Трансформације матрице еластичности

У претходном одељку поменуте су ротације координатних система. Са аспекта макромеханичке анализе композитних ламината, ротација координатног система је од изузетне важности, јер се код материјала са анизотропном класом симетрије напони, па самим тим и деформације, разликују у различитим правцима. Из тог разлога посматра се трансформација између два фиксирана координатна система (x, y, z) и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, при чему се координатни систем $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ сматра локалним или материјалним док се координатни систем (x, y, z) сматра глобалним, у односу на који се посматрају напони и деформације у сваком слоју композитног ламината. Трансформација између ортогоналних координатних система дата је у [108], [109]. Битну улогу у трансформацији између ортогоналних система имају косинуси углова између оса два усвојена координатна система. Уобичајено је да се косинуси углова између два ортогонална Декартова координатна система означе као у табели 1.1.

Матрица косинуса углова L		Координатни систем из ког се прелази (x, y, z)		
		x	y	Z
Координатни систем у који се прелази $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$	\bar{x}	l_1	m_1	n_1
	\bar{y}	l_2	m_2	n_2
	\bar{z}	l_3	m_3	n_3

Табела 1.1 Косинуси углова између два усвојена ортогонална Декартова координатна система

У складу са усвојеном табелом могуће је вршити трансформације вектора напона $\sigma = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T$ односно вектора деформација $\varepsilon = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T$.

Према [109] матрица трансформације напона L^σ и матрица трансформације деформација L^ε имаће облике дате једначинама (1.59) и (1.60), респективно.

$$\mathbf{L}^\sigma = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1m_1 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2m_2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3m_3 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & l_1m_2 + m_1l_2 & m_1n_2 + n_1m_2 & n_1l_2 + l_1n_2 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & l_2m_3 + m_2l_3 & m_2n_3 + n_2m_3 & n_2l_3 + l_2n_3 \\ l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & l_3m_1 + m_3l_1 & m_3n_1 + n_3m_1 & n_3l_1 + l_3n_1 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

$$\mathbf{L}^\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1n_1 & n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2n_2 & n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3m_3 & m_3n_3 & n_3l_3 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & l_1m_2 + m_1l_2 & m_1n_2 + n_1m_2 & n_1l_2 + l_1n_2 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & l_2m_3 + m_2l_3 & m_2n_3 + n_2m_3 & n_2l_3 + l_2n_3 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 & l_3m_1 + m_3l_1 & m_3n_1 + n_3m_1 & n_3l_1 + l_3n_1 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

Специјално, ако се ротација координатног система врши око вертикалне осе $z = \bar{z}$, матрице трансформације напона и деформација према [109] имаће облик:

$$\mathbf{L}^\sigma = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

$$\mathbf{L}^\varepsilon = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2mn & 2mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

где су коришћене скраћенице $m \equiv \cos \theta$, $n \equiv \sin \theta$. Трансформације вектора напона и вектора деформација могуће је искористити за добијање облика трансформације конститутивне матрице. Тако, на основу једначина (1.61) и (1.62), при трансформацији из локалног $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ у глобални (x, y, z) Декартов координатни систем може се писати:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{L}^{\sigma'} \boldsymbol{\sigma}' \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}^{\varepsilon'} \boldsymbol{\varepsilon}' \end{aligned} \quad (1.63)$$

где су:

$\boldsymbol{\sigma}'$ -вектор напона у $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$\boldsymbol{\sigma}$ -вектор напона у (x, y, z)

$\boldsymbol{\varepsilon}'$ -вектор деформација у $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ -вектор деформација у (x, y, z)

\mathbf{L}^σ и $\mathbf{L}^{\varepsilon'}$ - одговарајуће матрице трансформације из $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ у (x, y, z) , респективно.

За трансформацију у супротном смеру тј. из (x, y, z) у $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ може се писати:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{L}^\sigma \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\varepsilon}' &= \mathbf{L}^{\varepsilon'} \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (1.64)$$

где су:

\mathbf{L}^σ и $\mathbf{L}^{\varepsilon'}$ -одговарајуће матрице трансформације из (x, y, z) у $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, респективно.

Заменом једначине (1.63) у једначини (1.64) добија се:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{L}^\sigma \mathbf{L}^{\sigma'} \boldsymbol{\sigma}' \\ \boldsymbol{\varepsilon}' &= \mathbf{L}^{\varepsilon'} \mathbf{L}^{\varepsilon'} \boldsymbol{\varepsilon}'\end{aligned}\quad (1.65)$$

одакле се јасно закључује да производи морају бити једнаки јединичним матрицама :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^\sigma \mathbf{L}^{\sigma'} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{L}^{\varepsilon'} \mathbf{L}^{\varepsilon'} &= \mathbf{I}\end{aligned}\quad (1.66)$$

Како су јединични вектори Декартовог координатног система међусобно ортогонални, то ће и трансформација из једног у други координатни систем бити ортогонална трансформација. Из линеарне алгебре је познато да су производи ортогоналне матрице и њој транспоноване матрице једнаки јединичној матрици, па се може рећи да важи:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^\sigma \mathbf{L}^{\sigma T} &= \mathbf{L}^{\sigma T} \mathbf{L}^\sigma = \mathbf{I} \\ \mathbf{L}^{\varepsilon'} \mathbf{L}^{\varepsilon' T} &= \mathbf{L}^{\varepsilon' T} \mathbf{L}^{\varepsilon'} = \mathbf{I}\end{aligned}\quad (1.67)$$

односно,

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{\sigma'} \mathbf{L}^{\sigma T} &= \mathbf{L}^{\sigma T} \mathbf{L}^{\sigma'} = \mathbf{I} \\ \mathbf{L}^{\varepsilon'} \mathbf{L}^{\varepsilon' T} &= \mathbf{L}^{\varepsilon' T} \mathbf{L}^{\varepsilon'} = \mathbf{I}\end{aligned}\quad (1.68)$$

Ако се сада примени генерализовани Хуков закон за оба координатна система у матричном облику добија се:

$$\begin{aligned}a) \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \\ b) \boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}'\end{aligned}\quad (1.69)$$

где су:

\mathbf{C}, \mathbf{C}' -конститутивне матрице у (x, y, z) и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ редом.

Заменом једначине (1.64) у једначину (1.69.б) добија се:

$$\mathbf{L}^\sigma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}' \mathbf{L}^{\varepsilon'} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.70)$$

Ако се сада изврши матрично множење са леве стране матрицом $\mathbf{L}^{\sigma T}$ (транспонована матрица) добија се:

$$\underbrace{\mathbf{L}^{\sigma T} \mathbf{L}^\sigma}_{\mathbf{I}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^{\sigma T} \mathbf{C}' \mathbf{L}^{\varepsilon'} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.71)$$

Ако се последња једначина упореди са генерализованим Хуковим законом у (x, y, z) координатном систему датим једначином (1.69.а) закључује се да је:

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}^{\sigma T} \mathbf{C}' \mathbf{L}^{\varepsilon'} \quad (1.72)$$

Једначина (1.72) представља конститутивну матрицу еластичности у глобалном координатном систему (x, y, z) .

Аналогно, инверзна матрица попустљивости имаће облик:

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}^t \mathbf{S}' \mathbf{L}^s \quad (1.73)$$

1.4 Изражавање елемената конститутивне матрице преко инжењерских константи

Елементе конститутивне матрице могуће је изразити на два начина:

1. Преко инжењерских константи
2. Преко константи еластичности дефинисаним у радовима Спенсера.

Прицип изражавања елемената конститутивне матрице преко инжењерских константи је доста заступљенији принцип, нарочито у инжењерској пракси. Други принцип изражавања елемената конститутивне матрице има већу примену из разлога његове инваријатности у односу на ротацију координатног система, па самим тим није потребно користити претходно описане трансформације матрице еластичности, већ ће ова матрица имати исти облик у било ком координатном систему.

Овде ће прво бити изложен први начин изражавања елемената конститутивне матрице из два разлога. Први лежи у чињеници да се овај начин изражавања елемената конститутивне матрице знатно чешће користи у пракси, а други разлог је да је примена смицајних деформационих теорија вишег реда погоднија за коришћење у нумеричким методама попут методе коначних елемената.

Композитни материјали, за разлику од конвенционалних материјала, захтевају дефинисање већег броја инжењерских константи еластичности. За одређивање еластичних константи материјала користе се експерименталне статичке и динамичке методе. Експерименталним методама могуће је одредити модуле еластичности, модуле смицања и Поасонове коефицијенте. У зависности од класе симетрије материјала биће неопходно одредити различит број константи еластичности који мора одговарати броју независних коефицијената у матрици еластичности у једначини (1.49).

Композитни ламинати су таква врста композитних материјала који се састоје од више индивидуалних лејера који су обично направљени од влакнима ојачаних слојева исте или различите оријентације. Треба нагласити да између лејера и слоја постоји основна разлика у чињеници [105] да лејер може бити састављен од више слојева исте оријентације. Лејер је много дебљи од слоја и има компликованију структуру, која се не мења дуж његове дебљине или се та промена игнорише. Лејери могу бити састављени од материјала са различитим типовима симетрије од изотропних до потпуно анизотропних и могу имати различите структуре, дебљине и механичка својства.

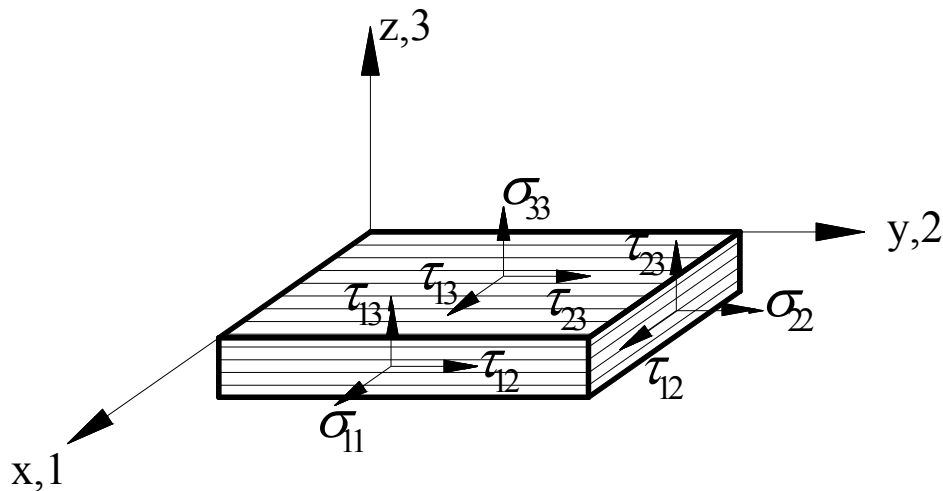
У зависности од типова материјалне симетрије лејера најчешћи конституенти композитног ламината су лејери са следећим класама симетрије:

1. Изотропни
2. Трансверзално-изотропни,
3. Ортотропни,
4. Анизотропни са моноклиничким типом симетрије и
5. Анизотропни са триклиничким типом симетрије.

Када је ламинат конституисан од влакнима ојачаних материјала тада су конституенти ламината најчешће ортотропне класе симетрије и њених специјалних облика трансверзално изотропне симетрије. Ротације координатног система могу проузроковати да класа симетрије лејера у односу на глобални координатни систем одговара анизотропном материјалу са моноклиничким типом симетрије. Из тог разлога овде ће примарно бити описан лејер са ортотропном класом симетрије и моноклиничким типом симетрије. Лејере изотропне и трансверзално изотропне класе симетрије није потребно додатно описивати јер су они најједноставнији и често описивани у литератури.

При изражавању коефицијената матрице еластичности преко инжењерских константи, знатно је једноставније прво изразити матрицу попустљивости преко ових коефицијената, а затим применом правила линеарне алгебре наћи и коефицијенте конститутивне матрице или матрице еластичности.

Ортотропни једнодирекциони композитни лејери добијају се као комбинација једнодирекционих слојева, који имају један привилеговани правац који се поклапа са неком од оса глобалног координатног система. Равни нормалне на тај правац имају изотропне карактеристике. Они представљају најједноставнију структуру ортотропних материјала и састоје се од једнодирекционих слојева чије се материјалне координате 1, 2 и 3 подударају са координатама лејера x, z, y . На слици 1.4 као у [105] дат је приказ једног ортотропног лејера.



Слика 1.4. Приказ ортотропног лејера

Матрица попустљивости ортотропне класе материјала према [106] може да се изрази преко инжењерских константи у облику:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

при чему важи да је:

$$\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2, \quad \nu_{13}E_1 = \nu_{31}E_3, \quad \nu_{23}E_2 = \nu_{32}E_3. \quad (1.75)$$

Матрица еластичности представља инверзну матрицу матрице попустљивости и преко инжењерских константи се може писати као:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

где је:

$$\Delta = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})}{E_1 E_2 E_3}.$$

Када се ортотропан лејер мале дебљине користи као конституент ламината, при раванском стању напона и претпоставком да је померање нормално на ту раван константно, тада је оправдано да се занемаре трећа врста и трећа колона конститутивне матрице, па се једначина генерализованог Хуковог закона може писати као:

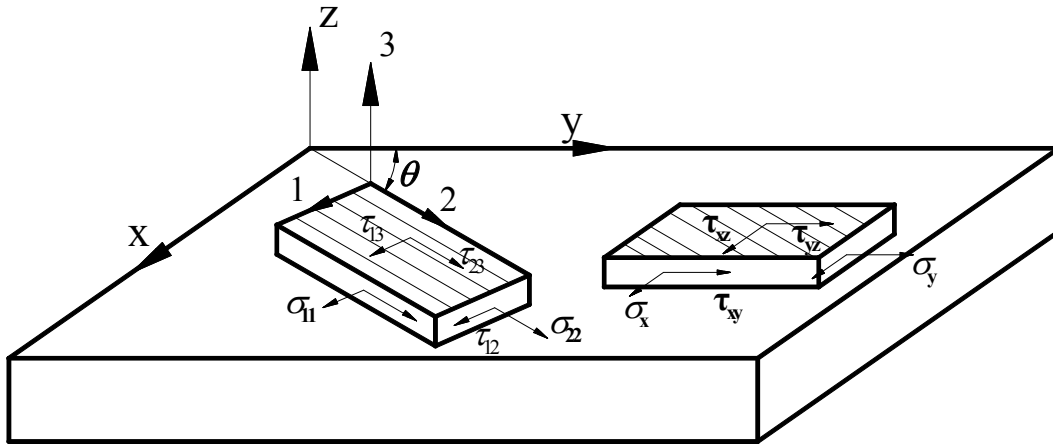
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu_{21} & 0 & 0 & 0 \\ E_2 \Delta & E_2 \Delta & & & \\ \nu_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 \Delta & E_1 \Delta & & & \\ 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.77)$$

где је:

$$\Delta = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 E_2}.$$

У поглављу (1.2) објашњено је да се материјал са 13 независних назива материјалом са **моноклиничким типом симетрије**. На слици 1.5 је дат приказ материјала са моноклиничким типом симетрије гледано у односу на глобални координатни систем. Посматра се слој материјала чија је дебљина много мања од преостале две димензије, при раванском стању напона и под претпоставком да је померање у правцу дебљине константно, тако да се у изразу за генерализисани Хуков закон могу изоставити нормални напон σ_{zz} и нормалне деформације ε_{zz} .

Математичка анализа ових материјала нарочито је битна јер се ортотропни материјали ротацијом координатног система могу превести у материјале са моноклиничким типом симетрије. Слично као код ортотропне групе материјала и овде ће се примарно писати матрица попустљивости из разлога једноставности записа, док се матрица еластичности одређује потпуно аналогно једначини (1.76). У литератури се често матрица попустљивости облика:



Слика 1.5. Анизотропни танки лејер са моноклиничким типом симетрије гледано у односу на глобални x, y, z координатни систем

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\nu_{zx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\lambda_{yz,xz}}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{xz,yz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_z} & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

За угао $\theta = 0$ конститутивна матрица би одговарала конститутивној матрици ортотропне групе материјала у релацији (1.77). За угао који је различит од нуле врши се ортогонална трансформација конститутивне матрице уз помоћ матрица трансформације (1.61) и (1.62) као и релације (1.72). Треба нагласити да се у матрицама трансформације изостављају трећа врста и трећа колона из поменутог разлога избегавања нормалног напона σ_{zz} и нормалне деформације ε_{zz} . Ако се матрица еластичности у глобалном координатном систему замени у израз за генерализовани Хуков закон у овом систему координата добија се:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & Q_{26} \\ 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.79)$$

где су коефицијенти Q_{ij} облика:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \bar{E}_1 m^4 + \bar{E}_2 n^4 + 2E_{12} m^2 n^2, \\ Q_{12} &= \bar{E}_1 \nu_{12} + (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2E_{12}) m^2 n^2, \\ Q_{16} &= (\bar{E}_1 m^2 - \bar{E}_2 n^2 - E_{12} (m^2 - n^2)) mn, \\ Q_{22} &= \bar{E}_1 n^4 + \bar{E}_2 m^4 + 2E_{12} m^2 n^2, \\ Q_{26} &= (\bar{E}_1 m^2 + \bar{E}_2 n^2 - E_{12} (m^2 - n^2)) mn, \\ Q_{66} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2E_{12} \nu_{12}) m^2 n^2 + G_{12} (m^2 - n^2)^2, \\ Q_{44} &= G_{13} m^2 + G_{23} n^2, \\ Q_{45} &= (G_{13} - G_{23}) mn, \\ Q_{55} &= G_{13} n^2 + G_{23} m^2. \end{aligned} \quad (1.80)$$

при чему важи да је:

$$\overline{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \overline{E}_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{12} = \overline{E}_1\nu_{12} + 2G_{12}, \quad m = \cos \theta, \quad n = \sin \theta.$$

Даље је уз помоћ облика матрице попустљивости (1.78) и једначине (1.73) могуће одредити њен облик у глобалном координатном систему као:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & R_{16} \\ R_{12} & R_{22} & 0 & 0 & R_{26} \\ 0 & 0 & R_{44} & R_{45} & 0 \\ 0 & 0 & R_{45} & R_{55} & 0 \\ R_{16} & R_{26} & 0 & 0 & R_{66} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (1.81)$$

где су коефицијенти R_{ij} облика:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{m^4}{E_1} + \frac{n^4}{E_2} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_1} \right) m^2 n^2, \quad R_{12} = \frac{\nu_{21}}{E_1} - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{21}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) m^2 n^2, \\ R_{16} &= 2 \left[\frac{m^2}{E_1} - \frac{n^2}{E_2} - \left(\frac{1}{2G_{12}} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \right) (m^2 - n^2) \right] mn, \quad R_{22} = \frac{n^4}{E_1} + \frac{m^4}{E_2} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_1} \right) m^2 n^2, \\ R_{26} &= 2 \left[\frac{n^2}{E_1} - \frac{m^2}{E_2} + \left(\frac{1}{2G_{12}} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \right) (m^2 - n^2) \right] mn, \quad R_{66} = 4 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{21}}{E_1} \right) m^2 n^2 + \frac{1}{G_{12}} (m^2 - n^2)^2, \\ R_{44} &= \frac{m^2}{G_{13}} + \frac{n^2}{G_{23}}, \quad R_{45} = \left(\frac{1}{G_{13}} - \frac{1}{G_{23}} \right) mn, \quad R_{55} = \frac{n^2}{G_{13}} + \frac{m^2}{G_{23}}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Поређење (1.83) са (1.78) без треће врсте и колоне јасно указује на следећу везу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_x} &= R_{11}, \quad \frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x} = -R_{12}, \quad \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} = \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = R_{16}, \quad \frac{1}{E_y} = R_{22}, \quad \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} = \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = R_{26}, \quad \frac{1}{G_{yz}} = R_{44} \\ \frac{1}{G_{xy}} &= R_{66}, \quad \frac{\lambda_{yz,xz}}{G_{xz}} = \frac{\lambda_{xz,yz}}{G_{yz}} = R_{45}, \quad \frac{1}{G_{xz}} = R_{55}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Зависност коефицијената из (1.80) и (1.82) тј.(1.83) према [105] дата је у облику:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_x} &= \frac{1}{D_1} (A_{22}A_{66} - A_{26}^2), \quad \frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x} = -\frac{1}{D_1} (A_{12}A_{66} - A_{16}A_{26}), \quad \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} = \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = \frac{1}{D_1} (A_{12}A_{26} - A_{22}A_{16}), \\ \frac{1}{E_y} &= \frac{1}{D_1} (A_{11}A_{66} - A_{16}^2), \quad \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} = \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = \frac{1}{D_1} (A_{12}A_{16} - A_{11}A_{26}), \quad \frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{D_1} (A_{11}A_{22} - A_{12}^2), \\ \frac{1}{G_{xz}} &= \frac{A_{55}}{D_2}, \quad \frac{1}{G_{yz}} = \frac{A_{44}}{D_2}, \quad \frac{\lambda_{xz,yz}}{G_{yz}} = \frac{\lambda_{yz,xz}}{G_{xz}} = -\frac{A_{45}}{D_2}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

где је:

$$D_1 = (A_{11}A_{22}A_{44} - A_{11}A_{24}^2 - A_{22}A_{14}^2 - A_{44}A_{12}^2 + 2A_{12}A_{14}A_{24}), \quad D_2 = A_{55}A_{66} - A_{56}^2.$$

и важи да је:

$$A_{11} = \frac{1 - \eta_{y,xy} \eta_{xy,y}}{D_3 E_y G_{xy}}, A_{12} = \frac{\nu_{xy} - \eta_{x,xy} \eta_{xy,y}}{D_3 E_y G_{xy}}, A_{16} = -\frac{\eta_{x,xy} + \nu_{xy} \eta_{y,xy}}{D_3 E_x G_{xy}}, A_{22} = \frac{1 - \eta_{x,xy} \eta_{xy,y}}{D_3 E_x G_{xy}},$$

$$A_{26} = -\frac{\eta_{y,xy} + \nu_{yx} \eta_{x,xy}}{D_3 E_x G_{xy}}, A_{66} = \frac{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}{D_3 E_x E_y}, A_{44} = \frac{1}{D_4 G_{yz}}, A_{45} = -\frac{\lambda_{xz,yz}}{D_4 G_{yz}}, A_{55} = \frac{1}{D_4 G_{xz}}.$$

при чему је:

$$D_3 = \frac{1}{E_x E_y G_{xy}} (1 - \nu_{xy} \nu_{yx} - \eta_{x,xy} \eta_{xy,x} - \eta_{y,xy} \eta_{xy,y} - \nu_{xy} \eta_{y,xy} \eta_{xy,x} - \nu_{yx} \eta_{x,xy} \eta_{xy,y}), D_4 = \frac{1}{G_{xz} G_{yz}} (1 - \lambda_{xz,yz} \lambda_{yz,xz}).$$

Конститутивне једначине укључују смицајно-истезајне и смицајно-смицајне коефицијенте спрезања η и λ , па је јасно да у глобалном координатном систем анализирани материјал спада у групу анизотропних материјала.

Као што је раније поменуто, потпуно анизотропни материјал са **триклиничким типом симетрије** поседује 21 независну константу. У пракси се ретко срећу материјали оваквих карактеристика, па се овде нећемо детаљно задржавати на макромеханици лејера направљених од ове групе материјала. Матрицу попустљивости ове групе материјала са потпуним физичким смислом сваке од инжењерских константи дао је Василијев [105]:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{\nu_{xz}}{E_z} & \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{x,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\nu_{yz}}{E_z} & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\nu_{zx}}{E_x} & \frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{yz,x}}{E_x} & \frac{\eta_{yz,y}}{E_y} & \frac{\eta_{yz,z}}{E_z} & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\lambda_{yz,xz}}{G_{xz}} & \frac{\lambda_{xz,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xz,x}}{E_x} & \frac{\eta_{xz,y}}{E_y} & \frac{\eta_{xz,z}}{E_z} & \frac{\lambda_{xz,yz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{xz}} & \frac{\lambda_{yz,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_z} & \frac{\lambda_{xy,yz}}{G_{yz}} & \frac{\lambda_{xy,xz}}{G_{xz}} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

при чему су:

E_x, E_y, E_z - Модули еластичности у x, y и z правцу респективно,

G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} - Модули смицања у равнима xy, xz и yz респективно,

ν_{xy} - Поасонов коефицијент који одређује деформацију у x правцу коју изазива нормални напон у y правцу,

$\nu_{yx}, \nu_{xz}, \nu_{zx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}$ - Поасонове коефицијенти који се дефинишу аналогно коефицијенту ν_{xy} ,

$\eta_{x,yz}$ - коефицијент спрезања истезања и смицања, који одређује нормалну деформацију у x правцу коју изазива смицајни напон у yz равни,

$\eta_{x,xy}, \eta_{x,xz}, \eta_{y,xy}, \eta_{y,xz}, \eta_{y,yz}, \eta_{z,xy}, \eta_{z,xz}, \eta_{z,yz}$ - коефицијенти спрезања истезања и смицања који се дефинишу аналогно $\eta_{x,yz}$,

$\eta_{xy,z}$ - коефицијент спрезања смицања и истезања, који одређује смицајну деформацију у $xу$ равни коју изазива нормални напон у z -правцу,

$\eta_{xy,x}, \eta_{xy,y}, \eta_{xz,x}, \eta_{xz,y}, \eta_{xz,z}, \eta_{yz,x}, \eta_{yz,y}, \eta_{yz,z}$ - коефицијент спрезања смицања и истезања који се дефинишу аналогно $\eta_{xy,z}$,

$\lambda_{xy,yz}$ - коефицијент спрезања смицања и смицања, који дефинише смицајну деформацију у равни $xу$ коју изазива смицајни напон у равни yz ,

$\lambda_{xz,xz}, \lambda_{xz,xy}, \lambda_{xy,xz}, \lambda_{yz,xz}, \lambda_{yz,xy}$ - коефицијенти спрезања смицања и смицања који се дефинишу аналогно $\lambda_{xy,yz}$.

Такође, због симетричности матрице попустљивости важе следећи услови:

$$\begin{aligned} \frac{V_{xy}}{E_y} &= \frac{V_{yx}}{E_x}, & \frac{V_{xz}}{E_z} &= \frac{V_{zx}}{E_x}, & \frac{V_{yz}}{E_z} &= \frac{V_{zy}}{E_y}, \\ \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} &= \frac{\eta_{xy,x}}{E_x}, & \frac{\eta_{x,xz}}{G_{xz}} &= \frac{\eta_{xz,x}}{E_x}, & \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} &= \frac{\eta_{yz,x}}{E_x}, \\ \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} &= \frac{\eta_{xy,y}}{E_y}, & \frac{\eta_{y,xz}}{G_{xz}} &= \frac{\eta_{xz,y}}{E_z}, & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} &= \frac{\eta_{yz,y}}{E_y}, \\ \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} &= \frac{\eta_{xy,z}}{E_z}, & \frac{\eta_{z,xz}}{G_{xz}} &= \frac{\eta_{xz,z}}{E_y}, & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} &= \frac{\eta_{yz,z}}{E_z}, \\ \frac{\lambda_{xz,yz}}{G_{yz}} &= \frac{\lambda_{yz,xz}}{G_{xz}}, & \frac{\lambda_{xy,yz}}{G_{yz}} &= \frac{\lambda_{yz,xy}}{G_{xy}}, & \frac{\lambda_{xy,xz}}{G_{xz}} &= \frac{\lambda_{xz,xy}}{G_{xy}}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Матрицу еластичности, тј. конститутивну матрицу, која је примарно потребна при примени генерализованог Хуковог закона, могуће је одредити као:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}, \\ \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} &= \underbrace{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}}_{\mathbf{I}}\boldsymbol{\sigma}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Детаљан приказ коефицијената матрице еластичности дате преко инжењерских константи неће бити дат због обимности израза који се добијају.

1.5 Извођење конститутивних релација помоћу поља привилегованих праваца

Класичан приступ за извођење конститутивних релација објашњен је у претходном поглављу. Знатно интересантнији приступ са аспекта теоријског проучавања влакнима ојачаних материјала дефинисао је Спенсер (Spencer) у својим радовима [93], [94]. Он је, узимајући у обзир да правац влакана зависи од положаја, дао формулацију конститутивних једначина независну од избора координатног система. Овакав начин извођења конститутивних релација нарочито је погодан за извођење конститутивних релација материјала са привилегованим правцима. Проучавају се ограничења на функцију енергије деформације која произилазе из захтева инваријатности у односу на ротацију око осе изабраног координатног система, која се у општем случају поклапа са осом трансверзалне изотропије. Поступак извођења елемената конститутивне матрице за материјале ојачане једном и двама фамилијама влакана, описан је

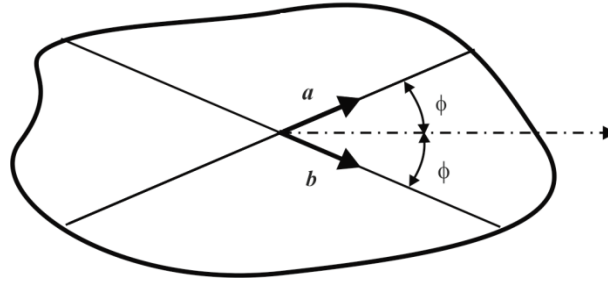
прво у [95], а касније детаљно за потребе пропагације запреминских таласа и у [96]. Аутори у овим референцама су претпоставили специфичну енергију деформације као функцију деформације и вектора правца влакана у случају материјала ојачаног једном фамилијом влакана, а затим су, уз примену тензорског рачуна и једначине (1.40), дефинисали коефицијенте конститутивне матрице за овај материјал у облику:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \lambda + 2\mu_T + (4\mu_L - 4\mu_T + 2\alpha + \beta a_1^2) a_1^2, \\
C_{22} &= \lambda + 2\mu_T + (4\mu_L - 4\mu_T + 2\alpha + \beta a_2^2) a_2^2, \\
C_{33} &= \lambda + 2\mu_T + (4\mu_L - 4\mu_T + 2\alpha + \beta a_3^2) a_3^2, \\
C_{12} &= \lambda + \alpha(a_1^2 + a_2^2) + \beta(a_1^2 a_2^2), \\
C_{13} &= \lambda + \alpha(a_1^2 + a_3^2) + \beta(a_1^2 a_3^2), \\
C_{14} &= \alpha a_2 a_3 + \beta a_1^2 a_2 a_3, \\
C_{15} &= 2(\mu_L - \mu_T) a_1 a_3 + \alpha a_1 a_3 + \beta a_1^3 a_3, \\
C_{16} &= 2(\mu_L - \mu_T) a_1 a_2 + \alpha a_1 a_2 + \beta a_1^3 a_2, \\
C_{23} &= \lambda + \alpha(a_2^2 + a_3^2) + \beta(a_2^2 a_3^2), \\
C_{24} &= 2(\mu_L - \mu_T) a_2 a_3 + \alpha a_2 a_3 + \beta a_2^3 a_3, \\
C_{25} &= \alpha a_1 a_3 + \beta a_1 a_2^2 a_3, \\
C_{26} &= 2(\mu_L - \mu_T) a_1 a_2 + \alpha a_1 a_2 + \beta a_1 a_2^3, \\
C_{34} &= 2(\mu_L - \mu_T) a_2 a_3 + \alpha a_2 a_3 + \beta a_2 a_3^3, \\
C_{35} &= 2(\mu_L - \mu_T) a_1 a_3 + \alpha a_1 a_3 + \beta a_1 a_3^3, \\
C_{36} &= \alpha a_1 a_2 + \beta a_1 a_2 a_3^2, \\
C_{44} &= \mu_T + (\mu_L - \mu_T)(a_2^2 + a_3^2) + \beta a_2^2 a_3^2, \\
C_{45} &= (\mu_L - \mu_T) a_1 a_2 + \beta a_1 a_2 a_3^2, \\
C_{46} &= (\mu_L - \mu_T) a_1 a_3 + \beta a_1 a_2^2 a_3, \\
C_{55} &= \mu_T + (\mu_L - \mu_T)(a_1^2 + a_3^2) + \beta a_1^2 a_3^2, \\
C_{56} &= (\mu_L - \mu_T) a_2 a_3 + \beta a_1^2 a_2 a_3, \\
C_{66} &= \mu_T + (\mu_L - \mu_T)(a_1^2 + a_2^2) + \beta a_1^2 a_2^2.
\end{aligned} \tag{1.88}$$

где су:

- $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ вектор којим се дефинише привилеговани правац,
 - $\mu_L, \mu_T, \lambda, \alpha, \beta$ - материјалне константе које према [99] могу да се изразе и преко других модула који су много погоднији за директно мерење, попут инжењерских константи. Материјална константа μ_L , репрезентује модул смицања дуж привилегованог правца \mathbf{a} , док μ_T репрезентује модул смицања нормалан на привилеговани правац \mathbf{a} . Остале константе λ, α, β могу да се повежу са модулима, као што је модул екстензије, или Јангов модул, и Поасонов број. Релација напон –деформација за изотропно понашање добила би се ако би се усвојило да је $\mu_T = \mu_L$ и $\alpha = \beta = 0$.

Поменути аутори радова [95-96] су разматрали и материјале ојачане двама фамилијама влакана. Ако је материјал ојачан двама фамилијама механички еквивалентних влакана, онда су правци влакана једина особина помоћу које могу да се разликују две фамилије влакана. Материјал тада поседује равни материјалне симетрије које садрже правце симетрала углова који образују ове две фамилије влакана и нормалу на раван тангентну на обе фамилије (слика 1.6).



Слика 1.6. Геометрија влакана материјала ојачаног двама фамилијама влакана

Материјал ће поседовати три равни еластичне симетрије, што одговара ортотропном материјалу, па се у конститутивној матрици појављује девет независних коефицијената. Ако се претпостави да су пројекције вектора, којим се дефинишу правци екстензибилних влакана, $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, односно $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, елементи конститутивне матрице се могу представити у облику:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \lambda + 2\mu + 2(a_1^2 + b_1^2)(\gamma_3 + \gamma_7 + \gamma_5 a_1 b_1 \cos 2\phi) + 2a_1 b_1 [\gamma_4 \cos 2\phi + a_1 b_1 (\gamma_2 + \gamma_6)] \\
 &\quad + 2\gamma_1 (a_1^4 + b_1^4) \\
 C_{22} &= \lambda + 2\mu + 2(a_2^2 + b_2^2)(\gamma_3 + \gamma_7 + \gamma_5 a_2 b_2 \cos 2\phi) + 2a_2 b_2 [\gamma_4 \cos 2\phi + a_2 b_2 (\gamma_2 + \gamma_6)] \\
 &\quad + 2\gamma_1 (a_2^4 + b_2^4) \\
 C_{33} &= \lambda + 2\mu + 2(a_3^2 + b_3^2)(\gamma_3 + \gamma_7 + \gamma_5 a_3 b_3 \cos 2\phi) + 2a_3 b_3 [\gamma_4 \cos 2\phi + a_3 b_3 (\gamma_2 + \gamma_6)] \\
 &\quad + 2\gamma_1 (a_3^4 + b_3^4) \\
 C_{12} &= \lambda + \gamma_3 (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2) + 2\gamma_1 (a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2) + \gamma_6 (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2) \\
 &\quad + \cos 2\phi \{ a_1 b_1 [\gamma_4 + \gamma_5 (a_2^2 + b_2^2)] + a_2 b_2 [\gamma_4 + \gamma_5 (a_1^2 + b_1^2)] \} + 2\gamma_2 a_1 a_2 b_1 b_2
 \end{aligned} \tag{1.89}$$

$$\begin{aligned}
C_{13} &= \lambda + \gamma_3 (a_1^2 + b_1^2 + a_3^2 + b_3^2) + 2\gamma_1 (a_1^2 a_3^2 + b_1^2 b_3^2) + \gamma_6 (a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2) \\
&+ \cos 2\phi \left\{ a_1 b_1 [\gamma_4 + \gamma_5 (a_3^2 + b_3^2)] + a_3 b_3 [\gamma_4 + \gamma_5 (a_1^2 + b_1^2)] \right\} + 2\gamma_2 a_1 a_3 b_1 b_3 \\
C_{14} &= (a_2 a_3 + b_2 b_3) (\gamma_3 + \gamma_5 a_1 b_1 \cos 2\phi) + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\phi [\gamma_4 + \gamma_5 (a_1^2 + b_1^2)] + \gamma_2 a_1 b_1 \right\} \\
C_{15} &= (a_1 a_3 + b_1 b_3) (\gamma_3 + \gamma_5 a_1 b_1 \cos 2\phi) + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\phi [\gamma_4 + \gamma_5 (a_1^2 + b_1^2)] + \gamma_2 a_1 b_1 \right\} \\
&+ \gamma_6 (a_1 a_3 b_1^2 + b_1 b_3 a_1^2) + 2\gamma_1 (a_3 a_1^3 + b_3 b_1^3) \\
C_{16} &= (a_1 a_2 + b_1 b_2) (\gamma_3 + \gamma_5 a_1 b_1 \cos 2\phi) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\phi [\gamma_4 + \gamma_5 (a_1^2 + b_1^2)] + \gamma_2 a_1 b_1 \right\} \\
&+ \gamma_6 (a_1 a_2 b_1^2 + b_1 b_2 a_1^2) + 2\gamma_1 (a_2 a_1^3 + b_2 b_1^3) \\
C_{23} &= \lambda + \gamma_3 (a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2) + 2\gamma_1 (a_2^2 a_3^2 + b_2^2 b_3^2) + \gamma_6 (a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2) \\
&+ \cos 2\phi \left\{ a_2 b_2 [\gamma_4 + \gamma_5 (a_3^2 + b_3^2)] + a_3 b_3 [\gamma_4 + \gamma_5 (a_2^2 + b_2^2)] \right\} + 2\gamma_2 a_2 a_3 b_2 b_3 \\
C_{24} &= (a_2 a_3 + b_2 b_3) (\gamma_3 + \gamma_5 a_2 b_2 \cos 2\phi) + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\phi [\gamma_4 + \gamma_5 (a_2^2 + b_2^2)] + \gamma_2 a_2 \right\} \\
&+ \gamma_6 (a_2 a_3 b_2^2 + b_2 b_3 a_2^2) + 2\gamma_1 (a_3 a_2^3 + b_3 b_2^3) \\
C_{25} &= (a_1 a_3 + b_1 b_3) (\gamma_3 + \gamma_5 a_2 b_2 \cos 2\phi) + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\phi [\gamma_4 + \gamma_5 (a_2^2 + b_2^2)] + \gamma_2 a_2 b_1 \right\} \\
&+ \gamma_6 (a_1 a_3 b_2^2 + b_1 b_3 a_2^2) + 2\gamma_1 (a_1 a_3 a_2^2 + b_1 b_3 b_2^2) \\
C_{26} &= (a_1 a_2 + b_1 b_2) (\gamma_3 + \gamma_5 a_2 b_2 \cos 2\phi) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\phi [\gamma_4 + \gamma_5 (a_2^2 + b_2^2)] + \gamma_2 a_2 b_1 \right\} \\
&+ \gamma_6 (a_1 a_2 b_2^2 + b_1 b_2 a_2^2) + 2\gamma_1 (a_1 a_2^3 + b_1 b_2^3) \\
C_{34} &= (a_2 a_3 + b_2 b_3) (\gamma_3 + \gamma_5 a_3 b_3 \cos 2\phi) + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\phi [\gamma_4 + \gamma_5 (a_3^2 + b_3^2)] + \gamma_2 a_3 b_1 \right\} \\
&+ \gamma_6 (a_2 a_3 b_3^2 + b_2 b_3 a_3^2) + 2\gamma_1 (a_2 a_3^3 + b_2 b_3^3) + \gamma_7 (2a_2 a_3 + 2b_2 b_3) \\
C_{35} &= (a_1 a_3 + b_1 b_3) (\gamma_3 + \gamma_5 a_3 b_3 \cos 2\phi) + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\phi [\gamma_4 + \gamma_5 (a_3^2 + b_3^2)] + \gamma_2 a_3 b_1 \right\} \\
&+ \gamma_6 (a_1 a_3 b_3^2 + b_1 b_3 a_3^2) + 2\gamma_1 (a_1 a_3^3 + b_1 b_3^3) + \gamma_7 (2a_1 a_3 + 2b_1 b_3) \\
C_{36} &= (a_1 a_2 + b_1 b_2) (\gamma_3 + \gamma_5 a_3 b_3 \cos 2\phi) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \left\{ \frac{1}{2} \cos 2\phi [\gamma_4 + \gamma_5 (a_3^2 + b_3^2)] + \gamma_2 a_3 b_1 \right\} \\
&+ \gamma_6 (a_1 a_2 b_3^2 + b_1 b_2 a_3^2) + 2\gamma_1 (a_1 a_2 a_3^2 + b_1 b_2 b_3^2)
\end{aligned}$$

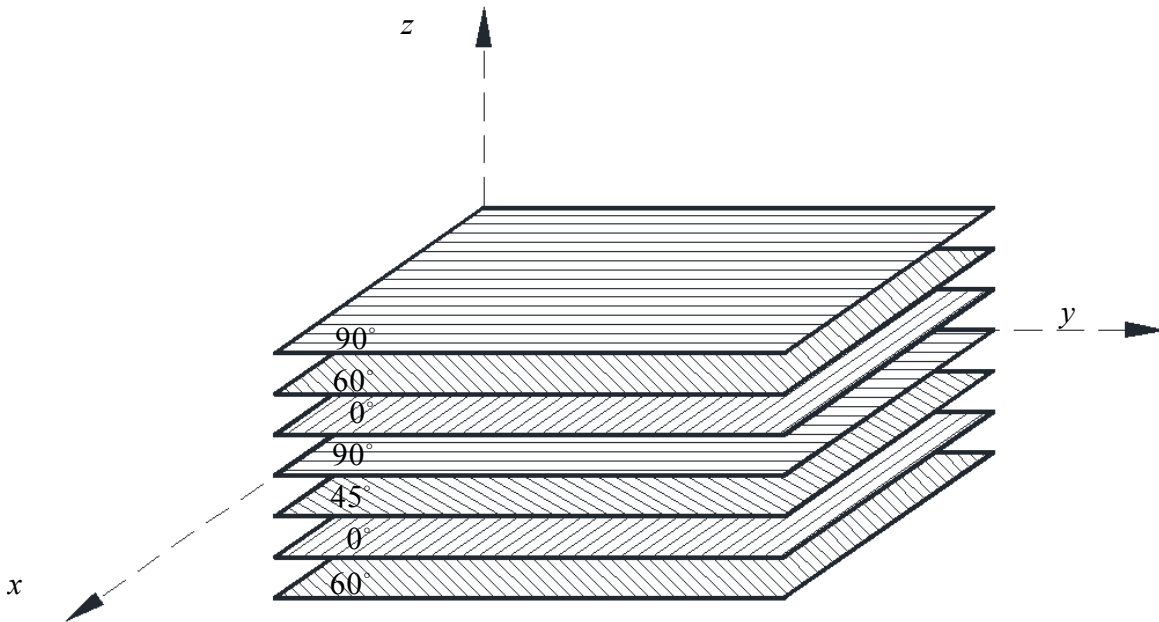
$$\begin{aligned}
C_{44} &= \mu + 2\gamma_6 a_2 a_3 b_2 b_3 + 2\gamma_1 (a_2^2 a_3^2 + b_2^2 b_3^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} (a_2 b_3 + a_3 b_2) [2\gamma_5 (a_2 a_3 + b_2 b_3) \cos 2\phi + \gamma_2 (a_2 b_3 + a_3 b_2)] + \gamma_7 (a_2^2 + b_2^2) \\
C_{45} &= \gamma_6 a_3 b_3 (a_1 b_2 + a_2 b_1) + 2\gamma_1 (a_1 a_2 a_3^2 + b_1 b_2 b_3^2) + \frac{1}{2} \gamma_5 (a_1 b_3 + a_3 b_1) (a_2 a_3 + b_2 b_3) \cos 2\phi \\
&\quad + \frac{1}{2} (a_2 b_3 + a_3 b_2) [\gamma_5 (a_1 a_3 + b_1 b_3) \cos 2\phi + \gamma_2 (a_1 b_3 + a_3 b_1)] + \gamma_7 (a_1 a_2 + b_1 b_2) \\
C_{46} &= \gamma_6 a_2 b_2 (a_1 b_3 + a_3 b_1) + 2\gamma_1 (a_1 a_2^2 a_3 + b_1 b_2^2 b_3) + \frac{1}{2} \gamma_5 (a_1 b_2 + a_2 b_1) (a_2 a_3 + b_2 b_3) \cos 2\phi \\
&\quad + \frac{1}{2} (a_2 b_3 + a_3 b_2) [\gamma_5 (a_1 a_2 + b_1 b_2) \cos 2\phi + \gamma_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1)] + \gamma_7 (a_1 a_3 + b_1 b_3) \\
C_{55} &= \mu + 2\gamma_6 a_1 a_3 b_1 b_3 + 2\gamma_1 (a_1^2 a_3^2 + b_1^2 b_3^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} (a_1 b_3 + a_3 b_1) [2\gamma_5 (a_1 a_3 + b_1 b_3) \cos 2\phi + \gamma_2 (a_1 b_3 + a_3 b_1)] + \gamma_7 (a_1^2 + b_1^2) \\
C_{56} &= \gamma_6 a_1 b_1 (a_2 b_3 + a_3 b_2) + 2\gamma_1 (a_1^2 a_2 a_3 + b_1^2 b_2 b_3) + \frac{1}{2} \gamma_5 (a_1 b_2 + a_2 b_1) (a_1 a_3 + b_1 b_3) \cos 2\phi \\
&\quad + \frac{1}{2} (a_1 b_3 + a_3 b_1) [\gamma_5 (a_1 a_2 + b_1 b_2) \cos 2\phi + \gamma_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1)] \\
C_{66} &= \mu + 2\gamma_6 a_1 a_2 b_1 b_2 + 2\gamma_1 (a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1) [2\gamma_5 (a_1 a_2 + b_1 b_2) \cos 2\phi + \gamma_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1)] + \gamma_7 (a_1^2 + b_1^2)
\end{aligned}$$

где су $\lambda, \mu, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7$ усвојене материјалне константе.

Горње једначине важе и у случају криволинијског распореда влакана. У том случају локални координатни систем може да се изабере тако да једна координатна равна садржи обе фамилије влакана и њихову непосредну околину, односно да буде тангентна у односу на обе фамилије влакана. Треба нагласити да, уколико би се догодило да угао између влакана буде једнак нули, конститутивна матрица материјала ојачаног са две фамилије влакана добија облик који одговара материјалу ојачаном са једном фамилијом влакана.

2 Теорије ламинатних плоча са посебним освртом на смицајне деформационе теорије вишег реда

Као што је речено у претходном поглављу, као конституенти композитног ламината заснованог на једнодирекционим слојевима могу се употребити влакнима ојачани материјали који се често због јединственог правца влакана називају и једнодирекциони композитни материјали. Такође је напоменуто да више међусобно круто повезаних слојева могу чинити слојну групу веће дебљине која се назива лејер. Класе симетрије лејера у зависности од броја независно променљивих у конститутивној матрици дате су једначинама (1.74), (1.78) и (1.85). Пример једног таквог ламината дат је на слици 2.1.

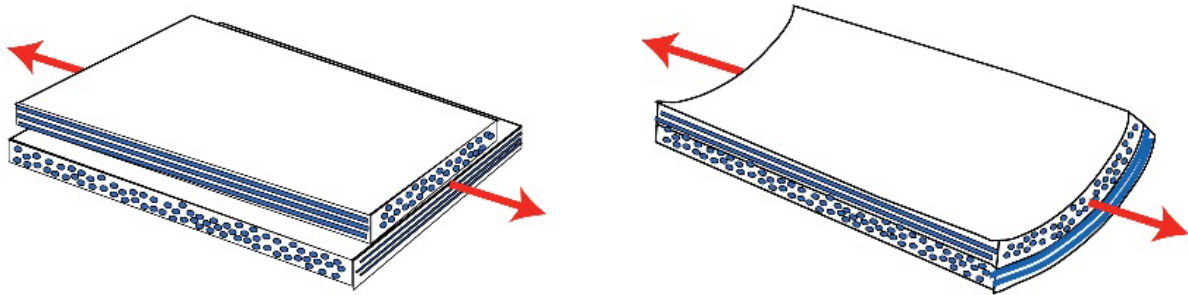


Слика 2.1 Слојевити композитни материјал-ламинат конституисан од једнодирекционих слојева различите оријентације

Са макромеханичког становишта анализа композитних ламината се најчешће врши на основу два различита теоријска приступа. Ови приступи су првенствено уведени са циљем да се задовоље међуслојни услови код ламината као слојевите композитне структуре. Континуалност на међуслоју се одређује на основу два теоријска приступа:

1. Приступ заснован на континуалности напона на међуслоју,
2. Приступ заснован на континуалности деформација на међуслоју.

Теоријски приступ заснован на континуалности напона на међуслоју захтева увођење додатних техника за одрживост континуалности напона као што је техника пропегатор матрице (*transfer matrix*). Ове технике подразумевају да су први и последњи слој у ламинату са супротних страна слободни од напона (на пример први слој са доње, а последњи са горње стране или обрнуто) док се на самом међуслоју уводи изједначавање вредности напона, тј. напони на врху првог слоја се изједначавају са напонима на дну другог слоја и тако редом до последњег слоја који је на врху слободан од напона.



а) Случај природног деформисања слојева

б) Случај када су слојеви идеално спојени

Слика 2.2. Два типа деформисања ламината под дејством аксијалног оптерећења

Теоријски приступ заснован на континуалности деформација подразумева континуалне деформације по дебљини ламината. Континуалност деформација се остварује претпостављањем облика померања. У ову сврху развијене су различите деформационе теорије које су и даље у фази константног усавршавања и развоја. Овај приступ је изузетно значајан и са аспекта овог рада, а нарочито деформационе теорије вишег реда, које не занемарују утицај смицајних напона и деформација у ламинату.

2.1 Подела ламинатних плоча

У литератури егзистира велики број подела ламинатних плоча и нема потпуно јасне класификације ламината јер су ламинати такви материјали чије су карактеристике под потпуном или делимичном контролом конструктора [110]. Оправдање овакве констатације се налази у чињеници да на својства ламинатних плоча утичу геометријски ламинатни параметри, начин слагања слојева, карактеристике материјала појединих слојева, односно лејера итд.

У зависности од материјала конституената, најгрубља подела ламинатних плоча била би на:

1. **Сендвич ламинате**
2. **Пуне ламинате**

Сендвич ламинати или другачије названи ламинати са језгром, садрже средњи слој који је најчешће од јефтинијег и лакшег материјала. На овај начин смањује се цена, али и истовремено побољшава савојна крутост ламината.

Пуни ламинати за разлику од сендвич ламината немају језгро и у зависности од тога да ли се њихови лејери (слојеви) састоје од истог или различитих материјала извршена је њихова даља подела на **хомогене** и **хибридне**. Узимајући у обзир сам начин дефинисања сендвич ламината потпуно је јасно да они могу бити једино хибридни.

Друга подела ламинатних плоча, која је истовремено и најзначајнија са аспекта овог рада, је подела ламината на основу геометријских параметара (углова оријентације влакана појединих лејера у односу на усвојени глобални координатни систем или у односу на средњу раван ламината, дебљина појединих лејера, међусобни положај суседних лејера итд.). Најопштија подела ламината на основу геометријских карактеристика слојева у односу на средњу раван ламината је подела на [110]:

1. **Симетричне ламинате** (*symmetric laminates*)
2. **Антисиметричне ламинате** (*antisymmetric laminates*)
3. **Асиметричне ламинате** (*asymmetric laminates ili non-symmetric laminates*)

Код симетричног ламината (слика 2.3.а) геометријске карактеристике су симетричне у односу на средњу раван плоче, тј. углови оријентације слојева, дебљине слојева и карактеристике материјала изнад и испод средње равни су међусобно једнаки, што се математички може писати као:

$$\theta(z) = \theta(-z), C_{ij}^k(z) = C_{ij}^k(-z), h_k(z) = h_k(-z),$$

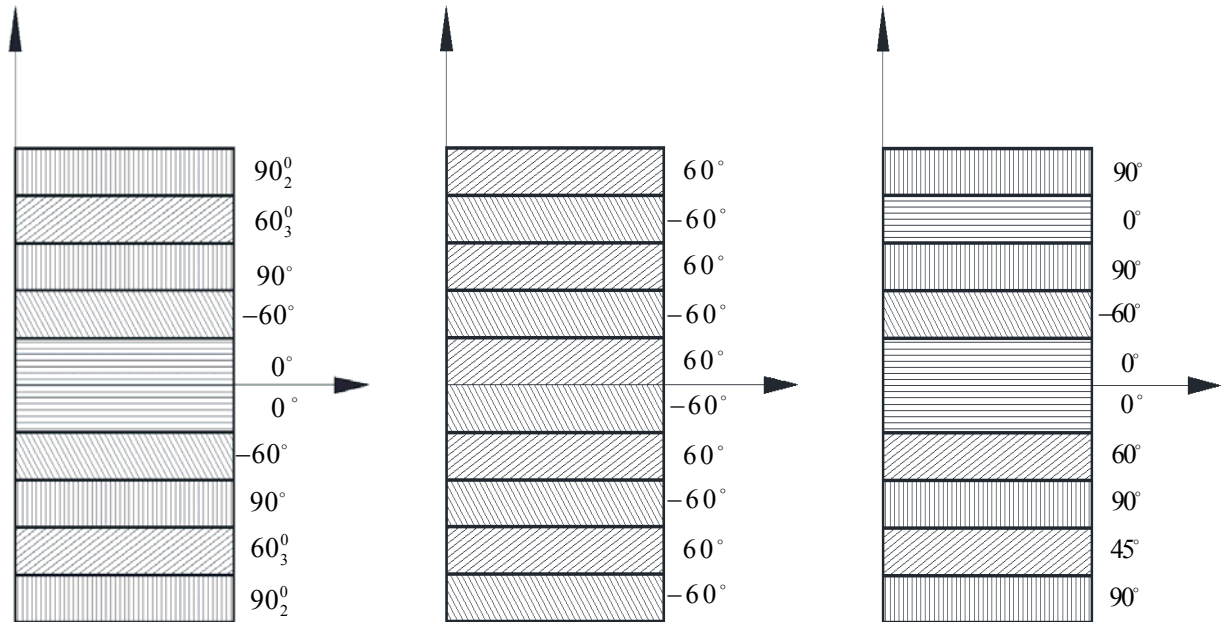
где су:

$z=0$ - једначина средње равни,

θ - угао оријентације влакана слоја (лејера) у односу на глобални координатни систем,

C_{ij}^k - коефицијенти еластичности k -тог слоја у односу на средњу раван,

h_k - дебљина k -тог слоја (лејера) у односу на средњу раван.



а) симетрични ламинат

б) антисиметрични ламинат

ц) асиметрични ламинат

Слика 2.3 Слојевити композитни материјал-ламинат конституисан од једнодирекционих слојева различите оријентације

Тумачење ознака са десне стране слике 2.3 је следеће:

- прва бројна ознака представља угао оријентације влакана у односу на дефинисани правац x -осе глобалног координатног система,
- индексна ознака представља број слојева исте дебљине у одређеном лејеру при чему лејере представља спој ове две ознаке, тако нпр. ознака 90_2 представља слојну групу чији је угао оријентације влакана 90° у односу на x -правац средње равни и састоји се од два слоја једнаких дебљина.

Код антисиметричног ламината (слика 2.3.б) дебљине слојева и карактеристике материјала слојева изнад и испод средње равни међусобно су једнаке, док су углови оријентације влакана у односу на глобални координатни систем, изнад и испод средње равни, супротног предзнака тј. важи:

$$\theta(z) = -\theta(-z), C_{ij}^k(z) = C_{ij}^k(-z), h_k(z) = h_k(-z),$$

Код асиметричног ламината (слика 2.3.ц) изражена је потпуна независност геометријских карактеристика слојева или њихових групација лејера изнад и испод средње равни, па се не

може успоставити математичка веза између углова оријентације, карактеристика материјала и дебљина слојева изнад и испод средње равни.

Даље се ламинати, такође на основу геометријских карактеристика, тј. на основу оријентације слојних група (лејера), могу поделити на:

1. **Умрежене** - *Angle ply* или краће **АР** ламинате
2. **Укрштене** - *Cross ply* или краће **СР** ламинате
3. **Умрежене и укрштене** - **АР/СР** ламинате
4. **Квази-изотропне**
5. **Уопштене** - *general* ламинате

Умрежени и укрштени ламинати [110] поседују две ортогоналне равни симетрије које се не морају обавезно поклапати са равнима усвојеног координатног система. Правци равни симетрије у односу на усвојен координатни систем називају се бисекторским правцима, док се угао који бисекторски правац заклапа са неком од оса координатног система назива бисекторски угао γ . Влакна појединих лејера су у односу на бисекторски правац померена за углове $\pm\varphi$ који се називају ламинатни углови. Основна разлика између АР и СР ламината је у томе што код АР ламината углови γ и $\pm\varphi$ могу имати произвољне вредности, док је код СР ламината бисекторски угао фиксиран и износи тачно $\gamma = 45^\circ$, док су ламинатни углови такође фиксирани и износе $\varphi = \pm 45^\circ$. За вредност бисекторског угла $\gamma = 0^\circ$ долази до поклапања правца материјалне симетрије и координатних оса.

Квази-изотропни ламинати су таква врста ламината код којих су слојеви постављени на такав начин да се ламинат понаша као изотропни слој при раванском оптерећењу. Суштински, ови ламинати нису изотропни (зато се називају и квази-изотропни), јер се њихово понашање под дејством трансверзалног оптерећења и под дејством интерламинарних смицајних оптерећења разликује у односу на изотропни материјал. Код ових ламината влакна су постављена под углом $\varphi = \frac{i * \pi}{n}$, ($0 \leq i < n$), где је n број слојних група који не сме бити мањи од три. Треба нагласити да су геометријски параметри квази-изотропног ламината дириговани и не могу се бирати произвољно.

Уопштени ламинати су ламинати код којих лејери могу имати потпуно различите оријентације влакана и рад са оваквим ламинатима је отежан у смислу контролисања макромеханичких особина.

На основу дебљина слојних група могуће је извршити поделу ламината на:

1. **Уравнотежене ламинате**
2. **Неуравнотежене ламинате**

Код уравнотеженог ламината сви слојеви тј. лејери морају имати једнаке дебљине тј. постоји униформност дебљина слојних група гледано дуж нормале на ламинат.

Код неуравнотеженог ламината дебљине слојних група могу делимично или потпуно да се разликују тако да не постоји униформност по дебљини ламината.

Када је подела ламината у питању треба нагласити да не постоје оштре границе међу претходно набројаним поделама, тако на пример један исти ламинат може бити симетричан, умрежен и неуравнотежен. Због тога се у литератури често приликом описивања макромеханичких карактеристика могу наћи, на пример, симетрични квази-изотропни ламинати (*symmetric quasi-isotropic laminates*), асиметрични укрштени ламинати (*non-symmetric cross ply laminates*) итд.

2.2 Теоријске основе ламинатних плоча - Ламинатне теорије засноване на принципу континуалности деформација

Композитни ламинати засновани на једнодирекционим лејерима ојачаним влакнима због своје велике крутости и јачине, а мале тежине, имају широку примену у структурама високих перформанси. У поређењу са конвенционалним металима најзначајније карактеристике композитних материјала су ортотропија у ламинатној равни, низак трансверзални модул смицања и слојевитост дуж дебљине ламината. Већина композитних материјала се примарно користи у танким структурама. Са напретком технологије све је чешћа употреба ламината у дебљим и умерено дебљим структурама. У почетном периоду испитивања ламината коришћене су технике које се користе за испитивање конвенционалних материјала попут класичне теорије плоча. Различите теорије оригинално развијене за изотропне танке, умерено дебеле и дебеле плоче су проширене на ламинатне анизотропне плоче, а поред тога су развијене и нове побољшане смицајне деформационе теорије за ламинатне плоче.

Теорије ламинатних плоча су од суштинске важности за прецизну анализу ламинатних композитних плоча. У постојећој литератури могуће је наћи велики број развијених теорија ламинатних композитних плоча. Према [111] преглед различитих еквивалентних теорија лејера ламинатних плоча дали су *Reddy* и *Robbins* [112]. Целокупно поређење ламинатних теорија заснованих на хипотезама померања, укључујући и смицајне деформационе теорије, представили су *Liu* и *Li* [113]. Преглед ламинатних теорија и сендвич плоча дао је *Altenbach* [114]. Преглед теорија заснованих на померањима и смицајним деформационим теоријама заснованим на напонима за изотропне и анизотропне ламинатне плоче дали су *Ghugal* и *Shimpi* [115]. Преглед различитих врста ламинатних теорија према [111] дали су још и *Reddy* и *Arciniega, Kant* и *Swaminathan*, као и *Mittelstedk* и *Becker*.

Као резиме свега набројаног према [111] теорије ламинатних плоча могу грубо да се поделе у две категорије:

1. Еквивалентне теорије лејера (*Equivalent single layer –ESL*) које укључују:
 - Класичну ламинатну теорију (*classical lamination theory-CLT*)
 - Смицајну деформациону теорију првог реда (*first-order shear deformation theory-FSDT*) или Мидлинову теорију (*Mindlin Plate theory*)
 - Смицајну деформациону теорију вишег реда (*Higher-order shear deformation theories –HSDT*)
 - *Lejerwise (Layer-wise lamination theory –LLT)*
2. 3D еластичне теорије континуума (*Continuum-based 3D elasticity theory*)

Историјски преглед анализа анизотропних плоча које користе класичну теорију плоче и смицајно деформациону теорију плоче дали су *Vinson* и *Chou*[116]. Преглед *Equivalent single layer – ESL* ламинатне теорије дали су, *Noor* и *Burton* [117], *Reddy* и *Robbins* [118], *Kapania* и *Raciti* [119], итд.

У овом раду разматране су *ESL* ламинатне теорије, и то првенствено оне које се заснивају на компонентама померања, па ће у наставку бити дато детаљно појашњење сваке од ових теорија. Примена ових теорија примарно оправдање налази у чињеници да су оне приближног карактера, па су као такве применљиве у нумеричком решавању инжењерских проблема.

2.2.1 Класична ламинатна теорија - Classical lamination theory (CLT)

Ова теорија је заснована на Кирхофовој (*Kirchhoff*) теорији плоча која је најједноставнија и најчешће коришћена у напонској анализи композитних ламината. При формулацији ове теорије претпоставља се да попречна нормала на ламинат остаје управна и права за време деформације, што за последицу има да су смицајне компоненте тензора деформације $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Такође се претпоставља да су померања у равни ламината линеарна функција координате у правцу дебљине ламината, као и да је нормални напон у правцу дебљине $\sigma_{zz} = 0$, па се, по овој теорији, ламинат анализира при условима раванског стања напона.

Теорије ламинатних плоча засноване на Кирхофовој хипотези су развијали *Ashton* и *Whitney* [120], *Ambartsumyan* [121], *Reissner* и *Stavsky* [122], *Dong* и остали [123], *Lekhnitskii*, *Arkhipov* [124] итд.

Сагласно претпоставци да су померања у равни ламината линеарне функције координате z , ова померања се претпостављају у облику:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x}, \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y}, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

где су:

u_0, v_0, w_0 - померања средње равни ламината, $\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$ - углови ротације.

Ова хипотеза развијена је под претпоставком малих деформација и ротација. Компоненте тензора малих деформација се могу представити на основу компоненти померања у складу са једначином (1.3). Уведене кинематичке претпоставке о стању напона или деформација редукују тродимензиони проблем, узимајући у обзир да је дебљина много мања од преостале две димензије, на равански проблем. Узимајући у обзир чињеницу да су ламинатне теорије применљиве и за динамичка испитивања, претпостављени облици померања зависе и од времена t , па се из тог разлога у претпостављеним облицима померања у скупу независних променљивих налази и време. Треба нагласити да је потребан услов да би се одржала континуалност деформација да слојеви буду савршено спојени. На основу (1.3) веза између компоненти вектора деформација и претпостављених облика померања је:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Заменом претпостављених померања, датих једначином (2.1), у једначину (2.2) добија се:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x,y,t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x,y,t)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial y^2}, \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w(x,y,z,t)}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x,y,t)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_0(x,y,t)}{\partial x} \\
&\quad - z \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_0(x,y,t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y,t)}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial x \partial y}, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z,t)}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z,t)}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

У једначини (2.3) уочава се да су компоненте деформације ε_{zz} , γ_{xz} , γ_{yz} једнаке нули, па се при анализи композитног ламината применом CLT проблем своди на проблем раванског стања деформација. Деформације са индексом нула су деформације у средњој равни ламинатне плоче које се још називају и мембранским деформацијама. Детаљан приказ употребе ове деформационе теорије у макромеханичкој анализи композита биће дат у наредном поглављу.

2.2.2 Смицајна деформациона теорија првог реда - *First-order shear deformation theory (FSDT)*

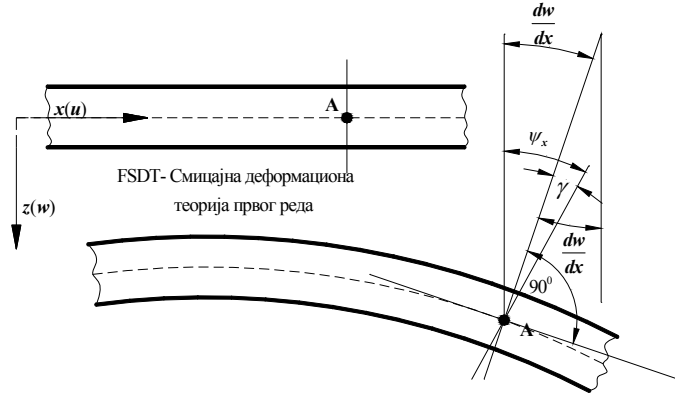
Значај утицаја трансверзалних смицајних деформација при савијању ламинатних плоча међу првима анализирали су Мидлин [15], и Рајзнер (*Reissner*) [17], због чега се ове две теорије често поистовећују. Различите верзије FSDT плоча дали су Yang [125], *Whitney* и *Pagano* [126], *Qi* и *Knight* [127], *Sun* и *Whitney* [128], итд. *Pryor* и *Barker* [129], су развили формулацију коначних елемената засновану на FSDT за укрштене (*cross ply*) симетричне и антисиметричне ламинатне плоче. *Hinton*, *Reddy* и *Chao* [130], *Owen* и *Li Hinton* [131], *Reddy* и *Chao* [132] су развили коначне елементе засноване на FSDLT за уопштене ламинатне плоче (*general laminate*). *Turvey* [133] је представио тачну (затворену-форму) и приближну анализу за савијање умрежених (*angle ply*) и укрштених (*cross ply*) ламинатних правоугаоних плоча засновану на FSDT. Према овој теорији потребно је увести смицајне корекционе факторе како би се детаљно појаснила смицајна енергија деформације. Ови фактори зависе од својстава слојева конституената ламината, углова оријентације влакана у слојевима, контурних услова и конкретне примене ламината. Процедuru за налажење ових фактора су представили *Whitney*, *Chatterjee* и *Kulkarni* [134]. FSDT пружа равнотежу између компјутерске ефикасности и тачности за глобално понашање танких и умерено танких ламинатних композитних плоча, али се за локалне ефекте не могу добити тачна предвиђања. На пример, овом теоријом није могуће предвидети интерламинарну расподелу напона међу слојевима ламината, деламинацију итд. Већина комерцијалних софтвера за анализу конструкција направљених од композитних ламината ради на принципу ове теорије. Недостатак примене ових теорија у комерцијалним софтверима лежи у чињеници да се применом софтвера могу добити напони у сваком слоју ламината, али не и напони на врху и дну сваког слоја, тј. на додиру између слојева. Код теорија заснованих на принципу континуалности деформација, на међуслоју између свака два слоја, различитих оријентација или различитих карактеристика материјала јављају се две вредности напона које настају као резултат различитих вредности коефицијента конститутивне матрице.

Према овој теорији поље померања се претпоставља у облику:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

где су:

u_0, v_0, w_0 - померања средње равни ламината, ψ_x, ψ_y - углови ротације нормале у односу на вертикалну z -осу.



Слика 2.4. Претпоставке ротације нормале за смицајну деформациону теорију првог реда

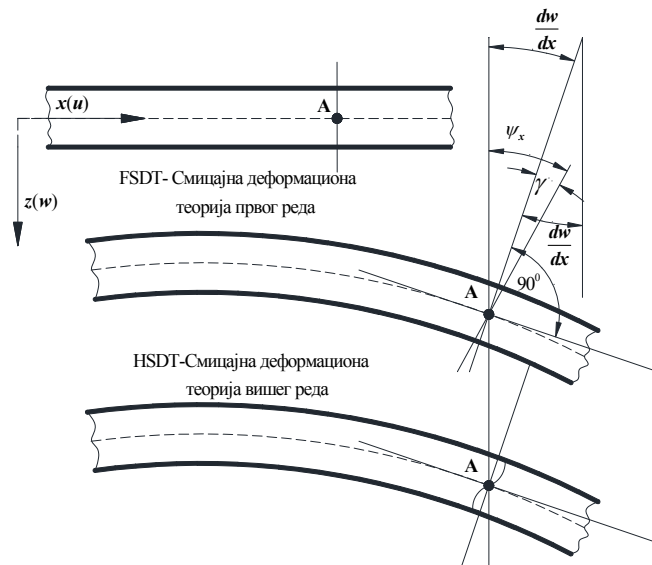
Компоненте вектора деформације према овој теорији имаће облик:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial x} = \varepsilon_{xx}^0 + z k_x, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial y} = \varepsilon_{yy}^0 + z k_y, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x} \\ &+ z \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\gamma_{xy}^0} + z \underbrace{\left(\frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial x} \right)}_{k_{xy}} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} = \psi_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} = \gamma_x, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} = \psi_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} = \gamma_y. \end{aligned} \quad (2.5)$$

На основу изведених компоненти деформације закључује се да се код ове теорије укупна ротација нормале добија као збир ротације услед савијања и услед трансверзалног смицања. Треба нагласити да нормала на средњу површ задржава линеаран облик, тј нема савијања нормале по дебљини ламината.

2.2.3 Смицајне деформационе теорије вишег реда – *Higher-order shear deformation theories (HSDT)*

Са развојем компјутерских технологија и нумеричких метода за решавање проблема класичне и комплексне анализе створени су предуслови за примену нешто сложенијих теорија од претходно описане CLT и FSDT теорије. Увођењем ових теорија могуће је смањити степен апроксимације реалних проблема. Као и претходно описане ESL теорије и смицајне деформационе теорије вишег реда су засноване на претпостављеним пољима померања. *Lo, Christensen* и *Wu* [50-51] су објединили коришћене нотације за изражавање различитих смицајних деформационих теорија вишег реда. Они су представили развој HSDT теорија према функционалној зависности померања од степена независно променљиве z која у деформационој теорији представља координатну осу нормалну на средњу раван у недеформисаној конфигурацији ламинатне плоче. Ове теорије могу бити полиномне вишег реда, или пак могу бити засноване на функцијама које нису полиномне, као, на пример, експоненцијалне, тригонометријске, хиперболичке итд. Смисао увођења ових теорија лежи у чињеници да је потребно добити што приближније резултате експерименталним резултатима, а без употребе корекционих фактора. Ове теорије треба да отклоне недостатке примене теорија нижег реда на дебеле и умерено дебеле ламинатне плоче. Имплементација ових теорија је предмет анализе многих аутора, а због њиховог великог броја постоји и више прегледних радова [111], [136], [137] који имају за циљ да помогну истраживачима у даљем развоју, као и да укажу на све предности и мане до тада развијених теорија. У овом случају се мења деформација нормале, што се јасно може уочити на слици (2.5).



Слика 2.5 Упоредни приказ деформационих теорија

Са слике се јасно види да за разлику од CLPT и FSDT код теорија вишег реда, нормала на ламинат не задржава линеарни облик, већ добија нелинеаран криволинијски облик. Сам тип ове нелинеарности се, код деформационих теорија вишег реда, дефинише претпостављеним облицима померања и врши се избор функција које се уводе у претпостављене облике померања, а са циљем да се добију што једноставније функције и математички мање захтевне, које ће дати резултате који су најприближнији експерименталним резултатима. Што

Једноставнији математички облик претпостављених облика померања неопходан је из разлога примене ових теорија у поступцима нумеричке математике. Једноставност у многоме скраћује време прорачуна. У оквиру ове тезе извршена је детаљна компаративна анализа примене најрепрезентативнијих и најчешће коришћених теорија. Одабир различитих поља померања подразумева и увођење различитог броја независно променљивих које дефинишу претходно описану деформацију нормале на ламинат. Оно што је уочено је да је највећи број аутора своја истраживања заснивао на функцијама облика, па се са тим циљем ушло у детаљну проверу сваке од предложених функција облика. Поред HSDT, заснованих на функцијама облика у макромеханичкој анализи, коришћени су и други облици ових теорија засновани на полиномним функцијама, пре свега из разлога поједностављене и олакшане процедуре рада са полиномима. У раду са полиномима математички апарат је доста једноставнији, а самим тим су и прорачуни мање временски захтевни, што директно проузрокује мању хардверску захтевност рачунара, који се примарно користе у различитим типовима аналитичке и нумеричке анализе.

2.2.3.1 Смицајне деформационе теорије вишег реда са различитим смицајним деформационим функцијама облика

Недостатке класичне ламинатне теорије и смицајне деформационе теорије првог реда, за коју су неопходни корекциони фактори, многи аутори су отклонили увођењем смицајних деформационих функција облика (*shape functions*). Многе од ових функција облика су уведене на тај начин да дају добре резултате за конкретне врсте оптерећења и конкретне статичке и динамичке проблеме. Треба нагласити да све предложене функције облика нису генерално применљиве на све типове проблема. У литератури се може наћи велики број ових функција које могу бити полиномне, тригонометријске, експоненцијалне, хиперболичке итд. Неки примери функција облика дати су у табели (2.1).

Редни број функције	Име аутора	Облик функције $f(z)$
1	Ambartsumain [121]	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
2	Kaczkowski, Panc и Reissner [122]	$\frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)$
3	Levy, Stein, Touratier [71]	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{h} z \right)$
4	Mantari и остали [121]	$\sin \left(\frac{\pi}{h} z \right) e^{\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{h} z \right)} + \frac{\pi}{2h} z$
5	Viola и остали [84]	$\frac{2h}{\pi} \tan \left(\frac{\pi}{2h} z \right)$
6-7	Mantari и остали [76],	$\tan(mz) - zm \sec^2(mh/2), m = \{1/5h, \pi/2h\}$
8	Karama и остали [74], Aydogdu [75]	$ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}, \left(ze^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln \alpha}} \right), \forall \alpha > 0$

9	Mantari и остали [83],	$z \cdot 2.85^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} + 0.028z$
10	El Meiche и остали [85]	$\xi \left[\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - z \right], \xi = \left\{ 1, 1/\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right\}$
11	Soldatos [73]	$h \sinh(z/h) - z \cosh(1/2)$
12	Mantari и остали [81],	$\sinh\left(\frac{z}{h}\right) e^{m \cosh\left(\frac{z}{h}\right)} - \frac{z}{h} \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right) + m \sinh^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] e^{m \cosh\left(\frac{1}{2}\right)}, m = \{-6, -7\}$
13	Akavci и Tanrikulu [86]	$z \sec h\left(\frac{z^2}{h^2}\right) - z \sec h\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$
14	Akavci и Tanrikulu [86]	$\frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{3\pi}{2} z \sec h^2\left(\frac{1}{2}\right)$
15	Grover и остали [88]	$z \sec\left(\frac{rz}{h}\right) - z \frac{\sec\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1 + \frac{r}{2} \tan\left(\frac{r}{2}\right)\right)}, r=0.1$
16	Mechab и остали [87]	$\frac{z \cos\left(\frac{1}{2}\right)}{-1 + \cos\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{h \sin\left(\frac{z}{h}\right)}{-1 + \cos\left(\frac{1}{2}\right)}$

Табела 2.1. Смицајне деформационе функције облика дефинисане од стране различитих аутора

Претпостављени облици поља померања у овом случају су облика:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, t) + f(z)\theta_x, \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t) + f(z)\theta_y, \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

где су:

u_0, v_0, w_0 - померања средње равни ламината,

$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ - углови ротације нормале у односу на вертикалну y -осу услед савијања,

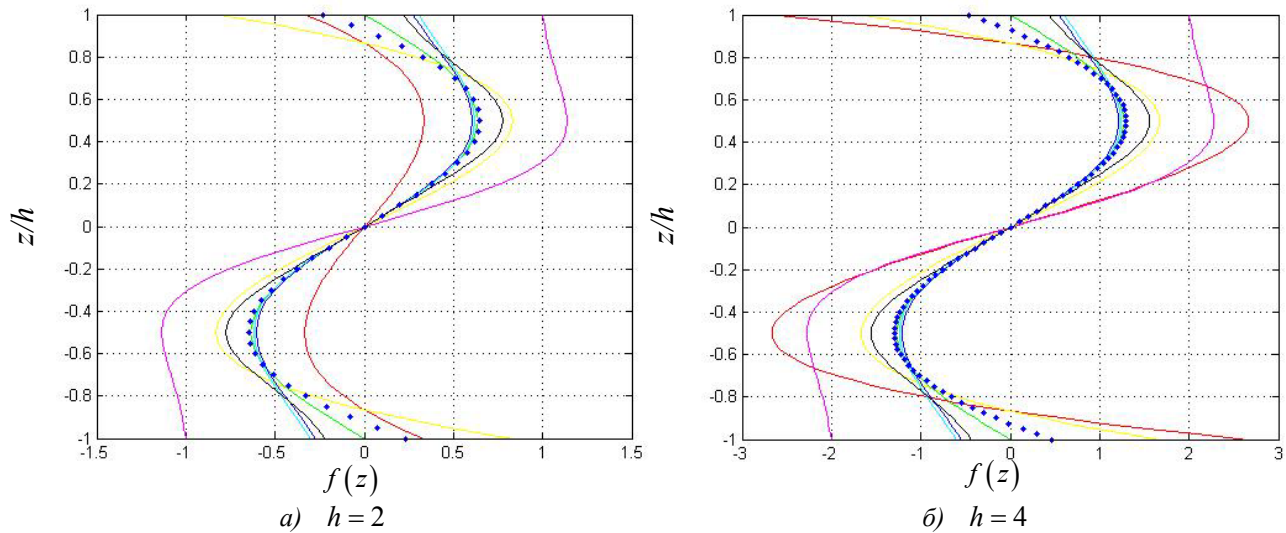
θ_x, θ_y - померања услед трансверзалног смицања,

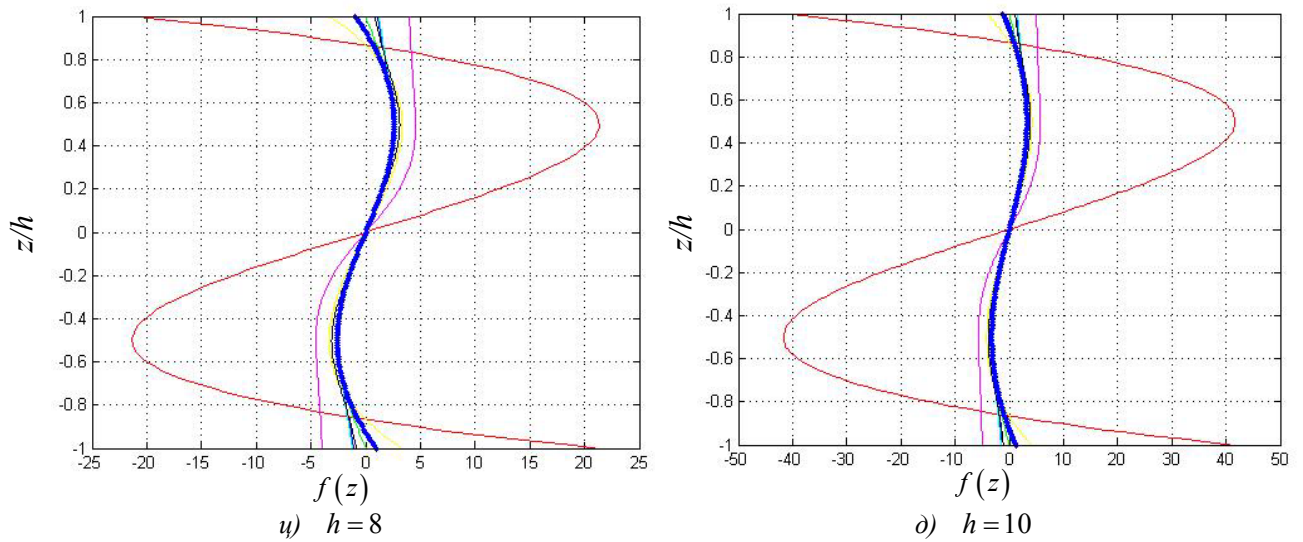
$f(z)$ - функције облика.

Компоненте тензора деформације према овој теорији у области еластичности имаће облик:

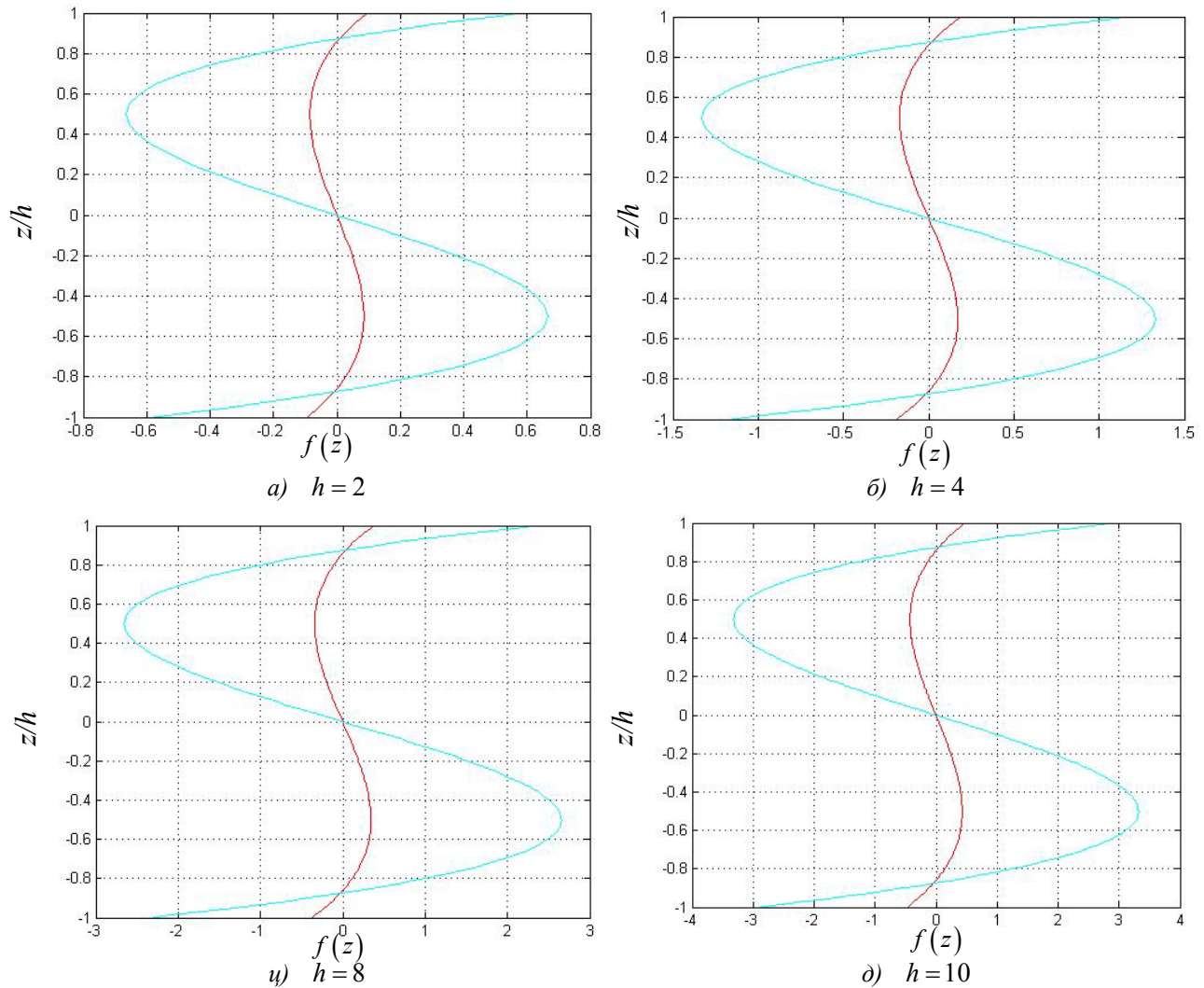
$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\varepsilon_{xx}^0} - z \underbrace{\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2}}_{k_x^0} + f(z) \underbrace{\frac{\partial \theta_x(x, y, t)}{\partial x}}_{k_x^1} = \varepsilon_{xx}^0 - zk_x^0 + zk_x^1, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial y}}_{\varepsilon_{yy}^0} - z \underbrace{\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2}}_{k_y^0} + f(z) \underbrace{\frac{\partial \theta_y(x, y, t)}{\partial y}}_{k_y^1} = \varepsilon_{yy}^0 - zk_y^0 + zk_y^1, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y} + f(z) \frac{\partial \theta_x(x, y, t)}{\partial y} \\
 &+ \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y} + f(z) \frac{\partial \theta_y(x, y, t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\gamma_{xy}^0} \\
 &+ z(-2) \underbrace{\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y}}_{k_{xy}^0} + f(z) \left(\underbrace{\frac{\partial \theta_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x, y, t)}{\partial x}}_{k_{xy}^1} \right) = \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^0 + f(z)k_{xy}^1, \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} = -\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + f'(z)\theta_x + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} = f'(z)\theta_x, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} = -\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + f'(z)\theta_y + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} = f'(z)\theta_y.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ако се погледају дијаграми предложених смицајних деформационих функција облика у координатном систему чија ордината представља однос z/h , јасно се може уочити да међу њима постоје криве чији су графици сличног облика. На основу графика могу се издвојити бар две јасне групе кривих које су предложили раличити аутори чије су функције облика приказане у табели 2.1. Дијаграми функција облика коришћених у овом раду дати су на сликама (2.6), (2.7), (2.8).

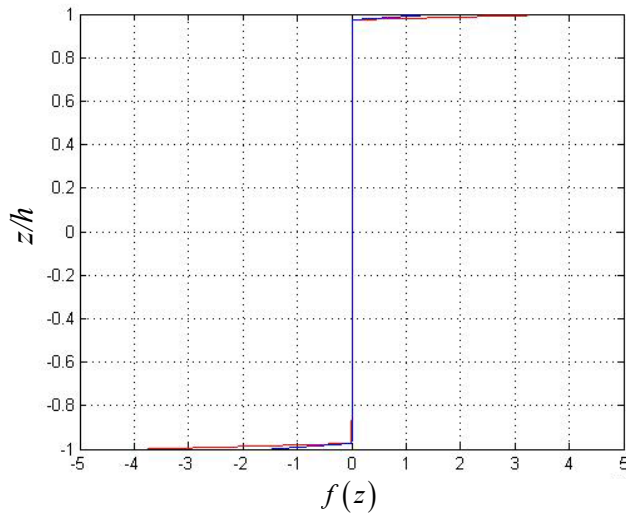




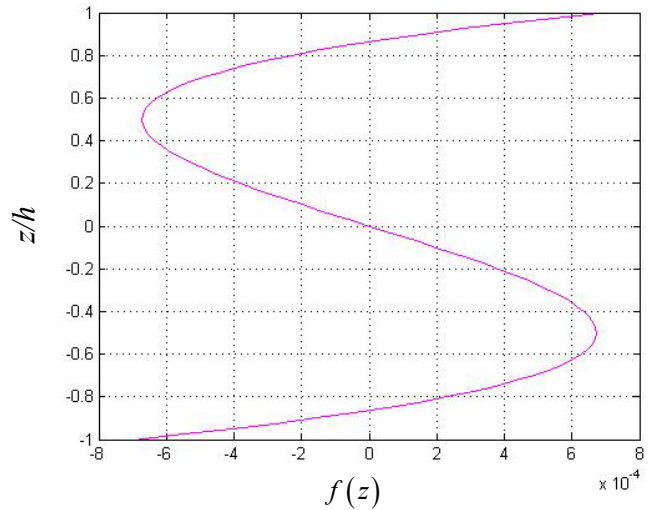
Слика 2.6. Дијаграми функција облика датих у табели под редним бројевима 1,2,3,4,8,9,13,14 за различите вредности h



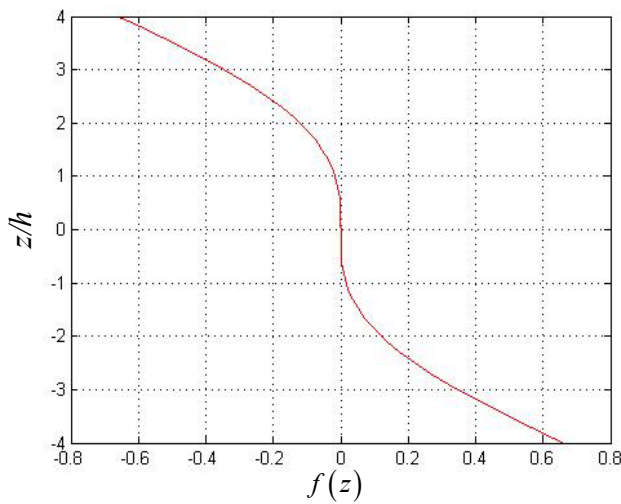
Слика 2.7. Дијаграми функција облика датих у табели под ред. бројевима 11 и 16 за различите вредности h



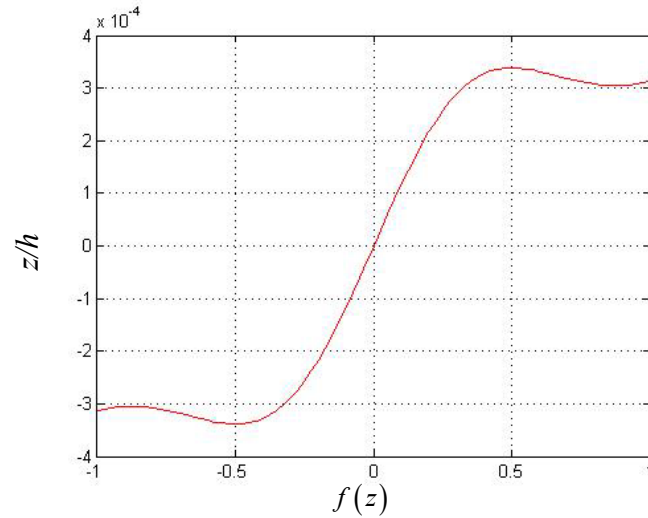
а) Функције под редним бројевима 5 и 7



б) Функција под редним бројем 6



ц) Функција под редним бројем 10



д) Функција под редним бројем 12

Слика 2.8. Дијаграми функција облика које не спадају у две јасно издвојене групе функција при вредности $h=4$. Ако се погледају дијаграми функција облика дати на сликама (2.6-2.8) може се закључити да су све предложене функције облика непарне функције координате z . Такође се лако може уочити да функције облика задржавају свој облик, независно од промене дебљине h . Још једна јасно видљива карактеристика многих од ових функција је да за вредност ординате $z/h=0.5$ остварују максималне вредности гледано у односу на апцису. Сама употребљивост ових функција биће детаљно појашњена кроз различите типове макромеханичке анализе композитних ламината.

2.2.3.2 Смицајна деформациона теорија другог реда – *Second-order shear deformation theories (SSDT)*

Према *Nelson* и *Lorch* [144], *Whitney* и *Sun* [100] представили су пречишћену структуралну смицајну деформациону теорију другог реда за статичку и динамичку анализу ламинатних ортотропних плоча. *Engblom* и *Ochoa* [145] искористили су SSDT да развију формулацију коначних елемената за статичку анализу укрштених ламинатних плоча. *Kwon* и *Akin* [146] су развили параболичку смицајну деформациону теорију без смицајног корективног фактора.

Fares [147] је представио смицајну деформациону теорију другог реда за анализу слободних вибрација анизотропних плоча. *Tessler* [148] је развио нову дводимензионалну теорију ламинатне плоче за линеарну еластостатичку анализу дебелих композитних плоча. Према овом аутору раванска померања су линеарна, док су трансверзална померања квадратне функције координате дебљине. Недостак ових теорија је у коришћењу смицајног корекционог фактора који се појављује код смицајне деформационе теорије првог реда. Један од таквих примера је претпоставка поља померања коју су дали *Whitney* и *Sun* [100] са корекционим факторима датим од стране *Kane* и *Mindlin* [149] за хомогену изотропну плочу. Према овој теорији, поље померања се може представити у облику:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + \frac{z^2}{2}\phi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + \frac{z^2}{2}\phi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Компоненте тензора деформације према овој теорији имаће облик:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\varepsilon_{xx}^0} + z \underbrace{\frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial x}}_{k_{xx}^0} + z^2 \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_x(x, y, t)}{\partial x}}_{k_{xx}^1}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial y}}_{\varepsilon_{yy}^0} + z \underbrace{\frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial y}}_{k_{yy}^0} + z^2 \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_y(x, y, t)}{\partial y}}_{k_{yy}^1}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = \psi_z(x, y, t), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial \phi_x(x, y, t)}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial x} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial \phi_y(x, y, t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\gamma_{xy}^0} + z \underbrace{\left(\frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial x} \right)}_{k_{xy}^0} \\ &+ z^2 \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y(x, y, t)}{\partial x} \right)}_{k_{xy}^1} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^0 + z^2 k_{xy}^1, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} = \underbrace{\psi_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\gamma_{xz}^0} + z \underbrace{\left(\phi_x(x, y, t) + \frac{\partial \phi_z(x, y, t)}{\partial x} \right)}_{k_{xz}^0} = \gamma_{xz}^0 + z k_{xz}^0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} = \underbrace{\psi_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y}}_{\gamma_{yz}^0} + z \underbrace{\left(\phi_y(x, y, t) + \frac{\partial \phi_z(x, y, t)}{\partial y} \right)}_{k_{yz}^0} = \gamma_{yz}^0 + z k_{yz}^0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Корекциони фактори $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5$, се уводе на следећи начин:

$$\begin{aligned} \gamma_{0xz} &\rightarrow \kappa_1 \gamma_{0xz}; \quad \gamma_{0yz} \rightarrow \kappa_2 \gamma_{0yz}; \quad \varepsilon_{0z} \rightarrow \kappa_3 \varepsilon_{0z} \\ \phi_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} &\rightarrow \kappa_4 \left(\phi_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right); \quad \left(\phi_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right) \rightarrow \kappa_5 \left(\phi_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Према овој теорији, поред ротација нормале услед савијања и трансверзалног смицања постоји и елонгација нормале, као и савијање саме нормале које описују квадратни чланови претпостављеног поља померања. Примена ове теорије добија на значају тек код макромеханичке анализе дебелих и умерено дебелих ламинатних плоча.

2.2.3.3 Смицајна деформациона теорија трећег реда – Third-order shear deformation theories (TSDT)

Као резиме свих постојећих смицајних деформационих теорија трећег реда *Lo* [135], *Christensen* и *Wu* [149] су дали претпостављени облик поља померања за извођење ове теорије. Према овим ауторима уопштени облик померања код свих TSDT теорија је:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\phi_x(x, y, t) + z^3\xi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\phi_y(x, y, t) + z^3\xi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\phi_z(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Проширени облик овако претпостављених облика померања дао је *Kant* у радовима [52], [53]. Он је претпоставио да је и померање w кубна функција координате z . У [52] анализирао је проблем савијања укрштених симетричних и антисиметричних ламината, као и сендвич ламината, за контурне услове слободног ослањања. У другом раду, за исту групу ламината, исти аутор се бавио проблемима слободних вибрација. У оквиру ове дисертације је проширена употреба Кантове теорије и на умрежене антисиметричне ламинате за проблеме савијања и слободних вибрација.

За овако претпостављена померања компоненте вектора деформације могу се представити у облику:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\varepsilon_{xx}^0} + z \underbrace{\frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial x}}_{k_{xx}^0} + z^2 \underbrace{\frac{\partial \phi_x(x, y, t)}{\partial x}}_{k_{xx}^1} + z^3 \underbrace{\frac{\partial \xi_x(x, y, t)}{\partial x}}_{k_{xx}^2} = \\ &= \varepsilon_{xx}^0 + zk_{xx}^0 + z^2k_{xx}^1 + z^3k_{xx}^2, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial y}}_{\varepsilon_{yy}^0} + z \underbrace{\frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial y}}_{k_{yy}^0} + z^2 \underbrace{\frac{\partial \phi_y(x, y, t)}{\partial y}}_{k_{yy}^1} + z^3 \underbrace{\frac{\partial \xi_y(x, y, t)}{\partial y}}_{k_{yy}^2} \\ &= \varepsilon_{yy}^0 + zk_{yy}^0 + z^2k_{yy}^1 + z^3k_{yy}^2, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = \underbrace{\psi_z(x, y, t)}_{\varepsilon_{zz}^0} + z \underbrace{2\phi_z(x, y, t)}_{k_{zz}^0}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x,y,t)}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_x(x,y,t)}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \phi_x(x,y,t)}{\partial y} \\
&+ z^3 \frac{\partial \xi_x(x,y,t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y,t)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_y(x,y,t)}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \phi_y(x,y,t)}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \xi_y(x,y,t)}{\partial x} \\
&= \underbrace{\frac{\partial u_0(x,y,t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y,t)}{\partial x}}_{\gamma_{xy}^0} + z \underbrace{\left(\frac{\partial \psi_x(x,y,t)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y(x,y,t)}{\partial x} \right)}_{k_{xy}^0} + z^2 \underbrace{\left(\frac{\partial \phi_x(x,y,t)}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y(x,y,t)}{\partial x} \right)}_{k_{xy}^1} + \\
&+ z^3 \underbrace{\left(\frac{\partial \xi_x(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y(x,y,t)}{\partial y} \right)}_{k_{xy}^2} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^0 + z^2 k_{xy}^1 + z^3 k_{xy}^2, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z,t)}{\partial x} = \underbrace{\psi_x(x,y,t)}_{\gamma_{xz}^0} + \underbrace{\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial x}}_{k_{xz}^0} + 2z \underbrace{\left(\phi_x(x,y,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_z(x,y,t)}{\partial x} \right)}_{k_{xz}^0} \\
&+ 3z^2 \underbrace{\left(\xi_x(x,y,t) + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi_z(x,y,t)}{\partial x} \right)}_{k_{xz}^1} = \gamma_{xz}^0 + z k_{xz}^0 + z^2 k_{xz}^1, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z,t)}{\partial y} = \underbrace{\psi_y(x,y,t)}_{\gamma_{yz}^0} + \underbrace{\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial x}}_{k_{yz}^0} + 2z \underbrace{\left(\phi_y(x,y,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_z(x,y,t)}{\partial y} \right)}_{k_{yz}^0} \\
&+ 3z^2 \underbrace{\left(\xi_y(x,y,t) + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi_z(x,y,t)}{\partial y} \right)}_{k_{yz}^1} = \gamma_{yz}^0 + z k_{yz}^0 + z^2 k_{yz}^1.
\end{aligned}$$

Све претходно поменуте деформационе теорије вишег реда генерално се могу посматрати као посебни случајеви претходно представљене деформационе теорије трећег реда. Иако је у нумеричким студијама $w(x,y,t)$ представљено као константа по дебљини ламината, L_0 и остали аутори су утврдили да је било који облик деформационе теорије трећег реда супериоран у односу на теорије нижег реда у анализи померања и напона, посебно код композитних ламината умерене дебљине. Претпоставимо да су у једначинама трећег реда за $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$, као у (2.11), померања и њихови први изводи у односу на z координату непрекидне функције. Треба нагласити да, иако су раванска померања непрекидне функције дуж међуповрши ламината, када су међуповрши савршено спојене, њихови први изводи су прекидне функције због нагле промене у својствима материјала дуж међуповрши ламината. Поред раванских померања и напона, трансверзални напони су такође јако битни у анализи композитних ламината с обзиром на то да су интерламинарни напони од примарног утицаја на деламинацију која представља критични мод оштећења у ламинатним композитним плочама. Због тога су интерламинарни напони од суштинске важности при анализи и дизајнирању композитних ламината. Пошто претпоставке HSDT за раванска померања дају непрекидну дистрибуцију деформација дуж дебљине ламината, због различитих својстава материјала два суседна слоја, на међуслојевима ће се јавити дисконтинуитети у дијаграмима нормалних напона. Да би се занемарила грешка предложен је пост процес, такозвана техника повраћаја (*recovering technique*) која је заснована на једначинама равнотеже уместо на

конститутивним једначинама. Иако се овом методом могу добити релативно добри трансверзални напони, сам овај приступ је контраверзан, па је пожељно идентификовати технику која даје исправна померања и напоне (како раванске тако и трансверзалне) директно из конститутивних једначина.

Упркос горе поменутиим фундаменталним недостацима, коришћење HSDT теорије у анализи композитних плоча има бројне предности. Из једначине (2.11) закључује се да треба одредити 11 коефицијената без обзира на укупан број лејера композитног ламината. Карактеристика независности од броја лејера је од суштинске важности за компјутерску ефикасност, поготово када број лејера композитног ламината постане јако велики. Такође је битно да решења интеграла који у оквиру подинтегралне функције садрже неку од функција померања могу да се нађу у затвореном облику, јер се тада избегава поступак нумеричке интеграције, чиме се постиже већа тачност резултата. Полиномне функције трећег реда поред предности да се могу једноставно интегралити дају и велику тачност резултата и не захтевају корекционе факторе, који такође представљају један вид апроксимације. Иако ове функције усложњавају саму нумеричку процедуру, у односу на теорије нижег реда, то усложњавање због једноставне интеграције није превелико ни нумерички презахтевно, а с обзиром на то да је тачност резултата повећана, имају велику предност да буду коришћене чак и код комерцијалних софтвера за анализу сложених конструкција. Још једном треба нагласити да већина комерцијалних софтвера још увек макромеханичку анализу ламината заснива на теоријама нижег реда CLT, односно FSDT.

2.2.3.4 Смицајне деформационе теорије трећег реда према Редију и Робинсону

У литератури се може наћи велики број радова статичке и динамичке анализе ламината, која се заснива на смицајној деформационој теорији трећег реда, коју су у својим радовима предложили Реди и Робинсон (*Reddy* и *Robbinson*) [150]. Деформациона теорија трећег реда коју су презентовали ови аутори заснована је на истим претпоставкама као CLPT и FSDT, осим што се претпоставља да се трансверзална нормала не деформише као линеарна крива већ као крива трећег реда. Ако се погледају претпостављени облици померања, према овим ауторима јасно се већ на први поглед може уочити да претпостављена поља померања садрже парцијалне изводе, што одмах асоцира на отежану процедуру интеграљења, а самим тим на повећано време обраде проблема, што директно захтева и хардверски захтевнију рачунарску конфигурацију. Употреба ове теорије је мање сврсисходна од класичних полиномних теорија из разлога што је прецизност, која се на тај начин добија, занемарљиво повећана, што не даје оправдање за потешкоће које се јављају при нумеричкој обради такве теоријске претпоставке. У теоријама једнослојних материјала заснованим на претпоставкама поља померања користи се само једно истезање за сваку компоненту померања дуж дебљине и због тога су трансверзалне деформације континуалне дуж дебљине.

Деформациона теорија према овим ауторима описана је уз помоћ седам независних параметара. Претпоставка поља померања у функцији седам непознатих променљивих $u, v, w, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \phi_z$ дата је у облику:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) - z^2 \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_z(x, y, t)}{\partial x} \\
&\quad - z^3 \left[C_1 \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \psi_x(x, y, t) \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi_z(x, y, t)}{\partial x} \right], \\
v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) - z^2 \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_z(x, y, t)}{\partial y} \\
&\quad - z^3 \left[C_1 \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \psi_y(x, y, t) \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi_z(x, y, t)}{\partial y} \right], \\
w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2 \phi_z(x, y, t).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где је $C_1 = \frac{4}{3h^2}$, док су u_0, v_0, w_0 померања у равни $z = 0$, ψ_x, ψ_y су ротације нормале на равни $z=0$, ψ_z је истезање трансверзалне нормале, ϕ_z - је ротација вишег реда трансверзалне нормале. Као што је објашњено, из разлога малог повећања тачности резултата у односу на FSDT, примена ове теорије добија смисао тек при анализи умерено дебелих и дебелих ламинатних плоча. За поље померања дефинисано једначином (2.13), деформације у области еластичности се одређују као:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\varepsilon_{xx}^0} + z \underbrace{\frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial x}}_{k_{xx}^0} - z^2 \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \psi_z(x, y, t)}{\partial x^2}}_{k_{xx}^1} \\
&\quad - z^3 \underbrace{\left[C_1 \left(\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \phi_z(x, y, t)}{\partial x^2} \right]}_{k_{xx}^2} = \varepsilon_{xx}^0 + z k_{xx}^0 + z^2 k_{xx}^1 + z^3 k_{xx}^2, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial y}}_{\varepsilon_{yy}^0} + z \underbrace{\frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial y}}_{k_{yy}^0} - z^2 \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \psi_z(x, y, t)}{\partial y^2}}_{k_{yy}^1} \\
&\quad - z^3 \underbrace{\left[C_1 \left(\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial y} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \phi_z(x, y, t)}{\partial y^2} \right]}_{k_{yy}^2} = \varepsilon_{yy}^0 + z k_{yy}^0 + z^2 k_{yy}^1 + z^3 k_{yy}^2, \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = \underbrace{\psi_z(x, y, t)}_{\varepsilon_{zz}^0} + z \underbrace{2\phi_z(x, y, t)}_{k_{zz}^0} = \varepsilon_{zz}^0 + k_{zz}^0,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\gamma_{xy}^0} + z \underbrace{\left(\frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial x} \right)}_{k_{xy}^0} - z^2 \underbrace{\frac{\partial^2 \psi_z(x, y, t)}{\partial x \partial y}}_{k_{xy}^1} \\
&- z^3 \underbrace{\left[C_1 \left(2 \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \phi_z(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right]}_{k_{xy}^2} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^0 + z^2 k_{xy}^1 + z^3 k_{xy}^2 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} = \underbrace{\psi_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x}}_{\gamma_{xz}^0} + z^2 \underbrace{(-3) C_1 \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \psi_x(x, y, t) \right)}_{k_{xz}^1} = \gamma_{xz}^0 + z^2 k_{xz}^1, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} = \underbrace{\psi_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y}}_{\gamma_{yz}^0} + z^2 \underbrace{(-3) C_1 \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \psi_y(x, y, t) \right)}_{k_{yz}^1} = \gamma_{yz}^0 + z^2 k_{yz}^1.
\end{aligned}$$

Из једначина (2.14) јасно се уочава да је сам облик компоненти вектора деформације вишеструко сложенији у односу на облике деформација дефинисане једначинама (2.3), (2.5), (2.7), (2.9) и (2.12).

Предности овако уведене теорије, поред резултата који се добијају код умерено дебелих и дебелих ламинатних плоча, лежи и у чињеници да није потребно користити додатне корекционе факторе.

3 Примена различитих деформационих теорија у макромеханичкој анализи композитних ламината

У претходном одељку разматране су деформационе теорије засноване на претпоставци померања које се користе за макромеханичку анализу композитних материјала. Теорије нижег реда попут Кирхофове теорије и смицајне деформационе теорије првог реда у својим претпоставкама предвиђају непостојање нормалног напона σ_{zz} тј. претпостављају да су нормални напони и деформације ε_{zz} једнаки нули. Из тог разлога се и јавила потреба да се развијају смицајне деформационе теорије вишег реда које би, за разлику од Кирхофове и смицајне деформационе теорије првог реда које су применљиве само на плоче код којих је дебљина занемарљива у односу на друге две димензије, биле примењљиве и на умерено дебеле и дебеле ламинатне плоче. У сврху презентовања разлика које се јављају у пољима напона, деформација, као и код резултанти сила и моментних резултанти даље су дати прикази вектора напона и објашњена је појава смицајних сила и момената које се јављају, почев од примене смицајне деформационе теорије првог реда, па надаље ка деформационим теоријама вишег реда. При креирању ламината као резултат слагања слојева се добијају различите матрице крутости. Тако се, на пример, при слагању слојева ламината под претпоставком да су слојеви идеално спојени, а уз примену CPT или FSDT, јављају матрице екстензионе крутости, која се означава са A , затим спрегнута матрица крутости, која се означава са B , и матрица савојне крутости, која се означава са D . Са усложњавањем изабране деформационе теорије јавиће се и додатне матрице, на пример, E, F, G, H итд., које не морају увек бити квадратне. Код теорија чији се претпостављени облици свих померања заснивају на полиномним функцијама истог степена, све матрице крутости ће бити квадратне матрице, док ће се код теорија код којих претпостављена поља померања нису полиноми истог реда или уопште нису полиномне функције јављати и правоугаоне матрице крутости налик матрицама A, B, D итд., као и њима транспоноване матрице. У оквиру софтвера који представља пропратни део ове дисертације, написана је функција која, за одговарајућу усвојену деформациону теорију или, само за претпостављена поља померања као полиномне функције вишег реда, тачно одређује облике свих матрица крутости. Иако на први поглед врло једноставан проблем, тип матрица крутости које се јављају услед слагања слојева има веома важну улогу у одређивању аналитичких решења макромеханичких проблема попут статичких проблема извијања и савијања или динамичких проблема слободних вибрација и пропагације таласа. Класе симетрије материјала могу да дају нуле за поједине коефицијенте ових матрица, што директно олакшава поступке аналитичког облика решења. Тако, на пример, код проблема слободних вибрација или извијања нуле појединих елемената ових матрица омогућавају налажење аналитичких решења. То се врши у самом коду програма где је нужно, претходном макромеханичком анализом која ће и овде бити појашњена, елиминисати елементе ових матрица у делу симболичког програмирања, а тек након тога заменом симболичких вредности бројним вредностима могуће је добити одговарајућа решења. У самом поступку рада обрнутим путем није могуће једноставно доћи до решења. У делу у коме се приказује аналитичко налажење решења за одговарајуће статичке и динамичке проблеме, биће дат преглед коефицијента чија вредност је неопходно да буде једнака нули да би проблем уопште било могуће решити.

За илустрацију, посматраће се материјал са ортотропном класом симетрије. Ротацијом координатног система (погледати поглавље 1.4) конститутивна матрица, гледано у односу на глобални координатни систем, промениће класу симетрије из ортотропне у моноклинички тип. У једначини генерализованог Хуковог закона користиће се конститутивна матрица која одговара моноклиничком типу симетрије материјала, тј.

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Генерализовани Хуков закон у глобалном Декартовом координатном систему имаће облик:

$$\sigma = \bar{C}\epsilon \quad (3.2)$$

или у матричној нотацији:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Деформационе теорије, као што је већ изложено, се разликују по претпостављеном пољу померања, па ће се, самим тим, узимајући у обзир везу између деформација и померања у области линеарне еластичности, разликовати изрази за напоне који се добијају из једначине (3.3).

За изложене векторе деформација из поглавља 2, заменом у једначини (3.3) добиће се изрази за напоне, уз помоћ којих је могуће одредити пројекције оптерећења на одговарајуће осе, а након тога се из облика тих оптерећења могу очитати горе описане матрице A, B, D итд.

3.1 Анализа композитног ламината заснована на класичној теорији плоча

Код ламинатних плоча чија је дебљина много мања од осталих димензија, на основу Кирхофове хипотезе, претпоставља се линеарна расподела релативних деформација по дебљини плоче. Такође се претпоставља да је нормални напон $\sigma_{zz} = 0$. При дефинисању конститутивних релација за ламинатну плочу, полази се од уопштеног ламината као генерализоване ламинатне форме из које се могу извести сви остали ламинатни облици. Поље померања претпоставља се у облику датом једначином (2.1), док су деформације за овакво поље померања облика дате једначином (2.2).

Очигледно је да се према овој теорији врши спрезање између раванске $\varepsilon_i^0 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)$ и савојне деформације $k_i = \left(\underbrace{-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}}_{k_{xx}}, \underbrace{-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}}_{k_{yy}}, \underbrace{-2\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x \partial y}}_{k_{xy}} \right)$.

За овако дефинисане деформације и напоне очигледно је да се, према овој теорији, макромеханичка анализа композитног ламината своди на проблем раванског стања напона односно на 2D проблем. У том случају у конститутивној матрици (3.1) одбацују се врсте и колоне које одговарају бројевима 3,4 и 5, па се конститутивна матрица своди на матрицу типа 3x3 облика:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Код 2D проблема вектор напона је облика $\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$, док је вектор деформација облика $\varepsilon = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$. Генерализовани Хуков закон сада се може записати у облику:

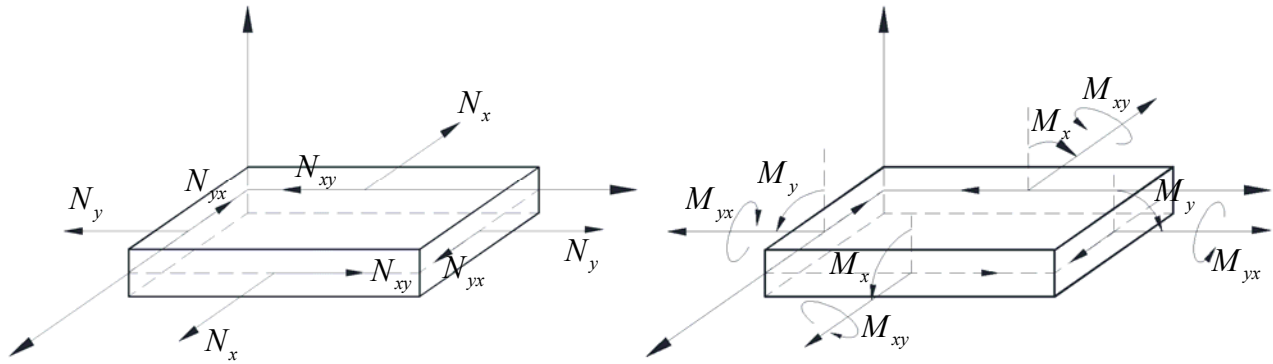
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

одакле се, уз помоћ једначине (2.3), добијају компоненте напона у облику:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{C}_{11}\varepsilon_{xx} + \bar{C}_{12}\varepsilon_{yy} + \bar{C}_{16}\gamma_{xy} = \bar{C}_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + zk_{xx}\right) + \bar{C}_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + zk_{yy}\right) + \bar{C}_{16}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + zk_{xy}\right), \\ \sigma_{yy} &= \bar{C}_{12}\varepsilon_{xx} + \bar{C}_{22}\varepsilon_{yy} + \bar{C}_{26}\gamma_{xy} = \bar{C}_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + zk_{xx}\right) + \bar{C}_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + zk_{yy}\right) + \bar{C}_{26}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + zk_{xy}\right), \\ \tau_{xy} &= \bar{C}_{16}\varepsilon_{xx} + \bar{C}_{26}\varepsilon_{yy} + \bar{C}_{66}\gamma_{xy} = \bar{C}_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + zk_{xx}\right) + \bar{C}_{26}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + zk_{yy}\right) + \bar{C}_{66}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + zk_{xy}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Заменом вредности k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} добијају се компоненте напона изражене преко елемената конститутивне матрице и компоненти померања у средњој равни плоче у облику:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{C}_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{C}_{12}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \bar{C}_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - z\left(\bar{C}_{11}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \bar{C}_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2\bar{C}_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right), \\ \sigma_{yy} &= \bar{C}_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{C}_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \bar{C}_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - z\left(\bar{C}_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \bar{C}_{22}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2\bar{C}_{26}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right), \\ \tau_{xy} &= \bar{C}_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{C}_{26}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \bar{C}_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - z\left(\bar{C}_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \bar{C}_{26}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2\bar{C}_{66}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$



а) компоненте силе по јединици површине у ламинату б) компоненте момента у ламинату

Слика 3.1. Компоненте резултирајућег оптерећења

Овакав запис за напоне је погодан из разлога његове применљивости у принципу виртуалног рада за статичку и динамичку анализу.

За дефинисано напонско стање сваког лејера у ламинату, могу се дефинисати резултујућа сила и резултујући момент **по јединици ширине** (слика 3.1) у ламинату:

$$\mathbf{N} = \int_{h^-}^{h^+} \boldsymbol{\sigma} dz \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = \int_{h^-}^{h^+} \boldsymbol{\sigma} z dz, \quad (3.8)$$

односно у матричном облику:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz. \quad (3.9)$$

где су h^+ , h^- горња и доња координата читавог ламината.

Ако се замене изрази за напоне у претходној једначини добиће се пројекције сила и момената по јединици ширине ламината. Груписањем свих чланова који не зависе од координате z , као и оних које z множи, добија се да се свака од пројекција резултујућег момента и резултате сила и у ламинату могу представити у облику:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} z dz + \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} z^2 dz$$

$$\left\{ \begin{matrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{matrix} \right\} = \int_{h^-}^{h^+} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{matrix} \right\} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{matrix} \right\} dz +$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{matrix} \right\} z dz$$

при чему је са n -означен укупан број слојева у ламинату.
Ако се дефинишу три нове матрице у ламинату као:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} dz, \quad (3.11)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z dz, \quad (i, j) = (1, 2, 6)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^2 dz,$$

онда се вектори сила, односно момента, могу записати у облику:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B}\mathbf{k} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Деформације $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)$ називају се још и мембранске деформације, док се

деформације $\mathbf{k} = \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right\}$ називају савојне деформације.

Ако се формира вектор укупног оптерећења ламината по јединици ширине може се писати:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{11} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Овако формиран вектор оптерећења у ламинату могуће је искористити за добијање статичких једначина равнотеже и динамичких једначина кретања ламината.

3.2 Анализа композитног ламината заснована на смицајној деформационој теорији првог реда

У претходном одељку показано је да се код класичне деформационе теорије за претпостављено поље померања занемарују нормални напон σ_{zz} , смицајни напони τ_{xz} , τ_{yz} , као и деформације ε_{zz} , γ_{xz} , γ_{yz} . Недостаци поменуте теорије делимично су отклоњени смицајном деформационом теоријом првог реда. Претпостављено поље померања за ову теорију дато је у одељку 2.2.2. једначином (2.4). На основу тако претпостављеног поља померања детаљно су изведене компоненте вектора деформације дате једначином (2.5). Као што се примећује, једина компонента вектора деформације која је и даље једнака нули, односно чији утицај се занемарује и према овој теорији је ε_{zz} . Сада очигледно долази до

спрезања раванске $\varepsilon_i^0 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)$, савојне $k_i = \left(\underbrace{\frac{\partial \psi_x}{\partial x}}_{k_{xx}}, \underbrace{\frac{\partial \psi_y}{\partial y}}_{k_{yy}}, \underbrace{\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}}_{k_{xy}} \right)$ и смицајне

деформације $\gamma_i = \left(\underbrace{\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}}_{\gamma_x}, \underbrace{\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}}_{\gamma_y} \right)$.

Ако се овако дефинисани вектор деформација замени у једначини генерализованог Хуковог закона, уз услов да је $\sigma_{zz} = 0$ (ни ова теорија не узима у обзир постојање нормалног напона σ_{zz}), очигледно је да је из конститутивне матрице потребно избацити трећу врсту и трећу колону да би био задовољен претходно поменути услов. Конститутивна матрица, дата једначином (3.1), се сада своди на облик:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

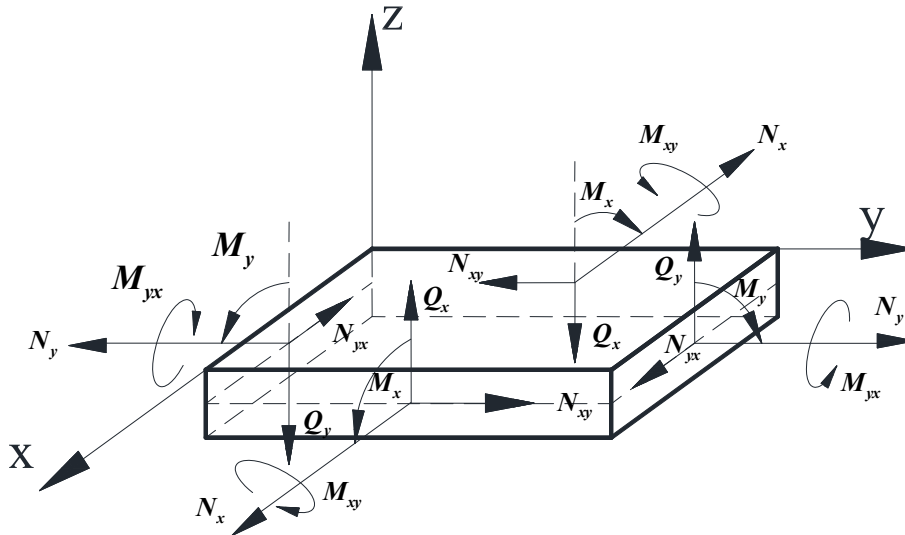
док се генерализовани Хуков закон изражава као:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Узимајући у обзир једначину (2.5) компоненте вектора напона сада је могуће записати као:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \bar{C}_{11}\varepsilon_{xx} + \bar{C}_{12}\varepsilon_{yy} + \bar{C}_{16}\gamma_{xy} = \bar{C}_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + zk_{xx}^0\right) + \bar{C}_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + zk_{yy}^0\right) + \bar{C}_{16}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + zk_{xy}^0\right), \\ \sigma_{yy} &= \bar{C}_{12}\varepsilon_{xx} + \bar{C}_{22}\varepsilon_{yy} + \bar{C}_{26}\gamma_{xy} = \bar{C}_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + zk_{xx}^0\right) + \bar{C}_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + zk_{yy}^0\right) + \bar{C}_{26}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + zk_{xy}^0\right), \\ \tau_{xz} &= \bar{C}_{44}\gamma_{xz} + \bar{C}_{45}\gamma_{yz}, \\ \tau_{yz} &= \bar{C}_{45}\gamma_{xz} + \bar{C}_{55}\gamma_{yz}, \\ \tau_{xy} &= \bar{C}_{16}\varepsilon_{xx} + \bar{C}_{26}\varepsilon_{yy} + \bar{C}_{66}\gamma_{xy} = \bar{C}_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + zk_{xx}^0\right) + \bar{C}_{26}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + zk_{yy}^0\right) + \bar{C}_{66}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + zk_{xy}^0\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Аналогно поступку који се примењује код класичне деформационе теорије ако се у дате изразе за напоне замене вредности за савојне (k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}) и смицајне деформације $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ добијају се коначни изрази за вектор напона у функцији померања средње равни и ротација уведених овом теоријом. Поред раванских оптерећења овом теоријом могуће је разматрати и утицај смицајних сила Q_x и Q_y (слика 3.2).



Слика 3.2 Оптерећења по јединици ширине

Резултирајуће силе и моменти у ламинату се дефинишу аналогно дефинисању сила и момената у класичној теорији:

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, Q_x, Q_y) &= \int_{h^-}^{h^+} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \\ (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, R_x, R_y) &= \int_{h^-}^{h^+} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) z dz \end{aligned} \quad (3.17)$$

где вредности Q_x, Q_y, R_x, R_y одговарају вредностима смицајних напона τ_{xz}, τ_{yz} .

Заменом израза за напоне у једначини (3.17) добијају се пројекције сила и момената по јединици ширине ламината. Ако се сада изврши груписање аналогно изразу (3.10) и раздвајање оптерећења на равански и смицајни мод добиће се раванска оптерећења аналогно изразима (3.12) датим у класичној теорији, док ће оптерећења смицајног мода бити облика:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} z dz. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Приметимо да оптерећења смицајног мода зависе само од коефицијената $\bar{C}_{44}, \bar{C}_{45}, \bar{C}_{45}, \bar{C}_{55}$, који су једини елементи четврте и пете колоне конститутивне матрице дефинисане релацијом (3.1). Аналогно формирању матрице А, В и D у класичној теорији, сада се могу формирати нове матрице A_{lr}, B_{lr} као:

$$A_{lr} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k^-}}^{h_{k^+}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k^-}}^{h_{k^+}} \bar{C}_{lr}^{(k)} dz$$

$$(l, r) = (4, 5) \quad (3.19)$$

$$B_{lr} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k^-}}^{h_{k^+}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k^-}}^{h_{k^+}} \bar{C}_{lr}^{(k)} z dz$$

Вектори сила, односно момената у равни, као и смицајне компоненте оптерећења, могу се представити у матричном облику као:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B}\mathbf{k} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \text{раванска оптерећења}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{A}_r \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B}_r \mathbf{k} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{B}_r \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}_r \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \text{оптерећења услед смицања}$$

$$(3.20)$$

Вектор укупног оптерећења се дакле састоји од два одвојена дела и има облик:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{16} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \\ B_{55} & B_{45} \\ B_{45} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{pmatrix}$$

3.3 Макромеханичка анализа композитног ламината заснована на смицајним деформационим теоријама вишег реда

Ако се узме у обзир чињеница да реална деформација нормале на средњу површ ламината проузрокује кривљење нормале, тј. нормала не задржава линеаран облик, јасно је да деформационе теорије попут CLT и FSDT не одговарају у потпуности реалном стању при деформацији ламината. С тим циљем многи аутори су покушали да отклоне ове недостатке

кориговањем претпостављених облика померања. Неки од аутора су разматрали ламинате узимајући у обзир криволинијску деформацију нормале, али занемарујући нормални напон у правцу нормале на средњу површ ламината. Сагласно поглављу 2.2.3.1. уведене су функције облика са циљем дефинисања закривљености нормале. Треба нагласити да функције облика нису применљиве на све врсте проблема, па самим тим не задовољавају униформност за широку примену. Такође, многе од ових функција нису погодне за добијање решења интеграла који се јављају у самом поступку рада са ламинатима, па као такве захтевају додатну нумеричку интеграцију. У овом случају се при макромеханичкој анализи услед слагања слојева ламината јављају матрице сличног облика као код FSDT.

У другу групу смицајних деформационих теорија вишег реда у оквиру претпостављених облика померања најчешће се убрајају полиномне функције степена већег или једнаког од два. Повећањем степена полинома, функције из линеарних прелазе у параболичке, чиме се постиже жељени облик нормале у деформисаној конфигурацији ламината који верније одсликава стање реалне деформације. Најчешће се користе полиномне функције трећег реда јер тачност резултата која се добија повећањем реда полинома изнад три је занемарљиво већа у односу на тачност добијених резултата деформационим теоријама трећег реда, док је математичка процедура, знатно компликованија, чак и у случају чисто полиномних функција без увођења неких других типова функција или њихових парцијалних извода.

Код ових теорија, као што је већ раније речено, не занемарују се ни смицајне деформације, ни смицајни напони, али оно што је најкарактеристичније, да се у анализи композитних ламината овом групом теорија не занемарује ни нормални напон σ_{zz} . Са увођењем напона σ_{zz} ове теорије постају применљиве и на умерено дебеле и дебеле ламинатне плоче. Код примене ових теорија основни проблем настаје код физичког тумачења појединих параметара уведених претпоставком поља померања. Још један недостатак ових теорија је што оне могу захтевати и корекционе факторе, чије увођење готово нужно проузрокује повећање степена апроксимације у односу на реалне проблеме. Број независно променљивих које се разматрају, на пример, деформационим теоријама другог или трећег реда може се кретати од пет до дванаест. У претходном поглављу дато је Лоово тумачење TSDT, као и проширење тог тумачења дефинисано од стране Канта. Анализу поља померања и узимање у обзир корекционих фактора разматрали су многобројни научници међу којима су најзначајни Reddy, Robinson, Whitney и Sun, Kwon и Akin и други. Са циљем презентовања ове групе теорија у овом раду разматране су деформациона теорија другог реда уведена од стране Whitney и Sun, затим Кантова теорија трећег реда и специјални облик TSDT уведен од стране Reddy и Robinson. Компоненте вектора деформације на основу претпостављених облика померања су изведене у поглављу 2, док су у оквиру овог поглавља приказане матрице које дефинишу слагање слојева, затим оптерећења по јединици ширине, облици напона, као и укупни вектори оптерећења који настају као скаларни производ матрица слагања слојева у ламинату и компоненти вектора деформације.

3.3.1 Примена деформационих теорија заснованих на функцијама облика

Деформационе теорије засноване на функцијама облика, су најчешће примењиване деформационе теорије у теоријској анализи ламината. Као што је раније речено, велики број аутора се бавио овом проблематиком ([52-53], [72-88]). Елиминација корекционих фактора из FSDT се изводи увођењем функција облика датих у табели 2.1. Из разлога што се све деформационе теорије из ове групе разликују једино по уведеној функцији облика у макромеханичкој анализи у смислу одређивања вектора напона, вектора деформација и

вектора оптерећења, даље је могуће вршити анализу тако да све наведене механичке величине зависе од функције облика $f(z)$. С обзиром да се њима само елиминишу корекциони фактори, конститутивна матрица у овом случају ће као и код FSDT бити квадратна, типа 5×5 , што јасно показује да и у овом случају вектор напона има пет компоненти.

Применљивост ових теорија зависи од разматраног типа проблема, од класе симетрије ламината, од дебљине ламината и тако даље. У поглављу 5 биће детаљно објашњена примена ових теорија у тачно специфицираним типовима анализе симетричних и антисиметричних ламината. Треба нагласити да применом ових теорија није могуће наћи аналитичка решења код уопштених ламината у већини случајева. Облици претпостављеног поља померања и одатле изведених деформација дати су једначинама (2.6), односно (2.7), док је конститутивна матрица облика (3.14). Резултирајуће компоненте оптерећења се дефинишу аналогно једначини (3.17). Коришћењем претходно набројаних једначина и једначине којом се дефинише генерализовани Хуков закон добијају се компоненте вектора јединичног оптерећења у облику:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} dz + \\
&\sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} z dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} f(z) dz \quad (3.22) \\
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} z dz + \\
&\sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} z^2 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} z f(z) dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{matrix} \right\} &= \int_{h^-}^{h^+} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{matrix} \right\} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{matrix} \right\} f(z) dz + \\
&\sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{matrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{matrix} \right\} z f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{matrix} \right\} (f(z))^2 dz \\
\left\{ \begin{matrix} Q_x \\ Q_y \end{matrix} \right\} &= \int_{h^-}^{h^+} \left\{ \begin{matrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \right\} f'(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{matrix} \theta_x \\ \theta_y \end{matrix} \right\} (f'(z))^2 dz
\end{aligned}$$

Из једначина (3.22) може се уочити да матрице слагања зависе од степена променљиве z , облика функције $f(z)$, као и од првог извода ове функције. Ако се са:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} (1, z, f(z), z^2, z f(z), (f(z))^2) dz, \quad (i, j) = (1, 2, 6), \quad (3.23)$$

$$H_{lr} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{lr}^{(k)} (f'(z))^2 dz, \quad (l, r) = (4, 5),$$

означе матрице које одговарају раванском, односно смицајном оптерећењу, укупан вектор оптерећења за равански, односно смицајни део се може писати у облику:

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & D_{ij} \\ B_{ij} & E_{ij} & F_{ij} \\ D_{ij} & F_{ij} & G_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \mathbf{k}^0 \\ \mathbf{k}^1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}_s = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \quad (3.24)$$

где су: $\boldsymbol{\varepsilon}_0, \mathbf{k}^0, \mathbf{k}^1, \boldsymbol{\theta}$ компоненте вектора деформације дефинисане и изведене у поглављу 2.

Као што се може уочити, матрице слагања зависе од облика функције $f(z)$ тако да рад са функцијама облика може, а не мора бити, отежан. Сама функција облика ће дефинисати могућност примене ове теорије у различитим типовима статичке и динамичке анализе. Такође треба нагласити да, поред функције облика, на применљивост ових теорија утиче и класа симетрије материјала, нарочито у поступцима одређивања аналитичких решења. Узимајући у обзир да све предложене функције облика морају бити непарне функције координате z , код симетричних ламината је примена ових теорија знатно олакшана, а нарочито код симетричних укрштених, где се правилним дефинисањем облика A, B, D, E, F, G, H матрица поступак интеграције знатно поједностављује. Тачно дефинисани облици ових матрица биће описани у проблемима статичке и динамичке анализе са циљем добијања аналитичких и нумеричких резултата.

3.3.2 Примена смицајне деформационе теорије другог реда

У одељку 2.2.3.2 изведене су компоненте вектора деформације у области линеарне еластичности на основу претпостављеног поља померања које су предложили *Whitney* и *Sun* [100]. Вредности корекционих фактора датих једначином (2.10) су усвојили слично као што су то урадили *Mindlin* и *Medick* за хомогену изотропну плочу [149]:

$$\kappa_1^2 = \frac{\pi^2}{12}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\pi^2}{12}, \quad \kappa_3^2 = \frac{\pi^2}{12}, \quad \kappa_4^2 = \frac{\pi^2}{15}, \quad \kappa_5^2 = \frac{\pi^2}{15}. \quad (3.25)$$

За дефинисани облик деформација дат једначином (2.9) и конститутивну матрицу дату једначином (3.1) уз помоћ генерализованог Хуковог закона можемо одредити вектор напона као:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{13} & 0 & 0 & \overline{C}_{16} \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{23} & 0 & 0 & \overline{C}_{26} \\ \overline{C}_{13} & \overline{C}_{23} & \overline{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{44} & \overline{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{45} & \overline{C}_{55} & 0 \\ \overline{C}_{16} & \overline{C}_{26} & \overline{C}_{36} & 0 & 0 & \overline{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

где је $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L}^\varepsilon$ -конститутивна матрица у глобалном координатном систему која у општем случају одговара анизотропном материјалу са моноклиничким типом симетрије, а \mathbf{L}^σ и \mathbf{L}^ε трансформационе матрице дате једначинама (1.62) и (1.63).

Резултирајућа оптерећења по јединици ширине се према [151] дефинишу у облику:

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, Q_x, Q_y) &= \int_{h^-}^{h^+} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \\ (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, R_x, R_y) &= \int_{h^-}^{h^+} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) z dz \\ (S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}) &= \frac{1}{2} \int_{h^-}^{h^+} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) z^2 dz \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ако се формира вектор укупног оптерећења ламината по јединици ширине тако да вредности оптерећења које зависе од смицајних напона τ_{xz}, τ_{yz} сачињавају посебан вектор, добиће се да се укупно оптерећење састоји од два вектора:

$$\overline{\mathbf{F}} = [N_{xx}, N_{yy}, N_z, N_{xy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}]^T, \quad \overline{\mathbf{F}}_s = [Q_{xz}, Q_{yz}, R_x, R_y]^T \quad (3.28)$$

Компоненте вектора оптерећења $\overline{\mathbf{F}}$ и $\overline{\mathbf{F}}_s$ се одређу када се групишу чланови у изразу за напоне у зависности од степена z , тако се добија да је:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{matrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{zz} \\ N_{xy} \end{matrix} \right\} = \int_{h^-}^{h^+} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{matrix} \right\} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{matrix} \right]^{(k)} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \kappa_3 \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{matrix} \right\} dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{matrix} \right]^{(k)} \left\{ \begin{matrix} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{zz}^0 \\ k_{xy}^0 \end{matrix} \right\} z dz + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{matrix} \right]^{(k)} \left\{ \begin{matrix} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{xy}^1 \end{matrix} \right\} z^2 dz \\
& \left\{ \begin{matrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \\ M_{xy} \end{matrix} \right\} = \int_{h^-}^{h^+} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{matrix} \right\} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{matrix} \right]^{(k)} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \kappa_3 \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{matrix} \right\} z dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{matrix} \right]^{(k)} \left\{ \begin{matrix} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{xy}^0 \end{matrix} \right\} z^2 dz + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{matrix} \right]^{(k)} \left\{ \begin{matrix} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{xy}^1 \end{matrix} \right\} z^3 dz \\
& \left\{ \begin{matrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{matrix} \right\} = \int_{h^-}^{h^+} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{matrix} \right\} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{matrix} \right]^{(k)} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \kappa_3 \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{matrix} \right\} z^2 dz \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{matrix} \right]^{(k)} \left\{ \begin{matrix} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{xy}^0 \end{matrix} \right\} z^3 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{matrix} \right]^{(k)} \left\{ \begin{matrix} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{xy}^1 \end{matrix} \right\} z^4 dz
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \end{Bmatrix} z dz$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} z dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \end{Bmatrix} z^2 dz$$

Ако се сада групишу сви елементи конститутивне матрице уз одговарајуће степене од z добијају се нове матрице слагања слојева које су у овом случају квадратне типа 4×4 или 3×3 , док су правоугаоне матрице типа 4×3 или њима транспоноване матрице типа 3×4 .

Квадратне матрице су облика:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} dz, \quad i, j = 1, 2, 3, 6$$

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^3 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^3 dz, \quad i, j = 1, 2, 6, \quad (3.30)$$

$$H_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^4 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^4 dz, \quad i, j = 1, 2, 6,$$

док су правоугаоне матрице облика:

$$\mathbf{D}_{lr}^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^2 dz, \quad i = 1, 2, 3, 6 \quad j = 1, 2, 6$$

$$\mathbf{B}_{lr}^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z dz, \quad i = 1, 2, 3, 6 \quad j = 1, 2, 6 \quad (3.31)$$

Матрице A, B, D, F, H зависе од класе симетрије ламината. Неке од проблема статичке и динамичке анализе, нарочито аналитичким методама није могуће решити без додавања ограничења проузрокованих класама симетрије. Облици ових матрица биће дати у оквиру

типа анализе у поглављу 5. Класе симетрије материјала су детаљно разрађене и имплементирани у софтвер чији је приказ дат у поглављу 8.

За овако дефинисане матрице дате једначинама (3.30) - (3.31) и вектор оптерећена дат једначином (3.28) може се успоставити следећа веза:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \kappa_3 A_{13} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11}/2 & D_{12}/2 & D_{16}/2 \\ A_{12} & A_{22} & \kappa_3 A_{23} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12}/2 & D_{22}/2 & D_{26}/2 \\ \kappa_3 A_{13} & \kappa_3 A_{23} & \kappa_3^2 A_{33} & A_{36} & \kappa_3 B_{13} & \kappa_3 B_{23} & \kappa_3 B_{36} & \kappa_3 D_{13}/2 & \kappa_3 D_{23}/2 & \kappa_3 D_{36}/2 \\ A_{16} & A_{26} & \kappa_3 A_{36} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16}/2 & D_{26}/2 & D_{66}/2 \\ B_{11} & B_{12} & \kappa_3 B_{13} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11}/2 & F_{12}/2 & F_{16}/2 \\ B_{12} & B_{22} & \kappa_3 B_{23} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & F_{12}/2 & F_{22}/2 & F_{26}/2 \\ B_{16} & B_{26} & \kappa_3 B_{36} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & F_{16}/2 & F_{26}/2 & F_{66}/2 \\ D_{11}/2 & D_{12}/2 & \kappa_3 D_{13}/2 & D_{16}/2 & F_{11}/2 & F_{12}/2 & F_{16}/2 & H_{11}/4 & H_{12}/4 & H_{16}/4 \\ D_{12}/2 & D_{22}/2 & \kappa_3 D_{23}/2 & D_{26}/2 & F_{12}/2 & F_{22}/2 & F_{26}/2 & H_{12}/4 & H_{22}/4 & H_{26}/4 \\ D_{16}/2 & D_{26}/2 & \kappa_3 D_{36}/2 & D_{66}/2 & F_{16}/2 & F_{26}/2 & F_{66}/2 & H_{16}/4 & H_{26}/4 & H_{66}/4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ \psi_z \\ u_{0,y} + v_{0,x} \\ \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \\ \phi_{x,x} \\ \phi_{x,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{E}_p} \quad (3.32)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ R_x \\ R_y \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_s} = \underbrace{\begin{bmatrix} \kappa_1^2 A_{55} & \kappa_1 \kappa_2 A_{45} & \kappa_1 \kappa_4 B_{55} & \kappa_1 \kappa_5 B_{45} \\ \kappa_1 \kappa_2 A_{45} & \kappa_2^2 A_{44} & \kappa_2 \kappa_4 B_{45} & \kappa_2 \kappa_5 B_{44} \\ \kappa_1 \kappa_4 B_{55} & \kappa_2 \kappa_4 B_{45} & \kappa_4^2 D_{55} & \kappa_4 \kappa_5 D_{45} \\ \kappa_1 \kappa_5 B_{45} & \kappa_2 \kappa_5 B_{44} & \kappa_4 \kappa_5 D_{45} & \kappa_5^2 D_{55} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_s} \underbrace{\begin{Bmatrix} \psi_x + w_{0,x} \\ \psi_y + w_{0,y} \\ \phi_x + \psi_{z,x} \\ \phi_y + \psi_{z,y} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{E}_{ps}}$$

Ако се са $\mathbf{E}_p = [\boldsymbol{\varepsilon}^0 \mid \mathbf{k}^0 \mid \mathbf{k}^1]$, односно $\mathbf{E}_{ps} = [\boldsymbol{\gamma}^0 \mid \mathbf{k}_s^0]$, означе вектори деформација који у једначинама (3.32) садрже векторе раванских и савојних компоненти деформације, а са

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]_{4 \times 4} & [\mathbf{B}]_{4 \times 3} & \frac{1}{2} [\mathbf{D}^1]_{4 \times 3} \\ [\mathbf{B}]_{4 \times 3}^T & [\mathbf{D}]_{3 \times 3} & \frac{1}{2} [\mathbf{F}]_{3 \times 3} \\ \frac{1}{2} [\mathbf{D}^1]_{4 \times 3}^T & \frac{1}{2} [\mathbf{F}]_{3 \times 3} & \frac{1}{4} [\mathbf{H}]_{3 \times 3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]_{2 \times 2} & [\mathbf{B}]_{2 \times 2} \\ [\mathbf{B}]_{2 \times 2} & [\mathbf{D}]_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

матрице из једначина [3.32] и уз већ дефинисане матрице оптерећења са $\bar{\mathbf{F}}$ и $\bar{\mathbf{F}}_s$, може се писати:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{E}_p; \quad \mathbf{O}_s = \mathbf{L}_s \mathbf{E}_{ps} \quad (3.34)$$

матричним множењем са леве стране са \mathbf{L}^{-1} односно \mathbf{L}_s^{-1} добија се:

$$\mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{F}} = \underbrace{\mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}}_{\mathbf{I}} \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_p, \quad \text{односно} \quad \mathbf{L}_s^{-1} \bar{\mathbf{F}}_s = \underbrace{\mathbf{L}_s^{-1} \mathbf{L}_s}_{\mathbf{I}} \mathbf{E}_{ps} = \mathbf{E}_{ps} \quad (3.35)$$

За овако добијену матрицу \mathbf{E}_p могуће је одредити матрицу деформације ламината, а самим тим и напонско стање у сваком лејеру ламината. Основна предност овако уведене теорије је што се узимају у разматрање све компоненте напона, па је самим тим теорија применљива и у условима 3D напонског стања. Треба нагласити да описани поступак одређивања деформација у ламинату није увек применљив јер може доћи до појаве сингуларитета матрице \mathbf{L} . Из тог разлога се напонско и деформационо стање у ламинату одређује креирањем једначина равнотеже односно кретања применом виртуелних принципа, уз

коришћење компоненти оптерећења дефинисаних једначинама (3.28) односно (3.29) што ће детаљније бити описано у поглављу 4. Број независних једначина одговара броју непознатих уведених деформационом теоријом.

3.3.3 Примена смицајне деформационе теорије трећег реда

Тарун Кант је у својим радовима [52-53] све три компоненте померања представио у облику произвољних полиномних функција трећег реда. Он је анализирао понашање ламината при статичким проблемима савијања и динамичким проблемима слободних вибрација. Разматрао је симетричне и антисиметричне укрштене ламинате и добио аналитичка решења за ове две врсте проблема. Уведеним облицима померања на претходно описан начин овом теоријом увео је дванаест независно променљивих, па се из тог разлога ова теорија може сматрати најопштијом смицајном деформационом теоријом трећег реда. У оквиру ове дисертације, ова теорија је примењена на антисиметричну групу ламината у проблемима савијања и слободних вибрација, као и у пропагацији еластичних таласа. Као што је раније речено ова теорија представља проширење генерализације деформационих теорија трећег реда, дате једначином (2.11), па се претпостављени облици поља померања могу писати као:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) + z^2 u_0^*(x, y, t) + z^3 \theta_x^*(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) + z^2 v_0^*(x, y, t) + z^3 \theta_y^*(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\theta_z(x, y, t) + z^2 w_0^*(x, y, t) + z^3 \theta_z^*(x, y, t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Компоненте вектора деформације се одређују слично као у поглављу 2 коришћењем једначине (1.3), док је облик генерализованог Хуковог закона у глобалном координатном систему дат једначином (3.3). Ако се у последње поменути једначину замене вредности, раванских и савојних деформација и изврши прегруписавање уз одговарајуће степене од z , добијају се вектори оптерећења по јединици површине у облику:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{zz} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \kappa_3 \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} dz \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{zz}^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{zz}^1 \\ k_{xy}^1 \end{Bmatrix} z^2 dz \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^2 \\ k_{yy}^2 \\ k_{zz}^2 \\ k_{xy}^2 \end{Bmatrix} z^3 dz \\
& \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \kappa_3 \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} z dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{zz}^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} z^2 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{zz}^1 \\ k_{xy}^1 \end{Bmatrix} z^3 dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^2 \\ k_{yy}^2 \\ k_{zz}^2 \\ k_{xy}^2 \end{Bmatrix} z^4 dz \\
& \begin{Bmatrix} N_{xx}^* \\ N_{yy}^* \\ N_{zz}^* \\ N_{xy}^* \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \kappa_3 \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} z^2 dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{zz}^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} z^3 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{zz}^1 \\ k_{xy}^1 \end{Bmatrix} z^4 dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^2 \\ k_{yy}^2 \\ k_{zz}^2 \\ k_{xy}^2 \end{Bmatrix} z^5 dz \\
& \begin{Bmatrix} M_{xx}^* \\ M_{yy}^* \\ M_{zz}^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \kappa_3 \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} z^3 dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{zz}^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} z^4 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{zz}^1 \\ k_{xy}^1 \end{Bmatrix} z^5 dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^2 \\ k_{yy}^2 \\ k_{zz}^2 \\ k_{xy}^2 \end{Bmatrix} z^6 dz \\
& \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 2u_x^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ 2v_y^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{Bmatrix} z^1 dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 3\theta_x^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial x} \\ 3\theta_y^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial y} \end{Bmatrix} z^2 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \theta_z^* \\ \theta_y^* \end{Bmatrix} z^3 dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_x \\ \mathbf{R}_y \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} z dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 2u_x^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ 2v_y^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{Bmatrix} z^2 dz \\
&+ \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 3\theta_x^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial x} \\ 3\theta_y^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial y} \end{Bmatrix} z^3 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \theta_z^* \\ \theta_y^* \end{Bmatrix} z^4 dz \\
\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_x^* \\ \mathbf{Q}_y^* \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} z^2 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 2u_x^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ 2v_y^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{Bmatrix} z^3 dz \\
&+ \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 3\theta_x^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial x} \\ 3\theta_y^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial y} \end{Bmatrix} z^4 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \theta_z^* \\ \theta_y^* \end{Bmatrix} z^5 dz \\
\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_x^* \\ \mathbf{R}_y^* \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} z^3 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} z^3 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 2u_x^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ 2v_y^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{Bmatrix} z^4 dz \\
&+ \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 3\theta_x^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial x} \\ 3\theta_y^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial y} \end{Bmatrix} z^5 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{55} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \theta_z^* \\ \theta_y^* \end{Bmatrix} z^6 dz.
\end{aligned}$$

Из последње једначине се лако закључује да су све матрице које одговарају раванским оптерећењима квадратне типа 4x4, док су матрице које одговарају смицајном моду такође квадратне типа 2x2. Сада се облици ових матрица могу записати на једноставан начин као:

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij} \right) = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij} \left(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6 \right) dz, \quad i, j = 1, 2, 3, 6 \quad (3.38)$$

$$\left(A_{lr}, B_{lr}, D_{lr}, E_{lr}, F_{lr}, G_{lr}, H_{lr} \right) = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij} \left(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6 \right) dz, \quad l, r = 4, 5$$

За овако дефинисане матрице, вектор раванског оптерећења могуће је писати у облику:

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} & F_{ij} \\ D_{ij} & E_{ij} & F_{ij} & G_{ij} \\ E_{ij} & F_{ij} & G_{ij} & H_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \mathbf{k}^0 \\ \mathbf{k}^1 \\ \mathbf{k}^2 \end{Bmatrix} \quad i, j = 1, 2, 3, 6 \quad (3.39)$$

где су: $(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \mathbf{k}^0, \mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2)$ - компоненте вектора деформације уз одговарајуће степене од z , дефинисане у поглављу 2.

Аналогно, матрице вектора смицајног оптерећења су:

$$\overline{\mathbf{F}}_s = \begin{bmatrix} A_{lr} & B_{lr} & D_{lr} & E_{lr} \\ B_{lr} & D_{lr} & E_{lr} & F_{lr} \\ D_{lr} & E_{lr} & F_{lr} & G_{lr} \\ E_{lr} & F_{lr} & G_{lr} & H_{lr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \mathbf{k}_s^0 \\ \mathbf{k}_s^1 \\ \mathbf{k}_s^2 \end{Bmatrix} \quad l, r = 4, 5 \quad (3.40)$$

где су: $(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \mathbf{k}_s^0, \mathbf{k}_s^1, \mathbf{k}_s^2)$ - смицајне компоненте вектора деформације уз одговарајуће степене од z , дефинисане у поглављу 2. Узимајући у обзир типове матрица из једначине (3.38 - 3.40), закључује се да се укупан вектор раванског оптерећења састоји од 16 независних компоненти, док се вектор смицајног оптерећења састоји од 8 независних компоненти.

Иако ова теорија због реда величине на први поглед усложњава процедуру, рад са овом теоријом је доста једноставан из разлога што се све матрице слагања добијају као резултат интеграције полиномних функција, па нема потешкоћа у смислу додатног увођења нумеричке интеграције. Једини проблем је пронаћи одговарајуће физичко тумачење сваке независне променљиве у оквиру облика померања и у оквиру компоненти оптерећења.

3.3.4 Примена деформационе теорије уведене од стране Редија и Робинсона

Као што је приказано и детаљно изведено у претходном поглављу, Реди и Робинсон су претпоставили поље померања које има седам степени слободе. Претпостављено поље померања је дато једначином (2.13), док су деформације детаљно изведене и приказане једначинама (2.14). Потешкоће рада са овом теоријом, већ су описане у поглављу 2.2.3.4. Овако дефинисане деформације могуће је заменити у релацији за генерализовани Хуков закон, где је конститутивна матрица типа бхб јер нема занемаривања ни једне компоненте вектора напона и вектора деформација.

За овако дефинисан вектор напона није потребно уводити додатне корекционе факторе јер су они уведени коефицијентом C_1 и претпоставком поља померања. Оптерећења сада садрже додатне компоненте које изазивају чланови вишег реда који су уведени претпостављеном деформационом теоријом, тако да су елементи који сачињавају вектор оптерећења дати у облику:

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, Q_x, Q_y) &= \int_{h^-}^{h^+} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \\ (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) &= \int_{h^-}^{h^+} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) z dz \\ (P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}) &= \int_{h^-}^{h^+} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) z^2 dz \\ (S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}) &= \int_{h^-}^{h^+} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) z^3 dz \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ако се формира вектор укупног оптерећења, тако да вредности оптерећења које зависе од смицајних напона τ_{xz}, τ_{yz} сачињавају посебан вектор, добиће се да се укупно оптерећење састоји од два вектора:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= [N_{xx}, N_{yy}, N_z, N_{xy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}, S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}]^T \\ \bar{\mathbf{F}}_s &= [Q_{xz}, Q_{yz}, P_{xz}, P_{yz}]^T \end{aligned} \quad (3.42)$$

Компоненте вектора оптерећења $\bar{\mathbf{F}}$ се одређују када се групишу чланови у изразу за напоне у зависности од степена z , тако да се добија да је:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{zz} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k^-}}^{h_{k^+}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} dz \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{h_{k^-}}^{h_{k^+}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{zz}^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_{k^-}}^{h_{k^+}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{xy}^1 \end{Bmatrix} z^2 dz \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{h_{k^-}}^{h_{k^+}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^2 \\ k_{yy}^2 \\ k_{xy}^2 \end{Bmatrix} z^3 dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \\ M_{xy} \end{array} \right\} = \int_{h^-}^{h^+} \left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{array}{cccc} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{array} \right]^{(k)} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\} z dz \quad (3.43) \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{array}{cccc} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{array} \right]^{(k)} \left. \begin{array}{l} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{zz}^0 \\ k_{xy}^0 \end{array} \right\} z^2 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{array}{ccc} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{array} \right]^{(k)} \left. \begin{array}{l} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{xy}^1 \end{array} \right\} z^3 dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{array}{ccc} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{array} \right]^{(k)} \left. \begin{array}{l} k_{xx}^2 \\ k_{yy}^2 \\ k_{xy}^2 \end{array} \right\} z^4 dz \\
& \left. \begin{array}{l} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{array} \right\} = \int_{h^-}^{h^+} \left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{array}{cccc} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{array} \right]^{(k)} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\} z^3 dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{array}{cccc} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{array} \right]^{(k)} \left. \begin{array}{l} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{zz}^0 \\ k_{xy}^0 \end{array} \right\} z^4 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{array}{ccc} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{array} \right]^{(k)} \left. \begin{array}{l} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{xy}^1 \end{array} \right\} z^5 dz \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{array}{ccc} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{array} \right]^{(k)} \left. \begin{array}{l} k_{xx}^2 \\ k_{yy}^2 \\ k_{xy}^2 \end{array} \right\} z^6 dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{h^-}^{h^+} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} z^4 dz \\
&+ \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_z^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} z^5 dz + \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{xy}^1 \end{Bmatrix} z^6 dz \\
&+ \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_{xx}^2 \\ k_{yy}^2 \\ k_{xy}^2 \end{Bmatrix} z^7 dz
\end{aligned}$$

Ако се сада групишу сви елементи конститутивне матрице уз одговарајуће степене од z добиће се нове матрице које су у овом случају квадратне или правоугаоне. Слично као код претходно дефинисане деформационе теорије у поглављу 3.3.2 квадратне матрице су типа 4×4 , док су правоугаоне матрице типа 4×3 или њима транспоноване матрице типа 3×4 . Квадратне матрице су облика:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} dz, \\
B_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z dz, \quad (i, j) = (1, 2, 3, 6) \\
D_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^2 dz,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^5 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^5 dz, \\
H_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^6 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^6 dz, \quad (i, j) = (1, 2, 6) \\
J_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^7 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^7 dz,
\end{aligned}$$

док су правоугаоне матрице облика:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{lr}^1 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^2 dz, \\
\mathbf{E}_{lr}^1 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^3 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{ij}^{(k)} z^3 dz, \quad l = (1, 2, 3, 6), r = (1, 2, 6) \\
\mathbf{F}_{lr}^1 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} z^3 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \bar{C}_{lr}^{(k)} z^3 dz.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

За овако дефинисане матрице дате једначинама (3.44) - (3.45) и вектор оптерећења дат једначином (3.42) може се успоставити следећа матрична веза:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{M}} \\ \bar{\mathbf{P}} \\ \bar{\mathbf{S}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]_{4 \times 4} & [\mathbf{B}]_{4 \times 4} & [\mathbf{D}^1]_{4 \times 3} & [\mathbf{E}^1]_{4 \times 3} \\ [\mathbf{B}]_{4 \times 4} & [\mathbf{D}]_{4 \times 4} & [\mathbf{E}^1]_{4 \times 3} & [\mathbf{F}^1]_{4 \times 3} \\ [\mathbf{D}^1]^T_{3 \times 4} & [\mathbf{E}^1]^T_{3 \times 4} & [\mathbf{F}]_{3 \times 3} & [\mathbf{H}]_{3 \times 3} \\ [\mathbf{E}^1]^T_{3 \times 4} & [\mathbf{F}^1]^T_{3 \times 4} & [\mathbf{H}]_{3 \times 3} & [\mathbf{J}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \\ \bar{\mathbf{k}}^0 \\ \bar{\mathbf{k}}^1 \\ \bar{\mathbf{k}}^2 \end{Bmatrix} \tag{3.46}$$

односно у развијеном облику:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_z \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \\ M_{xy} \\ P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \\ S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{36} & B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{36} & D_{13} & D_{23} & D_{36} & E_{13} & E_{23} & E_{36} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{36} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{23} & D_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{36} & D_{13} & D_{23} & D_{33} & D_{36} & E_{13} & E_{23} & E_{36} & F_{13} & F_{23} & F_{36} \\ B_{16} & B_{26} & B_{36} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{36} & D_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} \\ \hline D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & D_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{36} & D_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & H_{16} & H_{26} & H_{66} \\ \hline E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{16} & H_{11} & H_{12} & H_{16} & J_{11} & J_{12} & J_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{23} & F_{26} & H_{12} & H_{22} & H_{26} & J_{12} & J_{22} & J_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{36} & F_{66} & H_{16} & H_{26} & H_{66} & J_{16} & J_{26} & J_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \psi_z \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{zz}^0 \\ k_{xy}^0 \\ \hline k_{xx}^1 \\ k_{yy}^1 \\ k_{xy}^1 \\ \hline k_{xx}^2 \\ k_{yy}^2 \\ k_{xy}^2 \end{array} \right\} \quad (3.47)$$

Слично као у (3.39 - 3.40) са $\mathbf{E}_p = [\boldsymbol{\varepsilon}^0 \mid \mathbf{k}^0 \mid \mathbf{k}^1 \mid \mathbf{k}^2]$ се означи вектор деформација који у једначинама(3.44 - 3.45) садржи векторе раванских и савојних компоненти деформације, а са

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{cccc} [\mathbf{A}]_{4 \times 4} & [\mathbf{B}]_{4 \times 4} & [\mathbf{D}^1]_{4 \times 3} & [\mathbf{E}^1]_{4 \times 3} \\ [\mathbf{B}]_{4 \times 4} & [\mathbf{D}]_{4 \times 4} & [\mathbf{E}^1]_{4 \times 3} & [\mathbf{F}^1]_{4 \times 3} \\ [\mathbf{D}^1]^T_{3 \times 4} & [\mathbf{E}^1]^T_{3 \times 4} & [\mathbf{F}]_{3 \times 3} & [\mathbf{H}]_{3 \times 3} \\ [\mathbf{E}^1]^T_{3 \times 4} & [\mathbf{F}^1]^T_{3 \times 4} & [\mathbf{H}]_{3 \times 3} & [\mathbf{J}]_{3 \times 3} \end{array} \right], \quad (3.48)$$

матрица из претходне једначине и уз већ дефинисан вектор оптерећења са $\bar{\mathbf{F}}$ може се писати:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{E}_p \quad (3.49)$$

матричним множењем са леве стране са \mathbf{L}^{-1} добијамо:

$$\mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{F}} = \underbrace{\mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}}_{\mathbf{I}} \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_p \quad (3.50)$$

За овако добијену матрицу \mathbf{E}_p могуће је одредити матрицу деформације, а самим тим и напонско стање у сваком лејеру ламината. Као и код деформационих теорија другог реда и у овом случају се јавља сингуларитет матрице \mathbf{L} , па се из тог разлога деформације и напони одређују поступком поменути код деформационе теорије другог реда.

Основна предност овако уведене теорије је што се узимају у разматрање све компоненте напона, па се самим тим добија и прецизнија статичка и динамичка анализа композитног ламината. Конкретно, са овако одређеним напонима могуће је применити критеријуме отказа дефинисане за 3D напонско стање.

4 Примена варијационих метода у статичкој и динамичкој анализи композитних ламината

У теорији еластичности, поред директног приступа у анализи континуалних система, могуће је користити и алтернативни прилаз као што је варијациони прилаз [152]. Суштина оваког прилаза се састоји у израчунавању тоталног потенцијала система Π и тражењу његових услова стационарности у односу на независно променљиве тј. у испуњавању услова $\delta \Pi = 0$. Овај прилаз представља изузетно моћан алат за анализу континуалних система. Основни разлог ефективности овог прилаза лежи у томе што неки контурни услови (природни контурни услови) при варијационом приступу могу бити узети у обзир у имплицитном облику. Једноставност овог принципа лежи у чињеници да се у њима разматрају скаларне величине (енергија, потенцијали,...), затим да неке величине које морају да буду укључене у директној нотацији, не морају да се разматрају у варијационој формулацији (унутрашње силе које не врше рад) и да се шира класа може применити за апроксимативна решења. На основу свега наведеног, варијациони принципи се најчешће користе при примени нумеричких метода у области линеарне еластичности, а нарочито у примени методе коначних елемената која ће детаљније бити разматрана у наредном поглављу. Најчешћи варијациони принципи који се користе у варијационој анализи композитних ламината су принцип виртуелног рада и принцип виртуелних померања, из којих произилазе принципи као што су: принцип о минимуму потенцијалне енергије при малим варијацијама померања, принцип о минимуму комплементарне енергије при малим варијацијама напона, Хамилтонов принцип итд. Рад са овим принципима подразумева увођење виртуелног оператора δ .

Из тог разлога ће у наредном делу укратко бити дат математички опис рада са виртуелним оператором. Варијациони принципи се користе у аналитичкој и нумеричкој анализи ламината. Детаљан опис виртуелних принципа могуће је наћи у [153], а овде ће бити изложени само одређени делови потребни за макромеханичку анализу композита.

4.1 Виртуално померање и виртуални рад

Чисто геометријским разматрањем дати механички систем може имати много могућих конфигурација у складу са геометријским ограничењима система. Од свих могућих конфигурација само једна одговара реалној конфигурацији и то је она конфигурација која задовољава други Њутнов закон (тј. једначине равнотеже или кретања система). Према Редију [153] скуп конфигурација који задовољава геометријска ограничења, али не нужно и други Њутнов закон, назива се скупом прихватљивих конфигурација. Ове конфигурације су ограничене на околину стварне конфигурације тако да се добијају од инфинитезималних варијација стварне конфигурације. У току таквих варијација не крше се геометријска ограничења и све силе су фиксирани на своје стварне вредности. Када код механичког система дође до таквих варијација у конфигурацији, каже се да је дошло до виртуелних померања стварне конфигурације. Ова померања не морају имати везе са стварним померањима која се могу јавити услед промене у примењеном оптерећењу. Померања се називају виртуалним зато што се замишља да до њих долази (тј. она су хипотетичка), док стварна оптерећења делују својим фиксираним вредностима. Виртуална померања у граничним тачкама, у којима су геометријски услови (или померања) прецизирани, су обавезно једнака нули.

Рад стварних сила дуж виртуалних померања се назива виртуалним радом. Виртуални рад стварних сила \mathbf{F} у телу Ω_0 у кретању дуж виртуалних померања $\delta\mathbf{u}$ се дефинише као:

$$\delta W = \int_{\Omega_0} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dv \quad (4.1)$$

где $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ означава запремински елемент у телу Ω_0 .

Спољашњи виртуални рад настао услед виртуалног померања $\delta\mathbf{u}$ у чврстом телу Ω_0 на које делују запреминске силе \mathbf{f} и површински напони \mathbf{t} може се писати у облику:

$$\delta V = - \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} dv + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} ds \right) \quad (4.2)$$

где ds означава површински елемент, а Γ_σ део контурне површи на којој се прецизирају напони. Негативни знак у једначини (4.2) указује на то да се рад врши на телу. Подразумева се да се померања дефинишу на преосталом делу $\Gamma_u = \Gamma - \Gamma_\sigma$ контурне површи Γ .

Треба напоменути, да се реалне деформације чврстог тела могу измерити уз помоћ малих деформација, као и чињеницу да тело трпи унутрашње напоне. Силе које се повезују са пољем напона померају честице материјала дуж померања која одговарају деформационом пољу у телу, и стога се обавља рад. Рад ових унутрашњих сила приликом кретања дуж померања честица материјала назива се унутрашњим радом. Треба имати у виду да је рад који се обавља на телу одговоран за унутрашњи рад у телу.

Унутрашњи виртуални рад услед виртуалног померања $\delta\mathbf{u}$ се може израчунати на следећи начин: претпостави се да инфинитезимални елемент материјала чија је запремина $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ тела трпи виртуалне деформације $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ услед виртуалних померања $\delta\mathbf{u}$ где је:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}), \quad \delta u_{i,j} \equiv \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \quad (4.3)$$

На пример, рад сила услед стварног напона σ_{11} , приликом кретања дуж виртуалног померање $\delta u_1 = \delta\varepsilon_{11} dx_1$ је:

$$\sigma_{11} dx_2 dx_3 \cdot \delta\varepsilon_{11} dx_1 = \sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} dv \quad (4.4)$$

Слично, рад сила услед напона σ_{12} је:

$$\sigma_{12} dx_2 dx_3 \cdot 2\delta\varepsilon_{12} dx_1 = \sigma_{12} 2\delta\varepsilon_{12} dv \quad (4.5)$$

Даље се лако закључује да је укупан виртуални рад сила услед свих напона у запреминском елементу $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ приликом кретања дуж одговарајућих померања:

$$\sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta\varepsilon_{22} + \dots + \sigma_{12} 2\delta\varepsilon_{12} = \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv \quad (4.6)$$

Укупан унутрашњи виртуални рад добија се интеграцијом горњег израза по укупној запремини тела:

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv \quad (4.7)$$

Једначина (4.7) важи за било које чврсто тело без обзира на његово конститутивно понашање. Подинтегрални израз у једначини (4.7) се назива **енергија виртуалне деформације** деформабилног тела.

Унутрашњи виртуални рад који обављају виртуални напони $\delta\sigma_{ij}$:

$$\delta U^* = \int_{\Omega_0} \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dv \quad (4.8)$$

Израз у једначини (4.8) је познат као **комплементарна енергија виртуалне деформације**. Виртуалне силе и виртуални напони треба да задовоље једначине равнотеже и контурне услове:

$$\left[\delta \sigma_{ji} \right]_{,j} + \delta f_i = 0 \text{ у } \Omega_0 \quad (4.9)$$

$$\delta t_i \equiv \delta \sigma_{ji} n_j = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma \quad (4.10)$$

4.2 Варијациони оператор

Као што се може приметити, основу варијационог рачуна представља симбол δ који се назива варијациони оператор. Он се користи да означи варијацију (или промену) дате величине. На пример, оператор δ означава виртуалну промену или варијацију $\delta \mathbf{u}$ зависне променљиве \mathbf{u} , на исти начин као што dx означава промену x . Ознака $\delta \mathbf{u}$ се назива првом варијацијом променљиве \mathbf{u} . Варијациони оператор се показао врло корисним у дефинисању израза виртуалног рада и развијању једначина равнотеже и кретања уз помоћ овог принципа. Постоји аналогија између варијационог оператора и диференцијалног оператора d . Ово се може показати посматрањем функције F зависне променљиве u , чији је први извод $u' = \frac{du}{dx}$.

Тотални диференцијал функције F , за фиксирано x , је:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du' \quad (4.11)$$

Прва варијација од F је:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (\delta u)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} (\delta u')^2 + \dots \quad (4.12)$$

Пошто је δu инфинитезимална величина, квадратни и остали чланови вишег реда се могу занемарити, па се једначина (4.12) своди на облик:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad (4.13)$$

Како је x фиксирано следи да је $dx = 0$ у току промене зависне променљиве u од u до $u + \delta u$, одакле се јасно уочава аналогија између једначине (4.11) и једначине (4.13). Из претходног се закључује да је варијациони оператор δ , диференцијални оператор у односу на зависну променљиву, u , па у току рада са варијационим оператором важе иста правила као и у раду са диференцијалним оператором d . Најзначајније особине варијационог оператора дате су једначинама (4.14) - (4.19).

$$\delta(\nabla u) = \nabla(\delta u) \quad (4.14)$$

$$\delta \int_{\Omega} u d\Omega = \int_{\Omega} \delta u d\Omega \quad (4.15)$$

$$\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2 \quad (4.16)$$

$$\delta(F_1 F_2) = \delta F_1 F_2 + \delta F_2 F_1 \quad (4.17)$$

$$\delta \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = \delta F_1 F_2^{-1} - F_1 F_2^{-2} \delta F_2 \quad (4.18)$$

$$\delta(F_1)^n = n(F_1)^{n-1} \delta F_1 \quad (4.19)$$

где је $F_1 = F_1(u)$ и $F_2 = F_2(u)$.

Слично томе, уколико је $G = G(u, v, w)$ функција неколико зависних променљивих, укупна варијација је збир парцијалних варијација:

$$\delta G = \delta_u G + \delta_v G + \delta_w G \quad (4.20)$$

где, на пример, δ_u означава парцијалну варијацију G у односу на u .

4.3 Принцип виртуалних померања

У претходном делу је речено да је виртуални рад услед виртуалних померања, рад сила дуж виртуалних померања, која су у складу са геометријским ограничењима. Све примењене силе су константне током виртуалних померања. Посматра се круто тело на које делују силе $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, и претпоставља се да су нападне тачке ових сила на правцима виртуалних померања $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3, \dots, \delta u_n$, тим редом. Виртуални рад спољашњих сила се може добити као:

$$\delta V = -[F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 + \dots + F_n \delta u_n] = -\sum_{i=1}^n F_i \delta u_i \quad (4.21)$$

док је унутрашњи виртуални рад δU једнак нули због тога што круто тело не трпи деформације. Како сва виртуална померања имају исте особине, даље се може писати:

$$\delta V = -\sum_{i=1}^n F_i \delta u_i = -\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) \delta \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \delta U = 0 \quad (4.22)$$

Према другом Њутновом закону векторски збир сила које делују на тело у квазистатичкој равнотежи је једнак нули. Ово указује на то да је укупан виртуални рад $\delta V + \delta U = 0$. Овај принцип је познат као принцип виртуалних померања и такође важи и за деформабилна тела, за која δU није једнако нули. У овом одељку принцип виртуалних померања и његов посебан случај су описани с обзиром на то да имају важну улогу у формулисању ламинатних теорија и њиховој анализи варијационим методама апроксимације.

Посматра се непрекидно тело (слично поглављу 1) које се налази у равнотежи под дејством запреминских сила \mathbf{f} и површинских сила \mathbf{t} . Нека референтна конфигурација буде почетна конфигурација C^0 , чија је запремина означена као Ω_0 . Претпоставља се да су на делу Γ_u контуре Γ области Ω_0 померања прописана као $\hat{\mathbf{u}}$, а на делу Γ_σ напони прописани помоћу вектора напона \mathbf{t} . Делови контуре Γ_u и Γ_σ су раздвојени (тј. не преклапају се) и њихов збир је укупна контура $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$. Нека је \mathbf{u} вектор померања који одговара конфигурацији равнотеже тела, и нека су $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ тензори напона и деформације, тим редом. Сет дозвољених конфигурација је дефинисан довољно различитим функцијама које задовољавају геометријске контурне услове: $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ на површи Γ_u .

Ако је тело у равнотежи, онда од свих дозвољених конфигурација, стварна конфигурација која одговара конфигурацији равнотеже, чини да укупан виртуални рад буде једнак нули. Виртуална померања су произвољне, непрекидне функције које осим што задовољавају хомогени облик геометријских контурних услова морају да припадају сету дозвољених варијација.

Принцип виртуалних померања се може изразити као:

$$\delta U + \delta V \equiv \delta W = 0 \quad (4.23)$$

Принцип виртуалног рада је независан од било ког конститутивног закона и примењује се и на еластичне (линеарне и нелинеарне) и нееластичне континууме.

За чврсто тело, изрази спољашњег и унутрашњег виртуалног рада дати су у једначини (4.2) и (4.7). У складу са тим, принцип виртуелног рада се може изразити као:

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0 \quad (4.24)$$

где $\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}$ означава двоструку композицију тензора другог реда, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{du}$ и $\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}$ су скаларни производи, Ω_0 је запремина недеформисаног тела, а dv и ds означавају запреминске и површинске елементе Ω_0 . У Декартовим координатама једначина (4.24) добија облик:

$$\int_{\Omega_0} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv - f_i \delta u_i) dv - \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds = 0 \quad (4.25)$$

Веза између виртуалних деформација и виртуалних померања се дефинише као:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}), \quad \delta u_{i,j} \equiv \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \quad (4.26)$$

Заменом (4.26) у једначини (4.25) и коришћењем теореме дивергенције добија се:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) - f_i \delta u_i \right] dv - \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds = \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij} \delta u_{i,j} - f_i \delta u_i) dv - \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds \\ &= - \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dv - \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds + \oint_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Како је $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ и $\delta u_i = 0$ на Γ_u даље следи да је:

$$0 = - \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dv - \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - t_i) \delta u_i ds \quad (4.28)$$

Пошто су виртуална померања произвољна у Ω_0 и на Γ_σ , једначина (4.28) добија облик:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i &= 0 \text{ у } \Omega_0 \\ \sigma_{ji} n_j - t_i &= 0 \text{ на } \Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (4.29)$$

Напонски контурни услови у једначини (4.29) су природни контурни услови. Принцип виртуалних померања је примењив на било које непрекидно тело са произвољним конститутивним понашањем (тј. еластичним или нееластичним).

4.3.1 Принцип минималне укупне потенцијалне енергије

Посебан случај принципа виртуалних померања који се бави линеарним и нелинеарним еластичним телима познат је као принцип минималне укупне потенцијалне енергије. За еластична тела (у одсуству температурних варијација) постоји функција густине енергије деформације U_0 тако да је:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.30)$$

Једначина (4.30) представља конститутивну једначину хипереластичног материјала. Густина енергије деформације U_0 је једнозначна функција деформација у некој тачки и претпоставља се да је позитивно дефинитна. Израз за принцип виртуалних померања, из једначине (4.24), може се изразити у смислу густине енергије деформације U_0 као:

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial U_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv - \left[\int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} ds \right] = 0 \quad (4.31)$$

или у компонентном облику:

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dv - \left[\int_{\Omega_0} f_i \delta u_i dv + \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds \right] = 0 \quad (4.32)$$

Први интеграл једнак је:

$$\int_{\Omega_0} \delta U_0 dv = \delta U \quad (4.33)$$

где је U функционал унутрашње деформационе енергије

$$U = \int_{\Omega_0} U_0 dv \quad (4.34)$$

Ако се претпостави да постоји потенцијал V чија је прва варијација:

$$\delta V = - \left[\int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} ds \right] = - \left[\int_{\Omega_0} f_i \delta u_i dv + \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds \right] \quad (4.35)$$

Онда принцип виртуалног рада добија облик:

$$\delta U + \delta V = \delta(U + V) \equiv \delta \Pi = 0 \quad (4.36)$$

Збир $U + V = \Pi$ назива се **укупном потенцијалном енергијом** еластичног тела поменут у уводном делу овог поглавља. Израз у једначини (4.36) је познат као **принцип минималне укупне потенцијалне енергије**.

4.3.2 Хамилтонов принцип

Хамилтонов принцип представља генерализацију принципа виртуалних померања на динамичке системе. Овим принципом се претпоставља да систем који се разматра карактеришу две функције енергије: кинетичка енергија K и потенцијална енергија Π . За деформабилна тела енергије се могу изразити у смислу зависних променљивих (које су функције положаја) проблема. Хамилтонов принцип се може сматрати динамичком верзијом принципа виртуалних померања.

Други Њутнов закон примењен на деформабилна тела представља глобални запис принципа конзервације количине кретања. Међутим, мора се напоменути да други Њутнов закон кретања за континуум није довољан за одређивање његовог кретања $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$; кинематички услови и конститутивне једначине су неопходни за комплетно дефинисање кретања.

Други Њутнов закон кретања за континуум се генерално може писати као:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \quad (4.37)$$

где је m маса, \mathbf{a} вектор убрзања, а \mathbf{F} резултанта свих сила које делују на тело. Стварна путања $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ коју прати материјална честица у положају x у телу се мења, у складу са кинематичким контурним условима, $\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ где је $\delta \mathbf{u}$ дозвољена варијација (или виртуално померање) путање. Претпостављамо да се померена путања разликује од стварне путање, осим у почетном и завршном тренутку, t_1 и t_2 , респективно. Стога, дозвољена варијација $\delta \mathbf{u}$ испуњава услове,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= 0 \text{ на } S_1 \text{ за svako } t \\ \delta u(x, t_1) &= \delta u(x, t_2) = 0 \text{ за svako } x \end{aligned} \quad (4.38)$$

где S_1 означава део контуре тела на коме је вектор померања \mathbf{u} прописан. Треба имати у виду да скаларни производ једначине (4.37) и $\delta \mathbf{u}$ даје рад у тачки x , зато што су \mathbf{F} , \mathbf{a} и \mathbf{u} вектори

који су функције положаја (док је рад скалар). Интеграцијом по запремини и површини тела добија се укупан рад свих тачака.

Варијација виртуалног рада резултујуће силе на телу у тренутку t дуж виртуалног померања $\delta \mathbf{u}$ је дат као:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_2} \hat{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} dS - \int_V \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (4.39)$$

где је \mathbf{f} вектор запреминских сила, $\hat{\mathbf{t}}$ одређени вектор површинског напона, а $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ тензори напона и деформације. Последњи члан у једначини (4.39) представља варијацију виртуалног рада унутрашњих сила које су складиштене у телу. Деформације $\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ се сматрају компатибилним у смислу да су релације деформација-померање у области еластичности задовољене. Варијација рада инерционе силе $\mathbf{m} \mathbf{a}$ дуж виртуалног померања $\delta \mathbf{u}$ је дата као:

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} dV \quad (4.40)$$

где је ρ густина (може бити функција положаја) медијума. Према Редију [153] даље се добија:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} dV - \int_V (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV + \int_{S_2} \hat{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} dS \right\} dt = 0 \quad (4.41)$$

Једначина (4.41) је позната као општи облик Хамилтоновог принципа за непрекидни медијум (било да је конзервативан или не, и еластичан или не).

Како \mathbf{f} и $\hat{\mathbf{t}}$ представљају конзервативне силе за идеално еластично тело, то се може писати:

$$\delta V = - \left(\int_V (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV + \int_{S_2} \hat{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} dS \right) \quad (4.42)$$

И постоји функција густине енергије деформационе U_0 тако да је:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.43)$$

Заменом једначина (4.42) и (4.30) у једначини (4.41) добија се:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (V + U)] dt = 0 \quad (4.44)$$

где су K и U кинетичка и деформациона енергија дефинисане као:

$$K = \int_V \frac{\rho}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV, \quad U = \int_V U_0 dV \quad (4.45)$$

Једначина (4.44) представља Хамилтонов принцип за еластично тело (линеарно и нелинеарно). Треба нагласити да збир деформационе енергије и потенцијалне енергије спољашњих сила, $U + V = \Pi$ представља укупну потенцијалну енергију, Π , тела. За тела која се налазе у стању мировања Хамилтонов принцип се своди на принцип виртуалних померања.

4.4 Примена варијационих принципа у статичкој анализи композитних ламината

Интензивна употреба композитних ламината наметнула је потребу за детаљном макромеханичком анализом ових материјала. Основни појмови макромеханичке анализе дати су у поглављу 3. У истом поглављу напоменуто је да се вредности напона и деформација у ламинату најлакше могу добити коришћењем једначина равнотеже и једначина кретања. У

овом поглављу описан је поступак добијања једначина статичке равнотеже коришћењем варијационог приступа. Статичком анализом композитних ламината бавили су се многи аутори. За потребе аналитичких и нумеричких математичких поступака добијања решења, коришћен је варијациони прилаз.

Тако су, на пример, *Phan* и *Reddy* [154] искористили смицајну деформациону теорију вишег реда за анализу ламинатних плоча у смислу померања централне тачке, напона, деформација и извијања. Они су претпоставили облик поља померања тако да се задржи континуалност деформација и успостави параболичка расподела смицајних напона, али су наметнули услов да су горња и доња површ плоче слободне од напона. Такође су анализирали затворене облике аналитичких решења за слободно ослоњене плоче. Касније анализе потичу од *Reddy* и *Khdeir* [155] где су изведена решења у затвореном облику и упоређена са CLPT и FSDT теоријама за антисиметричне укршене ламинатне плоче при извијању. *Kant* и *Swamintan* [52], *Mantari* [79], *Grover*[88] и други су се бавили проблемима савијања ламинатних плоча увођењем деформационих теорија заснованих на функцијама облика. *Khedir* [155], *Akavci* [86], *Xiang*[57-58], и други бавили су се проблемима извијања композитних ламината. Сви поменути аутори су за извођење једначина равнотеже користили варијационе принципе, најчешће принцип минималне потенцијалне енергије дефинисан једначином (4.36).

Енергија деформације ламинатне плоче може се дефинисати као:

$$U = \int_{h^-}^{h^+} \int_A (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dAdz \quad (4.46)$$

где је :

A - површина попречног пресека плоче.

Ако се претпостави да је ламинатна плоча оптерећена вертикалним оптерећењем q , потенцијал V се дефинише као:

$$V = \int_A qwdA \quad (4.47)$$

Заменом једначина (4.46), (447) у једначини (4.36) добија се:

$$\left[\int_{h^-}^{h^+} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dAdz - \int_A q_z^+ \delta w^+ dA \right] = 0 \quad (4.48)$$

где је q_z^+ оптерећење на горњој површи плоче.

Ако се замене изрази за деформације и померања уведени различитим деформационим теоријама, добиће се различити системи једначина чији број једначина зависи од броја генерализаних померања уведених деформационим теоријама. Једначине равнотеже за ламинат без утицаја додатних спољашњих сила, а чије су макромеханичке карактеристике анализирание применом различитих деформационих теорија у оквиру поглавља 3 биће облика:

1. За смицајне деформационе теорије вишег реда засноване на функцијама облика:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, & \delta \psi_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, & \delta \psi_y : \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0, \\ \delta w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= 0, & & \end{aligned} \quad (4.49)$$

2. За смицајну деформациону теорију другог реда уведена од стране *Witney* и *Sun*:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, & \delta \phi_x : \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - R_x &= 0, \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, & \delta \phi_y : \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} - R_y &= 0 \\
\delta w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= 0, & \delta \psi_y : \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0, \\
\delta \psi_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, & \delta \psi_z : \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} - N_z &= 0,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

3. За деформациону теорију трећег реда уведена од стране *Kanta* и *Swamintana*:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, & \delta u_0^* : \frac{\partial N_x^*}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} - 2S_x &= 0, \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, & \delta v_0^* : \frac{\partial N_y^*}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} - 2S_y &= 0, \\
\delta w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= 0, & \delta w_0^* : \frac{\partial Q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^*}{\partial y} - 2M_z &= 0, \\
\delta \theta_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, & \delta \theta_x^* : \frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y} - 3Q_x^* &= 0, \\
\delta \theta_y : \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0, & \delta \theta_y^* : \frac{\partial M_y^*}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} - 3Q_y^* &= 0, \\
\delta \theta_z : \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} - N_z &= 0, & \delta \theta_z^* : \frac{\partial S_x^*}{\partial x} + \frac{\partial S_y^*}{\partial y} - 3N_z^* &= 0.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

4. За деформациону теорију трећег реда уведена од стране Редија и Робинсона:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, & \delta \psi_y : \frac{\partial M_y}{\partial x} - C_1 \frac{\partial S_y}{\partial x} - Q_{xz} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, & + 3C_1 P_4 + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - C_1 \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} &= 0, \\
\delta w_0 : C_1 \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + C_1 \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \\
& - 3C_1 \frac{\partial P_{xz}}{\partial y} - 3C_1 \frac{\partial P_{yz}}{\partial x} + 2C_1 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, & \delta \psi_z : \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} \\
& & - N_z &= 0, \\
\delta \psi_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} - C_1 \frac{\partial S_x}{\partial x} - Q_{yz} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \\
& + 3C_1 P_5 + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - C_1 \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0, & \delta \phi_x : \frac{1}{3} \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} \\
& & - 2M_z &= 0.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Из једначина 4.49-4.52 се може приметити да су све једначине равнотеже парцијалне диференцијалне једначине по координатама x и y усвојеног глобалног Декартовог координатног система из поглавља 3, које укључују компоненте вектора оптерећења по јединици ширине. Све приказане једначине су симболички изведене у оквиру функције за добијање једначина равнотеже написане у оквиру симболичког дела програма који прати ову

дисертацију. Уведена је интерна ознака за праћење варијационог оператора, на основу особина овог оператора које су сличне особинама диференцијалног оператора. У том делу коришћена је поменути чињеница да је варијација вектора померања функција зависних променљивих, тј. функција претпостављених облика померања које су функције координата x, y .

Овако дефинисане једначине равнотеже уз додавање облика статичког оптерећења могуће је решавати аналитичким или нумеричким путем. У пракси је чешћа употреба нумеричких поступака због ограничења која се јављају при примени аналитичких поступака.

4.5 Примена варијационих принципа у динамичкој анализи композитних ламината

Проблеми динамичке анализе композитних ламината су знатно комплекснији у односу на статичке проблеме. Нарочиту потешкоћу представљају међуслојеви, јер у динамичким условима најчешће долази до отказа међуслојева тј. до деламинације. Динамичка анализа обухвата широк спектар проблема, па су се из тог разлога проблемима динамике ламината бавили многи аутори. Са аспекта овог рада значајна су истраживања у домену слободних вибрација и пропагације таласа. Проблемима слободних вибрација заснованих на смицајним деформационим теоријама бавили су се аутори у радовима [60], [80], [85] итд., док су проблемима пропагације таласа посвећени радови [156], [157] итд. Проблеми пропагације таласа у области еластичности обухватају широк спектар, па се самим тим због физике проблема и теоријски приступи могу знатно разликовати. Због обимности поменутих проблема, у овом раду се разматрају слободне вибрације за граничне услове слободног ослањања и проблеми пропагације Ламбових таласа. Са аспекта макромеханичке анализе композитних материјала применом приступа заснованог на континуалности деформација, односно приступа заснованог на претпостављеним облицима померања у зависности од избора деформационе теорије, разликоваће се и број уведених једначина кретања које описују поменуте проблеме.

Најчешће коришћени метод за добијање динамичких једначина кретања континуума, па самим тим и ламината посматраног у макромеханичком смислу је Хамилтонов принцип дефинисан једначином (4.44). Енергија деформације ламинатне плоче U и потенцијал V се дефинишу аналогно једначинама [4.46] и [4.47], док се кинетичка енергија дефинише као:

$$K = \frac{1}{2} \int_{h^-}^{h^+} \int_A \rho \left[\left(\dot{u} \right)^2 + \left(\dot{v} \right)^2 + \left(\dot{w} \right)^2 \right] dA dz \quad (4.53)$$

при чему је:

ρ - густина материјала,

u, v, w - претпостављена померања.

Заменом претходно дефинисаних величина у једначини (4.44) добија се:

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \left[\int_{h^-}^{h^+} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz - \int_A p_z^+ \delta w^+ dA \right] dt \\ & + \frac{\delta}{2} \int_0^t \int_{h^-}^{h^+} \int_A \rho \left[\left(\dot{u} \right)^2 + \left(\dot{v} \right)^2 + \left(\dot{w} \right)^2 \right] dA dz dt = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ако се сада у последњем изразу замене изрази за деформације и померање уведени различитим врстама деформационих теорија добијају се једначине кретања у следећим облицима:

1. За смицајне деформационе теорије вишег реда засноване на функцијама облика:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + I_4 \ddot{\theta}_x, & \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= I_1 \ddot{w} \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_1 \ddot{v} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} + I_4 \ddot{\theta}_y, & + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right) + I_5 \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right), & (4.55) \\
\delta \theta_x : \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - R_x &= I_4 \ddot{u} - I_5 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + I_6 \ddot{\theta}_x, \\
\delta \theta_y : \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - R_y &= I_4 \ddot{v} - I_5 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} + I_6 \ddot{\theta}_y,
\end{aligned}$$

2. За смицајну деформациону теорију другог реда уведену од стране *Witney* и *Sun*:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{I_3}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}, & \delta \psi_y : \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= \frac{I_3}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \frac{I_3}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}, & \delta \psi_z : \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} - N_z &= I_3 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \\
\delta w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, & \delta \phi_x : \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - R_x &= \frac{I_1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{I_5}{4} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}, \\
\delta \psi_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= \frac{I_3}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, & \delta \phi_y : \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} - R_y &= \frac{I_1}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \frac{I_5}{4} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

3. За деформациону теорију трећег реда уведену од стране *Kanta* и *Swamintana*:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\theta}_x + I_3 \ddot{u}_0^* + I_3 \ddot{\theta}_x^*, & \delta u_0^* : \frac{\partial N_x^*}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} - 2S_x &= I_3 \ddot{u}_0 + I_4 \ddot{\theta}_x + I_5 \ddot{u}_0^* + I_6 \ddot{\theta}_x^*, \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\theta}_y + I_3 \ddot{v}_0^* + I_3 \ddot{\theta}_y^*, & \delta v_0^* : \frac{\partial N_y^*}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} - 2S_y &= I_3 \ddot{v}_0 + I_4 \ddot{\theta}_y + I_5 \ddot{v}_0^* + I_6 \ddot{\theta}_y^*, \\
\delta w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= I_1 \ddot{w}_0 + I_2 \ddot{\theta}_z + I_3 \ddot{w}_0^* + I_3 \ddot{\theta}_z^*, & \delta w_0^* : \frac{\partial Q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^*}{\partial y} - 2M_z^* &= I_3 \ddot{w}_0 + I_4 \ddot{\theta}_z + I_5 \ddot{w}_0^* + I_6 \ddot{\theta}_z^*, \\
\delta \theta_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I_2 \ddot{u}_0 + I_3 \ddot{\theta}_x + I_4 \ddot{u}_0^* & \delta \theta_x^* : \frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y} - 3Q_x^* &= I_4 \ddot{u}_0 + I_5 \ddot{\theta}_x + I_6 \ddot{u}_0^* + I_7 \ddot{\theta}_x^*, \\
&+ I_5 \ddot{\theta}_x^*, & \delta \theta_y^* : \frac{\partial M_y^*}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} - 3Q_y^* &= I_4 \ddot{v}_0 + I_5 \ddot{\theta}_y + I_6 \ddot{v}_0^* + I_7 \ddot{\theta}_y^*, \\
\delta \theta_y : \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= I_2 \ddot{v}_0 + I_3 \ddot{\theta}_y + I_4 \ddot{v}_0^* & \delta \theta_z^* : \frac{\partial S_x^*}{\partial x} + \frac{\partial S_y^*}{\partial x} - 3N_z^* &= I_4 \ddot{w}_0 + I_5 \ddot{\theta}_z + I_6 \ddot{w}_0^* + I_7 \ddot{\theta}_z^*. \\
&+ I_5 \ddot{\theta}_y^*, & & \\
\delta \theta_z : \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial x} - N_z &= I_2 \ddot{w}_0 + I_3 \ddot{\theta}_z + I_4 \ddot{w}_0^* & & \\
&+ I_5 \ddot{\theta}_z^*, & &
\end{aligned} \tag{4.57}$$

4. За деформациону теорију трећег реда уведена од стране Редија и Робинсона:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 &: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - \frac{1}{2} I_3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - C_1 I_4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) - C_1 I_4 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - \frac{1}{2} I_4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right), \\
\delta v_0 &: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - \frac{1}{2} I_3 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - C_1 I_4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) - C_1 I_4 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - \frac{1}{2} I_4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right), \\
\delta w_0 &: C_1 \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + C_1 \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} - 3C_1 \frac{\partial P_x}{\partial y} - 3C_1 \frac{\partial P_y}{\partial x} + 2C_1 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \\
&+ C_1 I_4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + C_1 I_4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) + C_1 I_5 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) + C_1 I_5 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{2} C_1 I_6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{2} C_1 I_6 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) \\
&- C_1^2 I_7 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) - C_1^2 I_7 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) - C_1^2 I_7 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) - C_1^2 I_7 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{3} I_7 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{3} I_7 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right), \\
\delta \psi_x &: \frac{\partial M_x}{\partial x} - C_1 \frac{\partial S_x}{\partial x} - Q_{yz} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + 3C_1 P_5 + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - C_1 \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = (I_2 - C_1 I_4) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + (I_3 - 2C_1 I_5 + C_1^2 I_7) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\
&+ \frac{1}{2} (I_2 - C_1 I_4) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) + (-C_1 I_5 + C_1^2 I_7) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{3} (-I_5 + C_1 I_7) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right), \\
\delta \psi_y &: \frac{\partial M_y}{\partial x} - C_1 \frac{\partial S_y}{\partial x} - Q_{xz} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial y} + 3C_1 P_4 + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - C_1 \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = (I_2 - C_1 I_4) \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + (I_3 - 2C_1 I_5 + C_1^2 I_7) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\
&+ \frac{1}{2} (-I_4 + C_1 I_6) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) + (-C_1 I_5 + C_1^2 I_7) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{3} (-I_5 + C_1 I_7) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right), \\
\delta \psi_z &: \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} - N_z = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} + C_1 I_4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + C_1 I_4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) \\
&+ (C_1 I_5 - C_1^2 I_7) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) + (C_1 I_5 - C_1^2 I_7) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \right) - C_1^2 I_7 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) - C_1^2 I_7 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) \\
&- \frac{1}{2} C_1 I_6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{2} C_1 I_6 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{3} I_7 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{3} I_7 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right), \\
\delta \phi_x &: \frac{1}{3} \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} - 2M_z = I_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} + \frac{1}{3} I_4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{3} I_4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) \\
&+ C_1 I_4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{3} (I_5 - C_1 I_7) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{3} (I_5 - C_1 I_7) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{3} C_1 I_7 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) \\
&- \frac{1}{6} I_6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{6} I_6 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{9} I_7 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{9} I_7 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

где су:

$$I_{1..7} = \sum_{k=1}^n \int_{h_k^-}^{h_k^+} \rho_k (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz, \text{ а } n\text{- укупан број слојева у ламинату.}$$

Увидом у једначине (4.55)-(4.58) јасно се види да су и једначине кретања, као и једначине равнотеже парцијалне диференцијалне једначине независно променљивих x и y , али и времена t . Такође се јасно види да степен сложености ових једначина у многоме зависи од избора деформационе теорије. Степен сложености ових једначина зависиће од броја зависно променљивих уведених деформационом теоријом, али и од њихове међусобне повезаности. Тако, на пример, Кантова деформациона теорија поседује 12 зависно променљивих, које су повезане полиномним функцијама, док деформациона теорија коју су увели *Reedy* и *Robinson*

поседује седам зависно променљивих повезаних степеним функцијама и парцијалним изводима по x и y . Суштински потребно је изабрати такву деформациону теорију која ће имати најбољи однос времена прорачуна, који зависи од сложености једначина, и тачности резултата. У том смислу биће приказана детаљна анализа поменута два типа проблема. У поглављима 5 и 7 биће приказани аналитички поступци решавања описаних проблема, док се поглавље 6 заснива на нумеричкој FEM анализи.

5 Математичке методе за решавање проблема статичке и динамичке анализе композитног ламината

У макромеханичкој анализи композитних ламината за приказивање резултата неопходно је пронаћи математички алат којим ће се решити једначине статичке или динамичке равнотеже дефинисане у четвртом поглављу. Поменуте једначине представљају парцијалне диференцијалне једначине за које није увек могуће наћи решења у затвореном облику. Из тог разлога су многи аутори у својим радовима поред ограничења уведених контурним условима уводили и додатна ограничења у смислу класе симетрије материјала. Увођењем класа симетрије долази до поједностављивања парцијалних диференцијалних једначина. Најчешће анализиране класе ламината у радовима су симетрични или антисиметрични укрштени ламинати, јер код укрштених ламината матрице спрезања имају доста једноставније облике. Класе симетрије материјала су од нарочитог утицаја при решавању парцијалних диференцијалних једначина аналитичким путем. За одређене класе симетрије ламината могуће је аналитичким путем наћи и решења у затвореном облику. Том проблематиком бавили су се и аутори у радовима [86], [155], [73], итд.

Аналитичке методе се најчешће користе за анализу савијања, извијања, померања централне тачке (*deflection*), слободних вибрација и пропагације таласа. Иако аналитичке методе могу да дају дубок физички увид и њихова решења су изузетно прецизна, примена је често ограничена на проблеме који имају једноставну геометрију, контурне услове и задата оптерећења. Треба нагласити да су аналитичка решења од изузетне важности у развоју нових теоријских модела, пре свега због могућности поменутих физичких тумачења проблема и да је већина нумеричких решења заснована на аналитичким поставкама.

За потребе праксе, а нарочито за сложене инжењерске конструкције, неопходна је употреба **нумеричких метода** код којих се верификација резултата врши поређењем са аналитички добијеним решењима или експерименталним резултатима. Најчешће употребљаване нумеричке методе у макромеханичкој анализи композитних ламината су Рицова метода, метода коначних разлика и метода коначних елемената (FEM-Finite element analyses), која ће у овом раду бити детаљно размотрена. Развој рачунарске технике довео је до експанзије употребе нумеричких метода, тако да су данас нумеричка испитивања често обавезан део пројектне документације. Употребом нумеричких метода може се остварити значајна уштеда у економског смислу, а нарочито код конструкција код којих није неопходно изводити експерименте.

5.1 Примена аналитичких метода у анализи извијања композитних ламината (*buckling analyses*)

Поступак примене аналитичких метода у анализи извијања композитних ламината у многоме зависи од избора деформационе теорије. Деформационим теоријама, заснованим на претпостављеним пољима померања, број независних једначина у систему се одређује самом поставком поља померања у оквиру које се дефинише и број независно променљивих, коме мора одговарати број независних једначина (погледати поглавља 2 и 3). У оквиру ове дисертације развијени су кодови у програмском пакету Матлаб за извођење симболичких једначина анализе извијања за различите типове деформационих теорија, за контурне услове слободно ослоњене ламинатне плоче, примењене на групу укрштених или умрежених

симетричних композитних ламината. Претпостављени облици решења и контурни услови су усвојени у складу са Навијеовим поступцима решавања примењеним у радовима [79],[88], [153]. Имплементирана је процедура добијања резултата комбинацијом симболичких и бројних вредности коефицијената који егзистирају у проблемима ове врсте. Предност програмског језика Матлаб управо и лежи у поменутој могућности комбиновања ове две групе променљивих (пример једног таквог кода дат је у додатку).

Да би било могуће поређење резултата са референтним резултатима из литературе посматрана је квадратна ламинатна плоча димензија $a \times a$ или у општем случају праваугаона типа $a \times b$ састављена од слојева материјала чије су вредности инжењерских константи дате као:

Материјал 1 [88]:

$$E_1 / E_2 = \text{променљив однос}, G_{12} / E_2 = 0.6, G_{13} / E_2 = 0.6, G_{23} / E_2 = 0.5,$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

Материјал 2 [88]:

$$E_1 / E_2 = 25, G_{12} / E_2 = 0.5, G_{13} / E_2 = 0.5, G_{23} / E_2 = 0.2,$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

Узимајући у обзир да је акценат овог рада баш на примени HSDT теорија, као и чињеницу да су теорије нижег реда већ довољно описане и експлоатисане, у оквиру овог поглавља вршиће се анализа проблема извијања само применом ових теорија.

5.1.1 Примена HSDT заснованих на смицајним функцијама облика у анализи извијања симетричних укрштених композитних ламината

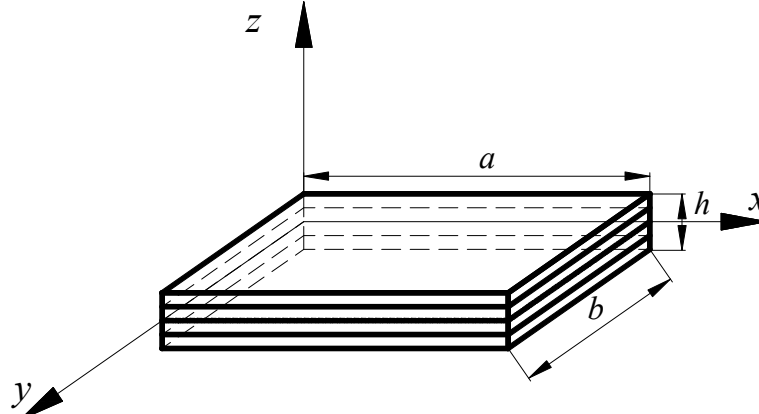
Као што је речено у поглављима 2 и 3, проблемима деформације нормале на средњу површ ламината бавили су се многи аутори. Уз помоћ претпостављених поља померања покушавали су да смање степен апроксимације деформације нормале у односу на реалне деформације. За примену HSDT теорија заснованих на функцијама облика, у проблемима извијања ламинатних плоча претпостављена поља померања се усвајају у складу са једначином (2.6). На основу тако претпостављеног поља померања добијају се деформације у области линеарне еластичности дате једначином (2.7), док је преглед неких функција облика дат у табели 2.1. За конститутивну матрицу ортотропног материјала, дефинисану преко инжењерских константи дату једначином (1.77), и њен облик у глобалном координатном систему, дат једначином (1.79), векторе оптерећења, дате једначином (3.24), а у складу са поступком описаним у поглављу 4, добијају се једначине равнотеже дефинисане једначином (4.49). Ове једначине је могуће модификовати дефинисањем облика оптерећења. Ако се као оптерећење употреби јединична сила по ширини ламината, једначине (4.49) према [153] добијају облик:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \Omega \bar{F}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Omega \bar{F}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\delta\theta_x : \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - R_x = 0,$$

$$\delta\theta_y : \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - R_y = 0,$$

где су \bar{F}_x , \bar{F}_y јединична оптерећења на страни ламината, а Ω фактор оптерећења уведен за потребе аналитичке процедуре.



Слика 5.1. Ламинатна плоча на којој се дефинишу контурни услови

Контурни услови дуж ивица слободно ослоњене правоугаоне плоче (слика 5.1) на основу [153] су:

$$v_0 = w_0 = \theta_y = N_x = M_x = P_x = 0, \text{ на ивицама код којих је } x = 0 \text{ односно } x = a, \quad (5.2)$$

$$u_0 = w_0 = \theta_x = N_y = M_y = P_b = 0, \text{ на ивицама код којих је } y = 0 \text{ односно } y = b.$$

Узимајући у обзир претходно дефинисане контурне услове на основу [86] могуће је претпоставити Навијеов облик решења као:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Где су $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}$ произвољни параметри које треба одредити.

Могућност добијања аналитичких решења зависи и од могућности поједностављивања једначине (5.1) која се уводе дефинисањем класе симетрије ламината. За укрштене симетричне ламинате, заменом бројних вредности у конститутивној матрици, добија се да су матрице A, B, D, E, F, G, H облика:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix}; \\
\mathbf{G} &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{12} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{44} & 0 \\ 0 & H_{55} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{0};
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Одавде се јасно види да су код ове групе ламината коефицијенти A_{16} , A_{26} , E_{16} , E_{26} , F_{16} , F_{26} , G_{16} , G_{26} , H_{45} једнаки нули, што ће се надаље користити као позната чињеница. Заменом једначине (5.3) у једначини (5.1) и узимањем у обзир ограничења дефинисаних релацијом (5.4) добија се:

$$\left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ L_{15} & L_{25} & L_{35} & L_{45} & L_{55} \end{array} \right] - \Omega \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \bar{F}_x + \beta^2 \bar{F}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \end{array} \right\} = \mathbf{0}, \end{array} \right. \tag{5.5}$$

где је $\alpha = \frac{m\pi}{a}$, $\beta = \frac{n\pi}{b}$, а коефицијенти L_{ij} , ($i, j = 1 \div 5$) су дефинисани као:

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, L_{12} = \alpha\beta (A_{12} + A_{66}), L_{13} = 0, L_{14} = \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66}, \\
L_{15} &= \alpha\beta (D_{12} + D_{16}), L_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, L_{23} = 0, L_{24} = \alpha\beta (D_{12} + D_{16}), \\
L_{25} &= \alpha^2 C_{66} + \beta^2 C_{22}, L_{33} = \alpha^4 E_{11} + 2\alpha^2 \beta^2 E_{12} + 4\alpha^2 \beta^2 E_{66} + \beta^4 E_{22}, \\
L_{34} &= -\alpha^3 F_{11} - \alpha\beta^2 F_{12} - 2\alpha\beta^2 E_{66}, L_{35} = -\alpha^2 \beta F_{12} - 2\alpha^2 \beta F_{66} - \beta^3 F_{22}, \\
L_{44} &= H_{44} + \alpha^2 G_{11} + \alpha^2 G_{66}, L_{45} = \alpha\beta (G_{12} + G_{66}), L_{55} = H_{55} + \alpha^2 G_{66} + \alpha^2 G_{22}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

За добијање нетривијалних решења потребно је да детерминанта из једначине (5.5) буде једнака нули, односно да је:

$$|\mathbf{L} - \Omega \mathbf{I}| = 0 \tag{5.7}$$

За приказ бројних вредности код квадратне ламинатне плоче, код које су конститутивне матрице слојева дефинисане преко инжењерских константи, у складу са [76], користи се нормализација $\bar{\lambda} = \bar{F}_x \frac{a^2}{E_2 h^3}$. Као што је већ поменуто, резултати су добијени у програмском

пакету Матлаб. Вредности инжењерских константи материјала сваког слоја у локалном координатном систему дефинисане су материјалима 1 и 2 на почетку овог поглавља.

За усвојене вредности инжењерских константи и уграђене функције облика дефинисане у табели 2.1 добијени су резултати за нормализоване вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$ дати у табелама 5.1-5.3, које садрже упоредне вредности за различите функције облика. Компаративна анализа је вршена са циљем да се одабере функција облика која ће дати задовољавајуће резултате уз што једноставноји математичку процедуру. Треба нагласити да

је једино код функција које су уоквирене у табели могуће наћи експлицитну вредност интеграла. У свим осталим случајевима неопходно је применити неки од поступака нумеричке интеграције. У зависности од изабраног поступка нумеричке интеграције, коначне вредности се могу разликовати у односу на приказане вредности у радовима других аутора. Из приказаних резултата и дијаграма функција облика јасно се уочава да функције са сличним облицима кривих дају најприближније резултате. Приказани поступак даје добро поклапање са резултатима који су дати у радовима [88], [76].

Име аутора	E_1/E_2				
	3	5	10	20	50
<i>Ambartsumain</i>	5.407	6.803	10.040	15.58	27.359
<i>Kaczowski, Panc u Reissner</i>	5.407	6.803	10.040	15.58	27.359
<i>Levy, Stein, Touratier</i>	5.408	6.805	10.050	15.608	27.453
<i>Mantari u остали</i>	5.421	6.829	10.116	15.796	28.081
<i>Viola u остали</i>	5.514	6.971	10.413	15.508	30.384
<i>Mantari u остали</i>	5.407	6.803	10.040	15.57	27.356
	5.407	6.802	10.033	15.51	27.258
<i>Karama u остали, Aydogdu</i>	5.410	6.809	10.063	15.646	27.585
<i>Mantari u остали</i>	5.410	6.810	10.064	15.65	27.595
<i>Viola u остали, El Meiche u остали</i>	5.410	6.810	10.064	15.65	27.595
<i>Soldatos</i>	5.407	6.803	10.040	15.578	27.353
<i>Mantari u остали</i>	5.455	6.875	10.189	15.926	28.431
<i>Akavci u Tanrikulu</i>	5.446	6.861	10.157	15.846	28.171
<i>Akavci u Tanrikulu</i>	5.408	6.805	10.047	15.599	27.422
<i>Grover u остали</i>	5.453	6.872	10.182	15.91	28.377
<i>Mechab u остали</i>	5.407	6.803	10.041	15.582	27.366

Табела 5.1. Вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$ при извијању симетричног укрштеног ламината $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ за фиксирани однос $a/h=10$ и усвојен материјал 1

Ако се пажљиво погледају вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$, у табелама 5.1-5.3., јасно је да су одступања у резултатима добијених функцијама, код којих није неопходно нумеричко интегралнење, најмања. Такође се уочава да при фиксираном односу $a/h=10$ у табелама 5.1. и 5.3. за мале односе E_1/E_2 генерално нема већих међусобних одступања вредности бездимензионог параметра за све функције облика, осим за функције под редним бројевима 5 и 14, из табеле, које имају нешто већа одступања. Са повећањем односа E_1/E_2 међусобна

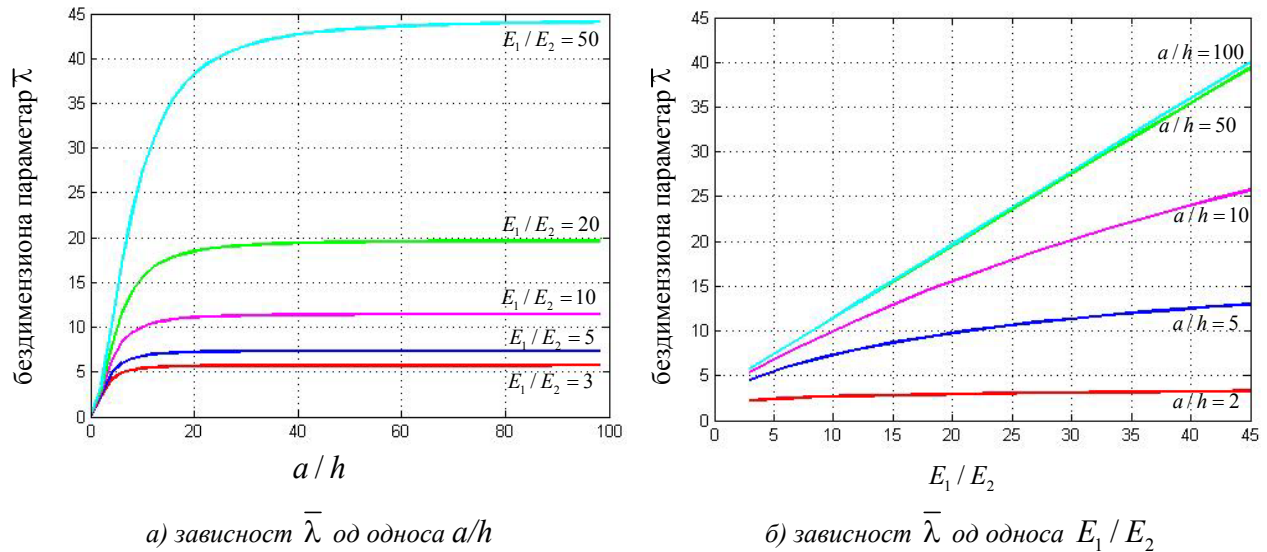
одступања резултата почињу да се повећавају тако да за однос $E_1/E_2 \geq 50$ одступања између вредности, добијених применом појединих функција облика, досежу и до 0.5. Може се закључити да при односима $E_1/E_2 \leq 20$ и односу $a/h=10$ функција облика није од пресудног значаја за добијене резултате.

У табели 5.2 приказане су вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$ при фиксираном односу $E_1/E_2 = 40$. Из приказаних вредности није тешко закључити да су и при малим односима $a/h \leq 10$ вредности одступања међу приказаним резултатима доста мале што јасно асоцира да су све теорије осим теорија под редним бројевима 5 и 14 примењиве за анализу ове врсте проблема. При великим односима $a/h = 50$ и $a/h = 100$ готово све теорије дају резултате који се поклапају у чак две децимале, што је и логично очекивати јер се код таквог односа a/h утицај функције облика смањује, па при таквим односима готово да није неопходно користити смицајне деформационе теорије вишег реда, већ сасвим задовољавајуће резултате могу дати и теорије какве су класична теорија и смицајна деформациона теорија првог реда.

Име аутора	a/h				
	2	5	10	50	100
Ambartsumain	3.075	11.101	22.350	35.255	35.929
Kaczowski, Panc и Reissner	3.075	11.101	22.350	35.255	35.929
Levy, Stein, Touratier	3.143	11.185	22.430	35.262	35.931
Mantari и остали	3.532	11.739	22.969	35.315	35.944
Viola и остали	4.043	13.643	25.040	35.511	35.995
Mantari и остали	3.073	11.099	22.348	35.255	35.929
	2.981	11.005	22.269	35.247	35.927
Karama и остали, Aydogdu	3.227	11.298	22.538	35.273	35.934
Mantari и остали	3.237	11.311	22.551	35.274	35.934
Viola и остали, El Meiche и остали	3.237	11.311	22.551	35.274	35.934
Soldatos	3.069	11.094	22.344	35.254	35.929
Mantari и остали	3.229	11.900	23.325	35.357	35.956
Akavci и Tanrikulu	2.984	10.989	22.241	35.244	35.926
Akavci и Tanrikulu	3.121	11.158	22.404	35.260	35.930
Grover и остали	3.210	11.856	23.278	35.353	35.954
Mechab и остали	3.080	11.107	22.356	35.255	35.929

Табела 5.2. Вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$ при извијању симетричног укрштеног ламината $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ за фиксирано однос $E_1/E_2 = 40$ и усвојен материјал 1

На слици 5.2, дати су дијаграми зависности $\bar{\lambda}$ од односа a/h , при фиксираним вредностима односа E_1/E_2 , као и дијаграми зависности $\bar{\lambda}$ од односа E_1/E_2 , при фиксираним вредностима односа a/h . Треба нагласити да, због велике сличности добијених резултата, нису дати дијаграмски прикази резултата добијених применом свих функција облика из табеле 2.1., већ је као представник ове групе функција изабрана функција под редним бројем 16 дефинисана од стране *Mechaiba* из разлога што се употребом ове функције добијају добре вредности резултата и што је решења интеграла код којих је ова функција подинтегрална функција могуће добити у затвореном облику, што јасно указује на чињеницу да су вредности тако добијених решења најпрецизније.



Слика 5.2. Дијаграмски приказ бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$

Са слике 5.2а јасно се уочава да са порастом односа a/h вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$ почињу да конвергирају ка некој коначној вредности за било који однос E_1/E_2 . Конвергенција почиње већ при односима $a/h \geq 30$. Ако се упореде резултати са радовима [76], [86] јасно се уочава да при великим вредностима односа a/h ове теорије имају све мањи утицај, што је још једна потврда констатације да употреба ових теорија добија смисао тек код умерено дебелих плоча, али непостојање нормалног напона σ_{zz} ограничава употребу ових теорија код дебелих плоча.

На слици 5.2б лако је уочљиво да за фиксирану вредност односа a/h , променом односа E_1/E_2 нема асимптотског приближавања било којој вредности и при било ком односу a/h . Са слике се види да су криве у овом случају строго растуће. Савијање ових кривих је доста мало, па оне подсећају на графике чисто линеарних кривих.

Име аутора	E_1 / E_2				
	3	5	10	20	50
Ambartsumain	5.395	6.761	9.867	14.985	25.116
Kaczkowski, Panc и Reissner	5.395	6.761	9.867	14.985	25.116
Levy, Stein, Touratier	5.396	6.764	9.877	15.016	25.221
Mantari и остали	5.410	6.792	9.954	15.228	25.926
Viola и остали	5.506	6.944	10.300	16.097	28.579
Mantari и остали	5.395	6.761	9.867	14.985	25.113
	5.395	6.759	9.859	14.957	25.006
Karama и остали, Aydogdu	5.399	6.769	9.892	15.058	25.363
Mantari и остали	5.399	6.770	9.894	15.063	25.380
Viola и остали, El Meiche и остали	5.399	6.770	9.894	15.063	25.380
Soldatos	5.395	6.761	9.866	14.983	25.108
Mantari и остали	5.444	6.839	10.042	15.412	26.344
Akavci и Tanrikulu	5.435	6.823	10.005	15.317	26.050
Akavci и Tanrikulu	5.396	6.763	9.874	15.006	25.187
Grover и остали	5.442	6.835	10.034	15.393	26.283
Mechab и остали	5.395	6.761	9.868	14.988	25.124

Табела 5.3. Вредности бездимензионог параметра $\bar{\lambda}$ при извијању симетричног укрштеног ламината $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ за фиксирани однос $a/h=10$ и усвојен материјал 1

5.2 Примена аналитичких метода у анализи савијања укрштених симетричних композитних ламината (bending analysis)

У оквиру макромеханичке статичке анализе композитних ламината у овој дисертацији посматрано је понашање укрштених и умрежених ламинатних плоча при савијању. Проблематиком понашања ламината при савијању бавили су се аутори у радовима, [88], [74], [77] итд. Слично као код проблема извијања приказана је детаљна процедура аналитичког решавања система статичких парцијалних диференцијалних једначина равнотеже. Сам облик ових једначина, као и укупан број независних једначина у систему једначина којим се дефинише стање равнотеже композитног ламината, зависи од имплементиране деформационе теорије, као и од облика оптерећења које изазива савијање. У овом поглављу анализирана је квадратна ламинатна плоча применом различитих деформационих теорија под дејством синусоидалног оптерећења. Написани су матлаб кодови у које је имплементирана процедура комбинације симболичких и нумеричких облика променљивих чији број зависи од броја независно променљивих уведених претпостављеним облицима померања датим у поглављу 2.

За сваку од примењених теорија дата је упоредна анализа бездимензионих вредности вертикалног померања, нормалних и смицајних напона. Нормализација је извршена у складу са нормализацијама предложеним у референтним радовима из ове области [88], [74], [77]. Аналитичка процедура је модификована у односу на процедуре дате у поменутих радовима и прилагођена је поступку датом у [86]. Аналитички поступак добијања решења се разликује за различите класе ламината (умрежене и укрштене), а дефинисање класе ламината се врши у оквиру симболичког дела Матлаб кода. Такође треба нагласити да се и облици претпостављених Навијеових решења бирају тако да задовоље контурне услове који се такође разликују у зависности од класе ламината. Тако, на пример, контурни услови слободно ослоњене симетричне укрштене ламинатне плоче не могу дати задовољавајуће резултате за умрежене антисиметричне ламинате. Код умрежених антисиметричних ламината морају се модификовати контурни услови, што директно проузрокује и модификацију претпостављених облика Навијеових решења.

5.2.1 Примена HSDT заснованих на смицајним функцијама облика у анализи савијања симетричних укрштених композитних ламината

За решавање проблема савијања ове групе ламината претпостављена поља померања, конститутивне матрице, матрице спрезања, функције облика и изведене једначине равнотеже без унетог облика оптерећења усвајају се потпуно аналогно као код анализе проблема извијања дефинисаних у 5.1.1. Основна разлика у односу на поставку проблема извијања је у претпостављеном облику статичког оптерећења. За анализу савијања, као оптерећење ламинатне плоче димензија $a \times b \times h$ се користи синусна функција облика:

$$F_z = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right). \quad (5.8)$$

За овако дефинисано оптерећење једначине равнотеже добијају облик:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - F_z &= 0, \\ \delta \theta_x : \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - R_x &= 0, \\ \delta \theta_y : \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - R_y &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ако се понови поступак дат у опису извијања, што подразумева усвајање истих контурних услова, као у једначини (5.2), и претпостављених облика Навијеових решења, као у једначини (5.3), једначина равнотеже се своди на облик:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ L_{15} & L_{25} & L_{35} & L_{45} & L_{55} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_p} \quad (5.10)$$

односно:

$$\mathbf{L}\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{P}_p \quad (5.11)$$

Матричним множењем једначине (5.11) са \mathbf{L}^{-1} са леве стране добија се:

$$\underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}}_{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}_p \quad (5.12)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}_p.$$

Једначином (5.12) у потпуности се дефинишу амплитуде претпостављених облика померања. Сам облик померања из (2.6) се добија ако се матрица амплитуда померања помножи са вектором тригонометријских функција из (5.3) које зависе од x и y . На тај начин се добијају максималне вредности померања, $u_0(x=0, y=b/2, z=\pm h/2)$, $v_0(x=a/2, y=0, z=\pm h/2)$

$w_0(x=a/2, y=b/2, z=0)$ које је за потребе упоредне анализе померања са вредностима датим у радовима [153], [88], [86], неопходно нормализовати са:

$$\bar{w} = w_0(x=a/2, y=b/a) \cdot \left(\frac{100E_2h^3}{b^4q_0} \right), \quad \bar{u} = u_0(x=0, y=b/2, z=\pm h/2) \cdot \left(\frac{100E_2h^3}{b^4q_0} \right),$$

$$\bar{v} = v_0(x=a/2, y=0, z=\pm h/2) \cdot \left(\frac{100E_2h^3}{b^4q_0} \right).$$

За тако извршену нормализацију и примењене деформационе теорије засноване на функцијама облика добијају се бездимензионе вредности за \bar{w} за укрштене симетричне ламинате дате у табелама 5.4-5.7. Нумерички поступак добијања резултата за померања спроведен је у Матлабу, на раније поменути начин, комбинацијом симболичког и нумеричког програмирања (репрезентативни пример кода дат је у додатку).

Даље се поступак враћа на сам почетак, где се симболички на основу израза за претпостављена поља померања, њихове везе са деформацијама, и уз помоћ употребе генерализованог Хуковог закона, добијају компоненте вектора напона у симболичком облику. Ако се у тако добијеним изразима замене вредности константи еластичности добијају се вредности компоненти вектора напона $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]$. За поређење вредности са резултатима из литературе неопходно је извршити нормализацију компоненти вектора напона у складу са [52].

Поређење резултата вршено је са резултатима датим у [88]. У поменутом раду дате су и вредности добијене 3D еластичном теоријом од стране Пагана. Увидом у вредности дате у табелама, лако се закључује да постоји доста добро поклапање резултата са вредностима добијеним 3D еластичном теоријом. Треба нагласити да све смицајне деформационе теорије ипак представљају апроксимативне теорије, па се из тог разлога не може очекивати потпуно поклапање резултата са резултатима 3D еластичне теорије. За мале односе $a/h \leq 10$ најбољи резултати се добијају коришћењем функција облика дефинисаним од стране Караме и

осталих, као и Мантарија и осталих, где на пример грешка апроксимације код померања \bar{w} износи 1.7%. Грешка апроксимације код употребе осталих функција из табеле не прелази вредност 3.5%, па се може рећи да употреба готово свих функција облика итекако има смисла. Иако се вредности одређених интеграла, код којих се као подинтегралне функције јављају поменуте функције, не могу одредити без употребе нумеричке интеграције, сам облик поменутих функција је дефинисан тако да може дати доста добре резултате у аналитичким поступцима, а нарочито у примени нумеричких метода попут методе FEM. Са порастом a/h односа степен апроксимације се смањује па се грешка код померања \bar{w} са 1.7% смањује на 1.1% при односу $a/h = 100$. Треба нагласити да при односу $a/h = 100$ употреба готово свих функција облика има готово индентичну грешку апроксимације, што још једном наводи на поменути сврху употребе смицајних деформационих теорија вишег реда примарно код дебелих и умерено дебелих ламинатних плоча.

Име аутора	a/h=4					
	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xz}$
Ambartsumain	1.894	0.665	0.6322	0.044	0.239	0.206
Kaczkowski, Panc и Reissner	1.894	0.665	0.632	0.044	0.239	0.206
Levy, Stein, Touratier	1.908	0.683	0.635	0.045	0.246	0.216
Mantari и остали	1.920	0.741	0.636	0.048	0.270	0.253
Viola и остали	/	0.347	0.489	0.024	0.104	0.075
Mantari и остали	1.893	0.665	0.632	0.044	0.239	0.206
	1.852	0.628	0.625	0.042	0.224	0.187
Karama и остали, Aydogdu	1.920	0.700	0.637	0.046	0.253	0.226
Mantari и остали	1.920	0.702	0.637	0.046	0.254	0.027
Viola и остали, El Meiche и остали	1.920	0.702	0.637	0.046	0.254	0.227
Soldatos	1.892	0.663	0.632	0.44	0.238	0.227
Mantari и остали	1.924	0.725	0.637	0.047	0.262	0.241
Akavci и Tanrikulu	1.833	0.630	0.620	0.042	0.213	0.177
Akavci и Tanrikulu	1.905	0.677	0.634	0.045	0.244	0.214
Grover и остали	/	0.4203	0.553	0.030	0.159	0.121
Mechab и остали	1.892	0.667	0.633	0.044	0.240	0.207

Табела 5.4. Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ за фиксирани односе $E_1/E_2 = 25$ и $a/h = 4$ и усвојен материјал 2

Из табела, као и са дијаграма дефинисаних на сликама 5.3-5.7 јасно је уочљиво да употреба свих функција облика у проблемима савијања ламината, даје приближне резултате за напоне $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$, $\bar{\tau}_{xy}$, док су нешто већа одступања смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$, $\bar{\tau}_{yz}$.

Име аутора	a/h=10					
	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xz}$
Ambartsumain	0.715	0.545	0.389	0.028	0.153	0.264
Kaczkowski, Panc и Reissner	0.715	0.545	0.389	0.028	0.153	0.264
Levy, Stein, Touratier	0.720	0.549	0.391	0.027	0.158	0.279
Mantari и остали	0.729	0.561	0.395	0.027	0.177	0.335
Viola и остали	0.570	0.497	0.325	0.022	0.073	0.085
Mantari и остали	0.715	0.545	0.389	0.027	0.153	0.263
	0.703	0.539	0.383	0.026	0.143	0.236
Karama и остали, Aydogdu	0.724	0.552	0.393	0.027	0.164	0.295
Mantari и остали	0.724	0.553	0.393	0.027	0.164	0.295
Viola и остали, El Meiche и остали	0.724	0.553	0.393	0.027	0.164	0.295
Soldatos	0.714	0.545	0.389	0.027	0.164	0.295
Mantari и остали	0.728	0.558	0.395	0.027	0.152	0.263
Akavci и Tanrikulu	0.699	0.540	0.382	0.026	0.136	0.222
Akavci и Tanrikulu	0.718	0.548	0.390	0.027	0.157	0.275
Grover и остали	0.628	0.505	0.349	0.024	0.105	0.143
Mechab и остали	0.715	0.546	0.389	0.027	0.153	0.265

Табела 5.5. Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и $a/h = 10$ и усвојен материјал 2

Име аутора	a/h=20					
	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xz}$
Ambartsumain	0.506	0.539	0.304	0.023	0.123	0.282
Kaczkowski, Panc и Reissner	0.506	0.539	0.304	0.023	0.123	0.282
Levy, Stein, Touratier	0.507	0.540	0.305	0.023	0.127	0.299
Mantari и остали	0.510	0.543	0.307	0.023	0.142	0.362

Viola и остали	0.467	0.527	0.284	0.021	0.065	0.088
Mantari и остали	0.506	0.539	0.304	0.023	0.123	0.282
	0.503	0.537	0.302	0.023	0.116	0.252
Karama и остали, Aydogdu	0.509	0.541	0.305	0.023	0.131	0.316
Mantari и остали	0.509	0.541	0.306	0.023	0.131	0.318
Viola и остали, El Meiche и остали	0.509	0.541	0.306	0.023	0.131	0.318
Soldatos	0.506	0.539	0.304	0.023	0.123	0.281
Mantari и остали	0.510	0.542	0.306	0.023	0.123	0.281
Akavci и Tanrikulu	0.502	0.538	0.302	0.023	0.110	0.237
Akavci и Tanrikulu	0.507	0.540	0.305	0.023	0.126	0.294
Grover и остали	0.482	0.529	0.292	0.022	0.090	0.149
Mechab и остали	0.506	0.539	0.304	0.023	0.124	0.284

Табела 5.6. Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и $a/h = 20$ и усвојен материјал 2

Име аутора	a/h=100					
	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xz}$
Ambartsumain	0.434	0.539	0.271	0.021	0.112	0.290
Kaczkowski, Panc и Reissner	0.434	0.539	0.271	0.021	0.112	0.290
Levy, Stein, Touratier	0.434	0.539	0.271	0.021	0.115	0.307
Mantari и остали	0.435	0.539	0.270	0.021	0.127	0.372
Viola и остали	0.433	0.538	0.271	0.021	0.063	0.089
Mantari и остали	0.434	0.539	0.271	0.021	0.111	0.289
	0.434	0.539	0.271	0.021	0.106	0.258
Karama и остали, Aydogdu	0.434	0.539	0.271	0.021	0.118	0.325
Mantari и остали	0.434	0.539	0.271	0.021	0.119	0.326
Viola и остали, El Meiche и остали	0.434	0.539	0.271	0.021	0.119	0.326
Soldatos	0.434	0.539	0.271	0.021	0.111	0.288

Mantari и остали	0.434	0.539	0.271	0.021	0.123	0.350
Akavci и Tanrikulu	0.434	0.539	0.271	0.021	0.100	0.242
Akavci и Tanrikulu	0.434	0.539	0.271	0.021	0.114	0.302
Grover и остали	0.433	0.538	0.270	0.021	0.085	0.151
Mechab и остали	0.434	0.539	0.271	0.021	0.112	0.291

Табела 5.7. Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и $a/h = 100$ и усвојен материјал 2

Бездимензиона форма вектора напона:

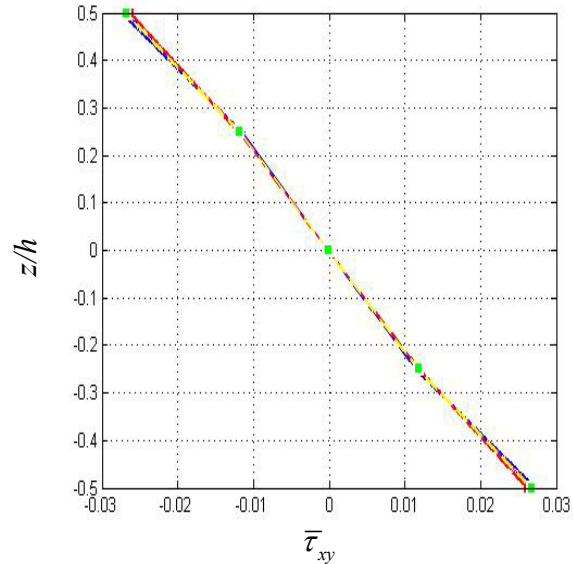
$$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}(x = a/2, y = b/2, z = \pm h/2) \left(\frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}(x = a/2, y = b/2, z = \pm h/2) \left(\frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

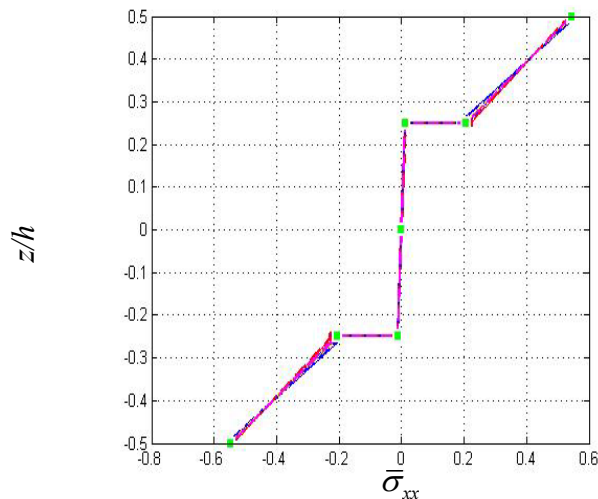
$$\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}(x = 0, y = 0, z = \pm h/2) \left(\frac{h^2}{b^2 q_0} \right)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz}(x = 0, y = 0, z = \pm h/2) \left(\frac{h}{b q_0} \right)$$

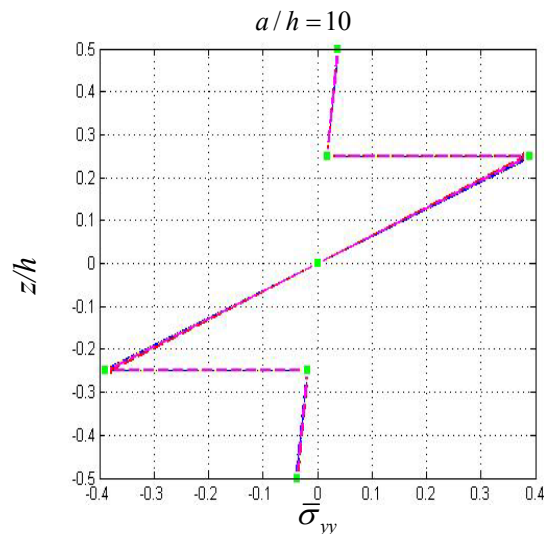
$$\bar{\tau}_{yz} = \tau_{yz}(x = 0, y = 0, z = \pm h/2) \left(\frac{h}{b q_0} \right)$$



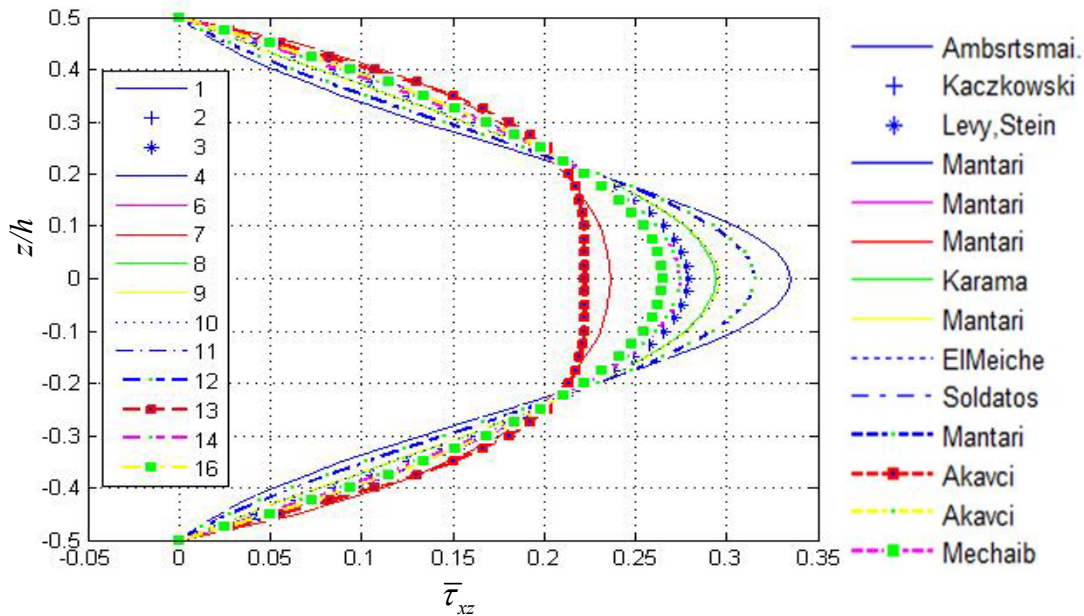
Слика 5.3. Дијаграми нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{xy}$ у зависности од односа z/h , а при односу



Слика 5.4. Дијаграми нормализованих вредности напона $\bar{\sigma}_{xx}$ у зависности од односа z/h , а при фиксираној вредности $a/h = 10$

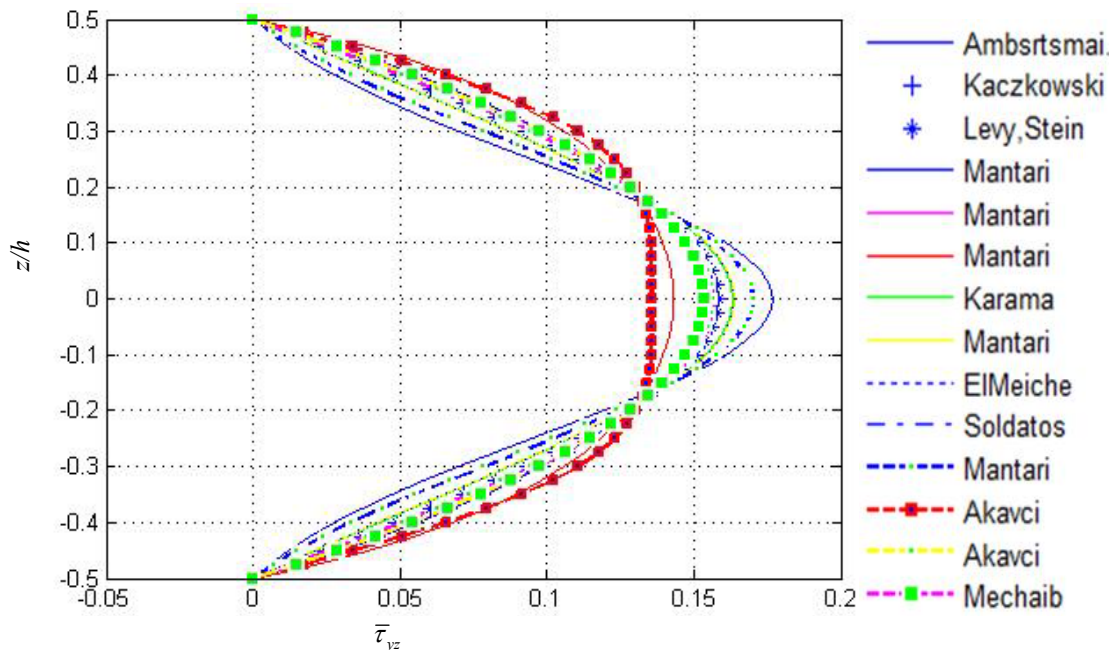


Слика 5.5. Дијаграми нормализованих вредности напона $\bar{\sigma}_{yy}$ у зависности од односа z/h , а при фиксираној вредности $a/h = 10$



Слика 5.6. Дијаграми максималних нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{xz}$ у зависности од односа a/h , а при фиксираној вредности $a/h = 10$

Треба нагласити да смицајне деформационе теорије не обезбеђују континуалност напона. На сликама 5.4 и 5.5 јасно је изражен дисконтинуитет нормализованих вредности нормалних напона $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$ на међуслојевима. У дијаграмима смицајних напона нема тако јасно изражених дисконтинуитета, па је из тог разлога, као из техничких разлога да се употреби што већи број тачака за креирање кривих, на сликама 5.6 и 5.7 дат приказ максималних нормализованих вредности напона.



Слика 5.7. Дијаграми максималних нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{yz}$ у зависности од односа a/h , а при фиксираној вредности $a/h = 10$

5.2.2 Примена смицајне деформационе теорије трећег реда уведене од стране Канта у анализи савијања симетричних укрштених композитних ламината

За разлику од претпостављених поља померања HSDT теорије заснованих на функцијама облика, код којих је померање $w = w_0$, Тарун Кант је претпоставио да је померање w кубна функција координате z . Самим тим ово померање на врху ламината за $z = \frac{h}{2}$, а гледано у односу на средњу равну плоче је облика:

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + \frac{h}{2} \theta_z(x, y, t) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 w_0^*(x, y, t) + \left(\frac{h}{2}\right)^3 \theta_z^*(x, y, t) \quad (5.13)$$

За овако дефинисано померање w и синусоидално оптерећење F_z , дефинисано једначином (5.8), једначине равнотеже (4.51), са уведеним синусоидалним оптерећењем, сада добијају облик:

$$\begin{aligned} \delta u_0: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, & \delta u_0^*: \frac{\partial N_x^*}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} - 2S_x &= 0, \\ \delta v_0: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, & \delta v_0^*: \frac{\partial N_y^*}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} - 2S_y &= 0, \\ \delta w_0: \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z &= 0, & \delta w_0^*: \frac{\partial Q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^*}{\partial y} - 2M_z^* + \frac{h^2}{4} F_z &= 0, \\ \delta \theta_x: \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, & \delta \theta_x^*: \frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y} - 3Q_x^* &= 0, \\ \delta \theta_y: \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0, & \delta \theta_y^*: \frac{\partial M_y^*}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} - 3Q_y^* &= 0, \\ \delta \theta_z: \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial x} - N_z + \frac{h}{2} F_z &= 0, & \delta \theta_z^*: \frac{\partial S_x^*}{\partial x} + \frac{\partial S_y^*}{\partial x} - 3N_z^* + \frac{h^3}{8} F_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Даље се усвајају контурни услови за слободно ослођену плочу, као у [52], у облику:

$$\left. \begin{aligned} v_0 = w_0 = \theta_y = \theta_z = M_x = N_x = 0, \\ v_0^* = w_0^* = \theta_y^* = \theta_z^* = M_x^* = N_x^* = 0. \end{aligned} \right\} \text{на ивицама код којих је } x = 0 \text{ odnosno } x = a, \quad (5.15)$$

$$\left. \begin{aligned} u_0 = w_0 = \theta_x = \theta_z = M_y = N_y = 0, \\ u_0^* = w_0^* = \theta_x^* = \theta_z^* = M_y^* = N_y^* = 0. \end{aligned} \right\} \text{на ивицама код којих је } y = 0 \text{ odnosno } y = b.$$

Облици аналитичких решења, које је Кант дефинисао у свом раду, а који се појављују као резултат уведених граничних услова датих једначином (5.15) су:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, & u_0^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}^* \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, & v_0^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, & w_0^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
\theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, & \theta_x^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn}^* \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\
\theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, & \theta_y^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\
\theta_z(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{zmn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, & \theta_z^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{zmn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned}$$

Ако се овако уведени претпостављени облици решења замене у једначини (5.14), ове једначине добијају облик:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,3} & L_{1,4} & L_{1,5} & L_{1,6} & L_{1,7} & L_{1,8} & L_{1,9} & L_{1,10} & L_{1,11} & L_{1,12} \\ L_{1,2} & L_{2,2} & L_{2,3} & L_{2,4} & L_{2,5} & L_{2,6} & L_{2,7} & L_{2,8} & L_{2,9} & L_{2,10} & L_{2,11} & L_{2,12} \\ L_{1,3} & L_{2,3} & L_{3,3} & L_{3,4} & L_{3,5} & L_{3,6} & L_{3,7} & L_{3,8} & L_{3,9} & L_{3,10} & L_{3,11} & L_{3,12} \\ L_{1,4} & L_{2,4} & L_{3,4} & L_{4,4} & L_{4,5} & L_{4,6} & L_{4,7} & L_{4,8} & L_{4,9} & L_{4,10} & L_{4,11} & L_{4,12} \\ L_{1,5} & L_{2,5} & L_{3,5} & L_{4,5} & L_{5,5} & L_{5,6} & L_{5,7} & L_{5,8} & L_{5,9} & L_{5,10} & L_{5,11} & L_{5,12} \\ L_{1,6} & L_{2,6} & L_{3,6} & L_{4,6} & L_{5,6} & L_{6,6} & L_{6,7} & L_{6,8} & L_{6,9} & L_{6,10} & L_{6,11} & L_{6,12} \\ L_{1,7} & L_{2,7} & L_{3,7} & L_{4,7} & L_{5,7} & L_{6,7} & L_{7,7} & L_{7,8} & L_{7,9} & L_{7,10} & L_{7,11} & L_{7,12} \\ L_{1,8} & L_{2,8} & L_{3,8} & L_{4,8} & L_{5,8} & L_{6,8} & L_{7,8} & L_{8,8} & L_{8,9} & L_{8,10} & L_{8,11} & L_{8,12} \\ L_{1,9} & L_{2,9} & L_{3,9} & L_{4,9} & L_{5,9} & L_{6,9} & L_{7,9} & L_{8,9} & L_{9,9} & L_{9,10} & L_{9,11} & L_{9,12} \\ L_{1,10} & L_{2,10} & L_{3,10} & L_{4,10} & L_{5,10} & L_{6,10} & L_{7,10} & L_{8,10} & L_{9,10} & L_{10,10} & L_{10,11} & L_{10,12} \\ L_{1,11} & L_{2,11} & L_{3,11} & L_{4,11} & L_{5,11} & L_{6,11} & L_{7,11} & L_{8,11} & L_{9,11} & L_{10,11} & L_{11,11} & L_{11,12} \\ L_{1,12} & L_{2,12} & L_{3,12} & L_{4,12} & L_{5,12} & L_{6,12} & L_{7,12} & L_{8,12} & L_{9,12} & L_{10,12} & L_{11,12} & L_{12,12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \\ T_{zmn} \\ U_{mn}^* \\ V_{mn}^* \\ W_{mn}^* \\ T_{xmn}^* \\ T_{ymn}^* \\ T_{zmn}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{h}{2}\right)F_z \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{h^2}{4}\right)F_z \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{h^3}{8}\right)F_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_p} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

При чему су коефицијенти $L_{i,j}$ ($i, j = 1 \div 12$) дефинисани као:

$$\begin{aligned}
L_{1,1} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{44}, & L_{3,6} &= \alpha^2 B_{55} + \beta^2 B_{66}, & L_{6,8} &= -\beta(D_{23} - 2D_{66}), \\
L_{1,2} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{44}), & L_{3,7} &= 2B_{55}\alpha, & L_{6,9} &= \alpha^2 E_{55} + \beta^2 E_{66} + 2B_{33}, \\
L_{1,3} &= 0, & L_{3,8} &= 2B_{66}\beta, & L_{6,10} &= -\alpha(E_{13} - 3E_{55}), \\
L_{1,4} &= \alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{44}, & L_{3,9} &= \alpha^2 D_{55} + \beta^2 D_{66}, & L_{6,11} &= -\beta(E_{23} - 3E_{66}), \\
L_{1,5} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{44}), & L_{3,10} &= 3D_{55}\alpha, & L_{6,12} &= \alpha^2 F_{55} + \beta^2 F_{66} + 3D_{33}, \\
L_{1,6} &= -\alpha A_{13}, & L_{3,11} &= 3D_{66}\beta, & L_{7,7} &= \alpha^2 F_{11} + \beta^2 F_{44} + 4D_{55}, \\
L_{1,7} &= \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{44}, & L_{3,12} &= \alpha^2 E_{55} + \beta^2 E_{66}, & L_{7,8} &= \alpha\beta(F_{12} + F_{44}),
\end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
L_{1,8} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{44}), & L_{4,4} &= \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{44} + A_{55}, & L_{7,9} &= -2\alpha(E_{13} - E_{55}), \\
L_{1,9} &= -2\alpha B_{13}, & L_{4,5} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{44}), & L_{7,10} &= \alpha^2 G_{11} + \beta^2 G_{44} + 6E_{55}, \\
L_{1,10} &= \alpha^2 E_{11} + \beta^2 E_{44}, & L_{4,6} &= -\alpha(B_{13} - B_{55}), & L_{7,11} &= \alpha\beta(G_{12} + G_{44}), \\
L_{1,11} &= \alpha\beta(E_{12} + E_{44}), & L_{4,7} &= \alpha^2 E_{11} + \beta^2 E_{44} + 2B_{55}, & L_{7,12} &= -\alpha(3F_{13} - 2F_{55}), \\
L_{1,12} &= -3D_{13}\alpha, & L_{4,8} &= \alpha\beta(E_{12} + E_{44}), & L_{8,8} &= \alpha^2 F_{44} + \beta^2 F_{22} + 4D_{66}, \\
L_{2,2} &= \alpha^2 A_{44} + \beta^2 A_{22}, & L_{4,9} &= -\alpha(2D_{13} - D_{55}), & L_{8,9} &= -2\beta(E_{23} - E_{66}), \\
L_{2,3} &= 0, & L_{4,10} &= \alpha^2 F_{11} + \beta^2 F_{44} + 3D_{55}, & L_{8,10} &= \alpha\beta(G_{12} + G_{44}), \\
L_{2,4} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{44}), & L_{4,11} &= \alpha\beta(F_{12} + F_{44}), & L_{8,11} &= \alpha^2 G_{44} + \beta^2 G_{22} + 6E_{66}, \\
L_{2,5} &= \alpha^2 B_{44} + \beta^2 B_{22}, & L_{4,12} &= -\alpha(3E_{13} - E_{55}), & L_{8,12} &= -\beta(3F_{23} - 2F_{66}), \\
L_{2,6} &= -A_{23}\beta, & L_{5,5} &= \alpha^2 D_{44} + \beta^2 D_{22} + A_{66}, & L_{9,9} &= \alpha^2 F_{66} + \beta^2 F_{66} + 4F_{33}, \\
L_{2,7} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{44}), & L_{5,6} &= -\beta(B_{23} - B_{66}), & L_{9,10} &= \alpha(3F_{55} - 2H_{13}), \\
L_{2,8} &= \alpha^2 D_{44} + \beta^2 D_{22}, & L_{5,7} &= \alpha\beta(E_{12} + E_{44}), & L_{9,11} &= \beta(3F_{66} - 2H_{23}), \\
L_{2,9} &= -2B_{23}\beta, & L_{5,8} &= \alpha^2 E_{44} + \beta^2 E_{22} + 2B_{66}, & L_{9,12} &= \alpha^2 G_{55} + \beta^2 G_{66} + 6G_{33}, \\
L_{2,10} &= \alpha\beta(E_{12} + E_{44}), & L_{5,9} &= -\beta(2D_{23} - D_{66}), & L_{10,10} &= \alpha^2 H_{11} + \beta^2 H_{44} + 9F_{55}, \\
L_{2,11} &= \alpha^2 E_{44} + \beta^2 E_{22}, & L_{5,10} &= \alpha\beta(F_{12} + F_{44}), & L_{10,11} &= \alpha\beta(H_{12} + H_{44}), \\
L_{2,12} &= -3D_{23}\beta, & L_{5,11} &= \alpha^2 F_{44} + \beta^2 F_{22} + 3D_{66}, & L_{10,12} &= -3\alpha(G_{13} - G_{55}), \\
L_{3,3} &= \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{66}, & L_{5,12} &= -\beta(3E_{23} - E_{66}), & L_{11,11} &= \alpha^2 H_{44} + \beta^2 H_{22} + 9F_{66}, \\
L_{3,4} &= A_{55}\alpha, & L_{6,6} &= \alpha^2 D_{55} + \beta^2 D_{66} + A_{33}, & L_{11,12} &= -3\beta(G_{23} - G_{66}), \\
L_{3,5} &= A_{66}\beta, & L_{6,7} &= -\alpha(D_{13} - 2D_{55}), & L_{12,12} &= \alpha^2 H_{55} + \beta^2 H_{66} + 9F_{33}.
\end{aligned}$$

Даље се, аналогно једначинама (5.10) и (5.12), добијају амплитуде претпостављених облика померања. Поступак за добијање бездимензионих вредности померања \bar{w} , и бездимензионих напона $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$, $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\tau}_{yz}$ одговара поступку описаном у претходном поглављу. Резултати примене ове деформационе теорије дати су у табели 5.8.

Ако се анализирају резултати добијени применом деформационих теорија заснованих на функцијама облика, може се уочити велико поклапање добијених вредности са вредностима из табеле 5.8. Одступања ове теорије у односу на вредности добијене 3D еластичном теоријом, поменутом у претходном одељку, су доста слична у односу на HSDT теорије засноване на функцијама облика.

Претходно смо видели да одступање резултата добијених теоријама заснованих на функцијама облика уведеним од стране Караме и осталих за померање \bar{w} , при односу $a/h = 4$, износи 1.7% , док је за остале функције облика то одступање износило до 3.5% . Код ове теорије то одступање је у границама између претходно поменутих одступања и износи 3.1% . При великим односима, $a/h = 100$, ова одступања су идентична одступањима HSDT теорија.

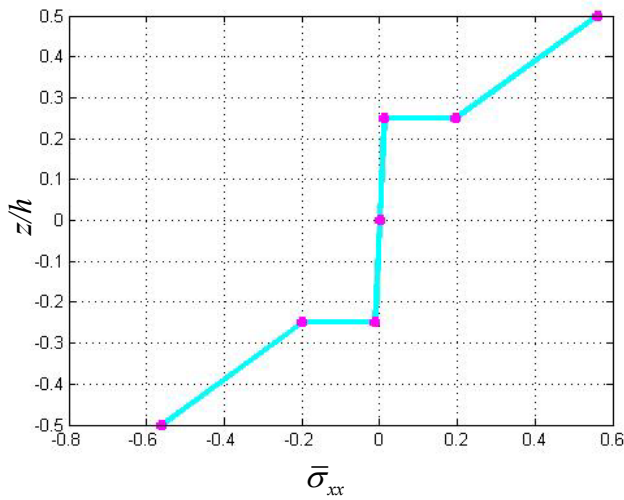
Такође, треба нагласити да је уочено доста мало одступање вредности напона. Тако, на пример, грешка одступања напона $\bar{\sigma}_{xx}$ од 3D еластичног решења износи 0.04%. Треба нагласити да су за све израчунаване величине одступања у опсегу дозвољених вредности. За разлику од оригиналног рада [52], овде су приказане и вредности смицајних напона које имају такође одлична поклапања са резултатима датим у [88], [79], али не задовољавају нулте напонске услове у дијаграмима смицајних напона, па је из тог разлога изостављен њихов приказ у оригиналном раду.

a/h	Тип ламината	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xz}$
4	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	1.906	0.787	0.488	0.0486	0.182	0.206
	$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	1.895	0.723	0.625	0.0451	0.246	0.213
10	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	0.716	0.584	0.269	0.0280	0.103	0.262
	$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	0.720	0.560	0.390	0.0273	0.160	0.284
20	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	0.505	0.550	0.205	0.0231	0.0183	0.276
	$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	0.508	0.543	0.305	0.0230	0.128	0.3066
50	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	0.443	0.541	0.184	0.0216	0.0744	0.280
	$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	0.444	0.539	0.275	0.0216	0.117	0.314
100	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	0.434	0.539	0.181	0.0214	0.0734	0.281
	$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	0.434	0.539	0.271	0.0214	0.115	0.315

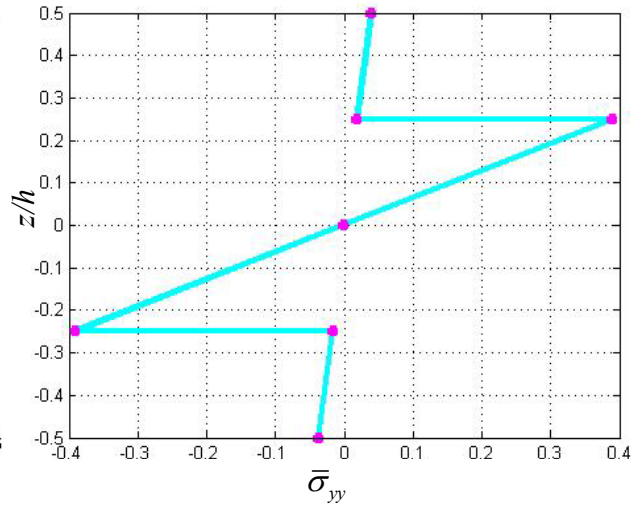
Табела 5.8. Бездимензионе вредности напона и померања при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и усвојен материјал 2

На сликама 5.8-5.12 је дат дијаграмски приказ расподеле максималних нормализованих вредности нормалних и смицајних напона по дебљини укрштеног симетричног ламината $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$.

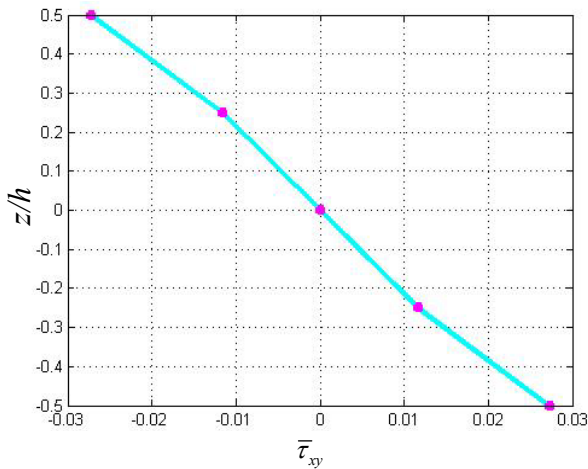
Поређењем са дијаграмима на сликама 5.3-5.7 јасно се може уочити да је распоред свих напона, доста сличан распоредима напона добијеним применом HSDT теорија, заснованих на функцијама облика. Такође је уочљиво да се максималне вредности смицајних напона налазе у опсегу максималних вредности истих напона на дијаграмима 5.6 и 5.7. Из свега наведеног није тешко закључити да постоји потпуно оправдање за употребу ове теорије трећег реда, јер се добијају доста прецизни резултати, а сам математички поступак није превише захтеван због полиномних функција у оквиру поља померања.



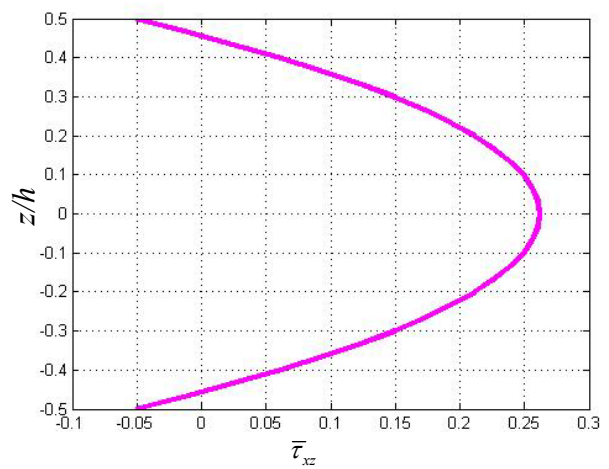
Слика 5.8. Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\sigma}_{xx}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h = 10$



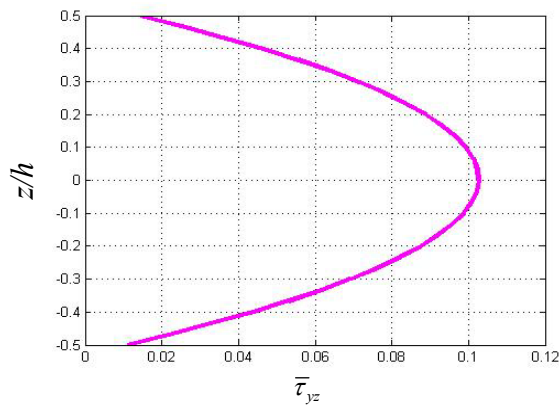
Слика 5.9. Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\sigma}_{yy}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h = 10$



Слика 5.10. Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{xy}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h = 10$



Слика 5.11. Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{xz}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h = 10$



Слика 5.12. Дијаграми зависности максималних нормализованих вредности напона $\bar{\tau}_{yz}$ у функцији односа z/h , а при односу $a/h = 10$

5.3 Примена аналитичких метода у анализи слободних вибрација симетричних композитних ламината (*free vibration analyses*)

Поступак примене аналитичких метода у анализи слободних вибрација ламинатних плоча доста је сличан поступцима примене ових метода код савијања и извијања. Као и код поменутих проблема избор деформационе теорије у многоме утиче на сам аналитички метод за добијање вредности бездимензионе фреквенције осциловања ламинатне плоче. Број независно променљивих које се појављују у матричној анализи ламината (погледати поглавље 3) зависи од броја независно променљивих у претпостављеним облицима померања. У оквиру ове дисертације развијени су кодови у програмском пакету Матлаб за извођење симболичких једначина анализе слободних вибрација за различите типове деформационих теорија. Анализирани су проблеми укрштених и умрежених, симетричних и антисиметричних слободно ослоњених композитних ламинатних плоча. Претпостављени облици решења и контурни услови су усвојени у складу са Навијеовим облицима решења претпостављеним у радовима [79], [52]. Такође је имплементирана процедура добијања резултата комбинацијом симболичких и бројних вредности коефицијената који егзистирају у проблемима ове анализе. Слично као и код статичке анализе и овде је анализа слободних вибрација вршена само на основу HSDT теорија. За верификацију резултата коришћене су добијене вредности у радовима [88], [153].

5.3.1 Примена HSDT заснованих на смицајним функцијама облика у анализи слободних вибрација симетричних укрштених композитних ламината

У оквиру овог поглавља вршена је анализа слободних вибрација симетричних укрштених ламината. Проблемима ове анализе бавили су се аутори у радовима [53], [59], [60], [65], [80], [153]. Аналогно поступку дефинисаном у 5.1.1 усваја се облик претпостављеног поља померања дефинисан једначином (2.6). За овако дефинисан облик поља померања компоненте деформације су дефинисане једначином (2.7), а једначине кретања једначином (4.55). Конститутивне матрице као и у претходном поглављу добијају се коришћењем једначинама (1.74) односно (1.77), респективно. Ако се у једначине кретања уврсте једначина (5.2) и једначина (5.3) помножена са $e^{i\omega t}$ (Навијеов облик решења за динамичке проблеме) добија се:

$$\left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ L_{15} & L_{25} & L_{35} & L_{45} & L_{55} \end{array} \right] \\ \mathbf{L} \end{array} \right\} - \omega^2 \left\{ \begin{array}{ccccc} I_1 & 0 & -\alpha I_2 & I_4 & 0 \\ 0 & I_4 & -\beta I_2 & 0 & I_4 \\ -\alpha I_2 & -\beta I_2 & I_3(\alpha^2 + \beta^2) + I_1 & -\alpha I_5 & -\beta I_5 \\ I_4 & 0 & -\alpha I_5 & I_6 & 0 \\ 0 & I_4 & -\beta I_5 & 0 & I_6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

где је $\alpha = \frac{m\pi}{a}$, $\beta = \frac{n\pi}{b}$. Коефицијенти L_{ij} , ($i, j = 1 \div 5$) су једнаки коефицијентима датим у једначини (5.6). За добијање нетривијалних решења једначине (5.19) потребно је да детерминанта прве матрице у производу буде једнака нули, односно да је:

$$|\mathbf{L} - \omega^2 \mathbf{I}| = 0 \quad (5.20)$$

За приказ добијених бројних вредности у складу са [84], код правоугаоне ламинатне плоче, која се састоји од слојева чија је конститутивна матрица дефинисана преко инжењерских константи, неопходно је нормализовати добијене вредности у складу са $\bar{\omega} = \omega \frac{ab}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$. На тај

начин добија се бездимензиона вредност фреквенције која за $m=1, n=1$, одговара првом моду осциловања. Као што је већ поменуто, резултати су добијени у програмском пакету Матлаб. Вредности инжењерских константи за материјале 1 и 2 дате су у поглављу 5.1. Као и код проблема извијања, за уоквирене функције у табелама могуће је наћи експлицитну вредност интеграла, док је за остале функције неопходно користити нумеричке поступке за одређивање вредности одређених интеграла. Узимајући у обзир претходно поменуто чињеницу треба нагласити да овде не говоримо о чисто аналитичким методама, већ користимо, мада у мањој мери, и нумеричке методе.

Име аутора	$E_1 / E_2 \quad m=1, n=1$				
	3	5	10	20	50
Ambartsumain	6.585	7.233	8.375	9.699	11.421
Kaczkowski, Panc i Reissner	6.585	7.233	8.375	9.699	11.421
Levy, Stein, Touratier	6.587	7.238	8.385	9.717	11.449
Mantari и остали	6.613	7.277	8.460	9.848	11.663
Viola и остали	6.793	7.509	8.816	10.420	12.709
Mantari и остали	6.585	7.234	8.374	9.699	11.42
	6.585	7.231	8.366	9.683	11.400
Karama и остали, Aydogdu	6.592	7.245	8.399	9.743	11.494
Mantari и остали	6.592	7.246	8.400	9.746	11.494
Viola i ostali, El Meiche и остали	6.592	7.246	8.400	9.746	11.449
Soldatos	6.585	7.233	8.374	9.698	11.419
Mantari и остали	6.676	7.349	8.548	9.969	11.899
Akavci i Tanrikulu	6.587	7.232	8.367	9.683	11.409
Akavci i Tanrikulu	6.729	7.445	8.762	10.37	12.606
Grover и остали	6.673	7.344	8.540	9.957	11.876
Mechab и остали	6.585	7.233	8.375	9.700	11.423

Табела 5.9. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричног укрштеног ламината $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ при променљивом односу E_1/E_2 , фиксираним односу $a/h=5$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

За усвојене вредности инжењерских константи и уграђене функције облика дефинисане у табели 2.1 добијени су вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ дате у табелама 5.9-5.12.

У табелама 5.9 и 5.10 дате су бездимензионе вредности првог мода осциловања, ламинатних плоча $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ и $[0^0/90^0/0^0]$, за различите вредности односа E_1/E_2 , при фиксираном односу a/h . Уочљиво је да је за све предложене функције облика могуће добити решење за бездимензиону фреквенцију $\bar{\omega}$. Разлике у добијеним вредностима уз помоћ различитих функција облика расту са порастом односа E_1/E_2 , што се најјасније види код функције облика коју су предложили Виола и остали. Начелно, поступак који је имплементиран у Матлаб даје добро поклапање са вредностима приказаним у радовима аутора који су се бавили овом проблематиком [52], [153],[158], [80].

Име аутора	$E_1/E_2 \quad m=1, n=1$				
	3	5	10	20	50
Ambartsumain	7.244	8.111	9.804	12.090	15.670
Kaczkowski, Panc i Reissner	7.244	8.111	9.804	12.090	15.670
Levy, Stein, Touratier	7.245	8.113	9.809	12.102	15.703
Mantari и остали	7.245	8.130	9.846	12.187	15.920
Viola и остали	7.316	8.218	10.012	12.524	16.705
Mantari и остали	7.244	8.111	9.804	12.090	15.669
	7.244	8.110	9.800	12.079	15.636
Karama и остали, Aydogdu	7.247	8.116	9.816	12.119	15.747
Mantari и остали	7.247	8.117	9.817	12.121	15.752
Viola i ostali, El Meiche и остали	7.247	8.117	9.817	12.121	15.752
Soldatos	7.244	8.111	9.803	12.089	15.668
Mantari и остали	7.276	8.157	9.888	12.258	16.045
Akavci i Tanrikulu	7.244	8.110	9.798	12.075	15.624
Akavci i Tanrikulu	7.266	8.148	9.885	12.274	16.142
Grover и остали	7.275	8.155	9.885	12.251	16.026
Mechab и остали	7.244	8.111	9.804	12.091	15.673

Табела 5.10. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/0^0]$ при променљивом односу E_1/E_2 , фиксираном односу $a/h=10$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

У табелама 5.11 и 5.12 дате су вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричних укрштених ламинатних плоча $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ и $[0^0/90^0/0^0]$, при променљивом односу a/h и фиксираним односу E_1/E_2 . Код дебелих и умерено дебелих плоча, код којих је $a/h < 20$ израженија су одступања у вредностима бездимензионе фреквенције. Велика одступања су примећена код функција дефинисаних од стране Виоле и осталих, Гровера и осталих, Мантарија и осталих, па се може рећи да су ове функције неприменљиве на ову врсту проблема. Код танких плоча код којих је $a/h \geq 50$ уочљиво је да све теорије дају резултате који се поклапају у две децимале, што је у складу са чињеницом да се утицај HSDT теорија смањује са повећањем односа a/h .

Име аутора	a/h $m=1, n=1$				
	2	4	10	50	100
Ambartsumain	5.588	9.522	15.328	18.691	18.840
Kaczkowski, Panc i Reissner	5.333	9.522	15.329	18.691	18.840
Levy, Stein, Touratier	5.618	9.545	15.352	18.693	18.841
Mantari и остали	5.82	9.734	15.504	18.705	18.844
Viola и остали	6.67	10.711	16.030	18.740	18.853
Mantari и остали	5.587	9.522	15.328	18.691	18.840
	5.557	9.505	15.303	18.689	18.840
Karama и остали, Aydogdu	5.659	9.581	15.383	18.695	18.842
Mantari и остали	5.664	9.585	15.386	18.696	18.842
Viola и остали, El Meiche и остали	5.664	9.585	15.386	18.696	18.842
Soldatos	5.586	9.520	15.327	18.691	18.840
Mantari и остали	5.927	9.96	15.583	18.709	18.845
Akavci и Tanrikulu	5.578	9.517	15.299	18.688	18.840
Akavci и Tanrikulu	6.64	10.580	16.056	18.744	18.854
Grover и остали	5.908	9.94	15.570	18.708	18.854
Mechab и остали	5.590	9.524	15.330	18.691	18.8414

Табела 5.11. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ при променљивом односу a/h , фиксираним односу $E_1/E_2 = 40$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

Име аутора	a/h $m=1, n=1$
------------	----------------

	2	4	10	50	100
Ambartsumain	4.432	7.370	12.068	15.044	15.181
Kaczkowski, Panc i Reissner	4.432	7.370	12.068	15.044	15.181
Levy, Stein, Touratier	4.491	7.434	12.122	15.048	15.182
Mantari и остали	4.794	7.753	12.386	15.068	15.187
Viola и остали	4.765	7.627	12.207	15.054	15.184
Mantari и остали	4.430	7.368	12.067	15.044	15.181
	4.342	7.268	11.978	15.037	15.179
Karama и остали, Aydogdu	4.561	7.509	12.182	15.053	15.183
Mantari и остали	4.569	7.517	12.188	15.054	15.184
Viola и остали, El Meiche и остали	4.427	7.517	12.188	15.054	15.184
Soldatos	4.391	7.364	12.064	15.043	15.181
Mantari и остали	4.329	7.292	11.973	15.036	15.179
Akavci i Tanrikulu	5.070	7.230	11.936	15.033	15.178
Akavci i Tanrikulu	4.383	8.021	12.540	15.081	15.191
Grover и остали	4.383	7.285	11.969	15.035	15.179
Mechab и остали	4.437	7.375	12.072	15.044	15.181

Табела 5.12. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричног укрштеног ламината $[0^0/90^0/0^0]$ при променљивом односу a/h , фиксираним односу $E_1/E_2 = 25$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 2

5.3.2 Примена HSDT заснованих на смицајним функцијама облика у анализи слободних вибрација антисиметричних умрежених композитних ламината

Код антисиметричних умрежених композитних ламината облици матрица спрезања A , B , D , E , F , G , H се разликују у односу на облике ових матрица код симетричних укрштених ламината и приказани су у једначинама (5.21).

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{16} \\ 0 & 0 & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & 0 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{12} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{44} & 0 \\ 0 & H_{55} \end{bmatrix};
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Контурни услови за слободно ослоњену ламинатну плочу приказану на слици 5.1, који се могу применити на ову врсту ламината, дати су у [88]:

$$\begin{aligned}
u_0 = w_0 = \theta_y = N_{xy} = M_x = 0, \text{ на ивицама код којих је } x = 0 \text{ odnosno } x = a, \\
v_0 = w_0 = \theta_x = N_y = M_y = 0, \text{ на ивицама код којих је } y = 0 \text{ odnosno } y = b,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

У складу са овако усвојеним контурним условима, такође у [88] дати су и претпостављени облици Навијеових решења као:

$$\begin{aligned}
u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\
v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\
w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\
\theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\
\theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Ако се погледа претпостављени облик Навијеових решења дат једначином (5.23), може се уочити да је једина разлика између ових облика и облика датих једначином (5.3), у претпостављеним облицима за u_0 и v_0 . Аналогно поступку за симетричне укрштене ламинате добијају се једначине:

$$\left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ L_{15} & L_{25} & L_{35} & L_{45} & L_{55} \end{array} \right] \\ \mathbf{L} \end{array} \right\} - \omega^2 \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} I_1 & 0 & -\alpha I_2 \Delta_2 & I_4 \Delta_2 & 0 \\ 0 & I_4 & -\beta I_2 \Delta_1 & 0 & I_4 \Delta_1 \\ \alpha I_2 \Delta_1 & \beta I_2 \Delta_2 & -I_3(\alpha^2 + \beta^2) + I_1 & -\alpha I_5 & -I_5 \beta \\ I_4 & 0 & -\alpha I_5 & I_6 & 0 \\ 0 & I_4 \Delta_2 & -\beta I_5 & 0 & I_6 \end{array} \right] \\ \mathbf{I} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \tag{5.24}$$

где је $\Delta = ctg(\alpha x)ctg(\beta y)$, $\Delta_1 = tg(\alpha x)/tg(\beta y)$, $\Delta_2 = tg(\beta x)/tg(\alpha y)$, док су коефицијенти матрице \mathbf{L} облика:

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, L_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), L_{13} = -3B_{16}\alpha^2\beta - B_{26}\beta^3, L_{14} = 2D_{16}\alpha\beta, \\
L_{15} &= \alpha^2 D_{16} + \beta^2 D_{26}, L_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, L_{23} = -B_{16}\alpha^3 - 3B_{26}\alpha\beta^2, \\
L_{24} &= \alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26}, L_{25} = 2\alpha\beta E_{26}, L_{33} = \alpha^4 E_{11} + 2\alpha^2\beta^2 E_{12} + 4\alpha^2\beta^2 E_{66} + \beta^4 E_{22}, \\
L_{34} &= -\alpha^3 F_{11} - \alpha\beta^2 F_{12} - 2\alpha\beta^2 F_{66}, L_{35} = -\alpha^2\beta F_{12} - 2\alpha^2\beta F_{66} - \beta^3 F_{22}, \\
L_{44} &= H_{44} + \alpha^2 G_{11} + \beta^2 G_{66}, L_{45} = \alpha\beta(G_{12} + G_{66}), L_{55} = H_{55} + \alpha^2 G_{66} + \beta^2 G_{22}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Име аутора	a/h m=1, n=1				
	2	4	10	50	100
Ambartsumain	5.133	9.988	17.931	23.053	23.291
Kaczkowski, Panc i Reissner	/	/	/	/	/
Levy, Stein, Touratier	5.213	10.02	17.934	23.053	23.291
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Viola и остали	5.989	11.748	19.424	23.168	23.321
Mantari и остали	5.131	9.987	17.931	23.053	23.291
	/	/	/	/	/
Karama и остали, Aydogdu	5.309	10.078	17.949	23.054	23.291
Mantari и остали	5.321	10.084	17.951	23.054	23.291
Viola и остали, El Meiche и остали	5.321	10.084	17.951	23.054	23.292
Soldatos	5.126	9.985	17.931	23.054	23.292
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Akavci i Tanrikulu	4.999	9.96	17.968	23.058	23.293
Akavci i Tanrikulu	8.732	13.233	17.740	23.180	23.324
Grover и остали	/	/	/	/	/
Mechab и остали	5.139	9.990	17.931	23.053	23.292

Табела 5.13. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 30^\circ$ при променљивом односу a/h , фиксираним односу $E_1/E_2 = 40$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

Из табела 5.13-5.18, јасно је уочљиво да све приказане функције облика нису применљиве код анализе слободних вибрација антисиметричних умрежених композитних ламината. Ако се погледају дијаграми функција облика дати на сликама 2.6-2.8, јасно је да се задовољавајући резултати у поређењу са резултатима датим у [153] добијају коришћењем функција чији облик остаје непроменљив у зависности од усвојене дебљине h . Поред чињенице да

употребом сваке од функција из табеле није могуће добити решење за бездимензиону фреквенцију, може се приметити да код дебелих и умерено дебелих плоча, и међу функцијама облика помоћу којих је могуће добити решење, постоји велики број оних чијом употребом се не добијају задовољавајућа решења, што је у складу са чињеницом да све функције облика нису примењиве на све типове макромеханичке анализе ламинатних плоча. Као закључак свега описаног можемо рећи да већ код проблема слободних вибрација у начелном одабиру идеалне функције облика велики број функција не може да се примени. Област примене се сужава на проблем слободних вибрација плоча код којих је мали однос E_1/E_2 за тачно фиксиран однос a/h . При односима $E_1/E_2 \geq 40$ вредности добијених резултата почињу све више да се разликују.

Име аутора	$a/h \quad m=1, n=1$				
	2	4	10	50	100
Ambartsumain	5.277	10.401	18.925	24.480	24.739
Kaczkowski, Panc i Reissner	/	/	/	/	/
Levy, Stein, Touratier	5.365	10.441	18.929	24.479	24.739
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Viola и остали	6.169	12.288	20.545	24.605	24.771
Mantari и остали	5.275	10.400	18.926	24.408	24.793
	/	/	/	/	/
Karama и остали, Ayydogdu	5.275	10.500	18.945	24.480	24.739
Mantari и остали	5.483	10.507	18.947	24.480	24.739
Viola и остали, El Meiche и остали	5.483	10.507	18.947	24.480	24.739
Soldatos	5.270	10.399	18.926	24.480	24.739
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Akavci i Tanrikulu	5.128	10.373	18.967	24.484	24.740
Akavci i Tanrikulu	6.883	13.765	20.884	24.617	24.774
Grover и остали	/	/	/	/	/
Mechab и остали	5.284	10.404	18.925	24.480	24.739

Табела 5.14. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 45^\circ$ при променљивом односу a/h , фиксираном односу $E_1/E_2 = 40$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

У компаративној анализи у табели 5.15 јасно се може уочити да ако упоредимо вредности бездимензионе фреквенције добијене уз помоћ две произвољне функције (на пример функције дефинисане од стране Караме и осталих, са функцијом дефинисаном од стране Солдатоса) при односу $E_1/E_2 = 3$ та разлика ће износити 0,001 или мање док при односима $E_1/E_2 = 50$ та разлика има вредност 0.03.

Име аутора	$E_1/E_2 \quad m=1, n=1$				
	3	5	10	20	50
Ambartsumain	7.595	8.916	11.331	14.428	19.064
Kaczkowski, Panc i Reissner	/	/	/	/	/
Levy, Stein, Touratier	7.595	8.916	11.331	14.429	19.069
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Viola и остали	7.687	9.071	11.669	15.166	20.887
Mantari и остали	7.595	8.916	11.331	14.428	19.064
	/	/	/	/	/
Karama и остали, Aydogdu	7.596	8.918	11.335	14.435	19.089
Mantari и остали	7.596	8.918	11.335	14.436	19.092
Viola и остали, El Meiche и остали	7.596	8.918	11.335	14.436	19.092
Soldatos	7.595	8.916	11.331	14.428	19.064
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Akavci i Tanrikulu	7.597	8.920	11.341	14.449	19.106
Akavci i Tanrikulu	7.705	9.100	11.725	15.292	21.318
Grover и остали	/	/	/	/	/
Mechab и остали	7.595	8.916	11.331	14.428	19.064

Табела 5.15. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 30^\circ$ при променљивом односу E_1/E_2 , фиксираном односу $a/h = 10$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

Име аутора	$E_1/E_2 \quad m=1, n=1$				
	3	5	10	20	50
Ambartsumain	7.718	9.190	11.838	15.188	20.124
Kaczkowski, Panc i Reissner	/	/	/	/	/
Levy, Stein, Touratier	7.718	9.190	11.838	15.188	20.129
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Viola и остали	7.812	9.353	12.201	15.987	22.100
Mantari и остали	7.718	9.190	11.838	15.188	20.124
	/	/	/	/	/
Karama и остали, Aydogdu	7.719	9.191	11.842	15.195	20.150
Mantari и остали	7.720	9.191	11.842	15.196	20.154
Viola и остали, El Meiche и остали	7.720	9.192	11.842	15.196	20.154
Soldatos	7.718	9.190	11.838	15.188	20.124
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Akavci i Tanrikulu	7.721	9.194	11.849	15.211	20.170
Akavci i Tanrikulu	7.831	9.381	12.258	16.118	22.565
Grover и остали	/	/	/	/	/
Mechab и остали	7.718	9.190	11.838	15.187	20.124

Табела 5.16. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 45^\circ$ при променљивом односу E_1/E_2 , фиксираном односу $a/h = 10$ и усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

Име аутора	$a/h \quad m=1, n=1$				
	2	4	10	50	100
Ambartsumain	/	/	/	/	/
Kaczkowski, Panc i Reissner	/	/	/	/	/
Levy, Stein, Touratier	5.287	9.093	12.821	14.172	14.222
Mantari и остали	5.816	9.492	12.960	14.179	14.224
Viola и остали	5.280	9.324	12.965	14.181	14.224

Mantari и остали	5.175	9.010	12.792	14.171	14.222
	5.003	8.887	12.750	14.169	14.221
Karama и остали, Aydogdu	/	/	/	/	/
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Viola и остали, El Meiche и остали	/	/	/	/	/
Soldatos	5.169	9.006	12.791	14.171	14.222
Mantari и остали	4.905	8.936	12.802	14.172	14.222
Akavci i Tanrikulu	/	/	/	/	/
Akavci i Tanrikulu	5.401	9.183	12.853	14.174	14.222
Grover и остали	/	/	/	/	/
Mechab и остали	5.187	9.019	12.795	14.171	14.222

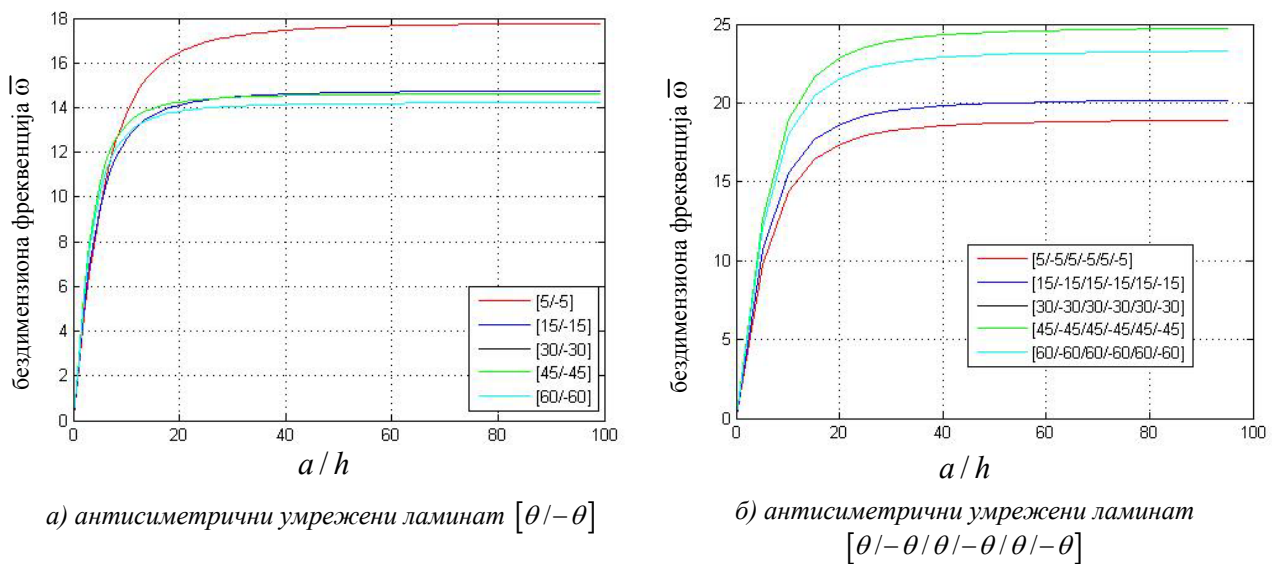
Табела 5.17. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta]$, $\theta = 30^\circ$ при променљивом односу a/h , фиксираним односу $E_1/E_2 = 40$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

Име аутора	$a/h, m=1, n=1$				
	2	4	10	50	100
Ambartsumain	/	/	/	/	/
Kaczkowski, Panc i Reissner	/	/	/	/	/
Levy, Stein, Touratier	5.481	9.471	13.259	14.574	14.621
Mantari и остали	6.057	9.907	13.407	14.581	14.623
Viola и остали	5.426	9.651	13.373	14.580	14.623
Mantari и остали	5.358	9.380	13.228	14.572	14.620
	5.169	9.243	13.181	14.570	14.621
Karama и остали, Aydogdu	/	/	/	/	/
Mantari и остали	/	/	/	/	/
Viola и остали, El Meiche и остали	/	/	/	/	/
Soldatos	5.351	9.375	13.226	14.572	14.621

Mantari и остали	5.043	9.266	13.217	14.575	14.621
Akavci i Tanrikulu	/	/	/	/	/
Akavci i Tanrikulu	5.605	9.571	13.294	14.572	14.622
Grover и остали	/	/	/	/	/
Mechab и остали	5.372	9.390	13.231	14.572	14.621

Табела 5.18. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta]$, $\theta = 30^\circ$ при променљивом односу a/h , фиксираним односу $E_1/E_2 = 40$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

Дијаграмски прикази промене вредности бездимензионе фреквенције у функцији промене односа a/h дати су на слици 5.12. Треба нагласити да је за дијаграмски приказ изабрана теорија *Mechab* и осталих из разлога што све теорије које су применљиве на овај тип проблема дају доста сличне резултате, па би на дијаграму дошло до преклапања кривих. Још једно оправдање одабира ове функције за приказ резултата лежи у чињеници да се овом теоријом добијају решења без употребе поступака нумеричке интеграције, па је самим тим степен апроксимације мањи, а тачност резултата већа.



а) антисиметрични умрежени ламинат $[\theta/-\theta]$

б) антисиметрични умрежени ламинат $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta]$

Слика 5.13. Дијаграми зависности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ у функцији односа a/h за умрежене антисиметричне ламинате

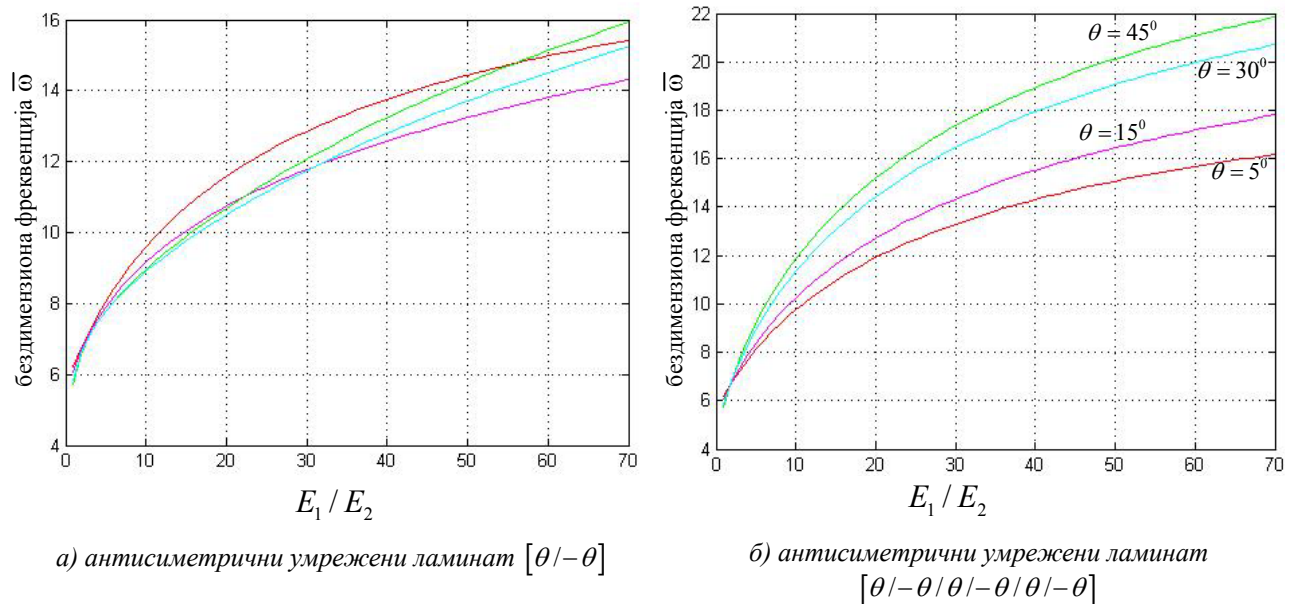
На слици 5.13 није тешко уочити да са променом односа a/h долази до асимптотског приближавања максималној вредности бездимензионе фреквенције. Из табела, а и на самој слици јасно је уочљиво да при великим вредностима односа $a/h > 20$ утицај функције облика губи на значају, па је задовољавајуће резултате могуће добити и теоријама код којих је математички апарат доста једноставнији. Једноставност математичког апарата утиче на време неопходно за нумеричка израчунавања.

Са слике 5.13а приметно је да вредности бездимензионе фреквенције при малим вредностима угла оријентације влакана, на пример 5° за ламинатну плочу састављену од два слоја, знатно одступају од вредности при угловима оријентације у опсегу од $15^\circ - 60^\circ$ степени. За поменути

опсег углова оријентације, јасно се види да су разлике у вредностима $\bar{\omega}$ минималне, што проузрокује велико приближавање кривих, готово до преклапања.

На слици 5.13б види се да се највећа вредност $\bar{\omega}$ за ламинатну плочу састављену од шест слојева достиже при угловима оријентације слојева $\pm 45^\circ$, док је најмања вредности при угловима оријентације $\pm 5^\circ$. Такође се јасно види да, за разлику од плоче састављене од два слоја, овде нема великог приближавања, односно преклапања кривих за различите углове оријентације слојева.

На слици 5.14 дата је зависност бездимензионе фреквенције од промене односа E_1/E_2 за усвојену исту функцију облика као у претходно поменутој анализи. Са дијаграма је уочљиво да се са повећањем односа E_1/E_2 повећава и разлика између максималних вредности бездимензионе фреквенције за различите, фиксирани углове оријентације слојева. За разлику од промене односа a/h овде нема асимптотског приближавања некој вредности, већ се јавља константан раст вредности.



Слика 5.14. Дијаграми зависности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ у функцији односа E_1/E_2 за умрежене антисиметричне ламинате

5.3.3 Примена Смицајне деформационе теорије трећег реда уведене од стране Канта у анализи слободних вибрација укрштених симетричних и антисиметричних ламината

Тарун Кант је у свом раду [53] објављеном 2001. године претпоставио да су поља померања произвољне кубне функције уведених параметара. Као што се може видети у поглављу 2, ова поља померања садрже укупно 12 независно променљивих. Овако велики број променљивих прилично отежава сам поступак решавања проблема макромеханичке анализе. Олакшавајућа околност је у томе да су поља померања полиномне функције координате z , па је самим тим направљена одређена олакшица јер се код свих интеграла дефинисаних у једначина (3.37) може наћи експлицитно решење, за разлику од HSDT заснованих на функцијама облика, где то није било могуће. За тако претпостављена поља померања и конститутивне релације у локалном и глобалном координатном систему дефинисане једначинама (1.76) и (1.79)

добиају се једначине кретања дефинисане са (4.57). Контурни услови за слободно ослоњену ламинатну плочу и Навијеови облици решења за овај тип проблема дати у истом раду су дефинисани једначинама (5.15), (5.16).

Матрице A, B, D, E, F, G, H , за овако уведену теорију имају облик:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}; \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \mathbf{0}; \mathbf{D} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} \end{bmatrix}; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} \end{bmatrix}; \mathbf{G} = \mathbf{0},$$
(5.26)

док су матрице које одговарају смицајним напонима:

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} E_{55} & 0 \\ 0 & E_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{B}_s = \mathbf{0}; \mathbf{D}_s = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} F_{55} & 0 \\ 0 & F_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} H_{55} & 0 \\ 0 & H_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{G}_s = \mathbf{0},$$
(5.27)

Ако се претпостављени облици решења дати једначинама (5.16), замене у динамичким једначинама кретања (4.57), а узимајући у обзир облике матрица (5.26) и (5.27) за симетричну групу ламината, једначина кретања (4.57) се може свести на следећи облик:

$$\mathbf{L} - \omega^2 \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 \\ I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & I_5 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & I_5 \\ I_3 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 \\ I_4 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 & 0 & 0 & I_7 & 0 & 0 \\ 0 & I_4 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 & 0 & 0 & I_7 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 & 0 & 0 & I_7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{0},$$
(5.28)

при чему су коефицијенти $L_{i,j}$ ($i, j = 1 \div 12$) дефинисани једначином (5.18). У оригиналном раду дата је нешто другачија процедура за добијање аналитичких решења. За добијање бездимензионе фреквенције, као и у претходним поступцима, коришћена је нормализација

$\bar{\omega} = \omega \frac{ab}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$. У табели 5.19 и 5.20 дате су вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ за исте

класе укрштених симетричних и антисиметричних ламината као и у случају примене HSDT

заснованих на функцијама облика, а све са циљем компаративне анализе примене деформационих теорија вишег реда у проблемима слободних вибрација.

Тип ламината		Вредност односа a/h				
		2	4	10	50	100
Антисиметрични укрштени ламинати	$[0^0/90^0]$	4.982	7.724	10.357	11.264	11.296
	$[0^0/90^0]_2$	5.376	9.345	14.635	17.173	17.276
	$[0^0/90^0]_3$	5.587	9.761	15.353	18.058	18.168
Симетрични укрштени	$[0^0/90^0/0^0]$	5.199	8.861	14.768	18.647	18.829
	$[0^0/90^0/90^0/0^0]$	5.407	9.412	15.288	18.688	18.839

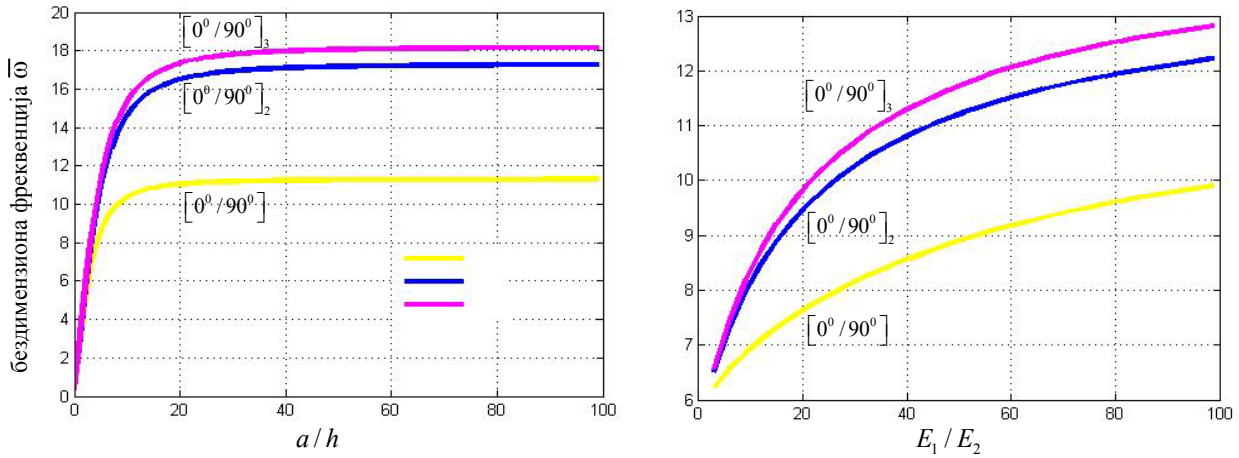
Табела 5.19. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричних и антисиметричних укрштених ламината при променљивом односу a/h , фиксираним односу $E_1/E_2 = 40$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

Тип ламината		Вредност односа E_1/E_2				
		3	5	10	20	50
Антисиметрични укрштени ламинати	$[0^0/90^0]$	6.230	6.482	6.948	7.643	8.895
	$[0^0/90^0]_2$	6.507	7.078	8.147	9.462	11.200
	$[0^0/90^0]_3$	6.562	7.198	8.376	9.825	11.727
Симетрични укрштени	$[0^0/90^0/0^0]$	6.594	7.238	8.368	9.665	11.303
	$[0^0/90^0/90^0/0^0]$	6.574	7.179	8.193	9.287	10.605

Табела 5.20. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ симетричних и антисиметричних укрштених ламината при променљивом односу E_1/E_2 , различитом броју слојева, фиксираним односу $a/h = 5$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

Приметно је доста добро поклапање са резултатима дефинисаним у табелама 5.9 и 5.11. Као и код поменутих теорија, ни овде нису потребни корекциони фактори, али ни нумеричка интеграција за добијање решења. За разлику од HSDT теорија померање w је кубна функција по z што уз олакшано интегралчење (полиномна функција) може дати прецизнија решења.

На слици 5.15а дат је графички приказ зависности $\bar{\omega}$ од односа a/h , као и од односа E_1/E_2 . Вредности $\bar{\omega}$ за антисиметричне укрштене ламинате дате су у табелама 5.20, док је дијаграмски приказ у зависности од броја слојева дат на слици 5.15б.

а) бездимензиона фреквенција $\bar{\omega}$ у функцији a/h б) бездимензиона фреквенција $\bar{\omega}$ у функцији E_1/E_2 Слика 5.15. Дијаграми зависности бездимензионе фреквенције у функцији односа a/h и E_1/E_2 за укрштене антисиметричне ламинате састављене од 2, 4 и 6 слојева

5.3.4 Примена Смицајне деформационе теорије трећег реда уведене од стране Канта у анализи слободних вибрација умрежених антисиметричних ламината

У претходном одељку описан је поступак имплементације смицајне деформационе теорије трећег реда у анализи укрштених ламината предложене од стране Таруна Канта. Мада се сам поступак добијања аналитичких решења разликовао од оригиналног рада, анализирана је потпуно иста група ламината као и у самом раду. Антисиметрични умрежени ламинати типа $[\theta/-\theta/\theta/-\theta\dots]$ нису разматрани због знатно компликованије математичке процедуре. У овом раду је унапређена примена ове теорије и на умрежене антисиметричне ламинате. Матрице A , B , D , E , F , G , H , за овако уведену теорију имају облик:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & 0 & B_{36} \\ B_{16} & B_{26} & B_{36} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_{16} \\ 0 & 0 & 0 & E_{26} \\ 0 & 0 & 0 & E_{36} \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & G_{16} \\ 0 & 0 & 0 & G_{26} \\ 0 & 0 & 0 & G_{36} \\ G_{16} & G_{26} & G_{36} & 0 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} \end{bmatrix}, \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

док су матрице које одговарају смицајним напонима:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_s &= \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} 0 & B_{56} \\ B_{56} & 0 \end{bmatrix}; D_s = \begin{bmatrix} E_{55} & 0 \\ 0 & E_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} 0 & E_{56} \\ E_{56} & 0 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{F}_s &= \begin{bmatrix} F_{55} & 0 \\ 0 & F_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} H_{55} & 0 \\ 0 & H_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} 0 & G_{56} \\ G_{56} & 0 \end{bmatrix};
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Са аспекта одређивања аналитичких решења, а у складу са могућношћу комбиновања симболичког и нумеричког програмирања у Матлабу дефинисани су нови облици Навијеових решења динамичких једначина кретања. За потребе овог поступка усвојени су следећи контурни услови на крајевима ламинатне плоче:

$$\left. \begin{aligned} u_0 = w_0 = \theta_y = u_0^* = w_0^* = \theta_y^* = 0, \\ v_0 = w_0 = \theta_x = v_0^* = w_0^* = \theta_x^* = 0 \end{aligned} \right\} \text{ на ивицама код којих је } x = 0 \text{ односно } x = a, \tag{5.31}$$

Ново уведени облици претпостављених Навијеових решења су:

$$\begin{aligned}
u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, & u_0^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\
v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, & v_0^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}^* \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\
w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, & w_0^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\
\theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, & \theta_x^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn}^* \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\
\theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, & \theta_y^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\
\theta_z(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{zmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, & \theta_z^*(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{zmn}^* \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Заменом овако претпостављених облика решења у динамичке једначине кретања уз узимање у обзир облика матрица спрезања дефинисаних једначинама (5.29) и (5.30), једначине кретања се могу трансформисати у облик (5.33):

$$\begin{array}{c}
\mathbf{L}-\omega^2 \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
I_1 & 0 & 0 & I_2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 \\
0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 \\
0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{ctg}(\alpha x)}{\operatorname{ctg}(\beta y)} \\
I_2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 \\
0 & I_2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_5 & 0 \\
0 & 0 & I_2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_5 \\
I_3 & 0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 \\
0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 \\
0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 \frac{\operatorname{ctg}(\alpha x)}{\operatorname{ctg}(\beta y)} \\
I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_7 & 0 & 0 \\
0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_7 & 0 \\
0 & 0 & I_4 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & I_6 \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\operatorname{tg}(\beta y)} & 0 & 0 & I_7
\end{array} \right] = \mathbf{0}
\end{array} \quad (5.33)$$

при чему се коефицијенти $L_{i,j}$ ($i, j = 1 \div 12$) знатно разликују од коефицијената дефинисаних за укрштене ламинате. У овом случају ови коефицијенти су облика:

$$\begin{array}{lll}
L_{1,1} = \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{44}, & L_{3,7} = 2B_{56}\beta, & L_{6,9} = -2\alpha\beta E_{56}, \\
L_{1,2} = \alpha\beta(A_{12} + A_{44}), & L_{3,8} = 2B_{56}\alpha, & L_{6,10} = \beta(E_{36} - 3E_{56}), \\
L_{1,3} = 0, & L_{3,9} = \alpha^2 D_{55} + \beta^2 D_{66}, & L_{6,11} = \alpha(E_{36} - 3E_{56}), \\
L_{1,4} = 2B_{16}\alpha\beta, & L_{3,10} = 3D_{55}\alpha, & L_{6,12} = \alpha^2 F_{55} + \beta^2 F_{66} + 3D_{33}, \\
L_{1,5} = \alpha^2 B_{16} + \beta^2 B_{26}, & L_{3,11} = 3D_{66}\beta, & L_{7,7} = \alpha^2 F_{11} + \beta^2 F_{44} + 4D_{55}, \\
L_{1,6} = \alpha A_{13}, & L_{3,12} = -2\alpha\beta E_{56}, & L_{7,8} = \alpha\beta(F_{12} + F_{44}), \\
L_{1,7} = \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{44}, & L_{4,4} = \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{44} + A_{55}, & L_{7,9} = -2\beta(E_{36} - E_{56}), \\
L_{1,8} = \alpha\beta(D_{12} + D_{44}), & L_{4,5} = \alpha\beta(D_{12} + D_{44}), & L_{7,10} = 2\alpha\beta G_{16},
\end{array} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}
L_{1,9} &= -2\beta B_{36}, & L_{4,6} &= \beta(B_{36} - B_{56}), & L_{7,11} &= \alpha^2 G_{16} + \beta^2 G_{26} + 6E_{56}, \\
L_{1,10} &= 2E_{16}\alpha\beta, & L_{4,7} &= 2E_{16}\alpha\beta, & L_{7,12} &= \alpha(3F_{13} - 2F_{55}), \\
L_{1,11} &= \alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26}, & L_{4,8} &= \alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26} + 2B_{56}, & L_{8,8} &= \alpha^2 F_{44} + \beta^2 F_{22} + 4D_{66}, \\
L_{1,12} &= 3D_{13}\alpha, & L_{4,9} &= -\alpha(2D_{13} - D_{55}), & L_{8,9} &= -2\alpha(E_{36} - E_{56}), \\
L_{2,2} &= \alpha^2 A_{44} + \beta^2 A_{22}, & L_{4,10} &= \alpha^2 F_{11} + \beta^2 F_{44} + 3D_{55}, & L_{8,10} &= \alpha^2 G_{16} + \beta^2 G_{26} + 6E_{56}, \\
L_{2,3} &= 0, & L_{4,11} &= \alpha\beta(F_{12} + F_{44}), & L_{8,11} &= 2G_{26}\alpha\beta, \\
L_{2,4} &= \alpha^2 B_{16} + \beta^2 B_{26}, & L_{4,12} &= \beta(3E_{36} - E_{56}), & L_{8,12} &= \beta(3F_{23} - 2F_{66}), \\
L_{2,5} &= 2B_{26}\alpha\beta, & L_{5,5} &= \alpha^2 D_{44} + \beta^2 D_{22} + A_{66}, & L_{9,9} &= \alpha^2 F_{55} + \beta^2 F_{66} + 4D_{33}, \\
L_{2,6} &= A_{23}\beta, & L_{5,6} &= \alpha(B_{36} - B_{56}), & L_{9,10} &= \alpha(2F_{13} - 3F_{55}), \\
L_{2,7} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{44}), & L_{5,7} &= \alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26} + 2B_{56}, & L_{9,11} &= -\beta(2F_{23} - 3F_{66}), \\
L_{2,8} &= \alpha^2 D_{44} + \beta^2 D_{22}, & L_{5,8} &= 2E_{26}\alpha\beta, & L_{9,12} &= -2\alpha\beta G_{56}, \\
L_{2,9} &= -2B_{36}\beta, & L_{5,9} &= -\beta(2D_{23} - D_{66}), & L_{10,10} &= \alpha^2 H_{11} + \beta^2 H_{44} + 9F_{55}, \\
L_{2,10} &= \alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26}, & L_{5,10} &= \alpha\beta(F_{12} + F_{44}), & L_{10,11} &= \alpha\beta(H_{12} + H_{44}), \\
L_{2,11} &= 2E_{26}\alpha\beta, & L_{5,11} &= \alpha^2 F_{44} + \beta^2 F_{22} + 3D_{66}, & L_{10,12} &= 3\beta(G_{36} - G_{56}), \\
L_{2,12} &= 3D_{23}\beta, & L_{5,12} &= \alpha(3E_{36} - E_{56}), & L_{11,11} &= \alpha^2 H_{44} + \beta^2 H_{22} + 9F_{66}, \\
L_{3,3} &= \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{66}, & L_{6,6} &= \alpha^2 D_{55} + \beta^2 D_{66} + A_{33}, & L_{11,12} &= 3\alpha(G_{36} - G_{56}), \\
L_{3,4} &= A_{55}\alpha, & L_{6,7} &= \alpha(D_{13} - 2D_{55}), & L_{12,12} &= \alpha^2 H_{55} + \beta^2 H_{66} + 9F_{33}, \\
L_{3,5} &= A_{66}\beta, & L_{6,8} &= \beta(D_{23} - 2D_{66}), & & \\
L_{3,6} &= -2\alpha\beta B_{56}, & & & &
\end{aligned}$$

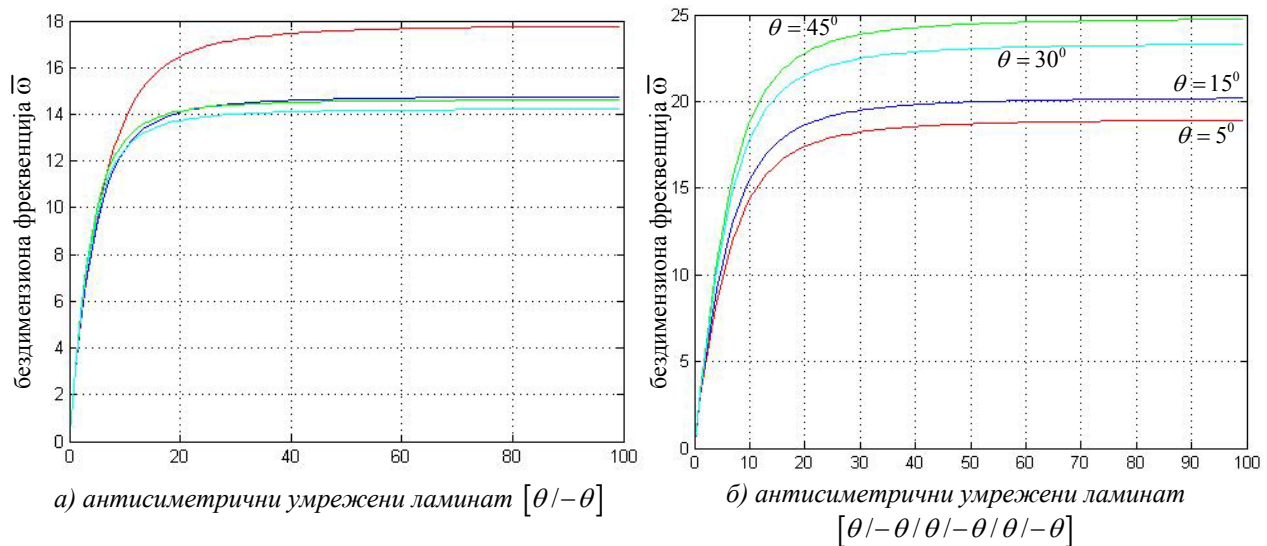
Како су коефицијенти α , β дефинисани као $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$, за квадратну плочу и усвојене вредности за први мод код кога је $m=1$ и $n=1$ односи $tg(\alpha x)/tg(\beta y)$ и $ctg(\alpha x)/ctg(\beta y)$ биће једнаки јединици.

У табели 5.21 дати су резултати примене ове теорије на антисиметричне умрежене ламинате. Добијено је одлично поклапање са резултатима датим у [153], где је приказана упоредна анализа примене деформационе теорије вишег реда уведена од стране Редија, затим деформационе теорије првог реда и класичне теорије плоча.

Однос a/h	Антисиметрични умрежени ламинат $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta\dots]$								
	$\theta = 5^\circ$			$\theta = 30^\circ$			$\theta = 45^\circ$		
	$n = 2$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 2$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 2$	$n = 6$	$n = 8$
4	8.198	8.327	8.356	8.553	10.079	10.293	8.826	10.509	10.740
10	13.792	14.345	14.387	12.506	17.805	18.116	12.891	18.785	19.126
20	16.466	17.392	17.446	13.733	21.494	21.681	14.131	22.778	23.182
50	17.589	18.707	18.768	14.154	23.038	23.431	14.553	24.461	24.494
100	17.770	18.922	18.984	14.218	23.288	23.685	14.616	24.734	25.172

Табела 5.21. Вредности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ антисиметричног умреженог ламината $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta/-\theta\dots]$ при променљивом односу a/h , различитом броју слојева, фиксираним односу $E_1/E_2 = 40$ и за усвојене инжењерске константе дефинисане материјалом 1

На слици 5.16 дата је промена бездимензионе фреквенције у функцији промене односа a/h за 2 и 6 слојева. Углови оријентацији обележени су на слици 5.16б, ради јасније прегледности. За упоредну анализу изабрана је функција коју је предложио Солдатос (редни број 11 у табели). Може се уочити доста добро поклапање резултата што јасно указује на применљивост ове теорије у анализи слободних вибрација умрежених антисиметричних ламината.



Слика 5.16. Дијаграми зависности бездимензионе фреквенције $\bar{\omega}$ у функцији односа a/h за умрежене антисиметричне ламинате

Предност овако уведене теорије лежи у чињеници да су претпостављена поља померања полиномне функције координате z , па су самим тим доста олакшана израчунавања. У овом случају, за разлику од смицајних деформационих теорија заснованих на функцијама облика, за добијање аналитичких решења није потребан прелазак на нумеричку интеграцију, чиме се повећава прецизност, а знатно скраћује време прорачуна.

6 Примена метода коначних елемената у анализи композитних ламината

Статичке једначине равнотеже и динамичке једначине кретања поред приказаних аналитичких метода могуће је решавати и нумеричким путем. Треба нагласити да се сви проблеми теорије еластичности могу свести на проблем парцијалних диференцијалних једначина са одговарајућим контурним условима. Нарочито моћан алат за нумеричко решавање ових једначина је метод коначних елемената. Уз помоћ овог метода, за разлику од аналитичких метода могуће је сагледати понашање читаве конструкције са одговарајућим контурним условима и спољашњим оптерећењем. Суштина ове методе је подела просторног домена или раванског домена на дискретизоване поддомене, коначне елементе, на које се примењују теоријске поставке механике и нумеричке математике. Анализа система спрегнутих коначних елемената добијених дискретизацијом континуума, омогућава нумеричку симулацију одзива континуума на задате побуде. Како метод коначних елемената представља изузетно моћан алат у анализи конструкција, многи аутори су користили овај метод за добијање решења парцијалних диференцијалних једначина добијених применом смицајних деформационих теорија вишег реда. Детаљан преглед радова ове проблематике дат је у [111]. Мада је акценат ове дисертације на коришћењу аналитичких метода у примени смицајних деформационих теорија вишег реда, у овом поглављу биће описан поступак примене методе коначних елемената са освртом на њихову имплементацију у комерцијалним софтверима за анализу конструкција. Као репрезент ће бити описан коначни елемент ламинат (*laminate*) који је имплементиран у програмски пакет Настран (*Nastran*).

Поступак примене ове методе у макромеханичкој анализи композитних ламината се врши у неколико корака [159]:

1. у првом кораку врши се подела континуума на коначне елементе,
2. у другом кораку врши се избор интерполационих функција уз увођење локалног (природног координатног система),
3. у трећем кораку се за изведене статичке једначине равнотеже и динамичке једначине кретања уз додатак одговарајућих оптерећења, врши решавање парцијалних диференцијалних једначина методама нумеричке математике за задате контурне услове.
4. у последњем кораку се врши прорачун потребних параметара.

Значајно је напоменути да је овом дисертацијом развијен модул у домену симболичког програмирања (погледати поглавље 8) за извођене нових теоријских поставки неопходних у трећем кораку описане процедуре. Тиме је отворен простор да будући истраживачи направе конекцију између развијеног модула и програмских пакета методе коначних елемената.

Карактеристике елемената матрице крутости и вектори оптерећења дефинишу се најчешће применом варијационих принципа, на основу усвојене геометрије елемената и изабраних интерполационих функција.

Треба нагласити да тачност резултата свакако не може бити већа од добијених аналитичких решења, али одговарајући избор облика и броја елемената може дати резултате са доста великом прецизношћу.

Основна предност ове методе је њена применљивост на реалне конструкције, што у многоме може олакшати сам поступак пројектовања конструкције и остварити велику уштеду, како у временском, тако и у економском смислу (смањен број експеримената).

6.1 Интерполационе функције

Као што је већ речено проблеми линеарне еластичности се у математичком смислу свде на системе обичних или парцијалних диференцијалних једначина. Како ове системе врло често није могуће решити односно наћи њихова решења у затвореном облику, користе се апроксимативне методе. Решење се представља у облику пробних или апроксимативних функција. Помоћу интерполационих функција се успоставља веза између вредности функције (нпр. за померање) у било којој тачки коначног елемента и вредности функције у чворовима елемента. Вредност функције се интерполира између вредности функције у чворовима. Као интерполационе функције најчешће се користе полиноми. Постоје два битна разлога употребљавања полинома као интерполационих функција:

- Лакше је формулисати и компјутеризовати једначине коначних елемента полиномним типом интерполационих функција. Прецизније, лакша је процедура диференцирања и интеграције ако су интерполационе функције дате у облику полинома.
- Могуће је побољшати тачност резултата повећањем реда полинома, јер као што је математички познато, полином бесконачног реда потпуно одговара тачном решењу. У нумеричким приказима узимају се полиноми коначног реда само као апроксимације.

Треба напоменути да се као интерполационе функције могу користити и тригонометријске функције, али је њихова употреба знатно ређа.

Општи облик апроксимативног решења за неку функцију $u(x_i)$ апроксимирану полиномним интерполационим функцијама може се представити у облику [160]:

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{m=1}^M c_m \Phi_m \quad (6.1)$$

где су:

c_m - непознате константе,

Φ_m - интерполационе функције.

Полиномна форма интерполационих функција може се дефинисати за једнодимензионе, дводимензионе и тродимензионе проблеме. Опште форме полиномних интерполационих функција за поменуте проблеме се дефинишу као:

1. За једнодимензионе коначне елементе

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_{n+1} x^n \\ \Phi(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (6.2)$$

где су уведене ознаке:

$$\boldsymbol{\eta}^T = \{1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^n\}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ \dots \ \alpha_m\}^T \quad (6.3)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ - су коефицијенти полинома, такође познати као генерализоване координате, док је n - степен полинома.

2. За дводимензионе коначне елементе

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy \dots + \alpha_m y^n \\ \Phi(x, y) &= \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{a}\end{aligned}\quad (6.4)$$

односно:

$$\boldsymbol{\eta}^T = \{1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy \dots y^n\}, \quad \mathbf{a} = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_m\}^T \quad (6.5)$$

3. За тродимензионе коначне елементе

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} zx \dots + \alpha_m z^n \\ \Phi(x, y, z) &= \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{a}\end{aligned}\quad (6.6)$$

односно:

$$\boldsymbol{\eta}^T = \{1 \ x \ y \ z \ x^2 \ y^2 \ z^2 \ xy \ yz \ zx \dots z^n\}, \quad \mathbf{a} = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_m\}^T \quad (6.7)$$

У практичној примени најчешће се узимају интерполациони полиноми првог, другог или трећег степена. Када је интерполациони полином првог степена онда се таква интерполација назива линеарна интерполација, односно модел на коме се таква интерполација примењује назива се линеарни модел.

Тип модела	Интерполациони полиноми		
Линеарни модел	$\Phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$	$\Phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$	$\Phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$
Квадратни модел	$\Phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$	$\Phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy$	$\Phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} zx$
Кубни модел	$\Phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$	$\Phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 y^3 + \alpha_9 x^2 y + \alpha_{10} xy^2$	$\Phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} zx + \alpha_{11} x^3 + \alpha_{12} y^3 + \alpha_{13} z^3 + \alpha_{14} x^2 y + \alpha_{15} x^2 z + \alpha_{16} y^2 z + \alpha_{17} xy^2 + \alpha_{18} xz^2 + \alpha_{19} xz^2 + \alpha_{20} xyz$

Табела 6.1. Интерполациони полиноми линеарног, квадратног и кубног модела

Коначни елементи се према реду интерполационог полинома најчешће класификују у три категорије [160]:

- Једноставни елементи (*simplex*)
- Сложени елементи (*complex*)
- Вишеструко сложени елементи (*multiplex*)

Једноставни елементи су они за које се апроксимативни полином састоји од константи и линеарних чланова, односно код кога интерполациони полиноми одговарају линеарним једнодимензионим, дводимензионим или тродимензионим моделима. Код једноставних елемената чворови се дефинишу само у угловима елемената. На пример, троугаони елемент са три чвора у угловима спада у групу једноставних или линеарних коначних елемената. Три полиномна коефицијента $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ се могу на овај начин изразити преко чворних вредности променљивих поља Φ .

Сложени елементи су они за које се апроксимативни полином, поред константних и линеарних чланова, по потреби састоји и од квадратних елемената, кубних елемената или елемената вишег реда. Стога се полиноми другог и трећег реда односе на сложене функције. Сложени елементи могу бити истог облика као једноставни елементи, али ће имати додатне

граничне чворове и понекад унутрашње чворове. На пример, интерполациони полином дводимензионог сложеног елемента, укључујући чланове све до квадратних је дат код квадратног модела. Пошто ова једначина има шест непознатих коефицијената $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ одговарајући сложени елемент мора имати шест чворова. На тај начин троугаони елемент са три чвора у угловима и три чвора на срединама страна задовољава овај захтев.

Вишеструко сложени елементи су они чије границе су паралелне координатним осама како би се постигао континуитет унутар елемента и чији апроксимативни полиноми садрже елементе вишег реда. Пример таквог елемента је правоугаоник чије су странице паралелне координатним осама.

6.1.1 Интерполациони полиноми у функцији броја степени слободе чворова коначног елемента

Основна идеја методе коначних елемената је разматрање тела састављеног од подобласти које су међусобно спојене у чворним тачкама. Претпоставља се да је непознато решење (нпр. за померање) унутар било ког коначног елемента дато у облику простих функција које зависе од чворних вредности тог елемента. Чворне вредности решења такође познате као степени слободе чвора третирају се као непознате у формулацији система једначина. Решења система једначина (као на пример једначине равнотеже дефинисане у поглављу 4) дају вредности непознатих чворних степени слободе. Када се одреде вредности непознатих степени слободе чвора биће познато и решење унутар било ког коначног елемента, а самим тим и унутар целог тела. Због тога је потребно изразити апроксимативни полином у функцији чворних степени слободе репрезентативног коначног елемента. Претпоставља се да коначни елемент има M чворова. Могуће је одредити вредност променљиве у чворовима заменом чворних координата у претпостављени облик интерполационих полинома дефинисан једначинама (6.2-6.7):

$$\Phi^{(e)} = \begin{Bmatrix} \Phi - \text{чвора 1} \\ \Phi - \text{чвора 2} \\ \Phi - \text{чвора 3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi - \text{чвора } M \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \eta^T - \text{чвора 1} \\ \eta^T - \text{чвора 2} \\ \eta^T - \text{чвора 3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta^T - \text{чвора } M \end{Bmatrix} \alpha = [\bar{\eta}] \alpha \quad (6.8)$$

где је:

$\Phi^{(e)}$ - вектор чворних вредности променљиве поља који одговара елементу e , а

$\bar{\eta}$ - квадратна матрица која се може одредити из једначине (6.8)

Инверзијом једначине (4.6) добија се:

$$\alpha = [\bar{\eta}]^{-1} \Phi^{(e)} \quad (6.9)$$

Заменом једначине (6.9) у једначини (6.8) добија се:

$$\Phi = \eta^T \alpha = \eta^T [\bar{\eta}]^{-1} \Phi^{(e)} = [N] \Phi^{(e)} \quad (6.10)$$

где је:

$$[\mathbf{N}] = \boldsymbol{\eta}^T [\bar{\boldsymbol{\eta}}]^{-1} \quad (6.11)$$

Једначина (6.9) представља интерполациони полином унутар било ког коначног елемента у функцији чворних степени слободе тог елемента. Треба напоменути да је основни недостатак полиномних интерполационих функција то што треба преокренути матрицу $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ да се добије $\Phi^{(e)}$, а $(\bar{\boldsymbol{\eta}})^{-1}$ може да постане сингуларна у појединим случајевима.

Приликом избора реда полинома у полиномном типу интерполационих функција треба узети у обзир следеће:

1. интерполациони полином треба да задовољи услове конвергенције и
2. број генерализованих координата мора да одговара броју чворних степени слободе коначног елемента.

Полиномне интерполационе функције могу бити изражене у глобалном, локалном или природном координатном систему. У методи коначних елемената уобичајена је употреба бездимензионих координата чије се вредности у општем случају могу мењати у границама од 0 до 1 или од -1 до 1. Тако уведене бездимензионе координате се називају **природним координатама**.

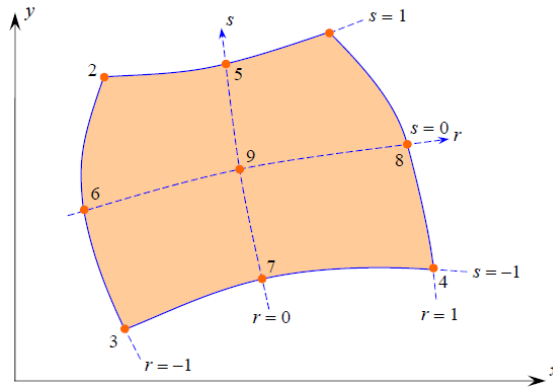
6.2 Природне координате раванских четвороугаоних елемената са четири и девет чворова

Основна процедура у изопараметарској формулацији коначних елемената је да се координате произвољне тачке елемента изразе преко чворних координата коришћењем интерполационих функција. За општи дводимензиони елемент, приказан на слици 6.1, координате произвољне тачке се могу представити преко чворних тачака и интерполационих функција као:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^q h_i(x, y) x_i, \\ y &= \sum_{i=1}^q h_i(x, y) y_i, \end{aligned} \quad (6.12)$$

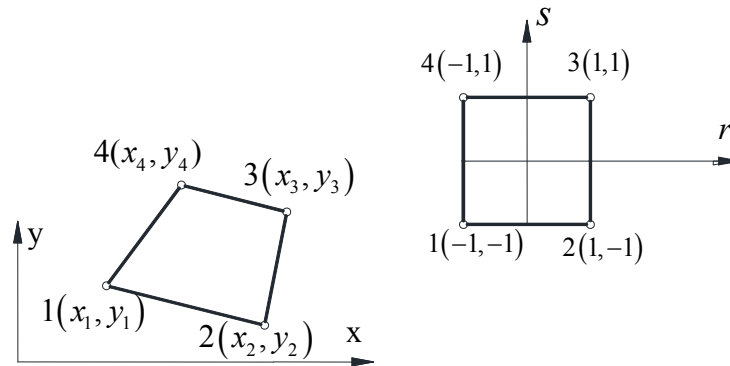
где су x, y локалне координате произвољне тачке унутар елемента, $x_i, y_i, i = (1 \div q)$ координате чворних тачака, q – укупан број чворова.

У том случају врши се пресликавање елемента произвољних страна у глобалном координатном систему, на четвороугаони коначни елемент у природном координатном систему. Природни координатни систем се бира тако да му се координатни почетак поклапа са средиштем пресликаног елемента.



Слика 6.1. Приказ општег дводимезионог елемента са девет чворова

У случају линеарног елемента датог на слици 6.2. [161] врши се пресликавање четвороугаоног елемента произвољних страна у глобалном координатном систему, на квадратни елемент јединичних страна у локалном, природном координатном систему.



Слика 6.2. Приказ пресликавања четвороугаоног линеарног елемента са четири чвора из Декартовог у локални координати систем

Веза између координата произвољне тачке и координата чворова се успоставља на основу једначине (6.12) као:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & \dots & h_N & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & \dots & 0 & h_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \dots \\ x_N \\ y_N \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

где је, N - укупан број чворова четвороугаоног елемента, а h_1, h_2, \dots, h_N су интерполационе функције.

Веза између глобалних и природних координата се према [159] може представити у облику:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 rs \quad (6.14)$$

Ако се једначина (6.14) напише за чворне тачке, у матричној нотацији она ће бити облика:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \quad (6.15)$$

где је:

$\mathbf{A} = [1, r, s, rs]$ -матрица природних координата, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ - матрица коефицијената.

За елемент са четири чвора у теменима (слика 6.2) може се писати:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \\ x_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ x_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ x_4 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Ако се једначина (6.16) преведе у матрични облик добија се:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Увођењем смене:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

може се писати:

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}\boldsymbol{\alpha}. \quad (6.19)$$

Даље се матричним множењем са \mathbf{E}^{-1} са леве стране добија:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{X} \quad (6.20)$$

Заменом једначине (6.20) у једначини (6.15) добија се:

$$x = \mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{X} \quad (6.21)$$

где се x - односи на произвољну тачку унутар елемента док се \mathbf{X} - односи на координате чворова. На овај начин успостављена је веза између координате x - произвољне тачке унутар елемента и координата чворова, при чему производ $\mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}$ представља вредности интерполационих функција изражених преко природних координата. Матрица \mathbf{A} дефинисана је у (6.15), док је вредност матрице \mathbf{E}^{-1} једнака:

$$\mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Како производ $\mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}$ представља матрицу интерполационих функција може се писати:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{E}^{-1} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4] \quad (6.23)$$

одакле следи да је:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\
 h_2 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\
 h_3 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\
 h_4 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s)
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Последња једначина представља вредности интерполационих функција изражених преко природних координата за четвороугаони линеарни елемент са четири чвора. Лако се доказује да су вредности интерполационих функција индентичне и за y координату произвољне тачке унутар елемента. На основу свега наведеног може се успоставити веза између глобалних и локалних координата четворочворног елемента у облику:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^4 h_i X_i \\
 y &= \sum_{i=1}^4 h_i Y_i
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

где су са X_i, Y_i означене координате чворних тачака, док су са h_i означене интерполационе функције изражене преко природних координата и дефинисане у [108]. Оне се за чворне тачке могу представити и у општем облику као:

$$h_i = \frac{1}{4}(1+rr_i)(1+ss_i) \quad (i=1,2,3,4) \tag{6.26}$$

Слично претходном поступку се изводе вредности интерполационих функција и за четвороугаоне елементе са девет чворова и вредности ових интерполационих функција дате су у [108] у оквиру табеларног приказа као:

$h_1 =$	$\frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_2 =$	$\frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_3 =$	$\frac{1}{4}(1-r)(1-s)$	$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_4 =$	$\frac{1}{4}(1+r)(1-s)$	$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_5 =$	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_6 =$	$\frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$	$-\frac{1}{2}h_9$

$h_7 =$	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_8 =$	$\frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$	$-\frac{1}{2}h_9$
$h_9 =$	$(1-r^2)(1-s^2)$					

Табела 6.2 Интерполационе функције општег четвороугаоног коначног елемента са девет чворова

У општем случају координате чворова и поље померања дводимензионог четвороугаоног елемента са различитим бројем чворова се могу одредити као:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{k=1}^N h_k X_i^K \\
 y &= \sum_{k=1}^N h_k Y_i^K
 \end{aligned}
 \tag{6.27}$$

6.3 Примена изопараметарске формулације коначних елемената у анализи линеарног коначног елемента са четири чвора

Аналогно успостављању везе између координата произвољне тачке унутар коначног елемента и чворних координата, једначина (6.27), могуће је успоставити и везу између померања тачке и померања чворова у облику [161]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{U} \tag{6.28}$$

где је:

H - интерполациона матрица која садржи интерполационе функције за сваки од чворова елемента

Вектор деформације **e** (са одговарајућим бројем компонената, максимално шест, а код танких композитних плоча пет) у материјалној тачки која припада елементу се на основу једначине (1.3) одређује као:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{U} \tag{6.29}$$

где је:

B - матрица извода интерполационих функција.

Даље се применом једначине генерализованог Хуковог закона (1.22) може одредити напон у произвољној материјалној тачки коначног елемента.

Најважнији део при формулацији коначног елемента је дефинисање матрице интерполације **H** и матрице извода интерполационих функција **B** која повезује деформацију у произвољној тачки коначног елемента и померања чворова.

Код линеарног четворочворног раванског елемента раванске (мембранске) деформације се могу представити као (погледати поглавља 2 и 3):

$$\varepsilon_i^0 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (6.30)$$

За одређивање извода померања, неопходно је искористити везу између декартових координата и природних координата која се коришћењем Јакобијана трансформације може дефинисати као:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad (6.31)$$

при чему је Јакобијан трансформације облика:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Супротно, веза између природних и декартових координата се дефинише инверзним Јакобијаном у облику:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad (6.33)$$

Инверзни Јакобијан постоји уколико постоји пресликавање 1-1 између природних и локалних координата елемената.

Јакобијан из једначине (6.32) могуће је израчунати коришћењем једначина (6.12) и (6.24) као:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)x_1 - \frac{1}{4}(1+s)x_2 - \frac{1}{4}(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1-s)x_4, \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)x_2 - \frac{1}{4}(1-r)x_3 - \frac{1}{4}(1+r)x_4, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)y_1 - \frac{1}{4}(1+s)y_2 - \frac{1}{4}(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1-s)y_4, \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)y_2 - \frac{1}{4}(1-r)y_3 - \frac{1}{4}(1+r)y_4. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Даље се изводи локалних координата могу изразити као:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

док се деформације у елементу коришћењем једначине (6.34) изражавају у облику:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)u_1 - \frac{1}{4}(1+s)u_2 - \frac{1}{4}(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1-s)u_4, \\ \frac{\partial u_0}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r)u_1 + \frac{1}{4}(1-r)u_2 - \frac{1}{4}(1-r)u_3 - \frac{1}{4}(1+r)u_4, \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)v_1 - \frac{1}{4}(1+s)v_2 - \frac{1}{4}(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1-s)v_4, \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial s} = \frac{1}{4}(1+r)v_1 + \frac{1}{4}(1-r)v_2 - \frac{1}{4}(1-r)v_3 - \frac{1}{4}(1+r)v_4.$$

Комбинацијом једначина (6.35) и (6.36) коначно се добија:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} 1+s & 0 & -(1+s) & 0 & -(1-s) & 0 & (1-s) & 0 \\ 1+r & 0 & 1-r & 0 & -(1-r) & 0 & -(1+r) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (6.37)$$

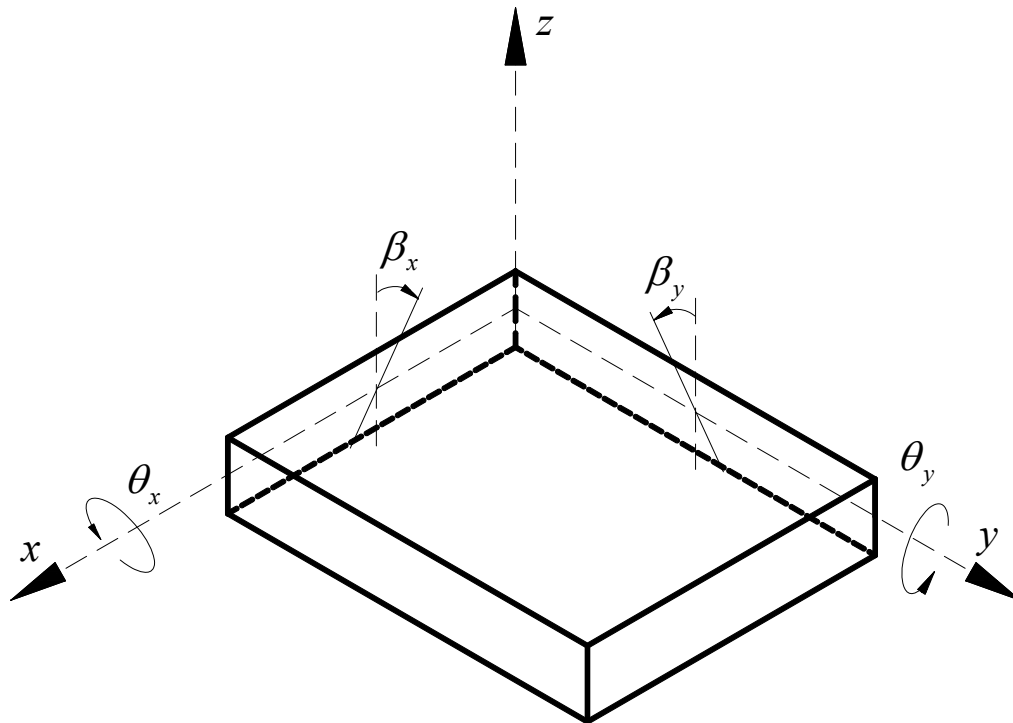
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1+s & 0 & -(1+s) & 0 & -(1-s) & 0 & (1-s) \\ 0 & 1+r & 0 & 1-r & 0 & -(1-r) & 0 & -(1+r) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (6.38)$$

где је \mathbf{u} вектор чворних померања који се може представити у облику:

$$\mathbf{u}^t = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]. \quad (6.39)$$

6.4 Моделирање ламинатних плоча коришћењем коначног елемента под називом - ламинат (laminate)

Све чешћа употреба ламинатних плоча у савременим инжењерским конструкцијама, наметнула је потребу да се и у комерцијалним софтверима за анализу конструкција (на пример у Настрану), развије коначни елемент којим ће бити могуће моделирати реалне конструкције тако да се добију резултати који ће одговарати стварним вредности напона, деформацијама, померањима и слично.



Слика 6.3. Деформација нормале услед савијања и трансверзалног смицања

Коначни елемент ламинат (у Настрану) је развијен на основу смицајне деформационе теорије првог реда (FSDT) за ламинатне плоче [161]. За ову теорију претпостављени облици поља померања, са рет независно променљивих дати су једначином (2.4), компоненте вектора деформације једначином (2.5), док је визуелни приказ деформисања плоче дат на слици 2.4. Као што је већ речено, померање нормале изазивају савијање и трансверзално смицање, па се у складу са тим може успоставити веза између функција ψ_x и ψ_y са ротацијама β_x и β_y (слика 6.3) у облику:

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= -\beta_x(x, y) = \theta_y(x, y), \\ \varphi_y(x, y) &= -\beta_y(x, y) = -\theta_x(x, y).\end{aligned}\tag{6.40}$$

За овако успостављену везу претпостављено поље померања се трансформише у облик:

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\beta_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\beta_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t),\end{aligned}\tag{6.41}$$

односно:

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\theta_x(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t),\end{aligned}\tag{6.42}$$

Из једначине (6.42) се види да је применом ове теорије макромеханичко понашање ламинатне плоче могуће описати са пет степени слободе u_0 , v_0 , w_0 , θ_x , θ_y , односно пет генерализованих померања. У формулацији коначних елемената свако од генерализованих померања могуће је представити преко одговарајућих чворних померања коришћењем интерполационих функција, слично као у једначини (6.28) у облику:

$$\begin{aligned}u_0(x, y, t) &= h_1(x, y)u_1(t) + h_2(x, y)u_2(t) + h_3(x, y)u_3(t) + h_4(x, y)u_4(t), \\ v_0(x, y, t) &= h_1(x, y)v_1(t) + h_2(x, y)v_2(t) + h_3(x, y)v_3(t) + h_4(x, y)v_4(t), \\ w_0(x, y, t) &= h_1(x, y)w_1(t) + h_2(x, y)w_2(t) + h_3(x, y)w_3(t) + h_4(x, y)w_4(t), \\ \theta_x(x, y, t) &= h_1(x, y)\theta_x^1(t) + h_2(x, y)\theta_x^2(t) + h_3(x, y)\theta_x^3(t) + h_4(x, y)\theta_x^4(t), \\ \theta_y(x, y, t) &= h_1(x, y)\theta_y^1(t) + h_2(x, y)\theta_y^2(t) + h_3(x, y)\theta_y^3(t) + h_4(x, y)\theta_y^4(t),\end{aligned}\tag{6.43}$$

где су u_1 , v_1 , w_1 , θ_x^1 , θ_y^1, \dots, u_4 , v_4 , w_4 , θ_x^4 , θ_y^4 , генерализована померања чворова 1, 2, 3, 4, респективно, а h_1 , h_2 , h_3 , h_4 , интерполационе функције.

Даље се поље померања у произвољној тачки елемента може представити као:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ \vdots \\ w_4 \\ \theta_x^4 \\ \theta_y^4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (6.44)$$

За потребе формулације коначних елемената једначина (6.44) се може у матричној нотацији записати као:

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \mathbf{N}\mathbf{u}(x, y, t) \quad (6.45)$$

Као што је већ показанао у поглављу 2, код FSDT плоча укупна деформација се може раздвојити на три спрегнуте деформације:

Раванске (мембранске):

Савојне:

Смицајне:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

Ако се у једначине (6.46) уврсте једначине (6.40), добија се:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xx}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\kappa}(x, y, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma}_s = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Узимајући у обзир једначину (6.44) и везу између померања и деформација у области еластичности, може се писати:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{B}_\varepsilon(x, y)\mathbf{u}(t); \quad \boldsymbol{\kappa}(x, y, t) = \mathbf{B}_\kappa(x, y)\mathbf{u}(t); \quad \boldsymbol{\gamma}_s(x, y) = \mathbf{B}_\gamma(x, y)\mathbf{u}(t) \quad (6.48)$$

где су \mathbf{B}_ε , \mathbf{B}_κ , \mathbf{B}_γ , матрице извода интерполационих функција које се могу дефинисати као:

$$\mathbf{B}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

$$\mathbf{B}_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial h_4}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & -h_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & -h_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & -h_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} & -h_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & h_1 & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & h_2 & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & h_3 & 0 & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$

У складу са дефинисаним деформацијама у сваком слоју ламината могуће је одредити раванске компоненте вектора напона у складу са једначином:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (6.50)$$

где је раванска конститутивна матрица у материјалном координатном систему.

У матричној нотацији једначина (6.50) може се писати као:

$$\boldsymbol{\sigma}^k(x, y, z, t) = \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t) + z \mathbf{C}_k \boldsymbol{\kappa}(x, y, t). \quad (6.51)$$

Узимајући у обзир једначину (6.47), за равански вектор напона коначно се добија:

$$\boldsymbol{\sigma}^k(x, y, z, t) = [\mathbf{C}_k \mathbf{B}_\varepsilon(x, y) + z \mathbf{C}_k \mathbf{B}_\kappa(x, y)] \mathbf{u}(t). \quad (6.52)$$

Смицајни напони у сваком слоју ламината се могу одредити у складу са једначином:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \quad (6.53)$$

односно у матричној нотацији:

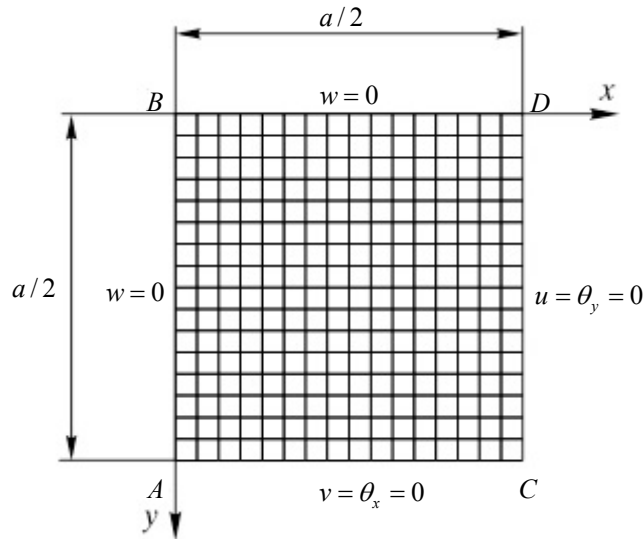
$$\boldsymbol{\sigma}_s^k(x, y, z, t) = \mathbf{C}_s^k \boldsymbol{\gamma}_s(x, y, t) \quad (6.54)$$

Коначно, коришћењем (6.47), добија се:

$$\boldsymbol{\sigma}_s^k(x, y, z, t) = \mathbf{C}_s^k \mathbf{B}_\gamma(x, y) \mathbf{u}(t) \quad (6.55)$$

Оно што је битно истаћи је да су у поглављу 5, приказане нормализоване вредности напона одређене у глобалном координатном систему, док се применом коначног елемента ламината, добијају вредности компоненти вектора напона у локалном координатном систему.

Као пример коришћења претходно описаног коначног елемента у програму Настран, усвојена је квадратна ламинатна плоча, као у поглављу 5.2. Такође су усвојене исте карактеристике материјала, димензије плоче и начин нормализације добијених вредности померања као у поменутом поглављу. Поређење вредности је вршено са вредностима приказаним у табелама 5.4-5.7 и 5.8 добијеним употребом HSDT теорија заснованих на функцијама облика, односно применом TSDT теорије, респективно.



Слика 6.4. Четвртина модела слободно ослоњене квадратне плоче

Узимајући у обзир чињеницу да квадратна плоча има две узајамно нормалне равни симетрије, моделирана је само једна четвртина плоче (слика 6.4). Услове симетрије дуж линија АС и CD могуће је дефинисати као $v = \theta_x = 0$, односно $u = \theta_y = 0$, респективно. Углови θ_x и θ_y представљају ротације око оса x и y .

У табелама 6.3 и 6.4 дате су бездимензионе вредности померања \bar{w} слободно ослоњене квадратне плоче при савијању синусном силом облика дефинисаног једначином (5.8). Нормализација је извршена као у поглављу 5.2.

Број елемената мреже	Однос a/h				
	4	10	20	50	100
4x4	2.219	0.748	0.497	0.423	0.4104
8x8	2.252	0.767	0.515	0.4411	0.430
16x16	2.2604	0.772	0.520	0.4450	0.434
32x32	2.2630	0.7740	0.512	0.4461	0.435

Табела 6.3. Бездимензионе вредности померања \bar{w} при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и усвојен материјал 2 из поглавља 5.

Број елемената мреже	a/h				
	4	10	20	50	100
4x4	2.072	0.727	0.494	0.422	0.410
8x8	2.104	0.747	0.512	0.441	0.429
16x16	2.112	0.752	0.516	0.444	0.434
32x32	2.115	0.754	0.5177	0.447	0.435

Табела 6.4. Бездимензионе вредности померања \bar{w} при савијању синусоидалном силом, симетричног укрштеног ламината $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ за фиксирани однос $E_1/E_2 = 25$ и усвојен материјал 2 из поглавља 5.

Поређењем резултата са резултатима из табеле 5.4-5 8, највећа одступања су уочљива при вредностима односа $a/h = 4$. Та одступања се смањују са повећањем односа a/h , тако да су готово занемарљива код танких плоча код којих је $a/h > 50$. Приказане вредности у табелама 6.3 и 6.4 само потврђују више пута поменути чињеницу да је за анализу дебелих плоча много ефикасније користити смицајне деформационе теорије вишег реда.

7 Еластични таласи као вид динамичког оптерећења

Пропагација таласа у композитима је комплексна због хетерогености његових конституената, анизотропије материјала и вишеслојне структуре ламината, што води томе да брзина таласног мода зависи од слагања ламината, правца пропагације таласа, фреквенције, таласне дужине, као и међуслојних услова.

Према [162] када еластични таласи пропагирају у изотропним конструкцијама налик плочи, долази до наизменичног понављања рефлексије на горњој и доњој површини ламината и резултујућа пропагација таласа, која настаје као резултат њиховог узајамног дејства, је вођена паралелно контурним површима плоче. Вођени талас се може моделирати увођењем површинских контурних услова у једначине кретања, које су дефинисане у поглављу 4. Овај приступ уводи феномен дисперзије, што значи да је брзина пропагације вођеног таласа дуж плоче функција фреквенције или таласне дужине. Дисперзионе релације за еластичну изотропну плочу са бесконачним димензијама у односу на дебљину први је развио Ламб. Из тог разлога се вођени таласи, који се пропагирају у равни еластичне плоче са површинама слободним од напона, називају Ламбовим таласима. С обзиром на то да вођени таласи остају ограничени унутар конструкције, могу да пређу велике раздаљине и на тај начин омогуће испитивање великих области. То испитивање се врши коришћењем ограниченог броја сензора. Ово својство их чини погодним за праћење интегритета конструкција (SHM) попут судова под високим притиском, резервоара за гориво, цевовода итд. У изотропним плочама вођени таласи се могу класификовати у три типа према њиховим поларизацијама. Таласи који су поларизовани у равни управној у односу на плочу, на пример у x - z равни (у овој дисертацији усвојено је да је оса z управна на раван плоче), називају се **симетрични** (S), или екстензиони таласи и **антисиметрични** (A), или савојни таласи. Таласи који су поларизовани у равни плоче се називају **смицајни хоризонтални** (SH) таласи. SH таласи могу такође бити симетрични или антисиметрични у односу на средњу раван плоче. На S и A таласе утиче деформационо стање равни xz (померања u и w), док на SH таласе утиче ванраванска деформација (само померање v). По правилу, S_n и A_n , са индексом $n=0,1,2,3,\dots$, представљају симетричне и антисиметричне Ламбове таласне модове, тим редом; SH_n са парним и непарним индексом n означавају симетричне и антисиметричне SH таласе, тим редом.

При пропагацији таласа у вишеслојним композитима, међусобно деловање између таласа зависи од својстава конституената, геометрије, правца пропагације, фреквенције и међуслојних услова. Уколико су таласне дужине значајно већег реда величине од величине конституената композита (пречник и распоред влакана), сваки слој се може третирати као еквивалентан хомоген ортротропан или трансверзално изотропан материјал код кога је оса симетрије паралелна са влакнима. *Tauchert* и *Guzelsu* [163] су мерили расипање код бор/епокси композита на ултразвучним фреквенцијама на којима је таласна дужина довољно мала да произведе расипање. За екстензионе таласе расипање почиње да се јавља када је таласна дужина истог реда величине као и пречник влакна. Међутим, за савојне таласе расипање се јавља када је однос таласне дужине према пречнику влакна око 40. Код ламината који се састоје од макроскопски хомогених слојева, интеракције између таласа укључују, не само рефлексију на површинама, већ и рефлексију и рефракцију (преламање) између слојева и тада се таласи који се понашају као резултујући таласи пропагирају дуж равни плоче. Поред тога што брзина зависи од правца пропагације, друга значајна последица еластичне анизотропије је губитак чистих таласних мода. Зависност брзине таласа од правца пропагације подразумева да се правац групне брзине генерално не подудара са таласним

вектором (или таласном нормалом). Поред тога, разликовање типова таласних модова у композитима је на неки начин вештачко с обзиром на то да се три таласна мода генерално спрежу. У пракси, симетрични ламинати се обично користе у пројектовању композитних конструкција. Ламбови таласи у симетричним ламинатима се могу поделити на симетричне и антисиметричне модове. За симетричне модове један тип је одређен као квази-екстензиони (qS_n) где је доминантна компонента вектора поларизације дуж правца пропагације, а други тип је квази-хоризонтални смицајни (qSH_{2n}), где је вектор поларизације углавном паралелан са равни плоче. Слично, за анти-симетричне типове таласних модова настају квази-савојни (qA_n) и квази-хоризонтално смицајни (qSH_{2n-1}) модови.

Генерално, постоје два теоретска приступа за истраживање Ламбових таласа у композитима:

- Теоријски приступ заснован на континуалности напона – 3D еластична теорија,
- Теоријски приступ заснован на континуалности деформација.

Први приступ представља добијање решења уз помоћ 3D теорије еластичности, а други су апроксимативна решења уз помоћ теорија плоча. За приступ који користи 3D еластичност, *Nayfeh* и *Chimenti* [164] су дали дисперзионе релације Ламбових таласа у слоју композита. Касније је *Nayfeh* развио технику трансфер матрице за добијање кривих дисперзије у ламинатима. *Yuan* и *Hsieh* [165] су добили егзактна решења расипања Ламбових таласа у композитним љускама и поредили их са *Flugge*-овом теоријом љуске. Међутим, све горе наведене студије су добиле само дисперзионе релације фазне брзине, не и групне брзине. Недавно је *Neau* [166] добио и дисперзију групне брзине и таласне криве у слоју, и упоредио их са експериментима. *Chimenti* [167] је дао свеобухватан преглед теорија и примена Ламбових таласа. Иако егзактна решења дају прецизне резултате, компјутерски прорачуни су велики због трансцедентних једначина, као и због одзива пролазних таласа композита. Како би резултати били обрадиви, многи истраживачи су се трудили да апроксимирају решења теоријама ламинатних плоча [168-170].

Овај рад је конципиран тако да се целокупна макромеханичка анализа композитног ламината врши са аспекта континуалности деформација (теорије ламинатних плоча), што је основа већине нумеричких софтвера за анализу конструкција. Због значаја принципа континуалности напона (3D еластичне теорије) при пропагацији таласа у ламинату, овде ће бити изложен поступак овакве анализе у пропагацији Ламбових таласа.

7.1 Пропагација еластичних таласа заснована на принципу континуалности напона - 3D еластична теорија

Како се проблем пропагације еластичних таласа може сматрати динамичким проблемом макромеханичке анализе, јасно је да једначина пропагације следи из закона кретања. На основу [95], [96] први Кошијев закон кретања у одсуству запреминских сила може се писати у облику:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7.1)$$

Ако се у ову једначину уврсти релација генерализованог Хуковог закона дефинисана једначином (1.23), као и веза између померања и деформација у области линеарне еластичности дата једначином (1.3), једначина кретања се може трансформисати у облик:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (7.2)$$

што у математичком смислу представља систем парцијалних диференцијалних једначина другог реда по компонентама вектора померања. Из последње једначине је јасно уочљиво да ће коначан облик једначине кретања зависити од класе симетрије материјала из разлога што класа симетрије директно утиче на облик матрице еластичности, детаљно описане у поглављу 1.

Код принципа континуалности напона једначине кретања, које се добијају из (7.1), се најчешће изражавају преко компоненти напона.

Ако се кретање посматра у глобалном координатном систему x, y, z код кога је оса z вертикална оса, и ако се вектори напона, деформација и померања означе са $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz} \ \tau_{xy}]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{xy}]^T$, $\mathbf{u} = [u \ v \ w]$, респективно једначине (7.1), у одсуству запреминских сила, добијају облик:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

У анализи Ламбових таласа потребно је претпоставити да су површи на врху и на дну композитног слоја слободне од напона, тј. да је задовољен услов:

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad z = \pm \frac{h}{2} \quad (7.4)$$

где је h укупна дебљина слоја.

Као што се може видети из облика једначине (7.3), она представља парцијалну диференцијалну једначину другог реда по компонентама померања. Сама природа ове једначине као и код осталих парцијалних диференцијалних једначина кретања у области линеарне еластичности, наводи на чињеницу да је ову једначину, слично проблемима дефинисаним у поглављима 5 и 6, могуће решавати аналитичким и нумеричким путем. У зависности од изабране равни пропагације таласа, може се анализирати велики број проблема. На пример, гледано у односу на композитни ламинат, раван се може поклапати са неком од равни у којој леже слојеви ламината или пак може бити нормална на слојеве, тако да обухвата међуслојеве у ламинату. Усложњавање проблема у овом случају настаје као резултат понашања самог међуслоја. За решавање једначина (7.1) и (7.3) у зависности од посматраног проблема у литератури су предложена теоријска решења за различите типове таласа. На пример, за Рејлијеве и Ламбове таласе [168], за Ламбове [162], за запреминске [169], [170].

Према [162] теоријско, или формално, решење за померања из једначине кретања у комплексној равни може се представити у облику:

$$(u, v, w) = (U, V, W) e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)} \quad (7.5)$$

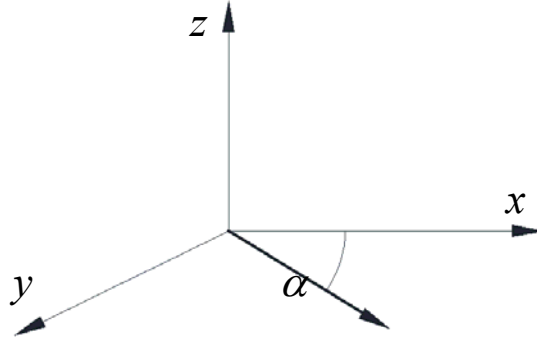
где је:

k - таласни број,

α - угао који правац пропагације таласа заклапа са позитивним делом x -осе усвојеног глобалног координатног система,

ω - кружна фреквенција таласа,

$U = U(z)$, $V = U(z)$, $W = U(z)$ - амплитуде претпостављених решења за померања.



Слика 7.1. Правац пропације Ламбових таласа, у равни слоја, у односу на глобални Декартов координатни систем

Ако се овако претпостављени облици померања замене у изразе за деформације, дефинисане једначином (1.30), компоненте тензора деформације добијају облике:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= Uk \cos(\alpha) \cdot i \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\
 \varepsilon_{yy} &= Vk \sin(\alpha) \cdot i \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\
 \varepsilon_{zz} &= W'_z e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\
 \gamma_{yz} &= (V'_z + Wk \sin(\alpha) \cdot i) e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\
 \gamma_{xz} &= (U'_z + Wk \cos(\alpha) \cdot i) e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\
 \gamma_{xy} &= (Uk \sin(\alpha) + Vk \cos(\alpha)) \cdot i \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

где U'_z , V'_z , W'_z , представљају прве изводе по z , па ће се убудуће, ради једноставности записа, писати само U' , V' , W' .

Облик вектора напона зависиће од изабране класе симетрије материјала, односно од облика матрице еластичности \mathbf{C} , па ће једначине кретања имати различите облике за различите класе симетрије.

За потпуно анизотропни материјал са триклиничким типом симетрије вектор напона имаће облик:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= (-iC_{15}U' - iC_{14}V' - iC_{13}W' + C_{11}k \cos(\alpha)U + C_{16}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) \\
 &\quad + C_{12}k \sin(\alpha)V + C_{15}k \cos(\alpha)W + C_{14}k \sin(\alpha)W) \cdot i \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\
 \sigma_{yy} &= (-iC_{25}U' - iC_{24}V' - iC_{23}W' + C_{12}k \cos(\alpha)U + C_{26}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) \\
 &\quad + C_{22}k \sin(\alpha)V + C_{25}k \cos(\alpha)W + C_{24}k \sin(\alpha)W) \cdot i \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\
 \sigma_{zz} &= (-iC_{35}U' - iC_{34}V' - iC_{33}W' + C_{13}k \cos(\alpha)U + C_{36}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) \\
 &\quad + C_{23}k \sin(\alpha)V + C_{35}k \cos(\alpha)W + C_{24}k \sin(\alpha)W) \cdot i \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yz} &= \left(-iC_{45}U' - iC_{44}V' - iC_{34}W' + C_{14}k \cos(\alpha)U + C_{46}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) \right. \\
&\quad \left. + C_{24}k \sin(\alpha)V + C_{45}k \cos(\alpha)Wi + C_{44}k \sin(\alpha)Wi \right) \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\
\tau_{xz} &= \left(-iC_{55}U' - iC_{45}V' - iC_{35}W' + C_{15}k \cos(\alpha)U + C_{56}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) \right. \\
&\quad \left. + C_{25}k \sin(\alpha)V + C_{55}k \cos(\alpha)Wi + C_{45}k \sin(\alpha)Wi \right) \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\
\tau_{xy} &= \left(-iC_{56}U' - iC_{46}V' - iC_{36}W' + C_{16}k \cos(\alpha)U + C_{66}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) \right. \\
&\quad \left. + C_{26}k \sin(\alpha)V + C_{56}k \cos(\alpha)Wi + C_{46}k \sin(\alpha)Wi \right) \cdot i \cdot e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Ако се сада овако дефинисане компоненте вектора напона, замене у једначинама кретања, (7.3) добијају се једначине кретања материјала са триклиничким типом симетрије у облику:

$$\begin{aligned}
&-C_{55}U''i - C_{45}V''i - C_{35}W''i + V' (C_{14}k \cos(\alpha) + C_{56}k \cos(\alpha) + C_{25}k \sin(\alpha) + C_{46}k \sin(\alpha)) \\
&+ U' (2C_{15}k \cos(\alpha) + 2C_{56}k \sin(\alpha)) + W' (C_{13}k \cos(\alpha) + C_{55}k \cos(\alpha) + C_{36}k \sin(\alpha) + C_{45}k \cos(\alpha)) \\
&+ Ui (C_{11}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{66}k^2 \sin^2(\alpha)U + C_{16}k^2 \sin(2\alpha)U) + \\
&+ Vi \left(C_{16}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{26}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{12}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{66}k^2 \sin(2\alpha) \right) \\
&+ Wi \left(C_{15}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{46}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{14}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{56}k^2 \sin(2\alpha) \right) = 0 \\
&-C_{45}U''i - C_{44}V''i - C_{34}W''i + U' (C_{14}k \cos(\alpha) + C_{56}k \cos(\alpha) + C_{25}k \cos(\alpha) + C_{46}k \sin(\alpha)) \\
&+ V' (2C_{46}k \cos(\alpha) + 2C_{24}k \sin(\alpha)) + W' (C_{36}k \cos(\alpha) + C_{45}k \cos(\alpha) + C_{23}k \sin(\alpha) + C_{44}k \sin(\alpha)) \\
&Ui \left(C_{16}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{26}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{12}k^2 \sin(2\alpha) \right) + \\
&Vi \left(C_{66}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{22}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{66}k^2 \sin(2\alpha) + C_{26}k^2 \sin(2\alpha) \right) \\
&+ Wi \left(C_{56}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{24}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{25}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{46}k^2 \sin(2\alpha) \right) = 0 \\
&-C_{35}U''i - C_{34}V''i - C_{33}W''i + U' (C_{13}k \cos(\alpha) + C_{55}k \cos(\alpha) + C_{36}k \sin(\alpha) + C_{45}k \sin(\alpha)) \\
&+ V' (C_{36}k \cos(\alpha) + C_{45}k \cos(\alpha) + C_{23}k \sin(\alpha) + C_{44}k \cos(\alpha)) + 2C_{35}k \sin(\alpha)W' + 2C_{34}k \sin(\alpha)W'' \\
&+ Ui \left(C_{15}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{46}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{14}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{56}k^2 \sin(2\alpha) \right) \\
&+ Vi \left(C_{56}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{24}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{25}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{46}k^2 \sin(2\alpha) \right) \\
&+ Wi (C_{55}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{44}k^2 \sin^2(\alpha) + C_{45}k^2 \sin(2\alpha)) = 0
\end{aligned} \tag{7.8}$$

За пропагацију Ламбових таласа у ламинату, уз претпоставку да су слојеви перфектно спојени, претпоставиће се решење за U , V и W у експоненцијалном облику:

$$U = U_p e^{ikpz}, \quad V = V_p e^{ikpz}, \quad W = W_p e^{ikpz} \tag{7.9}$$

Заменом овако претпостављених облика решења у једначини (7.8) добија се матрична форма једначине равнотеже у облику:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_p e^{ikpz} \\ V_p e^{ikpz} \\ W_p e^{ikpz} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (7.10)$$

где су коефицијенти матрице K_{ij} , $i, j = (1, 2, 3)$ облика:

$$\begin{aligned} K_{11} &= C_{11} \cos^2(\alpha) + C_{16} \sin(2\alpha) + 2C_{15}p \cos(\alpha) + C_{66} \sin^2(\alpha) \\ &\quad + 2C_{56}p \sin(\alpha) + C_{55}p^2 - \rho c_p^2, \\ K_{12} &= C_{16} \cos^2(\alpha) + C_{26} \sin^2(\alpha) + C_{45}p^2 + \frac{1}{2}C_{12} \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{66} \sin(2\alpha) \\ &\quad + C_{14} \cos(\alpha)p + C_{56} \cos(\alpha)p + C_{25} \sin(\alpha)p + C_{46} \sin(\alpha)p, \\ K_{13} &= C_{15} \cos^2(\alpha) + C_{46} \sin^2(\alpha) + C_{35}p^2 + \frac{1}{2}C_{14} \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{56} \sin(2\alpha) \\ &\quad + C_{13} \cos(\alpha)p + C_{55} \cos(\alpha)p + C_{36} \sin(\alpha)p + C_{45} \sin(\alpha)p, \\ K_{22} &= C_{66} \cos^2(\alpha) + C_{26} \sin(2\alpha) + 2C_{46}p \cos(\alpha) + C_{22} \sin^2(\alpha) \\ &\quad + 2C_{24}p \sin(\alpha) + C_{44}p^2 - \rho c_p^2, \\ K_{23} &= C_{56} \cos^2(\alpha) + C_{24} \sin^2(\alpha) + C_{34}p^2 + \frac{1}{2}C_{25} \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{46} \sin(2\alpha) \\ &\quad + C_{36}p \cos(\alpha) + C_{45} \cos(\alpha)p + C_{23} \sin(\alpha)p + C_{44} \sin(\alpha)p, \\ K_{33} &= C_{55} \cos^2(\alpha) + C_{45} \sin(2\alpha) + 2C_{35} \cos(\alpha)p + C_{44} \sin^2(\alpha) \\ &\quad + 2C_{34} \sin(\alpha)p + C_{33}p^2 - \rho c_p^2. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Нетривијална решења за U_p , V_p , W_p могу се добити једино под условом да је детерминанта матрице \mathbf{K} једнака нули, из чега се добија полиномна једначина шестог степена по p облика:

$$p^6 + B_1p^5 + A_1p^4 + B_2p^3 + A_2p^2 + B_3p + A_3 = 0, \quad (7.12)$$

где коефицијенти A_i, B_i , $i, j = (1, 2, 3)$ зависе од фазне брзине c_p , карактеристика материјала C_{ij} и таласног броја κ . Коефицијенти једначине (7.12) зависе од c_p , C_{ij} и угла пропагације таласа α .

За проблеме пропагације таласа у потпуно анизотропним композитним слојевима развијен је поступак за симболичко решавање проблема. Из написаног софтвера могу се прочитати сви коефицијенти полиномне једначине (7.12) који се овде неће писати из разлога обимности записа.

Како матрична једначина (7.10) представља хомогени систем три једначине са три непознате, није могуће наћи линеарно независна решења овог система, већ је неопходно фиксирати једну од променљивих U_p , V_p , W_p . Ако се фиксира U_p и са $R = \frac{V_p}{U_p}$ и $S = \frac{W_p}{U_p}$ означе односи

компоненти померања, систем једначина се своди на хомогени систем једначина облика:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ R \\ S \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (7.13)$$

одакле се добија да је:

$$R_j = \frac{K_{11}(p_j)K_{23}(p_j) - K_{13}(p_j)K_{12}(p_j)}{K_{13}(p_j)K_{22}(p_j) - K_{12}(p_j)K_{23}(p_j)} \quad (7.14)$$

$$S_j = \frac{K_{11}(p_j)K_{23}(p_j) - K_{12}(p_j)K_{13}(p_j)}{K_{12}(p_j)K_{33}(p_j) - K_{23}(p_j)K_{13}(p_j)},$$

при чему важи да је $j = 1 \div 6$ и одговара редном броју корена полиномне једначине (7.12).

Заменом последње једначине у једначини (7.10) добија се:

$$(U, V, W) = \sum_{j=1}^6 (1, R_j, S_j) U_{p_j} e^{ikp_j z} \quad (7.15)$$

Ако се сада компоненте померања дефинисане са (7.15) уврсте у изразе за напоне (7.7), уз контурне услове дате једначином (7.4), добија се:

$$\sigma_{zz} = \sum_{j=1}^6 G_{1j} i k e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)} e^{ikp_j z} = 0,$$

$$\tau_{yz} = \sum_{j=1}^6 G_{2j} i k e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)} e^{ikp_j z} = 0, \quad z = \pm \frac{h}{2} \quad (7.16)$$

$$\tau_{xz} = \sum_{j=1}^6 G_{3j} i k e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)} e^{ikp_j z} = 0,$$

при чему је:

$$G_{1j} = C_{13} \cos(\alpha) + C_{36} (\sin(\alpha) + C_{36} \cos(\alpha) R_j) + C_{23} \sin(\alpha) R_j + C_{35} (\cos(\alpha) S_j + C_{35} p_j) + C_{34} (\sin(\alpha) S_j + R_j p_j) + C_{33} S_j p_j,$$

$$G_{2j} = C_{14} \cos(\alpha) + C_{46} (\sin(\alpha) + C_{36} \cos(\alpha) R_j) + C_{24} \sin(\alpha) R_j + C_{45} (\cos(\alpha) S_j + C_{35} p_j) + C_{44} (\sin(\alpha) S_j + R_j p_j) + C_{34} S_j p_j, \quad (7.17)$$

$$G_{3j} = C_{15} \cos(\alpha) + C_{56} (\sin(\alpha) + C_{36} \cos(\alpha) R_j) + C_{25} \sin(\alpha) R_j + C_{55} (\cos(\alpha) S_j + C_{35} p_j) + C_{45} (\sin(\alpha) S_j + R_j p_j) + C_{35} S_j p_j.$$

У (7.16) израз $e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}$ није, у општем случају једнак нули, па следи да мора да буде задовољено:

$$\sum_{j=1}^6 G_{1j} e^{ikp_j z} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^6 G_{2j} e^{ikp_j z} = 0, \quad z = \pm \frac{h}{2} \quad (7.18)$$

$$\sum_{j=1}^6 G_{3j} e^{ikp_j z} = 0,$$

Ако се последња једначина напише матрично и израчунају вредности за $z = \frac{h}{2}$, односно

$z = -\frac{h}{2}$ добиће се две матрице типа 3×6 чијим обједињавањем је могуће добити матрицу типа

6×6 облика:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} G_{11}e^{ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{12}e^{ikp_2 \frac{h}{2}} & G_{13}e^{ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{14}e^{ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{15}e^{ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{16}e^{ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{21}e^{ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{22}e^{ikp_2 \frac{h}{2}} & G_{23}e^{ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{24}e^{ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{25}e^{ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{26}e^{ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{31}e^{ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{32}e^{ip_2 \frac{h}{2}} & G_{33}e^{ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{34}e^{ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{35}e^{ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{36}e^{ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{11}e^{-ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{12}e^{-ip_2 \frac{h}{2}} & G_{13}e^{-ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{14}e^{-ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{15}e^{-ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{16}e^{-ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{21}e^{-ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{22}e^{-ip_2 \frac{h}{2}} & G_{23}e^{-ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{24}e^{-ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{25}e^{-ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{26}e^{-ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{31}e^{-ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{32}e^{-ip_2 \frac{h}{2}} & G_{33}e^{-ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{34}e^{-ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{35}e^{-ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{36}e^{-ikp_6 \frac{h}{2}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \begin{pmatrix} U_{p_1} \\ U_{p_2} \\ U_{p_3} \\ U_{p_4} \\ U_{p_5} \\ U_{p_6} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.19)$$

За постојање нетривијалних решења једначине (7.19) потребно је да детерминанта матрице \mathbf{G} буде једнака нули тј. да је:

$$\begin{vmatrix} G_{11}e^{ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{12}e^{ikp_2 \frac{h}{2}} & G_{13}e^{ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{14}e^{ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{15}e^{ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{16}e^{ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{21}e^{ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{22}e^{ikp_2 \frac{h}{2}} & G_{23}e^{ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{24}e^{ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{25}e^{ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{26}e^{ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{31}e^{ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{32}e^{ikp_2 \frac{h}{2}} & G_{33}e^{ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{34}e^{ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{35}e^{ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{36}e^{ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{11}e^{-ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{12}e^{-ikp_2 \frac{h}{2}} & G_{13}e^{-ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{14}e^{-ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{15}e^{-ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{16}e^{-ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{21}e^{-ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{22}e^{-ikp_2 \frac{h}{2}} & G_{23}e^{-ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{24}e^{-ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{25}e^{-ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{26}e^{-ikp_6 \frac{h}{2}} \\ G_{31}e^{-ikp_1 \frac{h}{2}} & G_{32}e^{-ikp_2 \frac{h}{2}} & G_{33}e^{-ikp_3 \frac{h}{2}} & G_{34}e^{-ikp_4 \frac{h}{2}} & G_{35}e^{-ikp_5 \frac{h}{2}} & G_{36}e^{-ikp_6 \frac{h}{2}} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.20)$$

Последња релација у себи садржи дисперзионе релације оба таласна мода, симетричног и асиметричног. Због велике комплексности тешко је извршити јасну сепарацију ова два мода. У постојећој литератури [168] не постоје релације за поменути проблем.

Настали проблеми сепарације модова могу се отклонити снижавањем реда анизотропије материјала [151.]. Као што је презентовано у поглављу 1, увођењем додатне равни симетрије триклиничка класа материјала се своди на моноклинички тип са 13 независних коефицијената. Тада конститутивна матрица добија облик:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (7.21)$$

што јасно указује да је у једначинама изведеним за триклинички тип симетрије могуће уклонити све чланове који садрже елементе конститутивне матрице $C_{14}, C_{15}, C_{24}, C_{25}, C_{34}, C_{35}, C_{46}, C_{56}$.

На основу свега наведеног, компоненте тензора напона добијају облик:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (-iC_{13}W' + C_{11}k \cos(\alpha)U + C_{16}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) + C_{12}k \sin(\alpha)V)ie^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\ \sigma_{yy} &= (-iC_{23}W' + C_{12}k \cos(\alpha)U + C_{26}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) + C_{22}k \sin(\alpha)V)ie^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\ \sigma_{zz} &= (-iC_{33}W' + C_{13}k \cos(\alpha)U + C_{36}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) + C_{23}k \sin(\alpha)V)ie^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\ \tau_{yz} &= (-iC_{45}U' - iC_{44}V' + C_{45}k \cos(\alpha)Wi + C_{44}k \sin(\alpha)Wi)e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\ \tau_{xz} &= (-iC_{55}U' - iC_{45}V' + C_{55}k \cos(\alpha)Wi + C_{45}k \sin(\alpha)Wi)e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \\ \tau_{xy} &= (-iC_{36}W' + C_{16}k \cos(\alpha)U + C_{66}k(\sin(\alpha)U + \cos(\alpha)V) + C_{26}k \sin(\alpha)V)ie^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha - \omega t)}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

једначине кретања облик:

$$\begin{aligned} &-C_{55}U''i - C_{45}V''i - C_{35}W''i + V'(C_{14}k \cos(\alpha) + C_{56}k \cos(\alpha) + C_{25}k \sin(\alpha) + C_{46}k \sin(\alpha)) \\ &+ U'(2C_{15}k \cos(\alpha) + 2C_{56}k \sin(\alpha)) + W'(C_{13}k \cos(\alpha) + C_{55}k \cos(\alpha) + C_{36}k \sin(\alpha) + C_{45}k \cos(\alpha)) \\ &+ Ui(C_{11}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{66}k^2 \sin^2(\alpha)U + C_{16}k^2 \sin(2\alpha)U) + \\ &+ Vi\left(C_{16}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{26}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{12}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{66}k^2 \sin(2\alpha)\right) \\ &+ Wi\left(C_{15}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{46}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{14}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{56}k^2 \sin(2\alpha)\right) = 0 \\ &-C_{45}U''i - C_{44}V''i - C_{34}W''i + U'(C_{14}k \cos(\alpha) + C_{56}k \cos(\alpha) + C_{25}k \cos(\alpha) + C_{46}k \sin(\alpha)) \\ &+ V'(2C_{46}k \cos(\alpha) + 2C_{24}k \sin(\alpha)) + W'(C_{36}k \cos(\alpha) + C_{45}k \cos(\alpha) + C_{23}k \sin(\alpha) + C_{44}k \sin(\alpha)) \\ &+ Ui\left(C_{16}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{26}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{12}k^2 \sin(2\alpha)\right) \\ &+ Vi\left(C_{66}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{22}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{66}k^2 \sin(2\alpha) + C_{26}k^2 \sin(2\alpha)\right) \\ &+ Wi\left(C_{56}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{24}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{25}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{46}k^2 \sin(2\alpha)\right) = 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned}
& -C_{35}U''i - C_{34}V''i - C_{33}W''i + U'(C_{13}k \cos(\alpha) + C_{55}k \cos(\alpha) + C_{36}k \sin(\alpha) + C_{45}k \sin(\alpha)) \\
& + V'(C_{36}k \cos(\alpha) + C_{45}k \cos(\alpha) + C_{23}k \sin(\alpha) + C_{44}k \cos(\alpha)) + 2C_{35}k \sin(\alpha)W' + 2C_{34}k \sin(\alpha)W'' \\
& + Ui \left(C_{15}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{46}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{14}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{56}k^2 \sin(2\alpha) \right) \\
& + Vi \left(C_{56}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{24}k^2 \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}C_{25}k^2 \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{46}k^2 \sin(2\alpha) \right) \\
& + Wi(C_{55}k^2 \cos^2(\alpha) + C_{44}k^2 \sin^2(\alpha) + C_{45}k^2 \sin(2\alpha)) = 0,
\end{aligned}$$

а коефицијенти матрице \mathbf{K} :

$$\begin{aligned}
K_{11} &= C_{11} \cos^2(\alpha) + C_{16} \sin(2\alpha) + C_{66} \sin^2(\alpha) + C_{55}p^2 - \rho c_p^2, \\
K_{12} &= C_{16} \cos^2(\alpha) + C_{26} \sin^2(\alpha) + C_{45}p^2 + \frac{1}{2}C_{12} \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}C_{66} \sin(2\alpha), \\
K_{13} &= C_{13} \cos(\alpha)p + C_{55} \cos(\alpha)p + C_{36} \sin(\alpha)p + C_{45} \sin(\alpha)p, \\
K_{22} &= C_{66} \cos^2(\alpha) + C_{26} \sin(2\alpha) + C_{22} \sin^2(\alpha) + C_{44}p^2 - \rho c_p^2, \\
K_{23} &= C_{36} \cos(\alpha)p + C_{45} \cos(\alpha)p + C_{23} \sin(\alpha)p + C_{44} \sin(\alpha)p, \\
K_{33} &= C_{55} \cos^2(\alpha) + C_{45} \sin(2\alpha) + C_{44} \sin^2(\alpha) + C_{33}p^2 - \rho c_p^2.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Због изостављања линеарних чланова у коефицијентима C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} у полиномној једначини (7.12), се не појављују сви сабирци који не садрже непарне степене n , па се самим тим полиномна једначина своди на облик:

$$p^6 + A_1 p^4 + A_2 p^2 + A_3 = 0 \tag{7.25}$$

где коефицијенти A_1 , A_2 , A_3 зависе од константи еластичности, густине материјала, фазне брзине и угла пропагације. Као и код анизотропног материјала тачан запис ових коефицијента неће бити приказан из разлога обимности. Они се по потреби могу прочитати у софтверу који прати ову дисертацију.

Једначина (7.25) представља бикубну једначину, тј. кубну једначину по p^2 , што јасно указује да међу шест коренова ове једначине постоји веза $p_{l+1} = p_l$, $l = 1, 2, 3$, што директно проузрокује везу између R_j , S_j , и G_{lj} , $l = (1 \div 3)$, $j = (1 \div 6)$, у облику:

$$R_{l+1} = -R_l, S_{l+1} = -S_l, G_{l,l+1} = -G_{l,l}, l = 1, 2, 3 \tag{7.26}$$

Ако се погледају коефицијенти матрице \mathbf{K} и изрази за R , S , и G_{lj} , $l = (1 \div 3)$, $j = (1 \div 6)$, може се закључити следеће:

- Коефицијенти K_{13} , K_{23} , су непарне функције од p јер зависе од линеарног члана p , док су остали коефицијенти парне функције од p , јер директно зависе од p^2 .
- Како је производ две непарне или две парне функције парна функција, а производ парне и непарне функције непарна функција, то ће производи $K_{11}K_{23}$, $K_{13}K_{12}$, $K_{13}K_{22}$, $K_{12}K_{23}$ бити непарне функције од p , док ће производи $K_{12}(p_j)K_{33}(p_j)$, $K_{23}(p_j)K_{13}(p_j)$ бити парне функције.
- Даље, ако се формира композиција функција у смислу збира или разике то неће утицати на парност.

—Конечно, узимајући у обзир да за количнике парних и непарних функција важе исти односи као и за производе, следи:

Бројилац у рационалном облику функције R је непарна функција, као и именилац, па се закључује да је функција R **парна функције** од p ,

Бројилац у рационалном облику функције S је непарна функција, док је именилац парна, па се закључује да је функција S **непарна функције** од p ,

За изведене закључке о парности функција R и S јасно је уочљиво да су зборови и разлике које је јављају у изразима за G_{lj} , $l=(1\div 3)$, $j=(1\div 6)$ различите парности, тј. G_{1j} је **парна функција** од p , док су G_{2j} и G_{3j} **непарне функције** од p .

Сада је за јасно изведене парности функција R , S , и G_{lj} , могуће писати:

$$R_{l+1} = R_l, S_{l+1} = S_l, G_{1,l+1} = G_{1,l}, G_{2,l+1} = -G_{2,l}, G_{3,l+1} = -G_{3,l}, l = 1, 2, 3 \quad (7.27)$$

Релација (7.27) је од примарног значаја за поједностављивање поступка добијања дисперзионих релација из једначине (7.20). Ако се једначина (7.27) замени у (7.20), добија се:

$$\begin{vmatrix} G_{11}e^{ikp_1\frac{h}{2}} & G_{11}e^{-ikp_1\frac{h}{2}} & G_{13}e^{ikp_3\frac{h}{2}} & G_{13}e^{-ikp_3\frac{h}{2}} & G_{15}e^{ikp_5\frac{h}{2}} & G_{15}e^{-ikp_5\frac{h}{2}} \\ G_{21}e^{ikp_1\frac{h}{2}} & -G_{21}e^{-ikp_1\frac{h}{2}} & G_{23}e^{ikp_3\frac{h}{2}} & -G_{23}e^{-ikp_3\frac{h}{2}} & G_{25}e^{ikp_5\frac{h}{2}} & -G_{25}e^{-ikp_5\frac{h}{2}} \\ G_{31}e^{ikp_1\frac{h}{2}} & -G_{31}e^{-ikp_1\frac{h}{2}} & G_{33}e^{ikp_3\frac{h}{2}} & -G_{33}e^{-ikp_3\frac{h}{2}} & G_{35}e^{ikp_5\frac{h}{2}} & -G_{35}e^{-ikp_5\frac{h}{2}} \\ G_{11}e^{-ikp_1\frac{h}{2}} & G_{11}e^{ikp_1\frac{h}{2}} & G_{13}e^{-ikp_3\frac{h}{2}} & G_{13}e^{ikp_3\frac{h}{2}} & G_{15}e^{-ikp_5\frac{h}{2}} & G_{15}e^{ikp_5\frac{h}{2}} \\ G_{21}e^{-ikp_1\frac{h}{2}} & -G_{21}e^{ikp_1\frac{h}{2}} & G_{23}e^{-ikp_3\frac{h}{2}} & -G_{23}e^{ikp_3\frac{h}{2}} & G_{25}e^{-ikp_5\frac{h}{2}} & -G_{25}e^{ikp_5\frac{h}{2}} \\ G_{31}e^{-ikp_1\frac{h}{2}} & -G_{31}e^{ikp_1\frac{h}{2}} & G_{33}e^{-ikp_3\frac{h}{2}} & -G_{33}e^{ikp_3\frac{h}{2}} & G_{35}e^{-ikp_5\frac{h}{2}} & -G_{35}e^{ikp_5\frac{h}{2}} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.28)$$

Поступак даље трансформације детаљно је описан у [169]. Јасно раздвајање модова на симетрични и антисиметрични део врши се уз помоћ алебарских трансформација кроз неколико корака:

У првом кораку се врши додавање негативне друге колоне првој, негативне четврте трећој и негативне шесте петој и истовремено прве другој, четврте петој и пете шестој, одакле се добија:

$$\begin{vmatrix} G_{11}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} - e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{11}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} + e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{13}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} - e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{13}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} + e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{15}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} - e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) & G_{15}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} + e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) \\ G_{21}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} + e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{21}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} - e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{23}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} + e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{23}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} - e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{25}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} + e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) & G_{25}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} - e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) \\ G_{31}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} + e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{31}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} - e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{33}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} + e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{33}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} - e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{35}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} + e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) & G_{35}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} - e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) \\ G_{11}\left(e^{-ikp_1\frac{h}{2}} - e^{ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{11}\left(e^{-ikp_1\frac{h}{2}} + e^{ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{13}\left(e^{-ikp_3\frac{h}{2}} - e^{ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{13}\left(e^{-ikp_3\frac{h}{2}} + e^{ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{15}\left(e^{-ikp_5\frac{h}{2}} - e^{ikp_5\frac{h}{2}}\right) & G_{15}\left(e^{-ikp_5\frac{h}{2}} + e^{ikp_5\frac{h}{2}}\right) \\ G_{21}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} + e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{21}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} - e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{23}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} + e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{23}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} - e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{25}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} + e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) & G_{25}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} - e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) \\ G_{31}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} + e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{31}\left(e^{ikp_1\frac{h}{2}} - e^{-ikp_1\frac{h}{2}}\right) & G_{33}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} + e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{33}\left(e^{ikp_3\frac{h}{2}} - e^{-ikp_3\frac{h}{2}}\right) & G_{35}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} + e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) & G_{35}\left(e^{ikp_5\frac{h}{2}} - e^{-ikp_5\frac{h}{2}}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.29)$$

Даље се коришћењем Ојлерове формуле $\left(\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$ преводи на облик:

$$\begin{vmatrix} iG_{11} \sin\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & G_{11} \cos\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & iG_{13} \sin\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & G_{13} \cos\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & iG_{15} \sin\left(p_5 \frac{h}{2}\right) & G_{15} \cos\left(p_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{21} \cos\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & iG_{21} \sin\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & G_{23} \cos\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & iG_{23} \sin\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & G_{25} \cos\left(p_5 \frac{h}{2}\right) & iG_{25} \sin\left(p_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{31} \cos\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & iG_{31} \sin\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & G_{33} \cos\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & iG_{33} \sin\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & G_{35} \cos\left(p_5 \frac{h}{2}\right) & iG_{35} \sin\left(p_5 \frac{h}{2}\right) \\ -iG_{11} \sin\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & G_{11} \cos\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & -iG_{13} \sin\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & G_{13} \cos\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & -iG_{15} \sin\left(p_5 \frac{h}{2}\right) & G_{15} \cos\left(p_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{21} \cos\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & -iG_{21} \sin\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & G_{23} \cos\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & -iG_{23} \sin\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & G_{25} \cos\left(p_5 \frac{h}{2}\right) & -iG_{25} \sin\left(p_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{31} \cos\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & -iG_{31} \sin\left(p_1 \frac{h}{2}\right) & G_{33} \cos\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & -iG_{33} \sin\left(p_3 \frac{h}{2}\right) & G_{35} \cos\left(p_5 \frac{h}{2}\right) & -iG_{35} \sin\left(p_5 \frac{h}{2}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.30)$$

У другом кораку променом знакова четврте, пете и шесте врсте и њиховим сабирањем са првом, другом и трећом врстом редом, добија се:

$$\begin{vmatrix} iG_{11} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & G_{11} \cos\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & iG_{13} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & G_{13} \cos\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & iG_{15} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & G_{15} \cos\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{21} \cos\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & iG_{21} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & G_{23} \cos\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & iG_{23} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & G_{25} \cos\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & iG_{25} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{31} \cos\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & iG_{31} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & G_{33} \cos\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & iG_{33} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & G_{35} \cos\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & iG_{35} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \\ 2iG_{11} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & 2iG_{13} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & 2iG_{15} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & 0 \\ 0 & 2iG_{21} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & 2iG_{23} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & 2iG_{25} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \\ 0 & 2iG_{31} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & 2iG_{33} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & 2iG_{35} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.31)$$

У трећем кораку дељењем четврте, пете и шесте врсте са два, а затим множењем са -1 и додавањем првој, другој и трећој врсти редом се добија:

$$\begin{vmatrix} 0 & G_{11} \cos\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{13} \cos\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{15} \cos\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{21} \cos\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{23} \cos\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{25} \cos\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & 0 \\ G_{31} \cos\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{33} \cos\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{35} \cos\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & 0 \\ iG_{11} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{13} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{15} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & 0 \\ 0 & iG_{21} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{23} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{25} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \\ 0 & iG_{31} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{33} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{35} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.32)$$

У четвртном кораку се замене места првој и четвртој врсти:

$$\begin{vmatrix} iG_{11} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{13} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{15} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & 0 \\ G_{21} \cos\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{23} \cos\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{25} \cos\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & 0 \\ G_{31} \cos\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{33} \cos\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{35} \cos\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) & 0 \\ 0 & G_{11} \cos\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{13} \cos\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & G_{15} \cos\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \\ 0 & iG_{21} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{23} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{25} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \\ 0 & iG_{31} \sin\left(\kappa p_1 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{33} \sin\left(\kappa p_3 \frac{h}{2}\right) & 0 & iG_{35} \sin\left(\kappa p_5 \frac{h}{2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (7.33)$$

У последњем кораку се једноставном заменом места колонама и дељењем прве, пете и шесте врсте са имагинарном јединицом i добија потпуно раздвајање на симетрични и антисиметрични мод:

$$\begin{vmatrix} G_{11} \sin\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{13} \sin\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{15} \sin\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} \cos\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{23} \cos\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{25} \cos\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ G_{31} \cos\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{33} \cos\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{35} \cos\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{11} \cos\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{13} \cos\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{15} \cos\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & G_{21} \sin\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{23} \sin\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & iG_{25} \sin\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & G_{31} \sin\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{33} \sin\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{35} \sin\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) \end{vmatrix} = 0, \quad (7.34)$$

што даље води ка дисперзионим релацијама симетричног:

$$\begin{vmatrix} G_{11} \sin\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{13} \sin\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{15} \sin\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{21} \cos\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{23} \cos\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{25} \cos\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{31} \cos\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{33} \cos\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{35} \cos\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) \end{vmatrix} = 0, \quad (7.35)$$

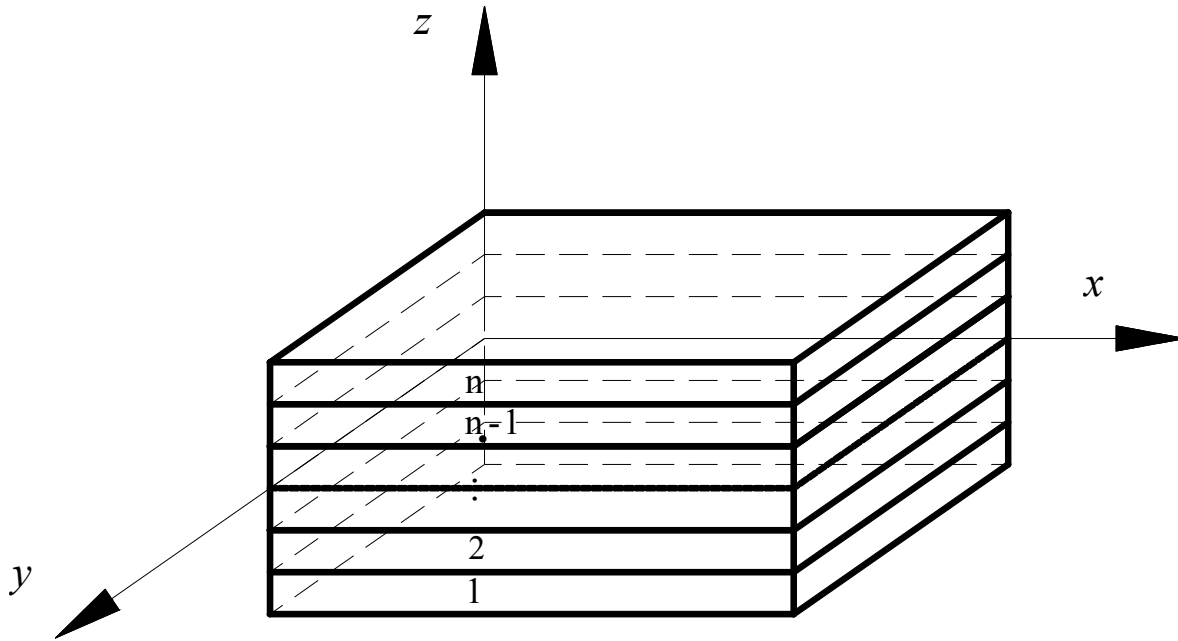
односно антисиметричног мода:

$$\begin{vmatrix} G_{11} \cos\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{13} \cos\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{15} \cos\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{21} \sin\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{23} \sin\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{25} \sin\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) \\ G_{31} \sin\left(kp_1 \frac{h}{2}\right) & G_{33} \sin\left(kp_3 \frac{h}{2}\right) & G_{35} \sin\left(kp_5 \frac{h}{2}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.36)$$

За анализу пропагације таласа у ламинату потребна је додатна математичка процедура која ће бити описана у наредном поглављу.

7.1.1 Метод трансфер матрице

У претходном поглављу извршена је анализа пропагације таласа у једном слоју композитног материјала, односно у једној ламини. Како се ламинат састоји од више слојева неопходно је било одредити поступак којим ће моћи да се анализира пропагација кроз вишеслојне материјале. Проблем пропагације таласа кроз вишеслојне материјале, доста је сличан геофизичким сеизмичким проблемима, јер земљина кора такође има слојевиту структуру. Пропагација таласа заснована на 3D еластичној теорији се ефикасно проучава техником која је названа метод трансфер или пропагатор матрице [92]. Начелно, постоји још једна техника за решавање ове врсте проблема, која је доста слична поменутој техници која се назива метода збирне матрице (*assemble matrix method*). Метод пропагатор матрице, омогућава добијање тачног решења проблема пропагације, аналитичким путем. Као и код свих претходно описаних аналитичких метода, и код ове методе се могу јавити потешкоће које настају као резултат великог степена анизотропије конституената ламината. Из тог разлога за ефикасну примену ове методе неопходно је извршити поједностављивање поступка увођењем додатних класа симетрије материјала.



Слика 7.2. Редни бројеви слојева у ламинату

Ако се посматра ламинат састављен од n -слојева приказан на слици 7.2, уз помоћ једначина (7.5), (7.9), (7.15), (7.16) решење за померања и нормализоване вредности напона на контурама могуће је писати у облику:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{xz} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}_{6 \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{21} & G_{21} & G_{21} & G_{21} & G_{21} & G_{21} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{6 \times 6}} \underbrace{\begin{Bmatrix} E_{p1} \\ E_{p2} \\ E_{p3} \\ E_{p4} \\ E_{p5} \\ E_{p6} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{p1} \\ U_{p2} \\ U_{p3} \\ U_{p4} \\ U_{p5} \\ U_{p6} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{E}_{6 \times 6} \mathbf{U}_{6 \times 1}} = \mathbf{0} \quad (7.37)$$

где је \mathbf{E} дијагонална матрица типа 6×6 , чији су дијагонални коефицијенти:

$$E_{pi} = e^{ikp_i z}, \quad i = (1 \div 6), \quad (7.38)$$

док је нормализација напона на контурама извршена као:

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{ik}, \quad \tilde{\tau}_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{ik}, \quad \tilde{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{ik}. \quad (7.39)$$

Ради поједностављивања записа једначина (7.37) може се матрично приказати као:

$$\mathbf{P}_{(k)}^{\pm} = \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^{\pm} \mathbf{U}_{(k)}, \quad (7.40)$$

где индекс k представља редни број слоја и може узимати вредности $k = (1 \div n)$. Горњи индекс \pm одговара горњој, односно доњој, граници слоја редом. Матрица $\mathbf{D}_{(k)}$ типа 6×6 представља **локалну трансфер или пропатор матрицу**. Ако се једначина (7.37) раздвоји на две једначине које одговарају горњој, односно доњој граници k -слоја може се писати:

$$\mathbf{P}_{(k)}^+ = \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+ \mathbf{U}_{(k)} \quad (7.41)$$

$$\mathbf{P}_{(k)}^- = \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^- \mathbf{U}_{(k)} \quad (7.42)$$

Матричним множењем једначина (7.41), односно (7.42) са леве стране са $(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+)^{-1}$, односно $(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^-)^{-1}$ добија се:

$$(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+)^{-1} \mathbf{P}_{(k)}^+ = \underbrace{(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+)^{-1} \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+}_{\mathbf{I}} \mathbf{U}_{(k)} = \mathbf{U}_{(k)} \quad (7.43)$$

$$(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^-)^{-1} \mathbf{P}_{(k)}^- = \underbrace{(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^-)^{-1} \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^-}_{\mathbf{I}} \mathbf{U}_{(k)} = \mathbf{U}_{(k)} \quad (7.44)$$

Изједначавањем левих страна једначина (7.43) и (7.44) даље следи:

$$(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+)^{-1} \mathbf{P}_{(k)}^+ = (\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^-)^{-1} \mathbf{P}_{(k)}^- \quad (7.45)$$

Даље, множењем (7.45) са $(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+)$ добија се:

$$\underbrace{(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+)(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+)^{-1}}_{\mathbf{I}} \mathbf{P}_{(k)}^+ = (\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+)(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^-)^{-1} \mathbf{P}_{(k)}^-, \quad (7.46)$$

односно,

$$\mathbf{P}_{(k)}^+ = (\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+)(\mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^-)^{-1} \mathbf{P}_{(k)}^-. \quad (7.47)$$

Затим је могуће искористити алгебарско правило $((\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1})$ па се може писати:

$$\mathbf{P}_{(k)}^+ = \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{E}_{(k)}^+ \underbrace{(\mathbf{E}_{(k)}^-)^{-1} (\mathbf{D}_{(k)})^{-1}}_{\mathbf{T}_{(k)}} \mathbf{P}_{(k)}^- = \mathbf{T}_{(k)} \mathbf{P}_{(k)}^- \quad (7.48)$$

На међуслојевима важи да је $z_k^+ = z_{k+1}^-$, па узимајући у обзир да у једначини (7.43-7.48) једино $\mathbf{E}_{(k)}^\pm$, односно $\mathbf{T}_{(k)}$ зависе од z , није тешко закључити да важи релација:

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_{k+1}^- \quad (7.49)$$

Ако се једначине (7.48) комбинују са једначинама (7.49) може се писати:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{(1)}^+ &= \mathbf{T}_{(1)} \mathbf{P}_{(1)}^- \\
\mathbf{P}_{(2)}^+ &= \mathbf{T}_{(2)} \mathbf{P}_{(1)}^+ \\
\mathbf{P}_{(3)}^+ &= \mathbf{T}_{(3)} \mathbf{P}_{(2)}^+ \\
\mathbf{P}_{(4)}^+ &= \mathbf{T}_{(4)} \mathbf{P}_{(3)}^+ \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\mathbf{P}_{(n)}^+ &= \mathbf{T}_{(n)} \mathbf{P}_{(n-1)}^+
\end{aligned} \tag{7.50}$$

Матричним множењем сваке од једначина са одговарајућом инверзном матрицом матрице $\mathbf{P}_{(i)}^+$, $i = (1 \div (n-1))$ са десне стране добија се:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{(1)}^+ \left(\mathbf{P}_{(1)}^- \right)^{-1} &= \mathbf{T}_{(1)} \underbrace{\mathbf{P}_{(1)}^- \left(\mathbf{P}_{(1)}^- \right)^{-1}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{T}_{(1)} \\
\mathbf{P}_{(2)}^+ \left(\mathbf{P}_{(1)}^+ \right)^{-1} &= \mathbf{T}_{(2)} \underbrace{\mathbf{P}_{(1)}^+ \left(\mathbf{P}_{(1)}^+ \right)^{-1}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{T}_{(2)} \\
\mathbf{P}_{(3)}^+ \left(\mathbf{P}_{(2)}^+ \right)^{-1} &= \mathbf{T}_{(3)} \underbrace{\mathbf{P}_{(2)}^+ \left(\mathbf{P}_{(2)}^+ \right)^{-1}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{T}_{(3)} \\
\mathbf{P}_{(4)}^+ \left(\mathbf{P}_{(3)}^+ \right)^{-1} &= \mathbf{T}_{(4)} \underbrace{\mathbf{P}_{(3)}^+ \left(\mathbf{P}_{(3)}^+ \right)^{-1}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{T}_{(4)} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\mathbf{P}_{(n)}^+ \left(\mathbf{P}_{(n-1)}^+ \right)^{-1} &= \mathbf{T}_{(n)} \underbrace{\mathbf{P}_{(n-1)}^+ \left(\mathbf{P}_{(n-1)}^+ \right)^{-1}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{T}_{(n)}
\end{aligned} \tag{7.51}$$

Матричним множењем свих страна претходних n једначина са леве стране добија се:

$$\mathbf{P}_{(n)}^+ \underbrace{\left(\mathbf{P}_{(n-1)}^+ \right)^{-1} \mathbf{P}_{(n-1)}^+ \left(\mathbf{P}_{(n-2)}^+ \right)^{-1} \cdots \mathbf{P}_{(4)}^+ \left(\mathbf{P}_{(3)}^+ \right)^{-1} \mathbf{P}_{(3)}^+ \left(\mathbf{P}_{(2)}^+ \right)^{-1} \mathbf{P}_{(2)}^+ \left(\mathbf{P}_{(1)}^+ \right)^{-1} \mathbf{P}_{(1)}^+ \left(\mathbf{P}_{(1)}^- \right)^{-1}}_{\mathbf{I}} = \underbrace{\mathbf{T}_{(n)} \mathbf{T}_{(n-1)} \mathbf{T}_{(n-2)} \mathbf{T}_{(n-3)} \cdots \mathbf{T}_{(1)}}_{\mathbf{T}} \tag{7.52}$$

односно:

$$\mathbf{P}_{(n)}^+ \left(\mathbf{P}_{(1)}^- \right)^{-1} = \mathbf{T} \tag{7.53}$$

Даљим множењем са десне стране са $\left(\mathbf{P}_{(1)}^- \right)$ се добија:

$$\mathbf{P}_{(n)}^+ = \mathbf{T} \mathbf{P}_{(1)}^- \tag{7.54}$$

Једначина (7.54) представља везу између померања и напона на дну првог слоја, са напонима на врху последњег слоја у ламинату, док матрица $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{(n)} \mathbf{T}_{(n-1)} \mathbf{T}_{(n-2)} \mathbf{T}_{(n-3)} \cdots \mathbf{T}_{(1)}$ представља **глобалну трансфер, односно пропагатор матрицу**.

Ако се једначина (7.54) представи преко коефицијената матрице, добиће се:

$$\begin{pmatrix} u_n^+ \\ v_n^+ \\ w_n^+ \\ (\tilde{\sigma}_{zz})_n^+ \\ (\tilde{\tau}_{yz})_n^+ \\ (\tilde{\tau}_{xz})_n^+ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^- \\ v_1^- \\ w_1^- \\ (\tilde{\sigma}_{zz})_1^- \\ (\tilde{\tau}_{yz})_1^- \\ (\tilde{\tau}_{xz})_1^- \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

Узимајући у обзир претпоставку да су контурне површи слободне од напона, односно једначину (7.16), једначина (7.55) се своди на облик:

$$\begin{pmatrix} u_n^+ \\ v_n^+ \\ w_n^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^- \\ v_1^- \\ w_1^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.56)$$

Да би једначина (7.56) имала нетривијална решења, јасно је да мора бити задовољен услов:

$$\begin{vmatrix} T_{41} & T_{42} & T_{43} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.57)$$

Једначина (7.57) представља дисперзиону релацију ламината, чије експлицитно аналитичко решење није лако наћи. Могућност добијања чак и нумеричког решења зависиће и од степена анизотропије и хетерогености самог ламината.

7.2 Примена HSDT теорија у анализи пропагације еластичних таласа

У претходном делу од два поменута теоријска приступа у анализи пропагације еластичних таласа описан је приступ заснован на 3D еластичној теорији. Овим проблемима бавили су се аутори у радовима [95-99], [162-167]. У новије време, са интензивним развојем ламинатних теорија, уведен је и приступ анализе пропагације пролазних таласа применом смицајних деформационих теорија вишег реда. Овај поступак је знатно мање експлоатисан, од поступка континуалности напона. Примена овог поступка је сврсисходнија за нумеричке методе, али представља апроксимацију у односу на 3D теорије еластичности. Употреба ових теорија је заснована на динамичким једначинама кретања дефинисаним у поглављу 4. Проблем је ограничен на пропагацију Ламбових таласа у ламинатним плочама чије су површине слободне од напона. Посматрана је пропагација раванског таласа у xu равни глобалног координатног система, у односу на који се посматра ламинат (слике 7.1 и 7.2). Правац пропагације таласа дефинисан је углом α у односу на позитиван део x -осе усвојеног глобалног координатног система, тако да су пројекције таласног броја k дефинисане као

$k_x = k \cos(\alpha)$ и $k_y = k \sin(\alpha)$. Вршено је поређење добијених резултата са резултатима 3D еластичне теорије датим у литератури. Конститутивне матрице су дефинисане преко инжењерских константи, а затим и преко константи еластичности.

Проблеми су разматрани коришћењем SSDT и TSDT теорија описаних детаљно у поглављу 2. У Матлабу је развијен софтвер за анализу пропагације Ламбових таласа преко симболичких променљивих као и за добијање дисперзионих релација и дијаграма фазних брзина аналитичким путем. Дат је потпуно јасан дијаграмски приказ поклапања модова у дисперзионим кривама.

7.2.1 Примена смицајне деформационе теорије другог реда у анализи пропагације еластичних таласа кроз симетричне композитне ламинате

За ову теорију усвојено поље померања дефинисано је једначином (2.8), док је облик деформација дат једначином (3.9). Макромеханичка анализа са циљем дефинисања оптерећења по јединици површине описана је у поглављу 3.3.2. За тако дефинисана оптерећења добијене су једначине кретања дате једначином (4.56). Претпостављени облици аналитичких решења за овај тип проблема дати су у [151] као:

$$\begin{aligned} u_0 &= U_0 e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]}; \quad v_0 = V_0 e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]}; \quad w_0 = W_0 e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]}; \\ \psi_z &= \Psi_z e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]}; \quad \phi_x = \Phi_0 e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]}; \quad \phi_y = \Phi_y e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]}; \\ \psi_x &= \Psi_x e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]}; \quad \psi_y = \Psi_y e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]}; \end{aligned} \quad (7.58)$$

где је ω угаона фреквенција.

Ако се сада претпостављени облици решења замене у једначинама кретања и употребе елементарне алгебарске трансформације матрица, једначина кретања се трансформише у матрични облик:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} & L_{17} & L_{18} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & L_{26} & L_{27} & L_{28} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} & L_{37} & L_{38} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45} & L_{46} & L_{47} & L_{48} \\ L_{15} & L_{25} & L_{35} & L_{45} & L_{55} & L_{56} & L_{57} & L_{58} \\ L_{16} & L_{26} & L_{36} & L_{46} & L_{56} & L_{66} & L_{67} & L_{68} \\ L_{17} & L_{27} & L_{37} & L_{47} & L_{57} & L_{67} & L_{77} & L_{78} \\ L_{18} & L_{28} & L_{38} & L_{48} & L_{58} & L_{68} & L_{78} & L_{88} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \\ \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_z \\ \Phi_x \\ \Phi_y \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.59)$$

При чему су коефицијенти L_{ij} , ($i, j = 1 \div 8$) дефинисани као:

$$\begin{aligned}
L_{11} &= A_{11}k_x^2 + 2A_{16}k_xk_y + A_{66}k_y^2 - \omega^2 I_0 \\
L_{12} &= A_{16}k_x^2 + (A_{12} + A_{66})k_xk_y + A_{26}k_y^2 \\
L_{13} &= 0 \\
L_{14} &= B_{11}k_x^2 + 2B_{16}k_xk_y + B_{66}k_y^2 - \omega^2 I_1 \\
L_{15} &= B_{16}k_x^2 + (B_{12} + B_{66})k_xk_y + B_{26}k_y^2 \\
L_{16} &= -i\kappa_3 (A_{13}k_x + A_{36}k_y) \\
L_{17} &= \frac{1}{2} (D_{11}k_x^2 + 2D_{16}k_xk_y + D_{66}k_y^2 - \omega^2 I_2) \\
L_{18} &= \frac{1}{2} (D_{16}k_x^2 + (D_{12} + D_{66})k_xk_y + D_{26}k_y^2) \\
L_{22} &= A_{66}k_x^2 + 2A_{26}k_xk_y + A_{22}k_y^2 - \omega^2 I_0 \\
L_{23} &= 0 \\
L_{24} &= L_{15} = B_{16}k_x^2 + (B_{12} + B_{66})k_xk_y + B_{26}k_y^2 \\
L_{25} &= B_{66}k_x^2 + 2B_{26}k_xk_y + B_{22}k_y^2 - \omega^2 I_1 \\
L_{26} &= -i\kappa_3 (A_{36}k_x + A_{23}k_y) \\
L_{27} &= L_{18} = \frac{1}{2} (D_{16}k_x^2 + (D_{12} + D_{66})k_xk_y + D_{26}k_y^2) \\
L_{28} &= \frac{1}{2} (D_{66}k_x^2 + 2D_{26}k_xk_y + D_{22}k_y^2 - \omega^2 I_2) \\
L_{33} &= -(\kappa_1^2 A_{55}k_x^2 + 2\kappa_1\kappa_2 A_{45}k_xk_y + \kappa_2^2 A_{44}k_y^2 - \omega^2 I_0) \\
L_{34} &= i\kappa_1 (\kappa_1 A_{55}k_x + \kappa_2 A_{45}k_y) \\
L_{35} &= i\kappa_2 (\kappa_1 A_{55}k_x + \kappa_2 A_{44}k_y) \\
L_{36} &= -(\kappa_1\kappa_4 B_{55}k_x^2 + (\kappa_1\kappa_5 + \kappa_2\kappa_4) B_{45}k_xk_y + \kappa_2\kappa_5 B_{44}k_y^2 - \omega^2 I_1) \\
L_{37} &= i\kappa_4 (\kappa_1 B_{55}k_x + \kappa_2 B_{45}k_y) \\
L_{38} &= i\kappa_5 (\kappa_1 B_{45}k_x + \kappa_2 B_{44}k_y) \\
L_{44} &= D_{11}k_x^2 + 2D_{16}k_xk_y + D_{66}k_y^2 + \kappa_1^2 A_{55} - \omega^2 I_2 \\
L_{45} &= D_{16}k_x^2 + (D_{12} + D_{66})k_xk_y + D_{26}k_y^2 + \kappa_1\kappa_2 A_{45} \\
L_{46} &= i(\kappa_1\kappa_4 B_{55} - \kappa_3 B_{13})k_x + i(\kappa_1\kappa_5 B_{45} - \kappa_3 B_{36})k_y \\
L_{47} &= \frac{1}{2} (F_{11}k_y^2 + 2F_{16}k_xk_y + F_{66}k_x^2 + 2\kappa_1\kappa_2 B_{55} - \omega^2 I_3) \\
L_{48} &= \frac{1}{2} (F_{66}k_x^2 + (F_{12} + F_{66})k_xk_y + F_{26}k_y^2 + 2\kappa_1\kappa_5 B_{45})
\end{aligned} \tag{7.60}$$

$$\begin{aligned}
L_{55} &= D_{66}k_x^2 + 2D_{26}k_xk_y + D_{22}k_y^2 + \kappa_2^2 A_{44} - \omega^2 I_2 \\
L_{56} &= i(\kappa_2\kappa_4 B_{45} - \kappa_3 B_{36})k_x + i(\kappa_2\kappa_5 B_{44} - \kappa_3 B_{23})k_y \\
L_{57} &= \frac{1}{2}(F_{66}k_x^2 + (F_{12} + F_{66})k_xk_y + F_{26}k_y^2 + 2\kappa_2\kappa_4 B_{45}) \\
L_{58} &= \frac{1}{2}(F_{66}k_x^2 + 2F_{26}k_xk_y + F_{22}k_y^2 + 2\kappa_2\kappa_4 B_{44} - \omega^2 I_3) \\
L_{66} &= -\kappa_4^2 D_{55}k_x^2 - 2\kappa_4\kappa_5 D_{45}k_xk_y - \kappa_5^2 D_{44}k_y^2 - \kappa_3^2 A_{33} + \omega^2 I_2 \\
L_{67} &= i\left(\kappa_4^2 D_{55} - \kappa_3 \frac{D_{13}}{2}\right)k_x + i\left(\kappa_4\kappa_5 D_{45} - \kappa_3 \frac{D_{36}}{2}\right)k_y \\
L_{68} &= i\left(\kappa_4\kappa_5 D_{45} - \kappa_3 \frac{D_{36}}{2}\right)k_x + i\left(\kappa_5^2 D_{44} - \kappa_3 \frac{D_{23}}{2}\right)k_y \\
L_{77} &= \frac{1}{4}(H_{11}k_x^2 + 2H_{16}k_xk_y + H_{66}k_y^2 + 4\kappa_4^2 D_{55} - \omega^2 I_4) \\
L_{78} &= \frac{1}{4}(H_{16}k_x^2 + (H_{12} + H_{66})k_xk_y + H_{26}k_y^2 + 4\kappa_4\kappa_5 D_{45}) \\
L_{88} &= \frac{1}{4}(H_{66}k_y^2 + 2H_{26}k_xk_y + H_{22}k_x^2 + 4\kappa_5^2 D_{44} - \omega^2 I_4)
\end{aligned}$$

Како су за симетричне ламинате коефицијенти матрица спрезања (видети поглавље 3.3.2), директно следи да ће доћи до појаве већег броја нултих елемената у матрици \mathbf{L} , па се једначина (7.59), своди на облик:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc|ccc}
L_{11} & L_{12} & 0 & 0 & 0 & L_{16} & L_{17} & L_{18} \\
L_{12} & L_{22} & 0 & 0 & 0 & L_{26} & L_{18} & L_{28} \\
\hline
0 & 0 & L_{33} & L_{34} & L_{35} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & L_{34} & L_{44} & L_{45} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & L_{35} & L_{45} & L_{55} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
L_{16} & L_{26} & 0 & 0 & 0 & L_{66} & L_{67} & L_{68} \\
L_{17} & L_{18} & 0 & 0 & 0 & L_{67} & L_{77} & L_{78} \\
L_{18} & L_{28} & 0 & 0 & 0 & L_{68} & L_{78} & L_{88}
\end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \\ \Psi_x \\ \Psi_y \\ \Psi_z \\ \Phi_x \\ \Phi_y \end{array} \right\} = 0 \quad (7.61)$$

У последњој једначини се јасно уочава раздвајање на симетрични мод који одговара екстензионим таласима:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|ccc}
L_{11} & L_{12} & L_{16} & L_{17} & L_{18} \\
L_{12} & L_{22} & L_{26} & L_{18} & L_{28} \\
\hline
L_{16} & L_{26} & L_{66} & L_{67} & L_{68} \\
L_{17} & L_{18} & L_{67} & L_{77} & L_{78} \\
L_{18} & L_{28} & L_{68} & L_{78} & L_{88}
\end{array} \right]}_{\mathbf{L}_s} \left\{ \begin{array}{c} U_0 \\ V_0 \\ \Psi_z \\ \Phi_x \\ \Phi_y \end{array} \right\} = 0, \quad (7.62)$$

и антисиметрични део који одговара савојним таласима:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ L_{35} & L_{45} & L_{55} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_{as}} \begin{Bmatrix} W_0 \\ \Psi_x \\ \Psi_y \end{Bmatrix} = 0, \quad (7.63)$$

За постојање нетривијалних решења једначина (7.62) и (7.63) неопходно је да је испуњен услов:

$$\det(\mathbf{L}_s) = 0 \text{ и } \det(\mathbf{L}_{as}) = 0. \quad (7.64)$$

Ако се у последњим једначинама замене изрази за фазну брзину $c_p = \frac{\omega}{k}$, и пројекције таласног броја $k_x = k \cos(\alpha)$ и $k_y = k \sin(\alpha)$ за фиксирани правац пропације α добијају се полиномне једначине по k . За усвојену вредност производа fh и искоришћену везу $\omega = 2\pi f$ могуће је решити полиномне једначине по k односно k^2 . Полиномна једначина по k за симетрични мод биће десетог степена, односно петог степена по k^2 , док ће једначина асиметричног мода бити полиномна шестог степена по k , односно трећег степена по k^2 . Ако се искористи неки нумерички солвер за одређивање корена полиномне једначине петог, односно трећег степена, добиће се пет, односно три различита корена за k^2 . Када се сортирају вредности ових коренова, и искористи предност програмског језика Матлаб у смислу комбиновања симболичког и нумеричког програмирања добиће се 5 различитих кривих које одговарају симетричном, односно три различите криве које одговарају антисиметричном моду. Ако се формирају уређени парови производа fh и вредности фазних брзина, при фиксираној вредности угла пропације, добијају се дисперзионе криве, док уређени парови фазне брзине и угла пропације, при фиксираној вредности fh , дају дијаграме фазних брзина у поларном координатном систему.

Симетрични и антисиметрични таласи се дефинишу као таласни модови који могу бити симетрични, односно антисиметрични у односу на средњу раван плоче. У једном слоју, где се правац пропације таласа поклапа са материјалним правцем, екстензиони (симетрични) и савојни (антисиметрични) таласни модови се раздвајају од смицајних (симетричних и антисиметричних) модова. Међутим, у слоју који је конституент ламината код кога се правац пропације таласа не поклапа са материјалним правцем, екстензиони и савојни модови се спрежу са смицајним хоризонтаним модовима.

За дијаграмске приказе резултата искоришћени су следећи материјали:

- Материјал 1 [151] (Конститутивна матрица дефинисана преко инжењерских константи. Материјал изабран са циљем верификације поступка):

$$E_1 = 168GP_a, E_1 = 9.31GP_a, E_1 = 9.31GP_a, G_{12} = 3.45GP_a, G_{13} = 3.45GP_a,$$

$$G_{13} = 5.17GP_a, \nu_{12} = 0.33, \nu_{13} = 0.33, \nu_{23} = 0.4, \rho = 1610 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- Материјал 2 [170] (Конститутивна матрица дефинисана преко константи дефинисаних у радовима Спенсера за једну фамилију влакана):

$$\lambda = 5.65 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}; \mu_T = 2.46 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}; \mu_L = 5.66 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2};$$

$$\alpha = -1.28 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}; \beta = 220.9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2};$$

- Материјал 3 [170] (Конститутивна матрица дефинисана преко константи дефинисаних у радовима Спенсера за две фамилије влакана):

$$\lambda = 5.65 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}; \mu = 2.46 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}; \gamma_4 = -1.28 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2};$$

$$\gamma_7 = 3.20 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}; 2\gamma_1 = 110.45 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}; \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0.$$

Ако се фиксира вредност производа $f\hbar$, у поларном координатном систему могуће је добити дијаграм зависности фазне брзине c_p од промене угла пропагације раванског таласа.

Варирањем угла пропагације таласа од 0° до 360° добијају се дијаграми приказани на сликама 7.3 и 7.4. Ради лакшег приказа овде је неопходно извршити нормализацију, а у те

сврхе се користи лонгитудинална таласна брзина у правцу влакана $c_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$ при чему је C_{11}

константа еластичности у правцу влакана у локалном координатном систему, а ρ је густина усвојеног материјала. На сликама је могуће уочити јасно раздвајање модова који се добијају сортирањем коренова полиномне једначине по k^2 . Постоји пет кривих које одговарају симетричном моду пропагације и три криве које одговарају антисиметричном моду пропагације. Треба нагласити да у ситуацијама када се правац пропагације не поклапа са материјалним правцем слоја, онда чак и у једном слоју нема појаве чистих модова, већ се јављају квази модови.

Због прегледности на сликама које следе употребљене су различите боје на следећи начин:

1. У антисиметричном моду,

- **светло плавом бојом** представљени су дијаграми фазне брзине добијене за најмању вредности решења полинома по k^2 . Гледано у односу на таласне модове, ова фазна брзина представља *квазисмицајни хоризонтални антисиметрични qSH_1* мод код кога је смицајни мод доминантан,

- **љубичастом бојом** представљени су дијаграми фазне брзине добијене за највећу вредност решења полинома по k^2 . Гледано у односу на таласне модове, ова фазна брзина одговара антисиметричном *квазисавојном моду A_0* ,

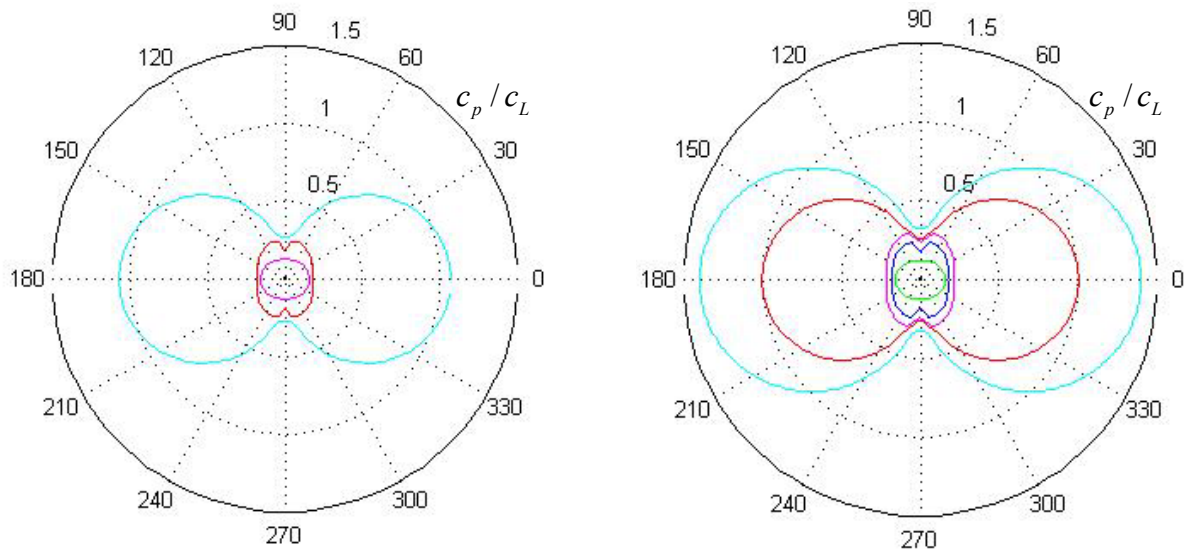
- **црвеном бојом** представљени су дијаграми фазне брзине добијене за вредност решења полинома по k^2 , која се налази између максималне и минималне вредности решења, и означава се са qA_1 , што јасно указује на доминантан антисиметрични, тј. савојни мод.

2. У симетричном моду,

- **светло плавом и зеленом бојом** представљени су дијаграми фазних брзина добијених за најмању, односно највећу вредност решења полинома по k^2 , и одговарају *квазисмицајном хоризонталним модовима qSH_2 и qSH_0* тим редом.

- **црвеном, љубичастом и плавом бојом**, тим редом, представљени су дијаграми фазних брзина добијених за сортиране вредности решења (сортиране од мањег решења ка већем), која се налазе између најмање и највеће вредности решења полинома по k^2 , и одговарају *квази екстензионим модовима* који се означавају qS_2, qS_1, qS_0 .

На слици 7.3 дати су дијаграми фазних брзина у једном слоју, односно ламини.

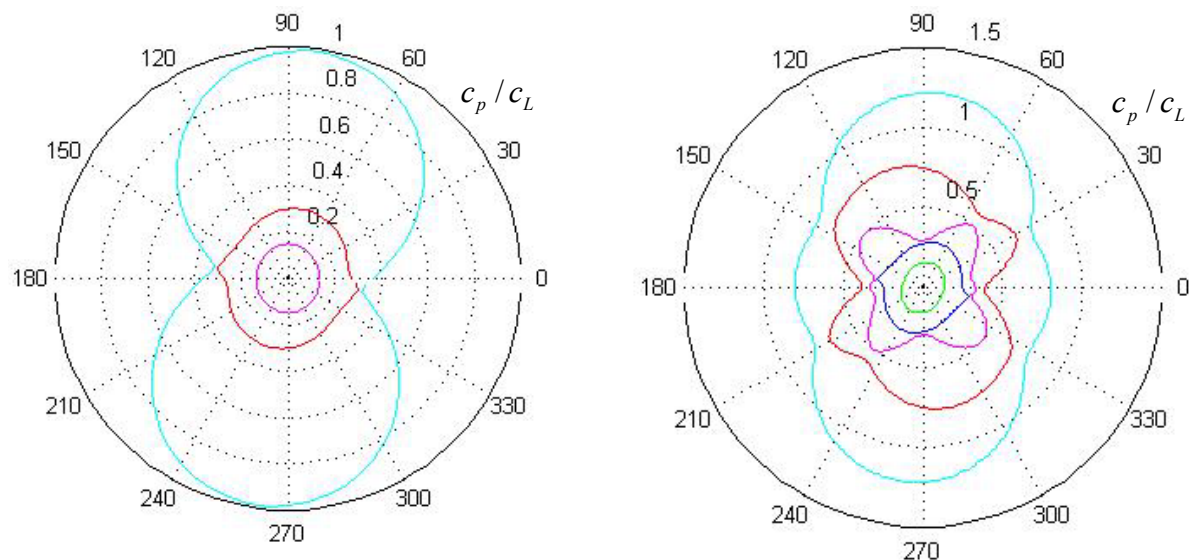


а) Асиметрични мод

б) Симетрични мод

Слика 7.3. Дијаграми фазних брзина пропације таласа у слоју при вредности односа $fh/c_L = 0.25$

Са слике 7.3 се јасно види да фазне брзине свих мода зависе од правца пропације таласа, осим фундаменталног мода код кога је тај утицај знатно мањи. Није тешко приметити да услед анизотропних карактеристика слоја, када се правац пропације поклапа са правцем влакана (при угловима од 180° односно 0°), фазне брзине достижу своје максималне вредности. Са друге стране, у ситуацијама када је правац пропације таласа управан на правац влакана у дијаграму фазних брзина, уочљива је појава њихових минималних вредности. Такође, треба приметити да нема појаве скроз чистих мода, осим фундаменталних мода који највише подсећају на чисте модове. Такође је уочљива симетрија у односу на правце који се поклапају са материјалним правцима, тј. у односу на правац $0^\circ - 180^\circ$, односно $90^\circ - 270^\circ$.



а) Асиметрични мод

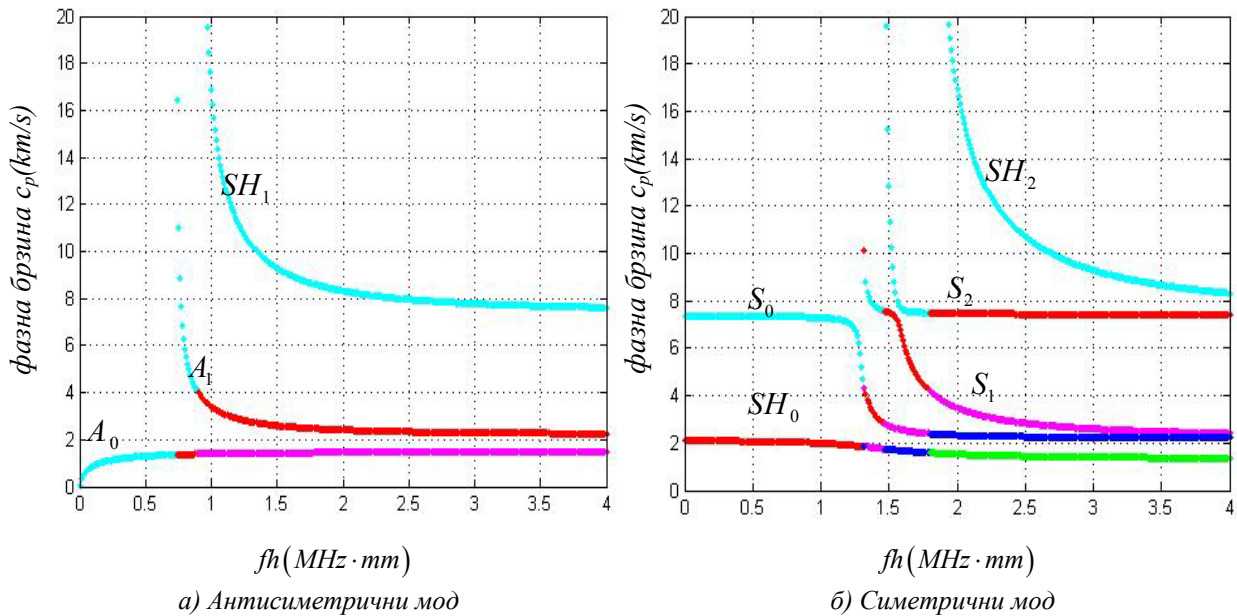
б) Симетрични мод

Слика 7.4. Дијаграми фазних брзина пропације таласа у ламинату конституисаном од материјала I при вредности односа $fh/c_L = 0.25$

Дијаграми фазних брзина симетричног и антисиметричног мода ламината $[90^\circ / 60^\circ / 90^\circ / -60^\circ / 0^\circ]_s$ конституисаног од слојева материјала 1 под претпоставком да су слојеви идеално спојени дати су на слици 7.4.

На сликама 7.4а), 7.4б) приметно је да је пропација ових таласа у ламинату доста сложенија него у једном слоју, тј. приметно је одсуство симетрије у односу на хоризонтални, односно вертикални правац, што проузрокује сам начин слагања слојева. Оно што је приметно јесте појава поларне симетрије, тј. свака тачка у дијаграму фазних брзина има своју слику која се добија у односу на посматрану тачку ротацијом за 180° , вектора који спаја координатни почетак и посматрану тачку у дијаграму фазних брзина. Такође је приметно одсуство чистих модова, као и ротација правца симетрије дијаграма, који се у овом случају не поклапају, ни са хоризонталним, ни са вертикалним правцем. Могуће је уочити и тачке у којима дијаграми различитих модова имају приближну вредност. Треба нагласити да је и код ових тачака присутна претходно описана поларна симетрија. У овом случају екстремне вредности фазних брзина свих модова не леже на правцима $0^\circ - 180^\circ$, односно $90^\circ - 270^\circ$ већ се поклапају са неким другим правцима којима се дефинише правац поларне симетрије. На пример, дијаграм фазне брзине квазисавојног мода qA_1 , представљен на слици 7.5б црвеном бојом, има поларну симетрију у правцу приближном правцу $30^\circ - 210^\circ$.

На слици 7.5 дате су дисперзионе релације симетричног и антисиметричног мода једног слоја чија је конститутивна матрица дефинисана преко инжењерских константи. Ако се изврши сортирање коренова полиномне једначине по k^2 , уочљиво је јасно преклапање модова.



Слика 7.5. Дисперзионе криве, пропације таласа у једном слоју за фиксирани угао пропације таласа $\phi = 45^\circ$ и изабран материјал 1.

У складу са претходно описаним фазним брзинама одговарајућих модова, на слици 7.5а) није тешко уочити да у антисиметричном моду долази до спрезања квази модова и то квазисавојних (qA_n) и квази-хоризонтално смицајних (qSH_{2n-1}). Тако, на пример, фундаментални мод A_0 настаје као резултат спрезања сва три антисиметрична мода, код кога је савојни мод qA_0 доминантан, савојни мод A_1 као резултат спрезања квазисавојног мода qA_1 и

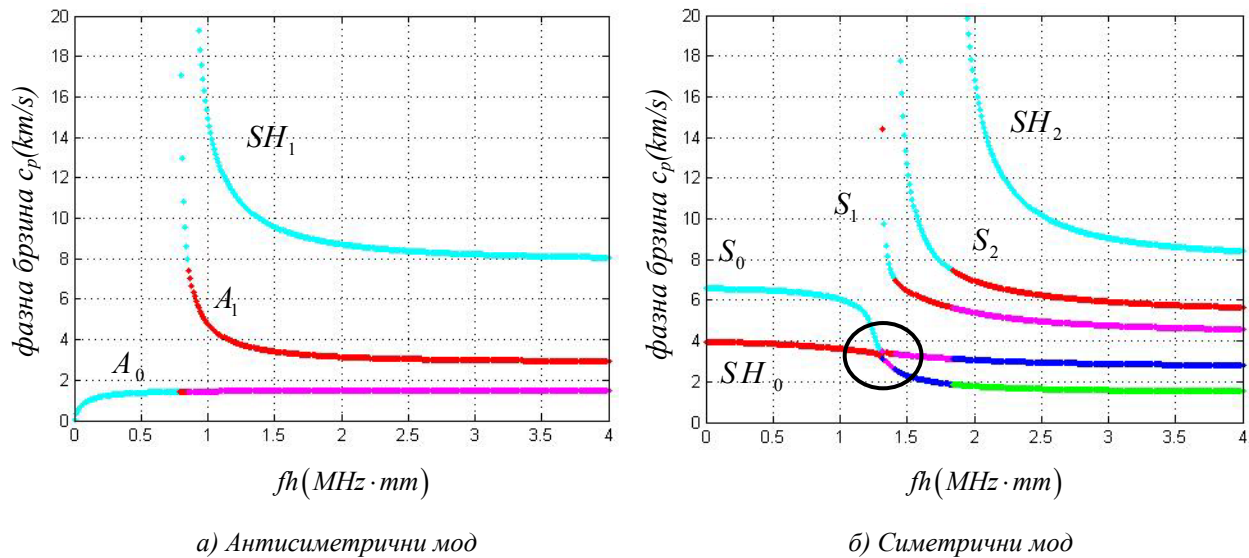
хоризонтално смицајног мода SH_1 , код кога је савојни мод доминантан, и трећи мод је хоризонтално смицајни мод SH_1 и код њега нема спрезања модова.

На слици 7.5б) показано је спрезање пет модова који одговарају симетричним таласима у слоју.

За симетричне модове могуће је разликовати два јасно дефинисана типа ових модова од којих је један тип одређен као квази-екстензиони (qS_n), где је доминантна компонента вектора поларизације дуж правца пропагације, а други тип је квази-хоризонтални смицајни (qSH_{2n}), где је вектор поларизације углавном паралелан са равни плоче.

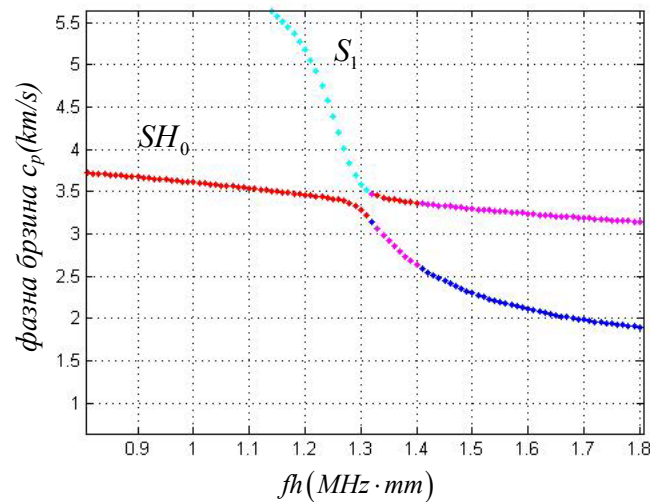
Није тешко уочити да је једини мод који не настаје као резултат спрезања модова, код овог типа проблема, смицајни-хоризонтално поларизовани SH_2 мод. Сви остали модови настају као резултат спрезања модова, од којих један мод доминира. Смицајно-хоризонтални мод SH_0 настаје као резултат спрезања свих модова, од којих је qSH_0 доминантан мод. Екстензиони мод S_0 настаје као резултат спрезања више модова SH_2, qS_2, qS_1, qS_0 , од којих је доминантан мод qS_0 . Екстензиони модови S_1 и S_2 настају као резултат спрезања модова SH_2, qS_2, qS_1 , односно SH_2, qS_2 , код којих су доминантни модови qS_1 , односно qS_2 .

Дисперзионе релације пропагације таласа у ламинату дате су на слици 7.6. Посматрана је пропагација таласа кроз симетрични ламинат који је састављен од десет слојева конституисаних од материјала 1, са угловима оријентације $[90^\circ / 60^\circ / 90^\circ / -60^\circ / 0^\circ]_s$.



Слика 7.6. Дисперзионе криве, пропагације таласа у ламинату $[90^\circ / 60^\circ / 90^\circ / -60^\circ / 0^\circ]_s$ за фиксирани угао пропагације таласа $\phi = 45^\circ$ и изабран материјал 1.

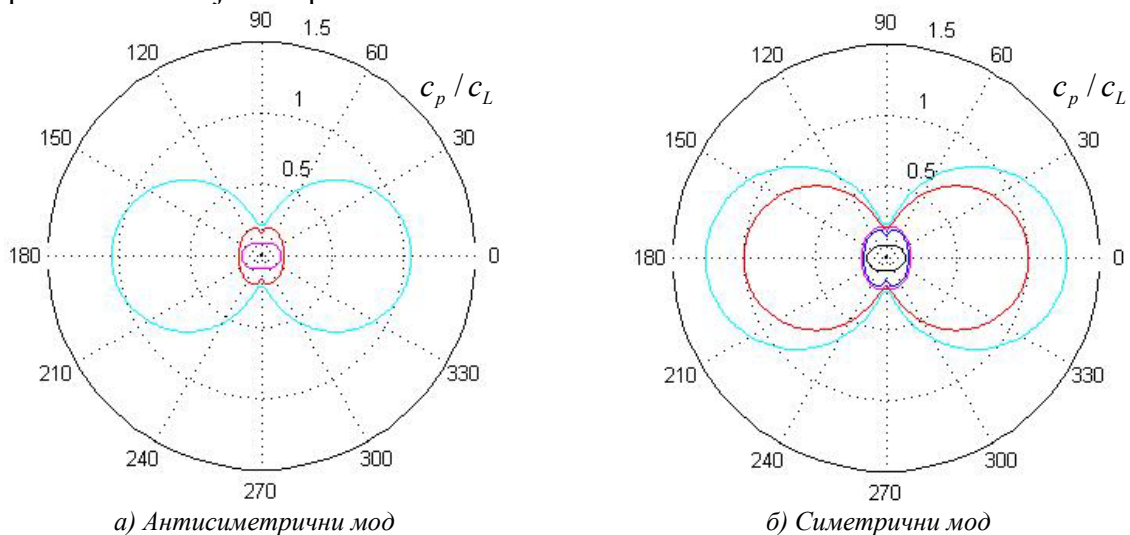
На слици 7.6 је уочљиво да се спрезање модова у ламинату одвија доста слично као у једном слоју. Треба уочити да у симетричном моду за разлику од једног слоја нема приближавања кривих које дефинишу савојне модове S_1 и S_2 , али има интензивнијег приближавања дисперзионих кривих које одговарају квази хоризонталном смицајном моду SH_0 и екстензионом моду S_0 . Треба нагласити да се криве ова два мода асимптотски приближавају, али не додирују у потпуности, што се може видети на слици 7.6ц.



Слика 7.6ц. Детаљ приближавања, али не и поклапања модова SH_0 и S_0 у ламинату $[90^\circ / 60^\circ / 90^\circ / -60^\circ / 0^\circ]_S$ за фиксирани угао пропације таласа $\alpha = 45^\circ$ и изабран материјал 1.

Ако се посматра слој ојачан једном фамилијом влакана, онда се може рећи да такав слој има један привилегован правац у односу на који је материјал трансверзално изотропан. Конститутивну релацију овакве групе материјала дао је у својим радовима Спенсер. Везу између глобалног координатног система, јединичног вектора правца и коефицијента конститутивне матрице детаљно је описао Милосављевић [95], а касније и Богдановић [96]. У докторској тези [95] прецизно су изведени елементи конститутивне матрице ове групе материјала. Малом модификацијом смерова оса глобалног координатног система добијају се елементи конститутивне матрице дати у облику дефинисаном једначином (1.89).

За усвојене вредности материјалних константи дефинисаних материјалом 2 (из овог поглавља), поменути конститутивну матрицу за једну фамилију влакана и поступак за добијање дисперзионих релација и дијаграма фазних брзина добијају се криве приказане на сликама 7.7 - 7.10. На слици 7.10 дате су дисперзионе релације у слоју ојачаном једном фамилијом влакана. Треба нагласити да су влакна знатно јача од матрице, тако да су анизотропне особине јако изражене.

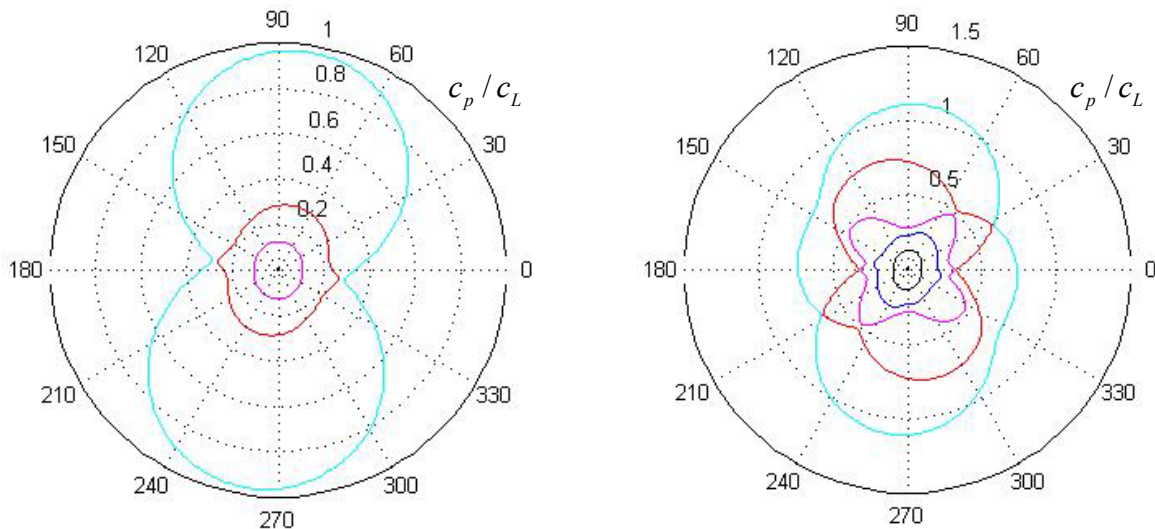


Слика 7.7. Дијаграми фазних брзина пропације таласа у једном слоју при промени угла пропација за фиксирану вредности односа $fh/c_L = 0.25$

Аналогно поступку описаном код материјала код којих је конститутивна матрица дефинисана помоћу инжењерских константи добијају се дијаграми зависности фазних брзина у зависности од угла пропагације таласа. Приказ бездимензионих вредности фазних брзина у поларном координатном систему дат је на слици 7.7, док су дијаграми фазних брзина пропагације у ламинату дати на слици 7.8.

На слици 7.7 уочљиво је да су дијаграми фазних брзина доста слични дијаграмима, датим на слици 7.3. Максималне, односно минималне вредности фазних брзина јављају се у ситуацијама када се правац пропагације поклапа са материјалним правцем или је управан на материјални правац. У овом случају приметно је одсуство потпуно чистих модова, већ се јављају квазимодови. Фундаменталан мод је најприближнији чистом моду, односно дијаграм фазне брзине овог мода је елиптичан.

Ако се од материјала ојачаног једном фамилијом влакана са дефинисаним материјалним константама датим обликом (1.89), креира у потпуности исти тип ламината као у претходном случају, односно ламинат $[90^\circ/60^\circ/90^\circ/-60^\circ/0^\circ]_s$, добиће се дијаграми бездимензионих фазних брзина дати на слици 7.8. Као и у једном слоју карактеристике дијаграма бездимензионих фазних брзина сличне су дијаграмима датим на слици 7.4. Оно што је карактеристично јесте да максималне вредности фазних брзина имају међусобно различите правце у односу на које поседују правце поларне симетрије. Тако, на пример, максималне вредности фазних брзина које одговарају квазисмицајном хоризонталном qSH_2 моду (светло плава боја) се налазе на правцу дефинисаним углом чија је вредност између 60° и 90° (друга тачка на сваком од поменутих правца је дефинисана вредношћу поменутог угла увећаној за 180°), док се максималне вредности фазних брзина које одговарају квазиекстензионом qS_1 таласном моду (љубичаста боја) налазе на два правца, од којих је један дефинисан углом између 30° и 60° , а други углом између 120° и 150° .



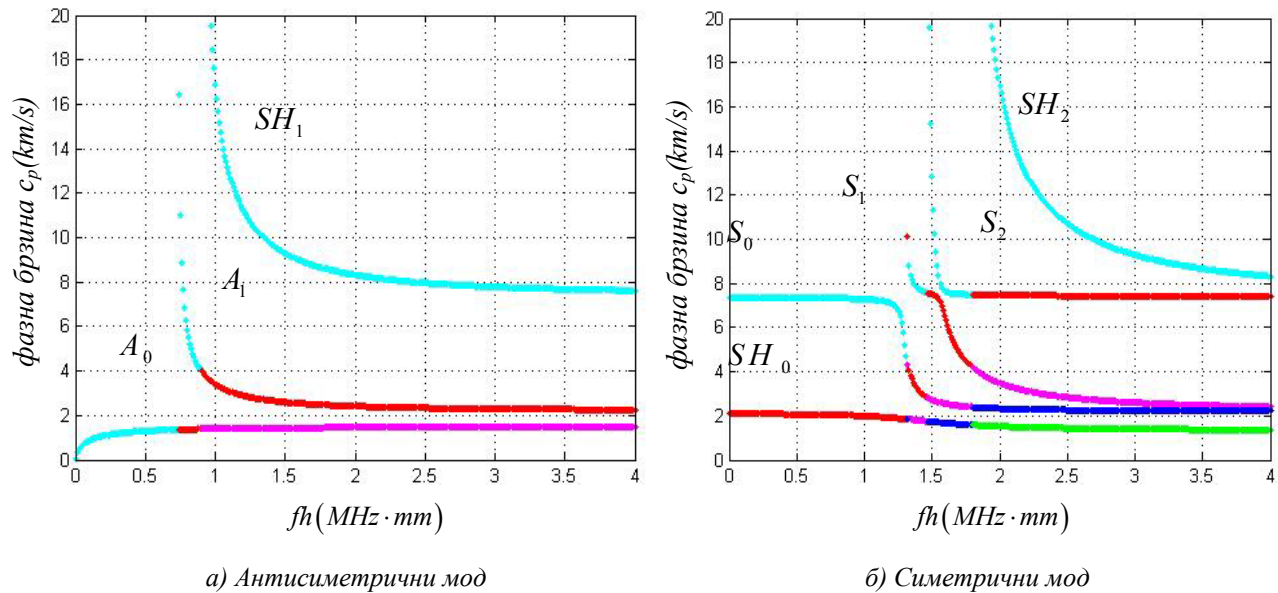
а) Антисиметрични мод

б) Симетрични мод

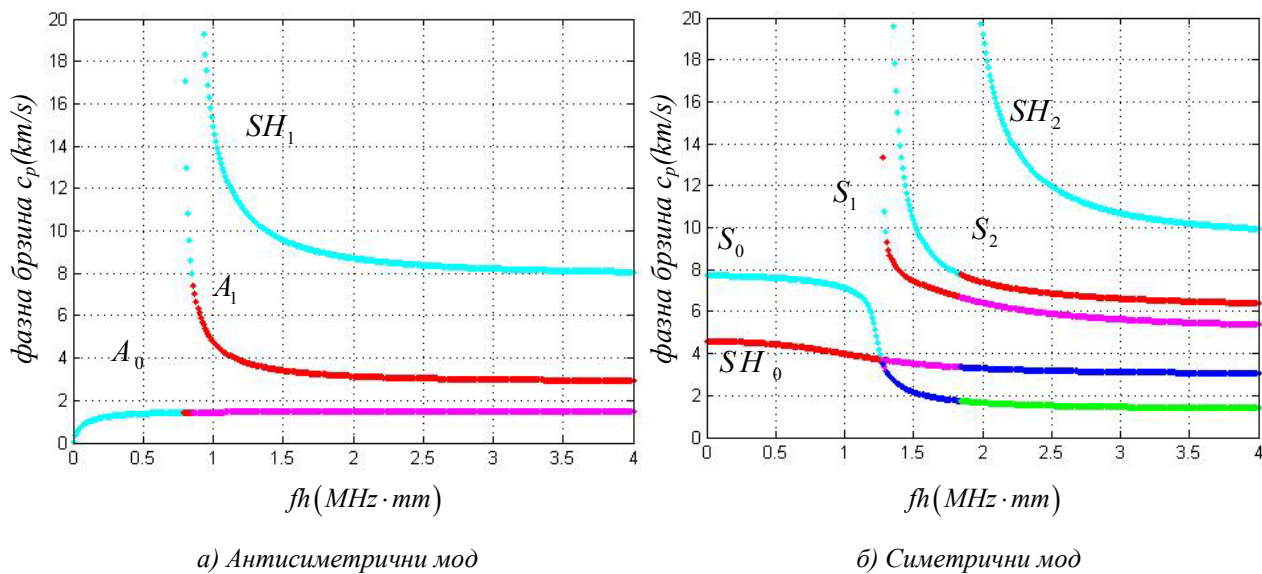
Слика 7.8. Дијаграми фазних брзина пропагације таласа у ламинату при промени угла пропагација за фиксирану вредност односа $fh/c_L = 0.25$

На слици 7.9 дате су дисперзионе криве пропагације таласа у једном слоју, ламини, материјала који је ојачан једном фамилијом влакана. Примећује се да се спрезање модова таласа одвија на потпуно исти начин као код материјала код којих је конститутивна матрица

дефинисана преко инжењерских константи. Једина разлика је у бројним вредностима које одговарају хоризонталним линијама којима се дисперзионе криве асимптотски приближавају. Треба нагласити да се у оба поменута случаја све дисперзионе криве са повећањем апцисних вредности асимптотски приближавају максималној или минималној вредности на ординати. Дисперзионе релације пропагације таласа у ламинату, састављеном од слојева ојачаних једном фамилијом влакана, дате су на слици 7.10. Посматрана је пропагација таласа кроз симетрични ламинат који је састављен од десет слојева конституисаних од материјала 2 код кога је конститутивна матрица дефинисана преко Спенсерових константи једначином (1.89), са угловима оријентације $[90^\circ / 60^\circ / 90^\circ / -60^\circ / 0^\circ]_S$.



Слика 7.9. Дисперзионе криве пропагације таласа у слоју ојачаном једном фамилијом влакана за фиксирани угао пропагације таласа $\phi = 45^\circ$ и изабран материјал 1.

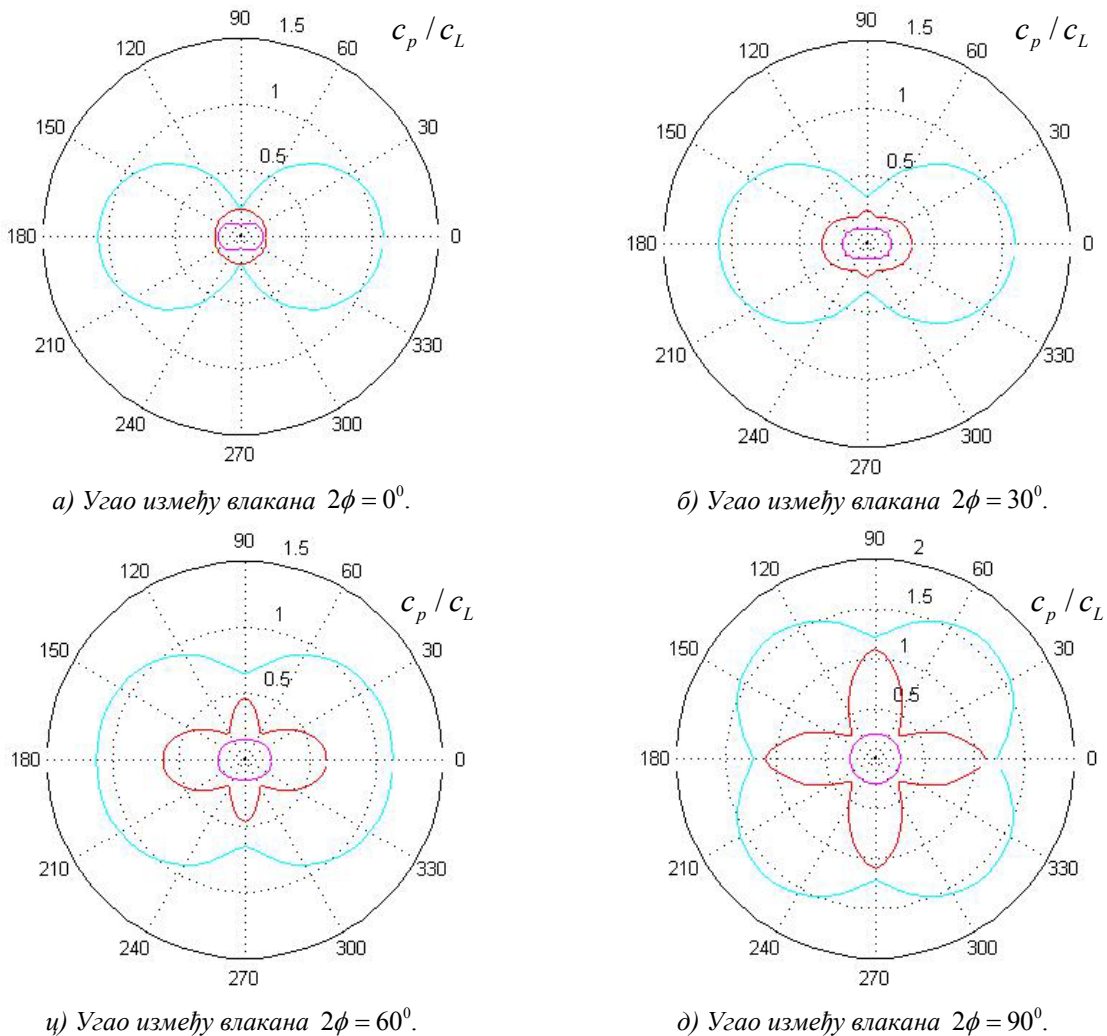


Слика 7.10. Дисперзионе криве у ламинату ојачаном једном фамилијом влакана при вредности бездимензионе фреквенције $fh = 0.25c_L$

Према [94] материјал ојачан двама фамилијама влакана може да се замисли као материјал направљен од произвољног броја слојева ојачаних једном фамилијом влакана, заокружених наизменично под угловима ϕ , $-\phi$ у односу на линије симетрије, који су међусобно савршено спојени, тако да код ове групе материјала нема смисла говорити о креирању ламината који је састављен од ових материјала. Треба нагласити да, уколико угао између две фамилије влакана тежи нули, еластичне особине материјала би требало да буду исте као и еластичне особине материјала ојачаног једном фамилијом влакана.

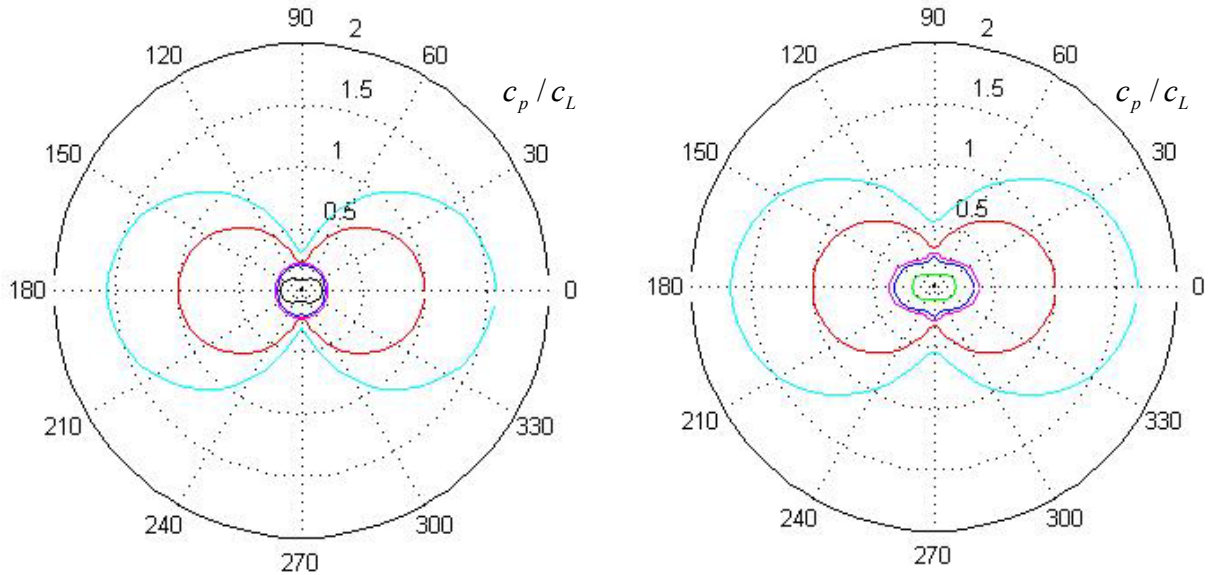
У случају пропагације таласа кроз плочу ојачану са две фамилије екстензибилних влакана, усвајамо материјалне константе дефинисане материјалом 3. Композит ојачан веома јаким екстензибилним влакнима се назива јако анизотропни композит или материјал ојачан јаким влакнима. Конститутивна матрица за материјал ојачан са две механички еквивалентне фамилије влакана, дата је релацијом (1.90).

На сликама 7.11 и 7.12, респективно, дате су криве бездимензионих фазних брзина антисиметричног и симетричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двама механички еквивалентним фамилијама влакана, при променљивом углу између две фамилије влакана.



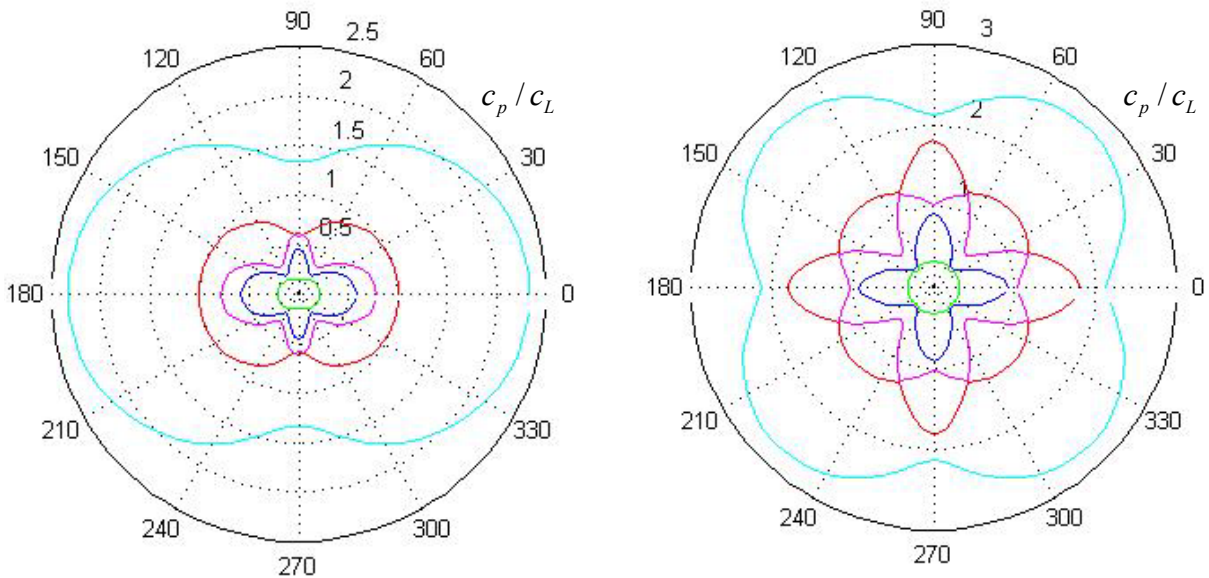
Слика 7.11. Дијаграми фазних брзина антисиметричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двама фамилијама влакана при различитим вредностима угла између влакана и фиксираној вредности односа $fh/c_L = 0.25$

На сликама 7.11а и 7.12а дати су дијаграми фазних брзина антисиметричног, односно симетричног мода пропагације таласа при углу између две фамилије влакана $2\phi = 0^\circ$. Може се уочити да су дијаграми на овим сликама слични дијаграмима на сликама 7.8а и 7.8б, што је логично, јер се материјал ојачан двема механички еквивалентним фамилијама влакана, за угао између влакана $2\phi = 0^\circ$, поклапа са материјалом ојачаним једном фамилијом влакана.



а) Угао између влакана $2\phi = 0^\circ$.

б) Угао између влакана $2\phi = 30^\circ$.



ц) Угао између влакана $2\phi = 60^\circ$.

д) Угао између влакана $2\phi = 90^\circ$.

Слика 7.12. Дијаграми фазних брзина симетричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двема фамилијама влакана при различитим вредностима угла између влакана и фиксираној вредности односа $fh/c_L = 0.25$

На сликама 7.11б, 7.11ц приметна је највећа промена у дијаграму фазних брзина, које одговарају квазисавојном моду qA_1 (црвена боја криве), док је најмања промена уочљива код

фундаменталног квазисавојног мода A_0 (љубичаста боја криве). Такође је приметно да се са повећањем угла између влакана повећавају минималне вредности квазисмицајног хоризонталног антисиметричног мода qSH_1 (светлоплава боја криве).

За угао између две фамилије влакана $2\phi = 90^\circ$, на слици 7.11д на први поглед је уочљиво да је крива која одговара фундаменталном моду A_0 по први пут јасна кружница. На правцима код којих су вредности фазних брзина које одговарају qSH_1 моду максималне (правци $45^\circ - 225^\circ$, односно $135^\circ - 315^\circ$), фазне брзине qA_1 мода биће минималне. Обрнуто, на правцима на којима вредности фазних брзина qA_1 мода достижу свој максимум (правци $0^\circ - 180^\circ$, односно $90^\circ - 270^\circ$), фазне брзине qSH_1 биће минималне.

На сликама 7.12б и 7.12ц брзине квазиекстензионих модова qS_1, qS_0 имају исте облике кривих које се готово поклапају при малим угловима између две фамилије влакана $2\phi \leq 30^\circ$. Са повећањем угла између влакана приметно је раздвајање кривих фазних брзина које одговарају поменутиим модовима и истовремено приближавање дијаграма који одговарају фазним брзинама квазиекстензионих таласних модова qS_2, qS_1 .

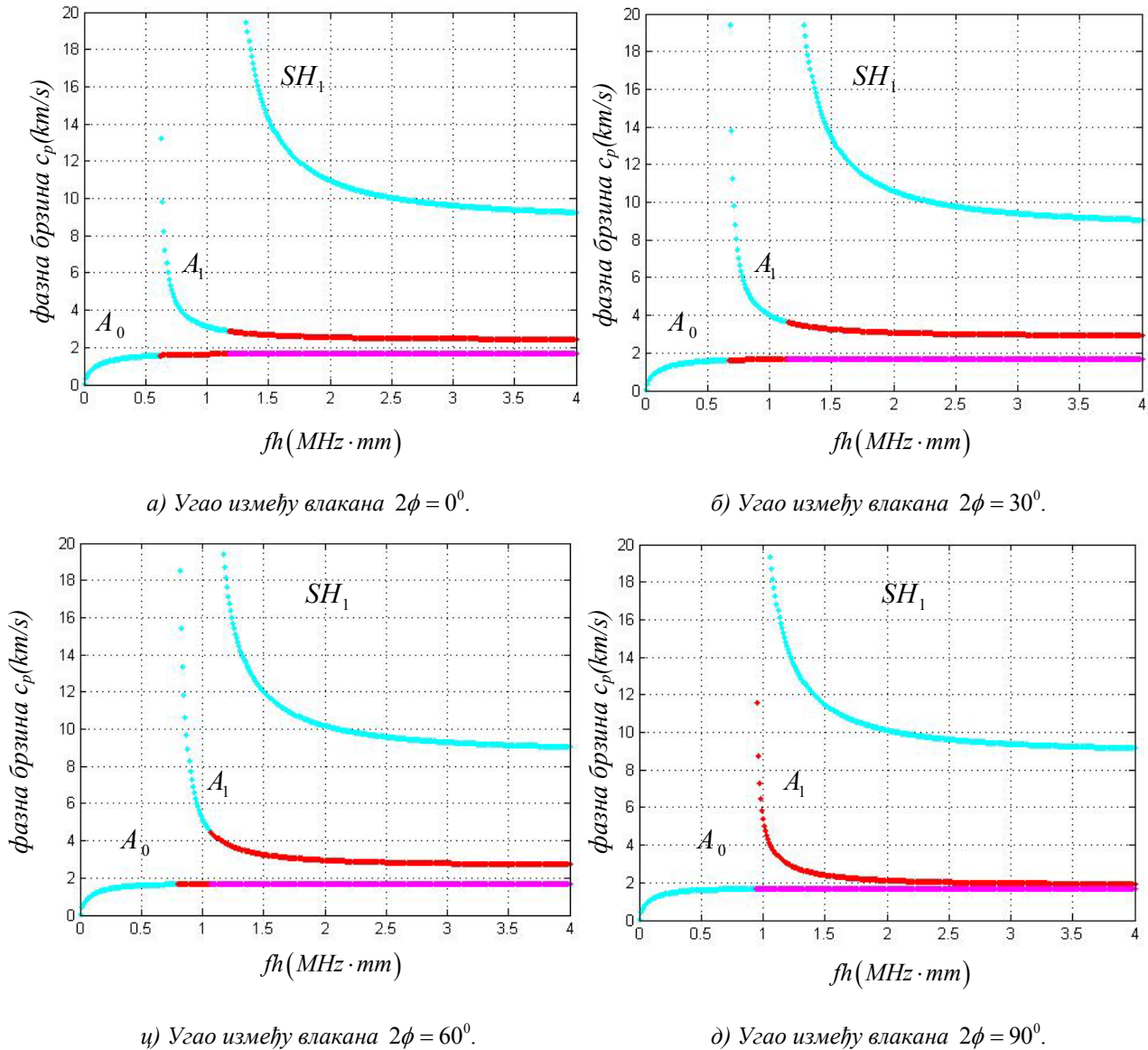
На слици 7.12д приказан је случај када је угао између две фамилије влакана $2\phi = 90^\circ$, па се може рећи да симетрала угла заклапа са позитивним делом x -осе угао од 45° . Такође је уочљиво да долази до потпуног спрезања модова qS_2, qS_1 . Крива која одговара SH_0 моду је јасна кружна линија, док се максималне, односно минималне вредности фазних брзина јављају на правцима који се добијају ротацијом правца $0^\circ - 180^\circ$ у инкрементима од по 45° , односно на правцима $45^\circ - 225^\circ$, $90^\circ - 270^\circ$, $135^\circ - 315^\circ$.

На сликама 7.11 и 7.12 дате су дисперзионе криве антисиметричног и симетричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном са две механички еквивалентне фамилије влакана, при променљивом углу између две фамилије влакана и фиксираној вредности угла пропагације таласа $\alpha = 45^\circ$.

На сликама 7.13а, 7.13б и 7.13ц јасно је да дисперзиона A_0 крива настаје као резултат спрезања сва три антисиметрична мода, односно два квазисавојна (qA_0 – љубичаста боја, qA_1 – црвена боја) и једног квазихоризонтално смицајног мода (qSH_1 – светло плава боја), где је qA_0 мод доминантан, па се из тог разлога овај мод означава са A_0 . A_1 мод настаје као резултат спрезања једног квазисавојног мода qA_1 и једног квазихоризонталног смицајног мода qSH_1 , где је qA_1 мод доминантан. Код SH_1 нема спрезања модова. Једини мод који се појављује у овом случају је мод који одговара највећој вредности корена k^2 . Може се уочити да се са порастом угла између влакана код мода A_0 смањује утицај мода qA_1 , а повећава утицај qSH_1 мода, док се код мода A_1 дешава обрнуто.

На слици 7.13д показано је да при углу између влакана $2\phi = 90^\circ$ наставља се претходно поменута тенденција утицаја појединих модова тако да код дисперзионе криве која одговара A_0 моду нестаје утицај мода qA_1 , али утицај овог мода почиње апсолутно да доминира у дисперзионој кривој A_1 , где потпуно нестаје утицај квазихоризонталног смицајног мода qSH_1 .

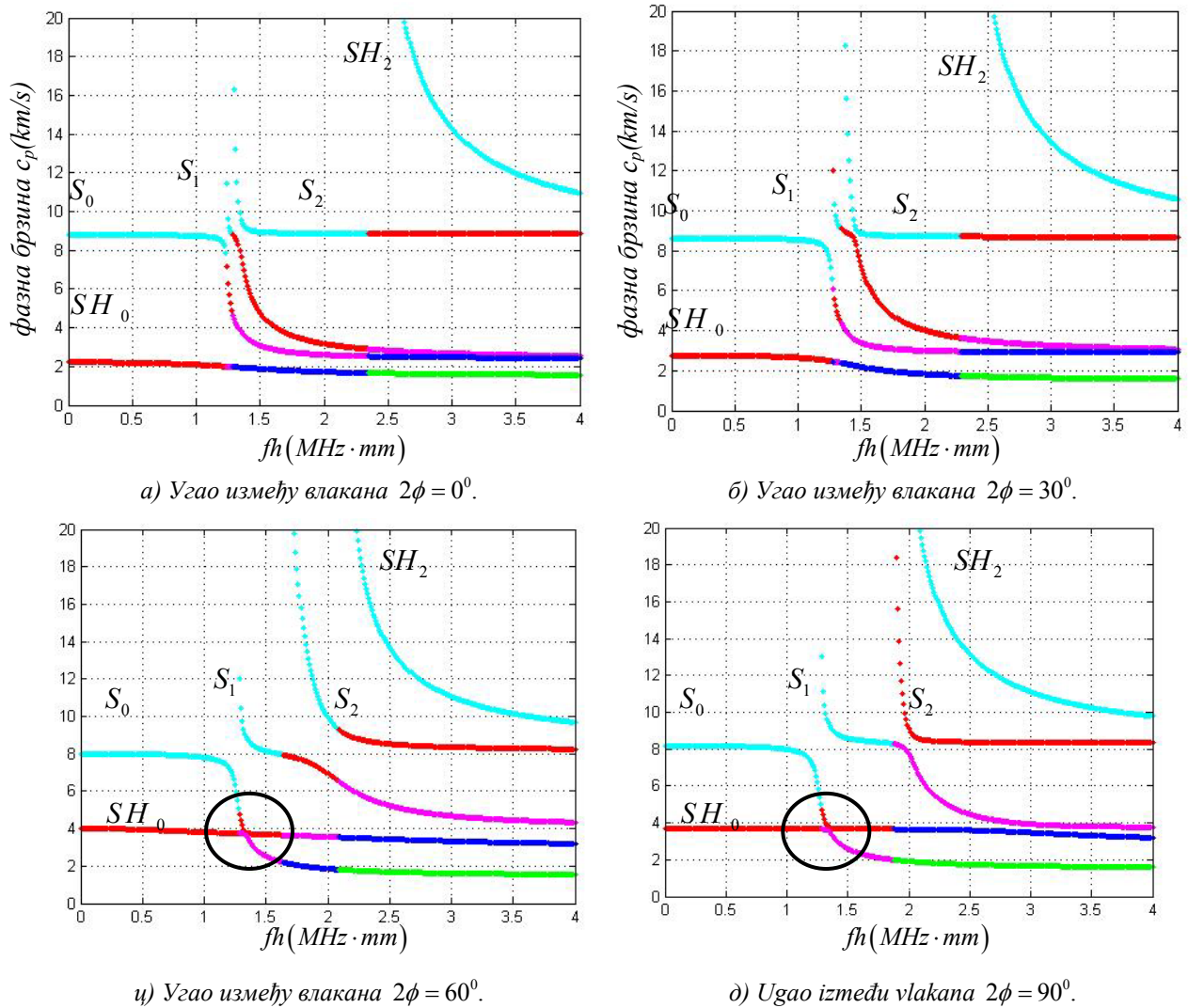
Такође се може приметити да повећање угла између две фамилије влакана утиче на хоризонтално померање вертикалне асимптоте којој се приближава дисперзиона крива A_1 .



Слика 7.13. Дисперзионе криве антисиметричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двама фамилијама влакана при различитим вредностима углова између влакана и фиксираном углу пропагације $\alpha = 45^\circ$.

На слици 7.14 дате су дисперзионе криве симетричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двама фамилијама влакана при различитим вредностима углова између влакана и фиксираном углу пропагације $\alpha = 45^\circ$. Јасно је уочљиво да се спрезање модова одвија слично као у антисиметричном моду. У складу са тим, дисперзионе криве на дијаграму носе назив према најдоминатнијем моду. На слици је приказано 5 кривих које одговарају симетричном моду. При мањим угловима између две фамилије влакана дисперзионе криве настају као резултат спрезања модова на следећи начин:

- SH_0 настаје спрезањем три квазиекстензиона мода (qS_0 – тамно плава боја, qS_1 – љубичаста боја, qS_2 – црвена плава боја) и хоризонталног смицајног мода (qSH_0 – зелена боја),
- S_0 настаје спрезањем три квазиекстензиона мода (qS_0 – тамно плава боја, qS_1 – љубичаста боја, qS_2 – црвена плава боја) и хоризонталног смицајног мода (qSH_2 – светло плава боја),
- S_1 настаје спрезањем два квазиекстензиона мода (qS_1 – љубичаста боја, qS_2 – црвена плава боја) и хоризонталног смицајног мода (qSH_2 – светло плава боја),
- S_2 настаје спрезањем квазиекстензиона мода (qS_2 – црвена плава боја) и хоризонталног смицајног мода (qSH_2 – светло плава боја).

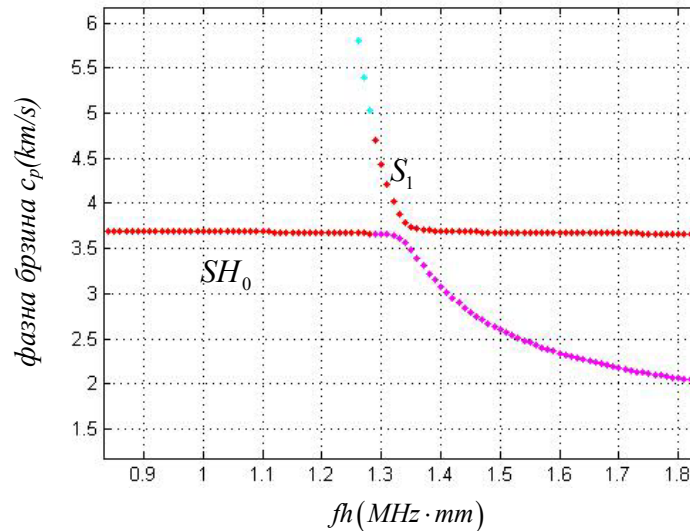


Слика 7.14. Дисперзионе криве симетричног мода пропагације таласа у материјалу ојачаном двама фамилијама влакана при различитим вредностима углова између влакана и фиксираном углу пропагације $\alpha = 45^\circ$.

Није тешко приметити да се са повећањем угла између две фамилије влакана, дисперзионе криве које су обележене са SH_0 и S_0 све више приближавају, али се не преклапају, што се

може видети на слици 7.14е. Такође се може приметити да у дисперзионој кривој S_1 долази до повећања утицаја квазисмицајног хоризонталног мода SH_2 , односно смањења утицаја квазиекстензионог мода qS_2 . Код дисперзионе криве qS_2 утицај претходно поменутих модова је обрнут.

На слици 7.14д се јасно може видети да при углу између две фамилије влакна $2\phi = 90^\circ$ на дисперзионој кривој S_1 настаје потпуно одсуство утицаја qS_2 , док код криве S_2 као једини утицајан мод остаје мод qS_2 .



Слика 7.17.е. Детаљ приближавања, али не и поклапања модова SH_0 и S_0 у материјалу ојачаном двама фамилијама влакана за угао пропације таласа $\alpha = 45^\circ$ и изабран материјал 3.

8 Имплементација развијених теорија у програмски пакет Матлаб. Креирање софтвера.

У оквиру ове тезе у склопу програмског пакета Матлаб креиран је модул за макромеханичку анализу композитних материјала првенствено заснован на имплементацији развијених теорија базираних на смицајним деформационим теоријама вишег реда. За креирање модула изабран је програмски пакет Матлаб због његових предности у раду са векторима и матрицама, као и због чињенице да је у овом програмском пакету могуће на доста једноставан начин остварити повезивање симболичких променљивих и њихових бројних вредности, односно да је могуће теоријски разрађивати модел и након тога у жељеном реду програма заменити симболичку вредност њеном бројном вредношћу. Модул је подељен на два основна дела:

1. део за симболичку разраду теорија и
2. део за добијање аналитичких решења.

Примарна сврха креирања једног оваквог софтвера је да се за развој неког новог теоријског модела искористе познате теоријске поставке. Тако, на пример, за увођење неке нове смицајне деформационе теорије сваки пут је потребно користити конститутивне матрице, везе између напона и деформација, јединична оптерећења итд. Такође је потребно користити статичке једначине равнотеже или динамичке једначине кретања које се, уз помоћ развијеног поступка, коришћењем принципа виртуелног рада или Хамилтоновог принципа, доста једноставно могу добити ако се промене облици претпостављених поља померања. Симболичким модулом оставља се могућност да се за добијање аналитичких решења новоуведених теоријских поставки искористи велики број већ креираних функција. За било коју новоуведену неполиномну функцију облика или корекциони коефицијент у полиномним функцијама облика, за кратко време је могуће аналитичким методама проверити тачност добијених резултата. Сам концепт софтвера још увек није идеално оптимизован у смислу да су уочени сви недостаци који би могли бити отклоњени реалним потребама за решавање макромеханичких проблема.

Нарочита предност је у модулу симболичког програмирања, јер његова употреба може довести до огромне уштеде времена и енергије самих истраживача. Примарни проблеми који су овде разматрани су статички проблеми извијања, савијања (теоријски опис дат у самом раду), критеријуми отказа, као и динамички проблем слободних вибрација и пропагације Ламбових таласа засновани на принципу континуалности деформација. Софтвер садржи и делове који се односе на пропагацију Рејлијевих и запреминских таласа применом 3D еластичне теорије, чије су теоријске основе дате у радовима [92], [97-99], [170-171] и докторским дисертацијама [94],[95].

У домену развоја аналитичких решења дато је свеобухватно поређење примене HSDT теорија заснованих на смицајним функцијама облика, за слободно ослоњене граничне услове. Вредности компаративних резултата ових теорија за проблеме савијања, извијања, слободних вибрација и пропагације Ламбових таласа дате су у поглављу 5.

Треба нагласити да је овим модулом отворен простор за макромеханичку анализу композитних материјала заједно са резултатима добијеним експерименталним путем.

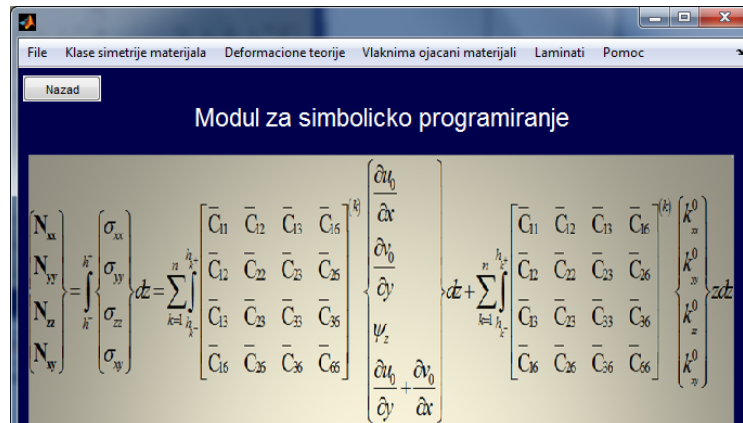
8.1 Кратак приказ интерфејса програма

На слици 8.1 дат је приказ основног прозора програма. Уочљиво је да је могуће изабрати један од два понуђена типа анализе - модул за симболичку разраду теорија или модул за аналитичке резултате.



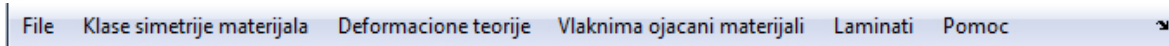
Слика 8.1. Визуелни приказ уводног прозора програма

Избором модула за симболичко програмирање појавиће се приказ дат на слици 8.2.



Слика 8.2. Визуелни приказ интерфејса симболичког мода програма

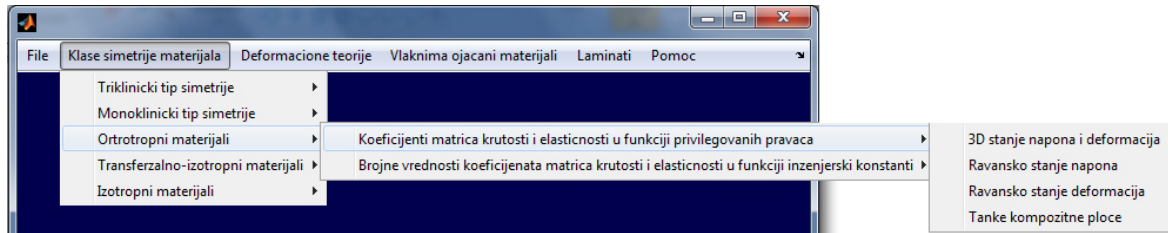
Оба модула програма, и симболички и модул за одређивање аналитичких решења, имају исте падајуће меније приказане на слици 8.3.



Слика 8.3. Визуелни приказ падајућег менија програма

Класе симетрије материјала могуће је посматрати на два начина у складу са теоријским описом датим у поглављу 1. Конститутивне матрице се могу посматрати у смислу инжењерских константи и у смислу привилегованих праваца. Оне су у зависности од класа симетрије за оба теоријска приступа дефинисане у поглављу 1. За поменуте класе симетрије

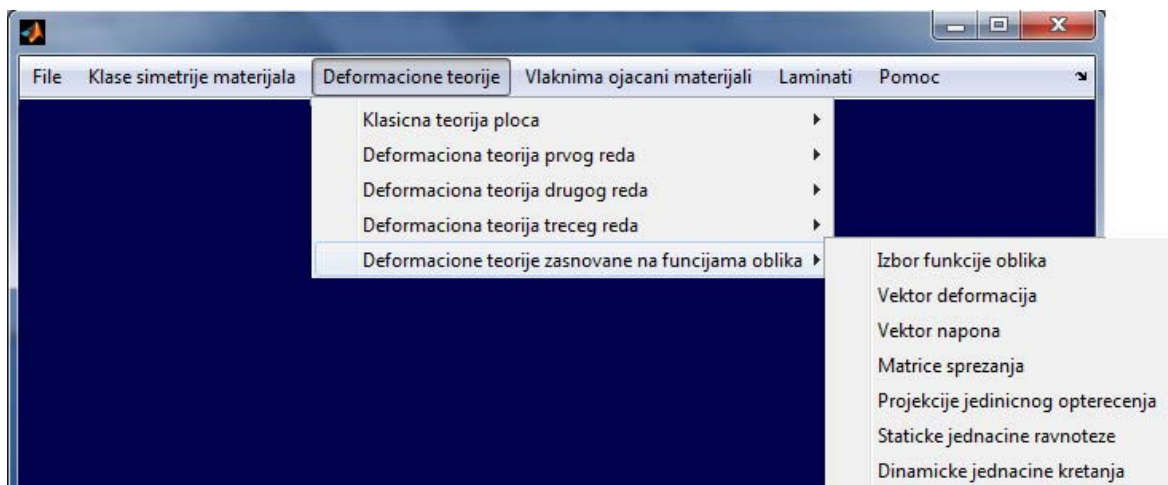
материјала могуће је добити приказ у симболичком облику или преко бројних вредности. На пример, избором ортотропне групе материјала појавиће се падајући мени приказан на слици 8.4.



Слика 8.4. Визуелни приказ падајућег менија класе симетрије

У оквиру овог падајућег менија могу се одредити вредности коефицијената конститутивне матрице у локалном координатном систему. Даље је уз помоћ матрица трансформације поменуте коефицијенте могуће одредити и у глобалном координатном систему, као у поглављу 1.3. Подмени омогућава одређивање ове матрице при 3D стању напона и деформација и специјално при раванском стању напона односно деформација, респективно. Такође је дефинисана и конститутивна матрица танке композитне плоче, која је типа 5×5 (види једначину 1.78). Конститутивне матрице у локалном систему координата у софтверу се одређују као инверзне матрице, матрица попустљивости, тј. програм је креиран тако да се прво одреде матрице попустљивости, а тек након тога конститутивне матрице еластичности.

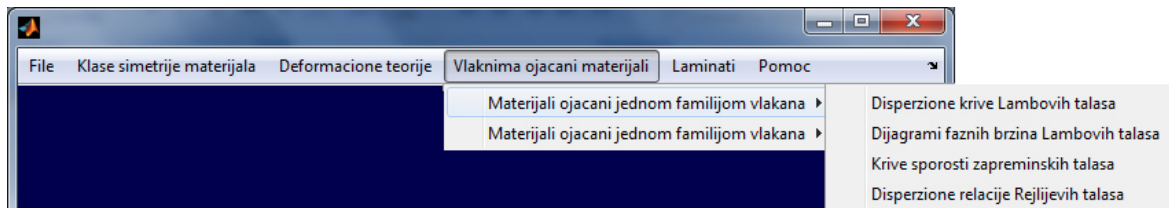
Код материјала код којих су елементи конститутивне матрице дефинисани преко материјалних константи у смислу привилегованих праваца, у коду програма је узета у обзир инваријантност у односу на избор координатног система (види поглавље 1.5). При дефинисању конститутивне матрице материјала ојачаног двама фамилијама влакана узета је у обзир и чињеница да материјали ојачани двама механички еквивалентним фамилијама влакана, представљају ортотропне материјале. За разлику од претходно поменутог поступка, овде се конститутивне матрице одређују директно, а не као инверзне матрице матрица попустљивости. Код трансверзално изотропних материјала облик конститутивне матрице зависи од избора привилегованог правца, па се у коду програма водило рачуна и о томе. Као што се може уочити на слици 8.4. разматрано је пет различитих класа симетрије материјала (погледај поглавље 1.4)



Слика 8.5. Визуелни приказ падајућег менија деформационе теорије

У оквиру падајућег менија под називом **Деформационе теорије** појавиће се приказ дат на слици 8.5. Сви типови смицајних деформационих теорија коришћени у овој дисертацији описани су у поглављу 2. У оквиру истог поглавља дефинисане су функције облика (табела 2.1), вектори напона и компоненте вектора деформација. Матрице спрезања и пројекције јединичних оптерећења су дефинисане у оквиру поглавља 3. Као репрезентативни пример за одређивање типова матрица спрезања, у додатку је дат код програма за произвољну деформациону теорију трећег реда. За сваку од теорија написане су функције које одређују бројне вредности матрица спрезања. У кодовима датим у додатку, на пример функција *Amatrix* одређује бројне вредности матрице *A* из поглавља 3. Треба нагласити да, иако облик матрице *A* није исти код свих теорија, назив је ипак универзалан, што је могуће јер су функције кодова разврстане по директоријумима тако да свакој деформационој теорији и сваком типу анализе одговара различит директоријум. За позив неке функције потребно је дефинисати путању. На пример, путања за добијање дијаграма фазних брзина при пропагацији таласа је облика: *cd linearna; cd numrez; cd propagacija; phasevelocity*. Код матрица спрезања, чије подинтегралне функције представљају композицију функција облика са полиномним функцијама или композицију функција облика, полиномних функција и извода функција облика по координати дебљине, коришћена је нумеричка интеграција за добијање бројних вредности. У табелама поглавља 5 функције облика код којих није била потребна нумеричка интеграција су уоквирене. Статичке једначине равнотеже и динамичке једначине кретања приказане су у поглављу 4.4. Треба нагласити да је извођење ових једначина извршено уз помоћ развијених функција.

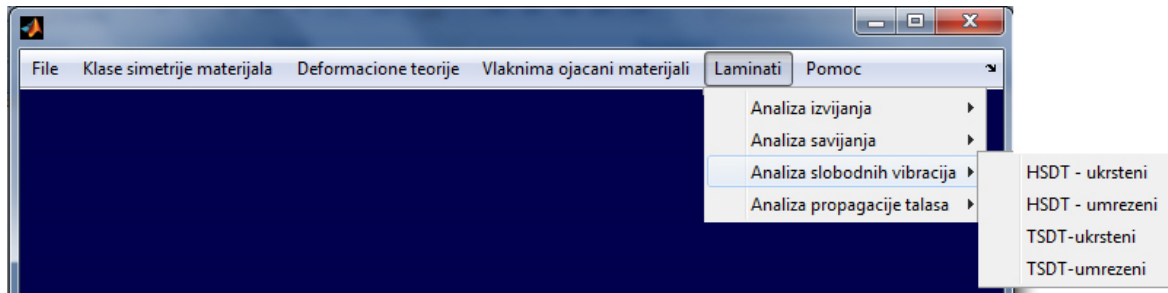
На слици 8.6 дат је приказ падајућег менија под називом **Влакнима ојачани материјали** у оквиру дела програма за одређивање аналитичких решења.



Слика 8.6. Визуелни приказ падајућег менија влакнима ојачани материјали

Поступак добијања дисперзионих кривих при пропагацији Ламбових таласа применом смицајне деформационе теорије другог реда дат је у поглављу 7. У истом поглављу описан је и поступак добијања дијаграма фазних брзина. Анализирана је пропагација таласа у материјалима ојачаним једном или двама фамилијама јаких екстензибилних влакана. Као пример имплементације теоријских поступака, у додатку је дат код програма за добијање дисперзионих релација. Поступак за добијање кривих спорости запреминских таласа, као и приказ визуелних резултата дат је у радовима [170]. Аналитички поступци за добијање дисперзионих релација Рејлијевих таласа дати су у радовима [171].

Слика 8.7 даје приказ менија **Ламинати** који одговара делу програма за добијање аналитичких решења. У овој дисертацији примена аналитичких метода у проблемима извијања описана је у поглављу 5. У оквиру креираног модула софтвера могуће је анализирати укрштене и умрежене ламинате засноване на свим деформационим теоријама вишег реда описаним у поглављу 2. Добијене вредности бездимензионог параметра извијања приказане су у табелама 5.1-5.3.



Слика 8.7. Визуелни приказ падајућег менија ламинати

Проблеми савијања су описани у оквиру поглавља 5.2 и дате упоредне вредности нормализованих померања и напона у табелама 5.4 - 5.7. Анализирани су симетрични и антисиметрични укрштени ламинати и умрежени ламинати. Дијаграми приказани на сликама 5.3 - 5.12 су добијени коришћењем овог модула програма. Као пример за презентацију изабран је код за анализу проблема савијања укрштених симетричних ламината применом смицајне деформационе теорије трећег реда, који је дат у додатку. Последњи ред овог падајућег менија представља анализу пропагације таласа у ламинатима креираним од слојева код којих је конститутивна матрица дефинисана преко инжењерских константи, као и у ламинатима конституисаним од материјала ојачаног једном фамилијом влакана. Функције за одређивање дисперзионих кривих и дијаграма фазних брзина такође припадају овом менију програма. Треба нагласити да су, за разлику од проблема извијања, савијања и слободних вибрација, у овом случају посматрани само симетрични али не и антисиметрични ламинати. Целокупна проблематика пропагације таласа описана је у поглављу 7, док је као репрезент приказан Матлаб код за анализу пропагације таласа применом смицајне деформационе теорије другог реда. Код је као и сви претходно поменути кодови дат у додатку.

Предност овог модула лежи и у чињеници да се једноставним корекцијама може проверити да ли је нека нова функција облика применљива или да ли су измене уведене у претпостављене облике поља померања дозвољене. Такође би требало поменути да промена облика поља померања изазива ланчану реакцију у симболичком делу кода за макромеханичку анализу. Тако, на пример, ако се у претпостављеним пољима померања произвољне деформационе теорије трећег реда, померање дуж координате дебљине, уместо полиномном функцијом трећег реда, представи полиномном функцијом другог реда, то ће утицати на типове матрица спрезања, што даље утиче на јединична оптерећења. Промена броја независно променљивих уз степене од координате дебљине проузрокује и промену броја једначина и тако даље. Уз помоћ симболичког модула овог софтвера све поменуте промене се брзо идентификују, што у огромној мери поједностављује теоријска извођења.

Као резиме имплементације теорија вишег реда у креирани софтвер, треба напоменути да су у додатку дати само неки од битних кодова за макромеханичку анализу композитних ламината, пре свега из разлога њихове обимности, јер би приказ свих линија кода био преобиман. На крају треба напоменути да је визуелни приказ прозора софтвера креиран коришћењем хендл објекта (*handle object*) у Матлабу.

9 Закључна разматрања

У овој дисертацији су композитни ламинати посматрани у макроскопском смислу као хомогени анизотропни медији. Развијена је методологија проучавања ламината са слојевима анизотропних карактеристика уз примену деформационих теорија вишег реда. Истраживања у овој дисертацији треба да пруже основу за дефинисање нових или допуну и потврђивање већ постојећих законитости и утицајних фактора при примени деформационих теорија вишег реда у проблемима макромеханичке анализе композитних ламината.

У првом поглављу систематизовани су основни принципи теорије еластичности који се користе у анализи композитних ламинатних плоча. Дата су извођења за најбитније механичке једначине које се користе код композитних ламината. Извршена је анализа потребног теоријског приступа тако да на овај начин добијене једначине представљају функционалну целину са наредним поглављима. Размотрене су класе симетрије материјала које у аналитичком решавању имају једну од пресудних улога за добијање решења. Такође је извршена систематизација дефинисања конститутивних матрица материјала који су најчешћи конституенти ламинатних плоча. Показани су облици ових матрица које су имплементирани у софтвер. Приказани модели омогућавају да софтвер може да користи као константе материјала инжењерске константе које су најчешће присутне у литератури, али је описан и приступ дефинисања константе еластичности преко привилегованих праваца материјала који су ојачани са двама фамилијама влакана. У софтверу су креирани модули који могу одредити тачне бројне вредности конститутивне матрице за оба поменута приступа. Такође је систематизована веза између напона и деформација коришћењем енергије деформације. На тај начин заокружена је целина неопходна за имплементацију смицајних деформационих теорија вишег реда.

У другом делу направљен је преглед претпостављених поља померања, која чине основу употребе HSDT теорија. Дате су напомене о недостацима теорија нижег реда и детаљно су изведене компоненте тензора деформације у области линеарне еластичности. Деформације су изведене и за теорије нижег реда са циљем упоредне анализе са разрађиваним теоријама вишег реда. За теорије засноване на функцијама облика изведене су компоненте деформације у зависности од функције облика. У раније поменутом софтверу омогућено је да се на једноставан начин уведе нова функција облика. Дати су упоредни дијаграми великог броја постојећих функција облика из литературе и показано је на који начин повећање дебљине ламинатне плоче утиче на ове функције. Смањење степена апроксимације деформације нормале на средњу површ ламината је анализирано посматрањем промене облика ових функција. Закључено је да се све разматране функције облика могу класификовати у неколико подгрупа. Показано је да функције облика које припадају, геометријски гледано, истој групи не морају бити из исте групе аналитичких функција. Тако, на пример, једној геометријској групи, што значи да функције имају сличне облике дијаграма, могу припадати и полиномне, тригонометријске, хиперболичке или експоненцијалне функције облика. Изведен је закључак о екстремним вредностима ових функција и њиховој инваријатности у односу на промену дебљине ламинатне плоче. У другом делу изведене су компоненте вектора деформације за најопштије полиномне деформационе теорије другог и трећег реда. Приказано је груписање коефицијената уз одговарајући степен координате z која припада оси нормалној на средњу равну плоче у недеформисаној конфигурацији. За сваку од деформационих теорија вишег реда дефинисан је тачан број независно променљивих од кога

зависи број независних једначина у систему парцијалних диференцијалних једначина статичке и динамичке равнотеже, респективно.

У трећем поглављу је за изабрану групу ламината са моноклиничким типом симетрије извршена комплетна макромеханичка анализа, што подразумева везу између напона, деформација, пројекција компоненти резултујућег оптерећења, као и типова матрица које настају као резултат слагања слојева. Треба нагласити да је овде усвојен принцип континуалности деформација који нарушава принцип континуалности напона. Матрице слагања и пројекције оптерећења по јединици површине су изведене за две различите врсте проблема. У првом случају фокус је на проблемима при раванском стању напона и претпоставци да је померање дуж осе која је нормална на средњу раван ламината константа. У том случају се слично као код смицајне деформационе теорије првог реда занемарују утицаји нормалног напона σ_{zz} , односно занемарује се и нормална деформација ε_{zz} . Други случај не занемарује ни једну компоненту вектора напона, односно вектора деформација, респективно. Код приступа заснованог на континуалности деформација, одређивање матрица слагања слојева је од пресудног утицаја на добијање резултата при било ком типу анализе. У матлабу је креиран подпрограм који на основу претпостављеног облика померања тачно дефинише тип матрица слагања. Показано је да матрице слагања не морају бити искључиво квадратне матрице већ могу бити и правоугаоне. Такође је примећено да се у проблемима у којима долази до појаве правоугаоних матрица спрезања јављају и њима транспоноване матрице. Овде су везе између компоненти јединичног оптерећења и компоненти вектора деформације дате детаљно преко компоненти матрица спрезања. Идентификовано је да се код полиномних претпостављених померања матрице спрезања најједноставније дефинишу груписањем уз одговарајуће степене координате z . Код поља померања заснованог на функцијама облика груписање се врши и према изворном облику функције, као и према њеним изводима по z , од које функција зависи. Треба нагласити да је макромеханичка анализа у овом поглављу извршена за уопштене ламинате, односно нису узимане у обзир класе симетрије ламината, па је у складу са тим оваква анализа применљива на било коју класу симетрије ламинатних плоча. Претходно поменута чињеница јасно доводи до закључка да је овако описану анализу могуће применити и у нумеричким поступцима попут методе коначних елемената без увођења додатних ограничења. Оно што је такође потребно напоменути је чињеница да комерцијални софтвери за анализу конструкција још увек нису оспособљени за рад са теоријама вишег реда. Тако се, на пример, у *Nastran*-у и комбинацији са *Femap*-ом, за анализу композитних ламината користи смицајна деформациона теорија првог реда, па је у теоријским објашњењима наведеним уз овај софтвера дата макромеханичка анализа само за ову теорију.

У четвртном поглављу су изведени варијациони принципи који су у софтверу који прати ову дисертацију искоришћени за добијање једначина статичке и динамичке равнотеже. Као детаљ је приказан рад са варијационим оператором δ , јер је било неопходно надоместити одсуство овог оператора у симболичком програмирању у матлабу. Формирана је фиктивна променљива као функција независно променљивих x и y тако да се може извршити теоријско груписање уз варијације независно променљивих. Треба нагласити да још увек није идеално оптимизована ова процедура, тако да није једноставно сналажење и читавање резултата од стране било ког корисника софтвера. Имплементација овог поступка значајно може поједноставити поступак за извођење једначина равнотеже који је неопходан при увођењу нових теоријских модела. Сложене и обимне једначине равнотеже се овим поступком добијају на једноставан начин. У овом поглављу су дате једначине добијене поменутим поступком.

У петом поглављу су обрађене математичке методе за добијање аналитичких решења. Акцент у овом раду управо и лежи у поступцима добијања аналитичких решења за проблеме савијања, извијања, слободних вибрација и пропагације таласа. Показано је да се у поменутих проблемима композитних ламината могу анализирати укрштени ламинати, али истим техникама и умрежени ламинати, који у великом броју радова нису анализирани. Елаборирано је да је за добијање аналитичких решења код умрежених ламината неопходно изменити и контурне услове. Поред измене контурних услова неопходно је било водити рачуна и о коефицијентима у матрицама спрезања који су различити од нуле. Дати су облици свих матрица спрезања и показано је да је аналитичка решења једино могуће добити ако се уведу поменута ограничења у симболичком делу програмирања у матлабу. Коришћена је могућност наизменичног рада са симболичким ознакама променљивих као и са бројним вредностима које замењују симболичке променљиве. У табелама са упоредним вредностима код проблема извијања закључено је да се резултати за бездимензиони параметар извијања могу добити на два начина. Први начин је омогућавао да се решења интеграла подинтегралних функција у матрицама спрезања могу наћи у затвореном облику и она су уоквирена у табелама. Други начин из разлога немогућности налажења експлицитних решења интеграла, захтева нумерички интеграцију подинтегралних функција у матрицама спрезања. Сам прелазак на нумеричку интеграцију повећава степен апроксимације у односу на затворена решења, али и поред тога, овде је показано да се задовољавајућа решења могу добити и у оваквим ситуацијама. Потврђена је полазна хипотеза да су смицајне деформационе теорије засноване на функцијама облика применљиве у аналитичком решавању проблема извијања чак и код дебелих плоча код који је однос $a/h < 10$. Такође је јасно показано да код великих односа a/h што је карактеристично за танке ламинатне плоче није неопходно коришћење теорија вишег реда, јер су поклапања теоријских вредности са резултатима који се добијају теоријама нижег реда, а који су дати у литератури, доста велика и иду до реда величине 10^{-3} . Показано је да највећа одступања у резултатима дају функције облика код којих су дијаграми готово линеарни, па су резултати добијени овим функцијама најприближнији резултатима добијеним теоријама нижег реда, јер је код теорија нижег реда усвојена претпоставка о линеарности нормале на средњу раван ламинатне плоче при деформацији. Код проблема извијања анализирани су и утицаји односа модула еластичности E_1/E_2 и показано је да се при малим односима ових модула утицај функције облика готово занемарује. Такође је дијаграмски показано да повећање односа a/h води ка асимптотском приближавању резултата, док повећање односа E_1/E_2 не производи такав ефекат.

У оквиру истог поглавља извршена је анализа понашања укрштених и умрежених слободно ослоњених ламинатних плоча под дејством континуалног синусоидалног оптерећења. Описана је комплетна аналитичка процедура за имплементацију функција облика и показано је одлично слагање свих HSDT теорија заснованих на функцијама облика при добијању бездимензионих вредности дефлекције, нормалних напона $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}$, као и раванског смицајног напона $\bar{\tau}_{xy}$, док су разлике у осталим смицајним напонима нешто израженије. Поређење је вршено са резултатима 3D еластичне теорије и показано је да за било коју предложену функцију облика грешка у одступањима вредности бездимензионе дефлекције не прелази вредност од 3.5%. Такође је показано да се грешке у резултатима смањују са повећањем односа a/h што поново наводи на закључак да се утицај функција облика смањује са повећањем поменутог односа. На дијаграмима је показан јасно изражен дисконтинуитет нормалних напона $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}$, док су дисконтинуитети осталих напона много

мањи и дијаграмски неприметнији. Појава дисконтинуитета напона је основна негативна карактеристика теорија вишег реда.

Даље је приказан нов начин имплементације Кантове полиномне деформационе теорије трећег реда. Доказано је да овако уведен поступак даје одлично поклапање у свим приказаним величинама са ХСДТ теоријама заснованим на функцијама облика, као и са 3D еластичном теоријом. Такође је показано да, иако је на први поглед поступак обиман, због високог реда полинома у претпостављеним пољима померања, нема великих потешкоћа у раду. Наглашено је да је за добијање аналитичких вредности могуће избећи нумеричку интеграцију, што знатно скраћује време израчунавања. Кантовом теоријом добијена су најбоља поклапања у бездимензионим вредностима нормалних напона са 3D еластичном теоријом и показано да је грешка у том случају само 0.04%. Добијањем одличних резултата при малим односима a/h оправдана је употреба ове теорије у проблемима савијања укрштених слободно ослоњених ламинатних плоча.

Као резиме слободних вибрација укрштених симетричних ламината треба нагласити да се аналитички поступак за добијање вредности бездимензионе фреквенције може спровести слично као код проблема извијања. У анализи ових проблема HSDT теорије засноване на функцијама облика дају добре резултате при малим односима E_1/E_2 , док се са повећањем вредности ових односа разлике повећавају. Такође је уочено да употреба функција облика, чији су графици у поглављу два налик линеарним кривама, имају већа одступања у $\bar{\omega}$ вредностима, па је из тог разлога њихова употреба ограничена на танке плоче, слично теоријама нижег реда.

При разматрању проблема слободних вибрација слободно ослоњене умрежене ламинатне плоче, уочена су битна ограничења употребе функција облика. Чак пет, од предложених петнаест функција облика, није могуће користити, јер не могу дати резултате приближне аналитичким прорачунима. Друга негативна страна лежи у чињеници да и употреба преосталих функција не омогућава добијање прихватљивих резултата за $\bar{\omega}$.

Деформационе теорије трећег реда уведене од стране Таруна Канта применљиве су код укрштених, како симетричних, тако и антисиметричних слободно ослоњених ламинатних плоча. Унапређена процедура аналитичког добијања решења за умрежене антисиметричне ламинатне плоче дала је одлично поклапање са резултатима најчешће коришћене деформационе теорије вишег реда дефинисане од стране Редија.

У шестом поглављу је у кратким цртама објашњена веза између ламинатних теорија и методе коначних елемената. Показан је општи принцип одређивања интерполационих функција, матрице извода интреполационих функција, као и повезивање координата и померања произвољне тачке унутар елемента са вредностима чворних координата и померања. У програмском пакету *Nastran* моделирана је једноставна квадратна плоча, само са циљем приказа употребе коначног елемента ламинат заснованог на смицајној деформационој теорији првог реда. Направљен је табеларни приказ резултата за поређење са проучаваним теоријама вишег реда и јасно је указано на недостатке теорија нижег реда. Кроз поменуте резултате оправдана је потреба за употребом теорија вишег реда.

У седмом поглављу проучено је динамичко понашање ламинатних плоча при пропагацији Ламбових таласа. Показано је да при пропагацији ових таласа услед нехомогености материјала и великог степена анизотропије, долази до појаве геометријске дисперзије, која може бити изазвана нееластичним понашањем материјала, деламинацијом, попуштањем веза на међуслојевима итд. Проучавање геометријске дисперзије, која је изазвана интеракцијом са контурама, односно наизменичним понављањем рефлексије на горњој и доњој површини

ламината, је од пресудног значаја за ову врсту проблема. У оквиру ове дисертације развијени су модели за анализу пропагације Ламбових таласа применом 3Д еластичне теорије и применом смицајних деформационих теорија вишег реда. Поменути модел заснован на 3Д еластичној теорији је развијен за потпуно анизотрону групу материјала са 21-им независним коефицијентом у конститутивној матрици. Развој таквог модела је имплементиран у симболички мод развијеног софтвера за симболичку анализу композитног материјала. У самом коду остављена је могућност да се добију дисперзионе релације и за више класе симетрије материјала на доста једноставан начин. Тако, на пример, овим моделом могуће је разматрати пропагацију таласа кроз слојеве са моноклиничким или вишим типовима симетрије материјала попут отротропних (материјали ојачани двама фамилијама механички еквивалентних влакана) или трансверзално изотропних (материјали ојачани једном фамилијом влакана). Треба нагласити да при решавању парцијалних диференцијалних једначина кретања, добијених применом 3Д еластичне теорије, претпостављена решења за пропагацију Ламбових таласа у ламинату и пропагацију ових таласа у једном слоју се разликују због хетерогености која настаје као резултат слагања слојева ламината [162]. У матлаб коду је опционо остављена могућност избора да ли се посматра пропагација у слоју или у ламинату (видети поглавље 8). За пропагацију у ламинату, поред промене облика претпостављених решења, детаљно је описана и техника пропагатор матрице по узору на радове [92].

Акцент ове дисертације је био да се покаже да се применом смицајних деформационих теорија вишег реда могу добити готово идеална поклапања за фундаменталне модове са поступцима 3Д еластичне теорије. Код виших модова ова одступања су нешто већа. Као репрезент примене ових теорија изабрана је смицајна деформациона теорија другог реда из разлога што су примене HSDT теорија заснованих на функцијама облика и TSDT теорије већ детаљно описане у поглављу 5. Други разлог употребе ове теорије је верификација резултата. У првом делу нумеричких примера, анализиран је слој и ламинат чија је конститутивна матрица дефинисана преко инжењерских константи и добијена су одлична поклапања са постојећим радовима из литературе [151], [172]. Верификовањем поступка примене, отворен је простор за анализу пропагације Ламбових таласа кроз материјале ојачане једном и двама фамилијама влакана. Посматрана је примена употребе теорија вишег реда при пропагацији таласа у једном слоју поменутих материјала, као и у ламинату састављеном од слојева ојачаних једном фамилијом влакана. Као што је раније речено, материјал ојачан двама фамилијама влакана може да се замисли као материјал направљен од произвољног броја слојева ојачаних једном фамилијом влакана, заокренутих наизменично под угловима ϕ , $-\phi$ у односу на линије симетрије, па није имало смисла говорити о креирању ламината састављеног од ове врсте материјала. Анализиране су дисперзионе релације фазне брзине у функцији производа фреквенције и дебљине ламината (fh) при фиксираној вредности угла пропагације α , као и дијаграми фазних брзина при фиксираној вредности односа, производа фреквенције и дебљине ламината са лонгитудиналном брзином (c_L). У симболичком модулу креираног софтвера омогућено је јасно раздвајање на део који одговара симетричном, односно антисиметричном моду пропагације таласа, респективно. Детаљно је дат теоријски опис у поглављу 7, имплементација у развијени софтвер у поглављу 8, а матлаб кодови за ову врсту проблема у додатку. Применом ове теорије показано је да постоје три криве (дисперзионе или фазне брзине) које одговарају антисиметричном моду пропагације и пет кривих које одговарају симетричном моду пропагације. У оба случаја није било чистих модова пропагације већ су се јављали квазимодови и то у облицима квазисавојних qA , квазиектензионих qS и квазихоризонтално поларизованих модова qSH .

Квазихоризонтално поларизовани qSH модови јавили су се у оба мода јасно издвојена мода пропагације односно, и код симетричног, и код антисиметричног мода пропагације. Том приликом усвојено је да qSH са индексом нула и свим парним индексима одговарају симетричном моду, док ови модови са непарним индексима одговарају антисиметричном моду. Код материјала ојачаног једном фамилијом влакана показано је да све три криве антисиметричног мода настају као резултат спрезања квазимодова. Усвојене ознаке модова одговарају најдоминатнијем моду на кривој. Тако на пример ознака криве A_0 означава да је у том случају најдоминатнији qA_0 мод. Слично важи и за остале криве. У поларним дијаграмима фазних брзина у једном слоју, јасно је показано да се екстремне вредности јављају у ситуацијама када се правац пропагације Ламбових таласа поклапа са материјалним правцем или је управан на материјалне правце. Код ламината креираног од материјала ојачаног једном фамилијом влакана, показано је да екстремне вредности у дијаграму фазних брзина не морају нужно припадати истом правцу у поларном дијаграму. Оно што је примећено је да оне леже на правцима поларне симетрије. Такође се може уочити да постоје тачке на дијаграму где се јасно може видети прелазак из једног мода у други. То нужно нису исте тачке, већ свака два суседна дијаграма, осим дијаграма фундаменталног и првог вишег мода, имају тачке међусобног приближавања кривих којима су описане фазне брзине. Те тачке такође припадају правцима поларне симетрије. У седмом поглављу могу се видети описи ових правца.

На дисперзионим кривама, различитим бојама приказани су тачни преласци из једног у други квазимод, као и вредности фреквенције при којима долази до ових прелазака. Приказано је да сви виши модови имају асимптотску вертикалну вредност фреквенције при којој се први пут појављују. У ламинату је уочена појава да се криве симетричног мода које одговарају фундаменталним SH_0 модови и S_0 толико приближавају да се на сликама не може јасно уочити да ипак не долази до преклапања ових кривих. Из тог разлога је као детаљ издвојена околина критичне вредности фреквенције при којој долази до ове појаве.

Код материјала ојачаног двама фамилијама влакана посматрани су дијаграми фазних брзина и дисперзионе криве при различитим вредностима углова између двеју фамилија влакана. При углу између две фамилије влакана $2\phi = 0^\circ$ дијаграми фазних брзина су готово идентични дијаграмима фазних брзина слоја ојачаног једном фамилијом влакана, што је у складу са претпоставкама креирања слоја ојачаног двама фамилијама влакана. Уочено је да повећање угла између двеју фамилија влакана највише утиче на дијаграме квазисавојног мода qA_1 . Оно што је такође приметно је да увећана вредност угла утиче и на повећање минималних вредности квазисмицајног хоризонталног мода пропагације qSH_1 . При вредности угла пропагације између две фамилије влакана $2\phi = 90^\circ$ и код симетричног и код антисиметричног мода крива фундаменталног мода по први пут је постала јасна кружница, што указује на појаву мода налик чистом моду. Код осталих модова јасно је видљиво да се екстремне вредности фазне брзине свих модова осим фундаменталних A_0 и S_0 , јављају на правцима који се добијају ротацијом правца $0^\circ - 180^\circ$ у инкрементима од по 45° .

Из свега претходно наведеног може се јасно закључити да су смицајне деформационе теорије вишег реда супериорне у односу на све теорије нижег реда. У овој дисертацији је опсежном упоредном анализом показано да су ове теорије, иако апроксимативне, применљиве у различитим типовима статичке и динамичке анализе. Компаративном анализом HSDT теорија заснованих на функцијама облика показано је да је њихова употреба делимично ограничена

јер све теорије нису применљиве на типове спроведених анализа. Иако се овим теоријама уклањају недостаци одабира корекционог фактора, неминовна је појава одређених проблема које није могуће отклонити. Полиномне смицајне деформационе теорије, упркос чињеници да неке од њих захтевају корекционе факторе, имају велику применљивост, јер не постоје недостаци које није могуће отклонити. У овој дисертацији дат је допринос у теоријском развоју ових теорија у домену симболичког модула креираног софтвера. Такође је имплементираним аналитичким поступцима омогућена проверљивост добијених резултата. Направљена је конекција са методом коначних елемената и описана процедура коју би требало применити како би се унапредио коначни елемент ламинат. За даља истраживања остављен је простор за конекцију анализираних и новоразвијених теорија са комерцијалним софтверима за анализу конструкција применом методе коначних елемената. Даљим правцима истраживања могу се сматрати још и примена смицајних деформационих теорија у нелинеарним проблемима, затим термичким и ударним проблемима. Додатно би на основама развијених програмских решења било могуће на доста једноставан начин проширити поље истраживања и на друге типове еластичних таласа. Нека идеализација примене ових теорија ишла би у смеру одабира, математички гледано, што једноставније теорије која би била широко применљива и која би давала резултате што приближније експерименталним резултатима, са минималним одступањима у односу на 3Д еластичну теорију.

Литература:

- [1] Kirchhoff V.G., *Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe*, J Die Reine Angew Math, 1850; (40):51–88.
- [2] Feldman E., Aboudi J., *Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading*, Compos Struct, 1997; 38(1):29–36.
- [3] Javaheri R., Eslami M.R., *Thermal buckling of functionally graded plates*. AIAA J, 2002; 40(1):162–9.
- [4] Kiani Y., Bagherizadeh E., Eslami M.R., *Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions)*, ZAMM – J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech, 2011; 91(7):581–93.
- [5] Mahdavian M., *Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading*, J Solid Mech, 2009; 1(3):213–25.
- [6] Mohammadi M., Saidi A.R., Jomehzadeh E., *Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates*, Appl Compos Mater 2010;17(2):81–93.
- [7] Yanga J, Shen HS. *Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads*. Int J Non-Linear Mech, 2003; 38(4):467–82.
- [8] Alinia M.M., Ghannadpour S.A.M., *Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates*, Compos Struct, 2009; 88(3):354–9.
- [9] Woo J., Meguid S.A., Ong L.S., *Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates*, J Sound Vib, 2006; 289(3):595–611.
- [10] Hu Y., Zhang X., *Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate*, Mech Based Des Struct Mach, 2011; 39(3):367–77.
- [11] Chakraverty S., Pradhan K.K., *Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method*, Int J Appl Mech, 2014; 6(4):1450043.
- [12] Li S.R., Zhang J.H., Zhao Y.G., *Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection*, Thin-Walled Struct, 2007; 45(5):528–36.
- [13] Zhang D.G., Zhou Y.H., *A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface*, Comput Mater Sci, 2008; 44(2):716–20.
- [14] Bodaghi M., Saidi A.R., *Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation*, Arch Appl Mech, 2011; 81(6):765–80.
- [15] Mindlin R.D., *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*, J Appl Mech, 1951; 18(1):31–8.
- [16] Reissner E., *On bending of elastic plates*, Q Appl Math, 1947; 5(1):55–68.
- [17] Reissner E., *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J Appl Mech, 1945; 12(2):69–72.
- [18] Wang C.M., Lim G.T., Reddy J.N., Lee K.H., *Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories*, Eng Struct, 2001; 23(7):838–49.
- [19] Della Croce L., Venini P., *Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates*, Comput Methods Appl Mech Eng, 2004; 193(9):705–25.
- [20] Kim K.D., Lomboy G.R., Han S.C., *Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (FGM) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element*, J Compos Mater, 2008; 42(5):485–511.

- [21] Alijani F., Bakhtiari-Nejad F., Amabili M., *Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments*, Nonlinear Dyn, 2011; 66(3):251–70.
- [22] Fallah A., Aghdam M.M., Kargarnovin M.H., *Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method*, Arch Appl Mech, 2013; 83(2):177–91.
- [23] Lanhe W., *Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate*, Compos Struct, 2004; 64(2):211–8.
- [24] Bouazza M., Tounsi A., Adda-Bedia E.A., Megueni A., *Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach*, Comput Mater Sci, 2010; 49(4):865–70.
- [25] Yaghoobi H., Yaghoobi P., *Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach*, Meccanica, 2013; 48(8):2019–35.
- [26] Hosseini-Hashemi S., Rokni Damavandi Taher H., Akhavan H., Omidi M., *Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory*. Appl Math Model, 2010; 34(5):1276–91.
- [27] Hosseini-Hashemi S., Fadaee M., Atashipour S.R., *A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates*, Int J Mech Sci. 2011; 53(1):11–22.
- [28] Mohammadi M., Saidi A.R., Jomehzadeh E., *A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges*, Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci, 2010; 224(9):1831–41.
- [29] Saidi A.R., Jomehzadeh E., *On the analytical approach for the bending/ stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported*, Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci, 2009; 223(9).
- [30] Yaghoobi H., Torabi M., *Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions*, J Therm Stresses, 2013; 36(9):869–94.
- [31] Reddy J.N., *A simple higher-order theory for laminated composite plates*, J Appl Mech, 1984; 51:745–52.
- [32] Ghugal Y.M., Shimpi R.P., *A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates*, J Reinf Plast Compos, 2002; 21(9):775–813.
- [33] Khandan R., Noroozi S., Sewell P., Vinney J., *The development of laminated composite plate theories: a review*, J Mater Sci, 2012; 47(16):5901–10.
- [34] Swaminathan K., Naveenkumar D.T., Zenkour A.M., Carrera E., *Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates A state-of-the-art review*, Compos Struct. 2015; 120:10–31.
- [35] Levinson M., *An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates*, Mech Res Commun, 1980; 7(6):343–50.
- [36] Reddy J.N., *Analysis of functionally graded plates*, Int J Numer Methods Eng, 2000; 47(1–3):663–84.
- [37] Shen H.S., *Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments*, Int J Mech Sci, 2002; 44(3):561–84.
- [38] Yang J., Shen H.S., *Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions*, Compos B Eng, 2003; 34(2):103–15.
- [39] Yang J., Liew K.M., Kitipornchai S., *Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory*, Comput Mech, 2004; 33(4):305–15.

- [40] Akbarzadeh A.H., Zad S.H., Eslami M.R., Sadighi M., *Mechanical behaviour of functionally graded plates under static and dynamic loading*, Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci, 2011; 225(2):326–33.
- [41] Zhang D.G., *Nonlinear bending analysis of FGM rectangular plates with various supported boundaries resting on two-parameter elastic foundations*, Arch Appl Mech, 2014; 84(1):1–20.
- [42] Qian L.F., Batra R.C., Chen L.M., *Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method*, Compos B Eng, 2004; 35(6):685–97.
- [43] Qian L.F., Batra R.C., Chen L.M., *Free and forced vibrations of thick rectangular plates using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless Petrov–Galerkin (MLPG) method*, Comp Model Eng Sci, 2003; 4(5):519–34.
- [44] Gilhooley D.F., Batra R.C., Xiao J.R., McCarthy M.A., Gillespie Jr. J.W. *Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions*, Compos Struct, 2007; 80(4):539–52.
- [45] Sheikholeslami S.A., Saidi A.R., *Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory*, Compos Struct, 2013; 106:350–61.
- [46] Pandya B.N., Kant T., *Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations*, Int J Solids Struct, 1988; 24(12):1267–86.
- [47] Matsunaga H., *Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory*, Compos. Struct, 2000; 48:231–244.
- [48] Matsunaga H., *Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory*, Compos Struct, 2008; 82(4):499–512.
- [49] Matsunaga H., *Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings*, Compos Struct, 2009; 87(4):344–57.
- [50] Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M., *A high-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates*, J Appl Mech, 1977; 44(4):663–8.
- [51] Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M., *A high-order theory of plate deformation part 2: laminated plates*, J Appl Mech, 1977; 44(4):669–76.
- [52] Kant T., Swaminathan K., *Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory*, Compos Struct, 2002; 56:329–44.
- [53] Kant T., Swaminathan K., *Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory*, Compos. Struct, 2001; 53:73–85.
- [54] Pradyumna S., Bandyopadhyay J., *Dynamic instability of functionally graded shells using higher-order theory*, J Eng Mech, 2010; 136(5):551–61.
- [55] Kant T., Khare R.K., *A higher-order facet quadrilateral composite shell element*, Int J Numer Methods Eng, 1997; 40(24):4477–99.
- [56] Talha M., Singh B.N., *Thermo-mechanical induced vibration characteristics of shear deformable functionally graded ceramic–metal plates using finite element method*, Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci, 2011; 225(1):50–65.
- [57] Xiang S., Kang G., *A n th-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates*, Eur J Mech A Solids, 2013; 37:336–43.
- [58] Milosavljević D, Bogdanović G, Veljović LJ, Radaković A, Lazić M, *Failure criteria of fibre reinforced composites in homogenous temperature field*, Thermal Science, Vol. 14, pp. S285-S297, 2010.
- [59] Xiang S., Kang G., Xing B., *A n th-order shear deformation theory for the free vibration analysis on the isotropic plates*. Meccanica, 2012; 47(8):1913–21.

- [60] Xiang S., Kang G., Yang M., Zhao Y., *Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core*. Compos Struct. 2013; 96:226–31.
- [61] Xiang S., Kang G., Liu Y., *A n th-order shear deformation theory for natural frequency of the functionally graded plates on elastic foundations*. Compos Struct. 2014; 111:224–31.
- [62] Xiang S., Kang G., *Static analysis of functionally graded plates by the various shear deformation theory*, Compos Struct, 2013; 99:224–30.
- [63] Kant T., Jha D.K., Singh R.K., *A higher-order shear and normal deformation functionally graded plate model: some recent results*, Acta Mech, 2014; 225(10):2865–76.
- [64] Jha D.K., Kant T., Singh R.K., *Stress analysis of transversely loaded functionally graded plates with a higher order shear and normal deformation theory*, J Eng Mech, 2013; 139(12):1663–80.
- [65] Jha D.K., Kant T., Singh R.K., *Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects*, Compos Struct, 2013; 96:799–823.
- [66] Jha D.K., Kant T., Singh R.K. *Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates*, Nucl Eng Des, 2012; 250:8–13.
- [67] Jha D.K., Kant T., Srinivas K., Singh R.K., *An accurate higher order displacement model with shear and normal deformations effects for functionally graded plates*, Fusion Eng Des, 2013; 88(12):3199–204.
- [68] Kant T., Manjunatha B.S., *An unsymmetric FRC laminate finite element model with 12 degrees of freedom per node*, Eng Comput, 1988; 5(4):300–8.
- [69] Swaminathan K., Naveenkumar D.T., *Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates – analytical solutions*, Eur J Mech A Solids, 2014; 47:349–61.
- [70] Levy M., *Memoire sur la theorie des plaques elastiques planes*, J Math Pures Appl, 1977; 219–306.
- [71] Stein M., *Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing*, AIAA J, 1986; 24(9):1537–44.
- [72] Touratier M., *An efficient standard plate theory*, Int J Eng Sci, 1991; 29(8):901–16.
- [73] Soldatos K., *A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates*, Acta Mech, 1992; 94(3):195–220.
- [74] Karama M., Afaq K.S., Mistou S., *Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity*, Int J Solids Struct, 2003; 40(6):1525–46.
- [75] Aydogdu M., *A new shear deformation theory for laminated composite plates*, Compos Struct, 2009; 89(1):94–101.
- [76] Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C., *A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates*, Int J Solids Struct, 2012; 49(1):43–53.
- [77] Mantari J.L., Guedes Soares C., *Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory*, Compos Struct, 2012; 94(6):1991–2000.
- [78] Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C., *A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates*, Compos B Eng, 2012; 43(3):1489–99.
- [79] Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C., *Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory*, Compos Struct, 2012; 94(2):714–23.

- [80] Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C., *Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higherorder shear deformation theory*, Compos B Eng, 2012; 43(8):3348–60.
- [81] Mantari J.L., Guedes Soares C., *Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory*, Compos Struct, 2012; 94(8):2640–56.
- [82] Mantari J.L., Guedes Soares C., *Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates*, Compos Struct, 2013; 96:545–53.
- [83] Mantari J.L., Bonilla E.M., Guedes Soares C., *A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates*, Compos B Eng, 2014; 60:319–28.
- [84] Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N., *General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels*, Composite structures, 2013; 95:639-666.
- [85] Meiche N. E. et al. *A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate*, International Journal of Mechanical Sciences, 2011; 53:237–247.
- [86] Akavci S.S., *Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates*, Mech Compos Mater, 2010; 46(2):215–26.
- [87] Mechab Belaid, Mechab Ismail, Benaissa Samir, *Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory by the new function under thermo-mechanical loading*, Composites: Part B, 2012; 43:1453–8.
- [88] Grover N., Maiti D.K., Singh B.N., *Flexural behavior of general laminated composite and sandwich plates using a secant function based shear deformation theory*, Latin American Journal of Solids and Structures, 2014; 11:1275-1297
- [89] Chadwick P., Smith G.D., *Foundations of the Theory of Surface Waves in Anisotropic Materials*, Advances in applied Mechanics, Vol. 17, Academic Press Inc., 1977; 303- 374.
- [90] Green W.A., *Bending Waves in Strongly Anisotropic Elastic Plates*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 1982; 35:485-507.
- [91] Green W.A., Milosavljevic D., *Extensional Waves in Strongly Anisotropic Elastic Plates*, Int. J. Solids & Structures, 1985; 21:343-353.
- [92] Green W.A., Rogerson G.A., Milosavljević D.I., *Transient Waves in Six-Ply and Eight-Ply Fibre Composite Plates*, Composites Science and Technology, Elsevier Science Publishers Ltd., London and New York, 1992; 44:151-158.
- [93] Spencer A.J.M., *Constitutive Theory for Strongly Anisotropic Solids*, Continuum Theory of the Mechanics of Fibre Reinforced Composites, ed. by A.J.M. Spencer, Springer-Verlag, Wien, 1984; 1-32.
- [94] Spencer A.J.M., *Deformations of Fibre Reinforced Materials*, Clar. Press, Oxford, 1972.
- [95] Milosavljević D.I., *Prostiranje talasa u elastičnim pločama ojačanim sa dve familije vlakana*, Univerzitet u Beogradu, Prirodno-matematički fakultet, Institut za mehaniku, Beograd, 1986.
- [96] Bogdanović G., *Dinamičko ponašanje kompozitnih laminata*, doktorska disertacija, Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet u Kragujevcu, Kragujevac, 2011.
- [97] Milosavljević D.I., *Mechanical Behaviour of Plate Reinforced by Two Families of Strong Fibres*, Brittle Matrix Composites 4, ed. by A.M. Brandt, I.H. Marshall and V.C. Li, Woodhead Publishing Ltd., Cambridge, 1994; 651-660.
- [98] Milosavljević D., *Composite reinforced by two families of fibres modeled as locally orthotropic*, 25th Yugoslav Congress on TAM, Novi Sad, 2005.

- [99] Milosavljević D.I., *Rayleigh Waves in Materials Reinforced by Two Families of Fibres, Recent Development in Surface Acoustic Waves*, ed. by Parker D.F., Maugin G.A., Springer Series on Wave Phenomena, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988; 251 - 259.
- [100] Whitney J. M. and Sun C. T., *A Higher Order Theory for Extensional Motion of Laminated Composites*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 30, No. 1, 1973; 85-97.
- [101] Robbins D.H., Reddy J.N., *Structural Theories and Computational Models for Composite Laminates*, Applied Mechanics Reviews, 1994; 47(6-1) 147-170.
- [102] Jarić J., *Mehanika kontinuuma*, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [103] Kintzel O., Basar Y., *Fourth-Order Tensors – Tensor Differentiation with Applications to Continuum Mechanics. Part I: Classical Tensor Analysis*, ZAMM, Vol. 86, 2006; 291-311.
- [104] J. Casey, P.M. Naghdi's notes on continuum mechanics, University of California, at Berkeley, 2001.
- [105] Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Mechanics and Analysis of Composite Materials*, Elsevier Science Ltd., 2001; ISBN 0-08-042702-2.
- [106] Musgrave M.J.P., *Crystal Acoustics, Introduction to the Study of Elastic Waves and Vibrations in Crystals*, Reader in Applied Mathematics, Imperial College London, Holden-Day, Inc. San Francisco, California, 1970.
- [107] Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*, McGraw-Hill: Series on aeronautical and aerospace engineering, 1994; ISBN 0-07-023451-5.
- [108] Kojić M., Slavkovic R., Živković M., Grujović N., *Finite Element Method I - Linear analysis*, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kragujevac, 1998.
- [109] Herakovich C.T. *Mechanics of Fibrous Composites*, John Wiley and Sons, Inc., 1998; ISBN 0-471-10636-4.
- [110] Г. Јовичић, *Анализа композитних ламината на основу критеријума отказа, магистарски рад*, Машински факултет Крагујевца, 1995.
- [111] Zhanga Y.X., Yangb C.H., *Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates*, Composite Structure, 2009, vol. 88:147–157.
- [112] Reddy J.N., Robbins Jr. D.H., *Theories and computational models for composite laminates*, Appl Mech Rev, 1994; 47:147–69.
- [113] Liu D.S., Li X.Y., *An overall view of laminate theories based on displacement hypothesis. J Compos Mater*, 1996; 30:1539–61.
- [114] Altenbach H., *Theories for laminated and sandwich plates, a review*, Mech. Compos. Mater., 1998; 34(3):243–152.
- [115] Ghugal Y.M., Shimpi R.P., *A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates*, J. Reinf. Plast. Compos., 2001; 20:255–72.
- [116] Vinson J.R., Chou T.W., *Composite Materials and Their Use in Structures*, Applied Science Pub. Ltd., London, 1975.
- [117] Noor A.K., Burton W.S., *Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates*, Applied Mechanics Reviews, 1989; Vol. 42:1–13.
- [118] Reddy J.N., Arciniega R.A., *Shear deformation plate and shell theories: from Stavsky to present*, Mech. Adv. Mater. Struct., 2004; 11:535–82.
- [119] Kapania R.K., Raciti S., *Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates: Part-I and Part-II*. AIAA Journal, 1989; Vol. 27:923–946.
- [120] Ashton J. E., Whitney J.M., *Theory of Laminated Plates*, Technomic Pub. Co., Lancaster; 1970.

- [121] Ambartsumyan S. A., *On the Theory of Anisotropic Shells and Plates*. Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity Symposium, Ed. by Olszak W., Warsaw, 1958; Paper No.1:83–94.
- [122] Reissner E., Stavsky Y., *Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Anisotropic Elastic Plates*, ASME Journal of Applied Mechanics, 1961; Vol. 28:402–408.
- [123] Dong S.B., Pister K.S., Taylor R.L., *On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates*, Journal of Aerospace Science, 1962; Vol. 29:969–975.
- [124] Lekhnitskii S.G., *Anisotropic Plates*, 2nd ed., Moscow, 1957; Translated from Russian by S.W. Tsai and T. Cheron, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [125] Yang P.C., Norris C.H., Stavsky Y., *Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates*, International Journal of Solids and Structures, 1966; Vol. 2:665–684.
- [126] Whitney J.M., Pagano N.J., *Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates*, ASME Journal of Applied Mechanics, 1970; Vol. 37:1031–1036.
- [127] Qi Y., Knight N.F., *A Refined First Order Shear Deformation Theory and its Justification by Plane-strain Bending Problem of Laminated Plates*, International Journal of Solids and Structures, 1996; Vol. 33:49–64.
- [128] Sun C.T., Whitney J.M. *Theories for the Dynamic Response of Laminated Plates*, AIAA Journal, 1973; Vol. 11, No. 2:178–183.
- [129] Pryor C.W.Jr., Barker R.M., *Finite Element Analysis Including Shear Deformation Effects for Application to Laminated Plates*, AIAA Journal, 1971; Vol. 9, No. 5:912–917.
- [130] Reddy J.N., Chao W.C., *A Comparison of Closed-Form and Finite-Element Solutions of Thick Laminated Anisotropic Rectangular Plates*, Nuclear Engineering and Design, 1981; Vol. 64, No. 2:153–167.
- [131] Owen D.R.J., Li Z.H., *A Refined Analysis of Laminated Plates by finite Element Displacement Methods I: Fundamentals and Static Analysis*, Computers and Structures, 1987; Vol. 26, No. 6:907–914.
- [132] Reddy J.N., Chao W.C., *A Comparison of Closed-Form and Finite-Element Solutions of Thick Laminated Anisotropic Rectangular Plates*, Nuclear Engineering and Design, 1981; Vol. 64, No. 2:153–167.
- [133] Turvey G.J., *Bending of Laterally Loaded, Simply Supported, Moderately Thick, Antisymmetrically Laminated Rectangular Plates*, Fibre Science and Technology, 1977; Vol. 10, No. 3: 211–232.
- [134] Chatterjee S. N., Kulkarni S.V., *Shear Correction Factors for Laminated Plates*, AIAA Journal, 1979; Vol. 17: 498–499.
- [135] Thai H.T., Kim S.E., *A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells*, Composite Structures, 2015; 128:70–86.
- [136] Ghugal Y.M., Shimpi R.P., *A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates*, Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2002; 21:775.
- [137] Ambartsumian S.A., *On the theory of bending plates*, Izv otd Tech Nauk an Sssr, 1958; 5:69–77.
- [138] Kruszewski E.T., *Effect of transverse shear and rotatory inertia on the natural frequency of a uniform beam*, NACA TN, 1949.
- [139] Levinson M., *A new rectangular beam theory*, J Sound Vib, 1981; 74(1):81–7.
- [140] Mantari J.L., Guedes Soares C., *Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates*. Compos Struct., 2012; 94(8):2561–75.

- [141] Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C., *Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher order shear deformation theory*, *Compos Struct*, 2011; 94(1):37–49.
- [142] Shojaee S., Valizadeh N., Izadpanah E., Bui T., Vu Tan-Van, *Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using NURBS-based isogeometric finite element method*, *Composite structures*, 2012; 94:1677-1693.
- [143] Akavci S.S., *Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Plates on an Elastic Foundation According to a Hyperbolic Shear Deformation Theory*, *Mechanics of Composite Materials*, 2014; Vol. 50, No.2.
- [144] Nelson R.B., Lorch D.R., *A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates*, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1974; Vol. 41:177–183.
- [145] Engblom J., Ochoa O., *Through-the-Thickness Stress Predictions for Laminated Plates of Advanced Composite Materials*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985; Vol. 21, No. 10:1759–1776.
- [146] Kwon Y.W., Akin J.E., *Analysis of Layered Composite Plates using a High-Order Deformation Theory*, *Computers and Structures*, 1987; Vol. 27, No. 5:619–623.
- [147] Fares M.E., *A Refined Two-Dimensional Theory of Anisotropic Plates*, *Mechanics Research Communications*, 1993; Vol. 20, No. 4:319–327.
- [148] Tessler A., *An Improved Plate Theory for $\{1,2\}$ -Order for Thick Composite Laminates*, *International Journal of Solids and Structures*, 1993; Vol. 30, No. 7:981–1000.
- [149] Kane T.R., Mindlin R.D., *High-frequency Extensional Vibrations of Plates*, *Journal of Applied Mechanics*, 1956; Vol. 23:277-283.
- [150] Robbins D.H., Reddy J.N., *Structural Theories and Computational Models for Composite Laminates*, *Applied Mechanics Reviews*, 1994; 47(6-1):147-170.
- [151] Wang L., *Phd thesis, Elastic waves propagation in composites*, North Carolina State University, 2004.
- [152] Milosavljevic D., *Predavanja Mehanika Kontinuuma*, Fakultet inženjerskih nauka u Kragujevcu, 2014.
- [153] Reddy J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press LLC, London and New York, 2004; ISBN 0-8493-1592-1.
- [154] Phan N.D., Reddy J.N., *Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985; Vol.21:2201–2219.
- [155] Reddy J.N., Khdeir A.A., Librescu L., *Levy type solutions for symmetrically laminated rectangular plates using first order shear deformation theories*. *JAppl Mech*, 1987; 54(5):740–2.
- [156] Batra R.C., *Plane waves solutions and modal analysis higher order shear and normal deformable plate theories*, *Journal of Sound and vibration*, 2002; 257(1): 63-88.
- [157] Whitney J.M., *A higher order theory for extensional motion of laminated composites*, *Journal of Sound and Vibration*, 1973; Vol.30, Issue 1: 85–97.
- [158] Sahoo R., Singh B.N., *A new trigonometric zigzag theory for buckling and free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates*, *Composite structures*, 2014; 117:316-332.
- [159] Sekulović M., *Metod konačnih elemenata*, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [160] Rao S.S., *The Finite Element Method in Engineering*, Pergamon Press, Great Britain, 1982.
- [161] Berthelot J.M., *Dynamics of composites materials and structure*, Institute for advanced materials and mechanics, Le Mans 2007.

- [162] Wang L., Yuan F.G., *Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments*, Composites Science and Technology, 2007; 67:1370–1384.
- [163] Tauchert, Guzelsu, *An experimental study of dispersion of stress waves in fiber-reinforced composites*, J Appl Mech, 1972; 35(1):98–102.
- [164] Nayfeh A., Chimenti D., *Free wave propagation in plates of general anisotropic media*, J Appl Mech, 1989; 56(4):881–6.
- [165] Yuan F., Hsieh C., *Three-dimensional wave propagation in composite cylindrical shells*, Compos Struct, 1998; 42(2):153–67.
- [166] Neau G., *Lamb waves in anisotropic viscoelastic plates. Study of the wave fronts and attenuation*, PhD dissertation, L'Universite de Bordeaux, 2003.
- [167] Chimenti D., *Guided waves in plates and their use in materials characterization*, Appl Mech Rev, 1997; 50(5):247–84.
- [168] Green W.A., Milosavljevic D., *Extensional Waves in Strongly Anisotropic Elastic Plates*, Int. J. Solids & Structures, 1985; 21:343-353.
- [169] Taylor T., Najfeh A., *Dynamic response of thick anisotropic composite plates*, Composites Engineering, Vol.4, No.5:475-486.
- [170] Milosavljević D., Bogdanović G., Lazić V., Aleksandrović S., Lazić M., *Bulk waves and dynamical behaviour in elastic solids reinforced by two families of strong fibres*, Journal of Engineering Mathematics, 2014; DOI 10.1007/s10665-014-9747-9, ISSN 0022-0833, Published online 30 December 2014, Springer.
- [171] Milosavljević D., Bogdanović G., Veljović Lj., Radaković A., Lazić M., *Wave Propagation in Layer with Two Preferred Directions*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014; [doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.014](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.014), ISSN: 0020-7462, Available online 13 November 2014, Elsevier Ltd.

Додатак

-Део кода за одређивање типа матрица спрезања. Искључиво симболичко програмирање

```
%=====
% Deo koda programa zasnovan na simbolickom programiranju sa ciljem da se odrede
% tipovi matrica sprezanja, neohodni za odgovarajuće deformacione teorije.
% Program je kreiran tako da se od proizvoljnog polja pomeranja
% predstavljenog funkcijom trećeg reda po koordinati debljine mogu dobiti
% matrice sprezanja za bilo koji oblik pomeranja predstavljen stepenom
% funkcijom
% Data je skracena verzija koda iz razloga obimnosti
% Radi ilustracije usvojen je materijal sa monoklinickim tipom simetrije u
% lokalnom koordinatnom sistemu
%=====
%
% Definisane simbolickih promenljivih
%=====
syms Eps01 Eps02 Eps03 Eps04 Eps05 Eps06
syms K01 K02 K03 K04 K05 K06
syms K11 K12 K13 K14 K15 K16
syms K21 K22 K23 K24 K25 K26
syms x y z t omega C1 s1 s2 s3 s4 s5 s6 s7 gg01 gg02 gg03 gg04 KF
syms C11 C12 C13 C16 C22 C23 C26 C33 C36 C44 C45 C55 C66

%=====
% Konstitutivna matrica materijala sa monoklinickim tipom simetrije
% materijala u lokalnom koordinatnom sistemu
%=====
C=[C11 C12 C13 0 0 C16;
   C12 C22 C23 0 0 C26;
   C13 C23 C33 0 0 C36;
   0 0 0 C44 C45 0;
   0 0 0 C45 C55 0;
   C16 C26 C36 0 0 C66];

%=====
% Komponente odgovarajućih vektora deformacije uz stepene od koordinate
% debljine
% Ako se pri određivanju deformacija dogodi da je neki od koeficijenta
% jednak nuli to utice na sam tip deformacione teorije
% Koje komponente su jednake nuli se određuje u okviru funkcije
% Deformacije simbolicki
%=====
Eps0=[Eps01; Eps02;Eps03;Eps04;Eps05; Eps06];% uz nulti stepen od z
K0=[K01; K02;K03;K04;K05; K06];% uz prvi stepen od z
K1=[K11; K12;K13;K14;K15; K16];% uz drugi stepen od z
K2=[K21; K22;0;K24;K25; K26];% uz treci stepen od z
Defpomocni=[Eps0 K0 K1 K2];% objedinjuje deformacije
%=====
% Deo programa koji određuje tip deformacione teorije
%=====
TD2pom=0;
TD1pom=0;
TD0pom=0;
```



```

for brTD=1:6
    if K2(brTD,1)~=0
        TD2pom=TD2pom+1;
    end
    if K1(brTD)~=0
        TD1pom=TD1pom+1;
    end
    if K0(brTD)~=0
        TD0pom=TD0pom+1;
    end

end
if (TD2pom~=0)&&(TD1pom~=0)
('Za uneto polje pomeranja ovo je smicajna deformaciona teorija treceg reda')
Stepen=[1;z;z^2;z^3];
%=====
% Kreiranje vektora deformacija
%=====
Vekdef=Defpomocni*Stepen;
epsilon=Vekdef;
sigma1=C*epsilon;
sigma=collect(sigma1,z);
n=3; %Odgovara maksimalnom stepenu polinoma zadatog u okviru polja pomeranja
st1=1; %Inicijalna vrednost stepena polinoma
for brpom=1:(2*n+1)
    st1=st1*z;
    st2(brpom)=st1;
end
for brRot=1:(2*n+1)
    st(brRot)=st2(2*(n+1)-brRot);%Sortira stepene od z
end
ss=[s7 s6 s5 s4 s3 s2 s1];
%=====
% Inicijalne vrednosti
%=====
brEps0R=0;
brK0R=0;
brK1R=0;
brK2R=0;
bb=0;
bb1=0;
for br=1:6
    if (br~=4)&&(br~=5)
        bb=bb+1;
        Eps0R(bb,:)=Eps0(br,1); %deo programa koji odvajava deformacije koje odgovaraju ravanskim naponima
        K0R(bb,:)=K0(br,1);
        K1R(bb,:)=K1(br,1);
        K2R(bb,:)=K2(br,1);

        N1(bb,:)=int(sigma(br),z);
        M1(bb,:)=int(sigma(br)*z,z);%deo programa koji formira ravanska opterecenja
        P1(bb,:)=int(sigma(br)*z*z,z);
        S1(bb,:)=int(sigma(br)*z*z*z,z);

    else
        bb1=bb1+1;
    end
end

```

```

Eps0S(bb1,:)=Eps0(br,1); %deo programa koji odvaja deformacije koje odgovaraju smicajnom modu
K0S(bb1,:)=K0(br,1);
K1S(bb1,:)=K1(br,1);
K2S(bb1,:)=K2(br,1);

Q1(bb1,:)=int(sigma(br),z);%deo programa koji definise smicajna opterecenja
R1(bb1,:)=int(sigma(br)*z,z);
QQ1(bb1,:)=int(sigma(br)*z*z,z);%deo programa koji definise smicajna opterecenja viseg reda
RR1(bb1,:)=int(sigma(br)*z*z*z,z);

end
end
%=====
%deo programa koji proverava koje deformacije koje odgovaraju ravanskog moda su razlicite od nule
%=====
for br1=1:4
if Eps0R(br1)~=0
brEps0R=brEps0R+1;
Eps0R1(brEps0R,:)=Eps0R(br1,1);
N(brEps0R,:)=N1(br1,1);
end
if K0R(br1)~=0
brK0R=brK0R+1;
K0R1(brK0R,:)=K0R(br1,1); %deo programa koji proverava koliko clanova ima iz svake grupe opterecenja
M(brK0R,:)=M1(br1,1);
end
if K1R(br1)~=0
brK1R=brK1R+1;
K1R1(brK1R,:)=K1R(br1,1);
P(brK1R,:)=P1(br1,1);
end
if K2R(br1)~=0
brK2R=brK2R+1;
K2R1(brK2R,:)=K2R(br1,1);
S(brK2R,:)=S1(br1,1);
end
end
end
%=====
%deo programa koji odgovara smicajnom modu
%=====
brEps0S=0;
brK0S=0;
brK1S=0;
brK2S=0;
for br1S=1:2
if Eps0S(br1S,1)~=0
brEps0S=brEps0S+1;
end
%=====
% Ovaj deo proverava koje komponente deformacije su razlicite od nule i
% predstavlja preduslov za prebacivanje ako su sve komponente deformacije jednake nuli,
% misli se na komponente uz odgovarajuće stepene od z
%=====
if K0S(br1S,1)~=0
brK0S=brK0S+1;
end

```

```

if K1S(br1S,1)~=0
    brK1S=brK1S+1;
end
if K2S(br1S,1)~=0
    brK2S=brK2S+1;
end
end
%=====
%ovaj deo resava problem nepostajanja nekih stepena deformacija u smicajnom modu
%Prvi deo se odnosi na postojanje svih komponenti,
%iz razloga sto je u drugom stupnju ispitivanja ima indeks D
%=====
brEps0SD=0;
brK0SD=0;
brK1SD=0;
brK2SD=0;
if (brK2S~=0)&&(brK1S~=0)
    for br1SD=1:2 %indeks d se odnosi na drugi stupanja ili
        if Eps0S(br1SD,1)~=0
            brEps0SD=brEps0SD+1;
            Eps0S1(brEps0SD,:)=Eps0S(br1SD,1); % provera koje deformacije koje odgovaraju smicajnom modu su razlicite
od nule
            Q(brEps0SD,:)=Q1(br1SD,1);
        end
        if K0S(br1SD,1)~=0
            brK0SD=brK0SD+1;
            K0S1(brK0SD,:)=K0S(br1SD,1); % provera koliko clanova ima iz svake grupe opterecenja
            R(brK0SD,:)=R1(br1SD,1);
        end
        if K1S(br1SD,1)~=0
            brK1SD=brK1SD+1;
            K1S1(brK1SD,:)=K1S(br1SD,1);
            QQ(brK1SD,:)=QQ1(br1SD,1);
        end
        if K2S(br1SD,1)~=0
            brK2SD=brK2SD+1;
            K2S1(brK2SD,:)=K2S(br1SD,1);
            RR(brK2SD,:)=RR1(br1S,1);
        end
    end
end
end
%=====
%Drugi deo se odnosi na postojanje svih komponenti osim uz z^3,
%iz razloga sto je u trecem stupnju ispitivanja ima indeks T
%=====
brEps0ST=0;
brK0ST=0;
brK1ST=0;
brK2ST=0;
if (brK2S==0)&&(brK1S~=0)&&(brK0S~=0)
    for br1ST=1:2
        if Eps0S(br1ST,1)~=0
            brEps0ST=brEps0ST+1;
            Eps0S1(brEps0ST,:)=Eps0S(br1ST,1);
            Q(brEps0ST,:)=Q1(br1ST,1);
        end
    end
end

```

```

end
if K0S(br1ST,1)~=0
    brK0ST=brK0ST+1;
    K0S1(brK0ST,:)=K0S(br1ST,1);
    R(brK0ST,:)=R1(br1ST,1);
end
if K1S(br1ST,1)~=0
    brK1ST=brK1ST+1
    K1S1(brK1ST,:)=K1S(br1ST,1);
    QQ(brK1ST,:)=QQ1(br1ST,1);
end

end

end
%=====
%Treci deo se odnosi na postojanje svih komponenti osim uz z^3 i z^2,
%iz razloga sto je u cetvrtom stupnju ispitivanja ima indeks C
%=====
brEps0SC=0;
brK0SC=0;
brK1SC=0;
brK2SC=0;
if (brK2S==0)&&(brK1S==0)&&(brK0S~=0)&&(brEps0S~=0)
    for br1SC=1:2
        if Eps0S(br1SC,1)~=0
            brEps0SC=brEps0SC+1;
            Eps0S1(brEps0SC,:)=Eps0S(br1SC,1);
            Q(brEps0SC,:)=Q1(br1SC,1);
        end
        if K0S(br1SC,1)~=0
            brK0SC=brK0SC+1;
            K0S1(brK0SC,:)=K0S(br1SC,1);
            R(brK0SC,:)=R1(br1SC,1);
        end
    end

end

end
end
%=====
%Treci deo se odnosi na postojanje svih komponenti osim uz z^3,z^2,z,
%iz razloga sto je u cetvrtom stupnju ispitivanja ima indeks P
%=====
brEps0SP=0;
brK0SP=0;
brK1SP=0;
brK2SP=0;
if (brK2S==0)&&(brK1S==0)&&(brK0S==0)&&(brEps0S~=0)
    for br1SP=1:2
        if Eps0S(br1SP,1)~=0
            brEps0SP=brEps0SP+1;
            Eps0S1(brEps0SP,:)=Eps0S(br1SP,1);
            Q(brEps0SP,:)=Q1(br1SP,1);
        end
    end

end
end
end
%=====
%Uvodi se smena promenljivih zbog diferenciranja

```

```

%=====
for ii=1:(2*n+1)
N=subs(N,st(ii),ss(ii));% Funkcija koja jednu promenljivu zamenjuje drugom konkretno z*z*z sa s
M=subs(M,st(ii),ss(ii));
P=subs(P,st(ii),ss(ii));
S=subs(S,st(ii),ss(ii));
if (brK2S~=0)&&(brK1S~=0)
    Q=subs(Q,st(ii),ss(ii));
    R=subs(R,st(ii),ss(ii));
    QQ=subs(QQ,st(ii),ss(ii));
    RR=subs(RR,st(ii),ss(ii));
end
if (brK2S==0)&&(brK1S~=0)&&(brK0S~=0)
    Q=subs(Q,st(ii),ss(ii));
    R=subs(R,st(ii),ss(ii));
    QQ=subs(QQ,st(ii),ss(ii));
end
if (brK2S==0)&&(brK1S==0)&&(brK0S~=0)&&(brEps0S~=0)
    Q=subs(Q,st(ii),ss(ii));
    R=subs(R,st(ii),ss(ii));
end
if (brK2S==0)&&(brK1S==0)&&(brK0S==0)&&(brEps0S~=0)
    Q=subs(Q,st(ii),ss(ii));
end
end

%=====
% matrice ravanskog moda
%=====
A1=diff(N,1,ss(7));
B1=diff(N,1,ss(6));
D1=diff(N,1,ss(5));%matrice u prvom redu zbirne matrice sa opterećenjima i deformacijama
E1=diff(N,1,ss(4));

B2=diff(M,1,ss(6));
D2=diff(M,1,ss(5));
E2=diff(M,1,ss(4));%matrice u drugom redu zbirne matrice sa opterećenjima i deformacijama
F2=diff(M,1,ss(3));

D3=diff(P,1,ss(5));
E3=diff(P,1,ss(4));
F3=diff(P,1,ss(3));%matrice u trecem redu zbirne matrice sa opterećenjima i deformacijama
H3=diff(P,1,ss(2));

E4=diff(S,1,ss(4));
F4=diff(S,1,ss(3));
H4=diff(S,1,ss(2));%MATRICE U CETVRTOM REDU ZBIRNE MATRICE SA OPTERECENJIMA I
DEFORMACIJAMA
J4=diff(S,1,ss(1));
for brE=1:brEps0R
    APR(:,brE)=diff(A1,1,Eps0R1(brE));%na ovaj nacin matrica se puni po kolonama
    BDR(:,brE)=diff(B2,1,Eps0R1(brE));

```

```

DTR(:,brE)=diff(D3,1,Eps0R1(brE));
ECR(:,brE)=diff(E4,1,Eps0R1(brE));
end
for brK=1:brK0R
    BPR(:,brK)=diff(B1,1,K0R1(brK));
    DDR(:,brK)=diff(D2,1,K0R1(brK));
    ETR(:,brK)=diff(E3,1,K0R1(brK));
    FCR(:,brK)=diff(F4,1,K0R1(brK));
end
for brK1=1:brK1R
    DPR(:,brK1)=diff(D1,1,K1R1(brK1));
    EDR(:,brK1)=diff(E2,1,K1R1(brK1));
    FTR(:,brK1)=diff(F3,1,K1R1(brK1));
    HCR(:,brK1)=diff(H4,1,K1R1(brK1));
end
for brK2=1:brK2R
    EPR(:,brK2)=diff(E1,1,K2R1(brK2));
    FDR(:,brK2)=diff(F2,1,K2R1(brK2));
    HTR(:,brK2)=diff(H3,1,K2R1(brK2));
    JCR(:,brK2)=diff(J4,1,K2R1(brK2));
end
CelaMatricaR(:,:)= [APR BPR DPR EPR;
                    BDR DDR EDR FDR;
                    DTR ETR FTR HTR;
                    ECR FCR HCR JCR];
pretty(CelaMatricaR)
%=====
% matrice smicajnog moda za slucaj da k2 smicajno nije jednako nuli
%=====
if (brK2S~=0)&&(brK1S~=0)
A1S=diff(Q,1,ss(7));
B1S=diff(Q,1,ss(6));
D1S=diff(Q,1,ss(5));%matrice u prvom redu zbirne matrice sa opterecenjima i deformacijama
E1S=diff(Q,1,ss(4));
B2S=diff(R,1,ss(6));
D2S=diff(R,1,ss(5));
E2S=diff(R,1,ss(4));%matrice u drugom redu zbirne matrice sa opterecenjima i deformacijama
F2S=diff(R,1,ss(3));

D3S=diff(QQ,1,ss(5));
E3S=diff(QQ,1,ss(4));
F3S=diff(QQ,1,ss(3));%matrice u trecem redu zbirne matrice sa opterecenjima i deformacijama
H3S=diff(QQ,1,ss(2));
E4S=diff(RR,1,ss(4));
F4S=diff(RR,1,ss(3));
H4S=diff(RR,1,ss(2));%matrice u cetvrtom redu zbirne matrice sa opterecenjima i deformacijama
J4S=diff(RR,1,ss(1));
for brES=1:brEps0S
    APS(:,brES)=diff(A1S,1,Eps0S1(brES,1));%na ovaj nacin matrica se puni po kolonama
    BDS(:,brES)=diff(B2S,1,Eps0S1(brES,1));
    DTS(:,brES)=diff(D3S,1,Eps0S1(brES,1));
    ECS(:,brES)=diff(E4S,1,Eps0S1(brES,1));
end
for brKS=1:brK0S
    BPS(:,brKS)=diff(B1S,1,K0S1(brKS,1));

```

```

DDS(:,brKS)=diff(D2S,1,K0S1(brKS,1));
ETS(:,brKS)=diff(E3S,1,K0S1(brKS,1));%na ovaj nacin matrica se puni po kolonama
FCS(:,brKS)=diff(F4S,1,K0S1(brKS,1));
end
for brK1SS=1:brK1S
DPS(:,brK1SS)=diff(D1S,1,K1S1(brK1SS,1)); %na ovaj nacin matrica se puni po kolonama
EDS(:,brK1SS)=diff(E2S,1,K1S1(brK1SS,1));
FTS(:,brK1SS)=diff(F3S,1,K1S1(brK1SS,1));
HCS(:,brK1SS)=diff(H4S,1,K1S1(brK1SS,1));
end
for brK2SS=1:brK2S
EPS(:,brK2SS)=diff(E1S,1,K2S1(brK2SS,1));
FDS(:,brK2SS)=diff(F2S,1,K2S1(brK2SS,1));
HTS(:,brK2SS)=diff(H3S,1,K2S1(brK2SS,1));%na ovaj nacin matrica se puni po kolonama
JCS(:,brK2SS)=diff(J4S,1,K2S1(brK2SS,1));
end
CelaMatricaS(:,:)= [APS BPS DPS EPS;
                    BDS DDS EDS FDS;
                    DTS ETS FTS HTS;
                    ECS FCS HCS JCS]

end
%=====
%matrice smicajnog moda za slucaj da je k2 smicajno jednako nuli
%=====
if (brK2S==0)&&(brK1S~=0)&&(brK0S~=0)
A1S=diff(Q,1,ss(7));
B1S=diff(Q,1,ss(6));
D1S=diff(Q,1,ss(5));%matrice u prvom redu zbirne matrice sa opterecenjima i deformacijama
B2S=diff(R,1,ss(6));
D2S=diff(R,1,ss(5));
E2S=diff(R,1,ss(4));%matrice u drugom redu zbirne matrice sa opterecenjima i deformacijama
D3S=diff(QQ,1,ss(5));
E3S=diff(QQ,1,ss(4));
F3S=diff(QQ,1,ss(3));%matrice u trecem redu zbirne matrice sa opterecenjima i deformacijama
for brES=1:brEps0S
APS(:,brES)=diff(A1S,1,Eps0S1(brES,1));%na ovaj nacin matrica se puni po kolonama
BDS(:,brES)=diff(B2S,1,Eps0S1(brES,1));
DTS(:,brES)=diff(D3S,1,Eps0S1(brES,1));

end
for brKS=1:brK0S
BPS(:,brKS)=diff(B1S,1,K0S1(brKS,1));
DDS(:,brKS)=diff(D2S,1,K0S1(brKS,1));
ETS(:,brKS)=diff(E3S,1,K0S1(brKS,1));

end
for brK1SS=1:brK1S
DPS(:,brK1SS)=diff(D1S,1,K1S1(brK1SS,1));
EDS(:,brK1SS)=diff(E2S,1,K1S1(brK1SS,1));
FTS(:,brK1SS)=diff(F3S,1,K1S1(brK1SS,1));
end
CelaMatricaS(:,:)= [APS BPS DPS;
                    BDS DDS EDS ;
                    DTS ETS FTS ];

end
%=====

```

```

%matrice smicajnog moda za slucaj da je k2 smicajno jednako nuli i k1 smicajno takodje jednako nuli
%=====
if (brK2S==0)&&(brK1S==0)&&(brK0S~=0)&&(brEps0S~=0)
A1S=diff(Q,1,ss(7));
B1S=diff(Q,1,ss(6));
B2S=diff(R,1,ss(6));
D2S=diff(R,1,ss(5));
for brES=1:brEps0S
    APS(:,brES)=diff(A1S,1,Eps0S1(brES,1));
    BDS(:,brES)=diff(B2S,1,Eps0S1(brES,1));

end
for brKS=1:brK0S
    BPS(:,brKS)=diff(B1S,1,K0S1(brKS,1));
    DDS(:,brKS)=diff(D2S,1,K0S1(brKS,1));
end
CelaMatricaS(:,:)= [APS BPS ;
                    BDS DDS ];
end

%=====
%matrice smicajnog moda za slucaj da je k2 smicajno jednako nuli i k1 i k0 smicajno takodje jednako nuli
%=====
if (brK2S==0)&&(brK1S==0)&&(brK0S==0)&&(brEps0S~=0)
A1S=diff(Q,1,ss(7));
for brES=1:brEps0S
    APS(:,brES)=diff(A1S,1,Eps0S1(brES,1));%NA ovaj nacin matrica se puni po kolonama
end
CelaMatricaS(:,:)=APS;
end
pretty(CelaMatricaS)
end

```

-Код главне функције за одређивање бездимензионог параметра ламбда при извијању слободно ослоњене плоче применом HSDT засноване на функцијама облика.

```
function Test =FunIzvijanjanjeShapeSimUkrsteni(n,E1E2odnos,ahodnos,Brfun,h)
```

```

%=====
% Funkcija za odredjivanje bezdimenzionog parametra lambda pri izvijanjanju
% simetričnih ukrštenih laminata
% Promenljive:
% n - broj slojeva u laminatu
% E1E2odnos - odnos modula elastičnosti E1/E2
% ahodnos - odnos dimenzija a/h
% Brfun - izbor rednog broja funkcije oblika iz tabele 2.1
% h - ukupna debljina laminata
%=====
% !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!PRVI DEO KODA ZA RAD SA BROJINIM VREDNOSTIMA!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
%=====
% Deo programa koji definise tipove matrica potrebne za staticku analizu
%=====
% ravanski mod
%=====
A=zeros(3,3);

```



```

B=zeros(3,3);
C=zeros(3,3);
D=zeros(3,3);
E=zeros(3,3);
G=zeros(3,3);
%=====
% smicajni mod
%=====
F45=zeros(2,2);
%=====
% Inicijalne vrednosti
%=====
% Definisanje zbirnih matrica ravanskog i smicajnog moda
%=====
ZbirnaA=zeros(3,3);
ZbirnaB=zeros(3,3);
ZbirnaC=zeros(3,3);
ZbirnaD=zeros(3,3);
ZbirnaE=zeros(3,3);
ZbirnaG=zeros(3,3);
ZbirnaF45=zeros(2,2);
%Inicijalne vrednosti zbira integrala, vidi poglavlje 4
ZbirI1p=0;
ZbirI2p=0;
ZbirI3p=0;
ZbirI4p=0;
ZbirI5p=0;
ZbirI6p=0;
%=====
% Petlja za unos podataka i odredjivanje ukupne debljine laminata
% Indeks p je dodat sa ciljem da pamti trenutne vrednosti unetih parametara
%=====
ZbirH=0;
for i=1:n
    E1(i)= input('Unesi parametar E1=');
    E1p=E1(i);
    E2(i)=1;%input('Unesi parametar E2=');
    E2p=E2(i);
    NU12(i)=0.25;%input('Unesi parametar NU12=');
    NU12p=NU12(i);
    G12(i)=0.6;%input('Unesi parametar G12=');
    G12p=G12(i);
    G13(i)=0.6;%input('Unesi parametar G13=');
    G13p=G13(i);
    G23(i)=0.5;%input('Unesi parametar G23=');
    G23p=G23(i);
    teta=[0 90 90 0];%input('Unesi parametar teta=');
    tetap=teta(i);
    H(i)=h/n;%input('Unesi debljinu monosloja=');
    Hp=H(i);
    ZbirH=ZbirH+Hp;
end
Debljina=ZbirH;
h=Debljina;
%=====
% Vrednosti gustine materijala i modula elastičnosti koje se koriste za
% normalizaciju
%=====
ROk=1;
E2k=1;
%=====
% !!DRUGI DEO KODA ZA RAD SA KOMBINACIJOM SIMBOLICKIH I BROJNIH VREDNOSTI!!

```

```

%=====
%=====
%=====
% Definisanje funkcije funkcija oblika f
% f MORA BITI NEPARNA FUNKCIJA
% Ffp je pomoćni niz u koji se svrstavaju sve funkcije oblika
%=====
%=====
syms z
%=====
% 1.Ambartsumain
%=====
AMB=vpa((z/2)*((h*h)/4-(z*z)/3));
Ffp(1)=AMB;
%=====
% 2.Kaczkowski , Panc i Reissner
%=====
KPR=vpa(((5*z)/4)*(1-(4/3)*(z*z)/(h*h)));
Ffp(2)=KPR;
%=====
% 3.Levy, Stein, Touratier, Ferreira
%=====
LSTF = vpa((h/pi)*sin((pi/h)*z));
Ffp(3)=LSTF;
%=====
% 4.Mantari 1
%=====
M1=vpa((h/pi)*(sin((pi/h)*z)*exp((1/2)*cos((pi/h)*z))+((pi*z)/(2*h))));
Ffp(4)=M1;
%=====
% 5.Viola i ostali
%=====
V=vpa(((2*h)/pi)*tan((pi/(2*h))*z));
Ffp(5)=V;
%=====
% 6 i 7 Mantari2-Ostali
%=====
m1=(1/(5*h));
M21=vpa(tan(m1*z)-z*m1*sec((m1*h)/2)*sec((m1*h)/2));
Ffp(6)=M21;

m2=(pi/(2*h));
M22=vpa(tan(m2*z)-z*m2*sec((m2*h)/2)*sec((m2*h)/2));
Ffp(7)=M22;
%=====
% 8.Karama2-Ostali
%=====
K2=vpa(z*exp(-2*(z/h)*(z/h)));
Ffp(8)=K2;
%=====
% 9.Mantari3-Ostali
%=====
M3=vpa(z*2.85^(-2*(z/h)*(z/h))+0.028*z);
Ffp(9)=M3;
%=====
% 10.ELMeiche-Ostali
%=====
ksi=1/(cosh(pi/2)-1);
ME=vpa(ksi*((h/pi)*sin((pi/h)*z)-z));
Ffp(10)=M3;
%=====
% 11.Soldatos
%=====

```

```

SO=vpa(h*sinh(z/h)-z*cosh(1/2));
Ffp(11)=SO;
%=====
% 12.Mantari4-Ostali
%=====
m4=-7;
M4=vpa(sin(z/h)*exp(m4*cosh(z/h))-(z/h)*(cosh(1/2)+m4*sinh(1/2)*sinh(1/2))*exp(cosh(1/2)));
Ffp(12)=M4;
%=====
% 13.Akavci i Tankrikulu 1
%=====
AT1=vpa(z*sech((pi*z*z)/(h*h))-z*sech(pi/4)*(1-(pi/2)*tanh(pi/4)));
Ffp(13)=AT1;
%=====
% 14.Akavci i Tankrikulu 2
%=====
AT2=vpa((3*pi/2)*(h*tanh(z/h)-z*sech(1/2)*sech(1/2)));
Ffp(14)=AT2;
%=====
% 15.Grover i ostali
%=====
rgr=0.1;
GR=vpa(z*sec(rgr*z/h)-z*((sec(1/2))/(1+(rgr/2)*tan(rgr/2))));
Ffp(15)=GR;
%=====
% 16.Mechaib i ostali
%=====
MEC=vpa((z*cos(1/2)-h*sin(z/h))/(1-cos(1/2)));
Ffp(16)=MEC;
%=====
% Preuzimanje funkcije zadavanjem rednog broja
% Simboličko nalaženje prvog izvoda funkcije
%=====
Ff=Ffp(Brfun);
IzvodFf=diff(Ffp,1,z);

%=====
% !!!TRECI DEO KODA ZA RAD SA ISKLJUCIVO BROJNIM VREDNOSTIMA!!!
%=====
% Izracunavanje pocetne i krajnje koordinate svakog svakog sloja
%=====
l(1)=-ZbirH/2;
brojac=-1;
dodatak=0;
for i=2:n+1
    brojac=brojac+1;
    dodatak=dodatak+H(n-brojac);
    l(i)=-ZbirH/2+dodatak;
end
podela=l;
for i=1:n
    %=====
    % Debljine slojeva
    %=====
    z1=l(i);
    z2=l(i+1);
    deltaH=((z2-z1));
    %=====
    % Određivanje matrice elastičnosti za svaki od slojeva u lokalnom,
    % odnosno globalnom sistemu koordinata, respektivno
    %=====
    Q=ReducedStiffnessDM(E1(i),E2(i),NU12(i),G12(i),G23(i),G13(i));

```

```

Qbar1=Qbar(Q,teta(i));
% =====
% Pozivanje funkcija kojima se odredjuju matrice sprezanja
% =====
AP=Amatrix(A,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaA=ZbirnaA+AP;

BP=Bmatrix(B,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaB=ZbirnaB+BP;

CP=Cmatrix(C,Qbar1,Ff,z1,z2);
ZbirnaC=ZbirnaC+CP;

DP=Dmatrix(D,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaD=ZbirnaD+DP;

EP=Ematrix(E,Qbar1,Ff,z1,z2);
ZbirnaE=ZbirnaE+EP;

GP=Gmatrix(G,Qbar1,Ff,z1,z2);
ZbirnaG=ZbirnaG+GP;
% =====
% Matrice za smicajni mod
% =====
FP45=F45matrix(F45,Qbar1,Ff,z1,z2);
ZbirnaF45=ZbirnaF45+FP45;
end

% =====
% Matrice koje objedinjuje matrice sprezanja A B D...
% S je matrica za ravanski mod; SS je matrica za smicajni mod
% =====
S=[ZbirnaA ZbirnaB ZbirnaC;
   ZbirnaB ZbirnaD ZbirnaE;
   ZbirnaC ZbirnaE ZbirnaG];
SS=ZbirnaF45;

% =====
% !!!CETVRTI DEO KODA ZA RAD SA BROJNIM VREDNOSTIMA!!!
% =====

% =====
% Simboličke vrednosti matrica sprezanja
% =====
syms A11 A12 A13 A16 A22 A23 A26 A33 A36 A44 A45 A55 A66
syms B11 B12 B13 B16 B22 B23 B26 B33 B36 B44 B45 B55 B66
syms D11 D12 D13 D16 D22 D23 D26 D33 D36 D44 D45 D55 D66
syms F11 F12 F13 F16 F22 F23 F26 F33 F36 F44 F45 F55 F66
syms G11 G12 G13 G16 G22 G23 G26 G33 G36 G44 G45 G55 G66
syms C11 C12 C13 C16 C22 C23 C26 C33 C36 C44 C45 C55 C66
syms E11 E12 E13 E16 E22 E23 E26 E33 E36 E44 E45 E55 E66

% =====
% Druge bitne simboličke vrednosti
% =====
syms Amn Bmn Cmn Txmn Tymn KvOmega
syms alfa betaU omega t x y
syms N_xCrta N_yCrta R_x R_y
syms I1 I2 I3 I4 I5 I6
syms delta1 Omega

% =====
% Oblici matrica sprezanja za simetrične ukrštene laminate
% =====
A=[A11 A12 0;

```

```

    A12 A22 0;
    0 0 A66];
B=zeros(3,3);
C=zeros(3,3);
D=[D11 D12 0;
   D12 D22 0;
   0 0 D66];
E=[E11 E12 0;
   E12 E22 0;
   0 0 E66];
G=[G11 G12 0;
   G12 G22 0;
   0 0 G66];
% Smicajni mod
F=[F44 0;
   0 F55];
%=====
% Matrica koja objedinjuje matrice sprezanja
%=====
MAT=[A B C;
     B D E;
     C E G];

%=====
% Pretpostavljeni oblici Navijerovih resenja
%=====
u=Amn*cos(alfa*x)*sin(betaU*y);
v=Bmn*sin(alfa*x)*cos(betaU*y);
w=Cmn*sin(alfa*x)*sin(betaU*y);
teta_x=Txmn*cos(alfa*x)*sin(betaU*y);
teta_y=Ty mn*sin(alfa*x)*cos(betaU*y);
%=====
% Komponente vektora deformacije uz odgovarajuće stepene od z i uz funkciju
% oblika, pogledaj poglavlje 2
%=====
Eps=[diff(u,1,x); diff(v,1,y); diff(v,1,x)+diff(u,1,y)];
K=-[diff(w,2,x);diff(w,2,y); 2*diff(diff(w,x,1),y,1)];
FI=[diff(teta_x,1,x); diff(teta_y,1,y); diff(teta_y,1,x)+diff(teta_x,1,y)];
TETA=[teta_x;teta_y];
DEF=[Eps;K;FI];

%=====
% Određivanje projekcija jediničnih opterećenja
%=====
OpterR=MAT*DEF;
N_x=OpterR(1,1);
N_y=OpterR(2,1);
N_xy=OpterR(3,1);
M_x=OpterR(4,1);
M_y=OpterR(5,1);
M_xy=OpterR(6,1);

P_x=OpterR(7,1);
P_y=OpterR(8,1);
P_xy=OpterR(9,1);
%=====
% Smicajni deo
%=====
MATS=F;
DEFS=TETA;
OpteS=MATS*DEFS;
R_x=OpteS(1);
R_y=OpteS(2);

```

```

%=====
% Jednačine ravnoteže
%=====
Prva_jednacina=diff(N_x,1,x)+diff(N_xy,1,y);
Druga_jednacina=diff(N_xy,1,x)+diff(N_y,1,y);
Treca_jednacina=(diff(M_x,2,x)+2*diff(diff(M_xy,1,x),1,y)+diff(M_y,2,y))+N_xCrta*omega*diff(w,2,x)+N_yCrta*omega*diff(w,2,y);
Cetvrta_jednacina=diff(P_x,1,x)+diff(P_xy,1,y)-R_x;
Peta_jednacina=diff(P_xy,1,x)+diff(P_y,1,y)-R_y;
Jednacine=[Prva_jednacina;Druga_jednacina;Treca_jednacina;Cetvrta_jednacina;Peta_jednacina];
for ii=1:5
    KolAmn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Amn);
    KolBmn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Bmn);
    KolCmn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Cmn);
    KolTxmn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Txmn);
    KolTymn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Tymn);
end

%=====
% Kreiranje matičnih jednačina
%=====
Matrica_jednacina=[KolAmn KolBmn KolCmn KolTxmn KolTymn];
KoefOmega=diff(Matrica_jednacina,1,omega);
Delilac=[cos(alfa*x)*sin(betaU*y)      sin(alfa*x)*cos(betaU*y)      sin(alfa*x)*sin(betaU*y)      cos(alfa*x)*sin(betaU*y)
sin(alfa*x)*cos(betaU*y)];
for j=1:5
    KoefOmega(j,:)=KoefOmega(j,)/Delilac(j);
    KoefA(j,:)=Matrica_jednacina(j,)-KoefOmega(j,)*Delilac(j)*omega;
    KoefA(j,:)=KoefA(j,)/Delilac(j);
end
KoefOmega=simplify(KoefOmega);%Definise koeficijente uz omega^2
KoefA=(-1)*simplify(KoefA);%Definise matrice A
JedEig=KoefA+(omega)*KoefOmega;
%=====
% !!!!!PETI DEO KODA ZAMENA SIMBOLIČKIH PROMENLJIVIH BROJNIM VREDNOSTIMA!!
%=====
KonacnoP=subs(JedEig,MAT,S);
Konacno=subs(KonacnoP,MATS,SS);
a=ahodnos*h;
m1=1;
b=ahodnos*h;
n1=1;
alfap=(m1*pi)/a;
betaUp=(n1*pi)/b;
Konacno=subs(Konacno,alfa,alfap);
Konacno=subs(Konacno,betaU,betaUp);
Konacno=subs(Konacno,N_xCrta,1);%Definise jedinичno opterećenje
Konacno=subs(Konacno,N_yCrta,0);% Nema opterećenja po y osi
Resenje=det(Konacno);
Koreni=solve(Resenje,omega)*((a*a)/(h*h*h*E2k));
BezDimLamp=vpa(Koreni,5)
Test =BezDimLamp(1,1);
end

```

-Код главне функције за одређивање напона при савијању синусном силом слободно ослоњене плоче применом Кантове деформационе теорије трећег реда.

```

function Test =FunNaponTauyzUkrsten4Sloja(n,ahodnos,h)
%=====
% Funkcija za odredjivanje normalizovane vrednosti Tau yz u globalnom
% koordinatnom sistemu pri savijanju sinusoidalnom silom, slobodno
% oslonjene ukrstene laminatne kvadratne ploce
% Promenljive:
% n - broj slojeva u laminatu
% E1E2odnos - odnos modula elastičnosti E1/E2
% ahodnos - odnos dimenzija a/h
% h - ukupna debljina laminata
%=====
%!!!!!!!!!!!!!!!!PRVI DEO KODA ZA RAD SA BROJNIM VREDNOSTIMA!!!!!!!!!!!!!!
%=====

%=====
% Deo programa koji definise tipove matrica potrebne za staticku analizu
%=====
% ravanski mod
%=====
syms z
A=zeros(4,4);
B=zeros(4,4);
C=zeros(4,4);
D=zeros(4,4);
E=zeros(4,4);
G=zeros(4,4);
HT=zeros(4,4);
%=====
% Deo programa koji definise tipove matrica potrebne za staticku analizu
% SMICAJNI MOD
%=====
A45=zeros(2,2);
B45=zeros(2,2);
C45=zeros(2,2);
D45=zeros(2,2);
E45=zeros(2,2);
G45=zeros(2,2);
H45=zeros(2,2);
%=====
% Inicijalne vrednosti
%=====
%=====
% Definisane zbirne matrice ravanskog i smicajnog moda
%=====
ZbirnaA=zeros(4,4);
ZbirnaB=zeros(4,4);
ZbirnaC=zeros(4,4);
ZbirnaD=zeros(4,4);
ZbirnaE=zeros(4,4);
ZbirnaG=zeros(4,4);
ZbirnaH=zeros(4,4);

ZbirnaA45=zeros(2,2);
ZbirnaB45=zeros(2,2);
ZbirnaC45=zeros(2,2);
ZbirnaD45=zeros(2,2);
ZbirnaE45=zeros(2,2);
ZbirnaG45=zeros(2,2);
ZbirnaH45=zeros(2,2);

ZbirI1p=0;

```

```

ZbirI2p=0;
ZbirI3p=0;
ZbirI4p=0;
ZbirI5p=0;
ZbirI6p=0;
ZbirI7p=0;
%=====
% Petlja za unos podataka i odredjivanje ukupne debljine laminata
% Indeks p je dodat sa ciljem da pamti trenutne vrednosti unetih parametara
%=====
for i=1:n
    E1(i)=25;%input('Unesi parametar E1=:');
    E1p=E1(i);%*10^9;

    E2(i)=1;%input('Unesi parametar E2=:');
    E2p=E2(i);%*10^9;

    E3(i)=1;%input('Unesi parametar E3=:');
    E3p=E3(i);%*10^9;

    NU12(i)=0.25;%input('Unesi parametar NU12=:');
    NU12p=NU12(i);

    NU13(i)=0.25;%input('Unesi parametar NU13=:');
    NU13p=NU13(i);

    NU23(i)=0.25;%input('Unesi parametar NU23=:');
    NU23p=NU23(i);

    G12(i)=0.5;%input('Unesi parametar G12=:');
    G12p=G12(i);%*10^9;

    G13(i)=0.5;%input('Unesi parametar G13=:');
    G13p=G13(i);%*10^9;

    G23(i)=0.2;%input('Unesi parametar G23=:');
    G23p=G23(i);%*10^9;

    teta=[0 90 90 0];%input('Unesi parametar teta=:');
    tetap=teta(i);

    H(i)=h/n;%input('Unesi debljinu monosloja=:');
    Hp=H(i);%*10^-3;

    Ro(i)=1;%input('Unesite gustinu materijala=:');
    Rop=Ro(i);

    ZbirH=ZbirH+Hp;
end
Debljina=ZbirH;

h=Debljina;
ROk=1;
E2k=1;
%=====
% Izracunavanje pocetne i krajnje koordinate svakog lejera
%=====
l(1)=-ZbirH/2;
brojac=-1;
dodatak=0;
for i=2:n+1
    brojac=brojac+1;

```



```
dodatak=dodatak+H(n-brojac);
```

```
l(i)=-ZbirH/2+dodatak;
```

```
end
```

```
podela=l;
```

```
for i=1:n
```

```
%=====
```

```
% Određivanje matrice elastičnosti za svaki od slojeva u lokalnom,
```

```
% odnosno globalnom sistemu koordinata, respektivno
```

```
%=====
```

```
z1=l(i);
```

```
z2=l(i+1);
```

```
Q=ReducedStiffness2(E1(i),E2(i),E3(i),NU12(i),NU23(i),NU13(i),G12(i),G23(i),G13(i));
```

```
Qbar1=Qbar(Q,teta(i));
```

```
%=====
```

```
% Pozivanje funkcija kojima se odredjuju matrice sprezanja
```

```
%=====
```

```
AP=Amatrix(A,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaA=ZbirnaA+AP;
```

```
BP=Bmatrix(B,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaB=ZbirnaB+BP;
```

```
CP=Cmatrix(C,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaC=ZbirnaC+CP;
```

```
DP=Dmatrix(D,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaD=ZbirnaD+DP;
```

```
EP=Ematrix(E,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaE=ZbirnaE+EP;
```

```
GP=Gmatrix(G,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaG=ZbirnaG+GP;
```

```
HP=HTmatrix(HT,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaH=ZbirnaH+HP;
```

```
%=====
```

```
%Matrice za smicajni mod
```

```
%=====
```

```
AP45=A45matrix(A45,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaA45=ZbirnaA45+AP45;
```

```
BP45=B45matrix(B45,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaB45=ZbirnaB45+BP45;
```

```
CP45=C45matrix(C45,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaC45=ZbirnaC45+CP45;
```

```
DP45=D45matrix(D45,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaD45=ZbirnaD45+DP45;
```

```
EP45=E45matrix(E45,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaE45=ZbirnaE45+EP45;
```

```
GP45=G45matrix(G45,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaG45=ZbirnaG45+GP45;
```

```
HP45=H45matrix(H45,Qbar1,z1,z2);
```

```
ZbirnaH45=ZbirnaH45+HP45;
```

```
%=====
```

```
% Odredjivanje zbirnih integrala I
```

```
%=====
```

```

I1p=Ro(i)*(z2-z1);
ZbirI1p=ZbirI1p+I1p;

I2p=int(Ro(i)*z,z1,z2);
ZbirI2p=ZbirI2p+I2p;

I3p=int(Ro(i)*z*z,z1,z2);
ZbirI3p=ZbirI3p+I3p;

I4p=int(Ro(i)*z*z*z,z1,z2);
ZbirI4p=ZbirI4p+I4p;

I5p=int(Ro(i)*z*z*z*z,z1,z2);
ZbirI5p=ZbirI5p+I5p;

I6p=int(Ro(i)*z*z*z*z*z,z1,z2);
ZbirI6p=ZbirI6p+I6p;

I7p=int(Ro(i)*z*z*z*z*z*z,z1,z2);
ZbirI7p=ZbirI7p+I7p;

```

```
end
```

```

%=====
% Matrice koje objedinjuje matrice sprezanja A B D...
% S je matrica za ravanski mod; SS je matrica za smicajni mod
%=====
S=[ZbirnaA ZbirnaB ZbirnaC ZbirnaD;
   ZbirnaB ZbirnaC ZbirnaD ZbirnaE;
   ZbirnaC ZbirnaD ZbirnaE ZbirnaG;
   ZbirnaD ZbirnaE ZbirnaG ZbirnaH];

SS=[ZbirnaA45 ZbirnaB45 ZbirnaC45 ZbirnaD45;
    ZbirnaB45 ZbirnaC45 ZbirnaD45 ZbirnaE45;
    ZbirnaC45 ZbirnaD45 ZbirnaE45 ZbirnaG45;
    ZbirnaD45 ZbirnaE45 ZbirnaG45 ZbirnaH45];

%=====
% !!!!!DRUGI DEO KODA ZA RAD SA ISKLJUCIVO SIMBOLICKIM VREDNOSTIMA!!!!!!!!!!!!
%=====

%=====
% Simbolicke vrednosti matrica sprezanja
%=====
syms A11 A12 A13 A16 A22 A23 A26 A33 A36 A44 A45 A55 A66
syms B11 B12 B13 B16 B22 B23 B26 B33 B36 B44 B45 B55 B66
syms D11 D12 D13 D16 D22 D23 D26 D33 D36 D44 D45 D55 D66
syms F11 F12 F13 F16 F22 F23 F26 F33 F36 F44 F45 F55 F66
syms GG11 GG12 GG13 GG16 GG22 GG23 GG26 GG33 GG36 GG44 GG45 GG55 GG66
syms C11 C12 C13 C16 C22 C23 C26 C33 C36 C44 C45 C55 C66
syms E11 E12 E13 E16 E22 E23 E26 E33 E36 E44 E45 E55 E66
syms H11 H12 H13 H16 H22 H23 H26 H33 H36 H44 H45 H55 H66
syms Umn Vmn Wmn Txmn Tymn Tzmn Umnzve Vmnzve Wmnzve Txmnzve Tymnzve Tzmnzve KvOmega Pzmn
syms alfa betaU omega t x y
syms N_xCrta N_yCrta R_x R_y
syms I1 I2 I3 I4 I5 I6 I7
syms delta1 Omega
%=====
% Oblici matrica sprezanja za simetricne ukrštene laminare
%=====
A=[A11 A12 A13 0;
   A12 A22 A23 0;
   A13 A23 A33 0;
   0 0 0 A44];

```

```

B=[B11 B12 B13 0;
  B12 B22 B23 0;
  B13 B23 B33 0;
  0 0 0 B44];
C=[C11 C12 C13 0;
  C12 C22 C23 0;
  C13 C23 C33 0;
  0 0 0 C44];
D=[D11 D12 D13 0;
  D12 D22 D23 0;
  D13 D23 D33 0;
  0 0 0 D44];
E=[E11 E12 E13 0;
  E12 E22 E23 0;
  E13 E23 E33 0;
  0 0 0 E44];
GG=[GG11 GG12 GG13 0;
  GG12 GG22 GG23 0;
  GG13 GG23 GG33 0;
  0 0 0 GG44];
H=[H11 H12 H13 0;
  H12 H22 H23 0;
  H13 H23 H33 0;
  0 0 0 H44];
%=====
%Matrice smicajnog moda
%=====
AS=[A55 0;
  0 A66];
BS=[B55 0;
  0 B66];
CS=[C55 0;
  0 C66];
DS=[D55 0;
  0 D66];
ES=[E55 0;
  0 E66];
GGS=[GG55 0;
  0 GG66];
HS=[H55 0;
  0 H66];
%=====
% Pretpostavljeni oblici Navijerovih resenja
%=====
u=Umn*cos(alfa*x)*sin(betaU*y);
v=Vmn*sin(alfa*x)*cos(betaU*y);
w=Wmn*sin(alfa*x)*sin(betaU*y);
teta_x=Txmn*cos(alfa*x)*sin(betaU*y);
teta_y=Tymn*sin(alfa*x)*cos(betaU*y);
teta_z=Tzmn*sin(alfa*x)*sin(betaU*y);
uzve=Umnzve*cos(alfa*x)*sin(betaU*y);
vzve=Vmnzve*sin(alfa*x)*cos(betaU*y);
wzve=Wmnzve*sin(alfa*x)*sin(betaU*y);
teta_xzve=Txmnzve*cos(alfa*x)*sin(betaU*y);
teta_yzve=Tymnzve*sin(alfa*x)*cos(betaU*y);
teta_zzve=Tzmnzve*sin(alfa*x)*sin(betaU*y);
%=====
% Pretpostavljeni oblici sinusnog opterecenja
%=====
pz=Pzmn*sin(alfa*x)*sin(betaU*y);
%=====
% Matrica deformacija ravanski deo
%=====

```

```

Eps=[diff(u,1,x); diff(v,1,y); teta_z;diff(v,1,x)+diff(u,1,y) ];
K0=[diff(teta_x,1,x); diff(teta_y,1,y); 2*wzve; diff(teta_y,1,x)+diff(teta_x,1,y)];
K1=[diff(uzve,1,x);diff(vzve,1,y); 3*teta_zzve;diff(vzve,1,x)+diff(uzve,1,y)];
K2=[diff(teta_xzve,1,x); diff(teta_yzve,1,y); 0; diff(teta_yzve,1,x)+diff(teta_xzve,1,y)];
%=====
% Matrica deformacija-Smicajni deo
%=====
EpsS=[teta_x+diff(w,1,x); teta_y+diff(w,1,y)];
K0S=[ 2*uzve+diff(teta_z,1,x);2*vzve+diff(teta_z,1,y)];
K1S=[3*teta_xzve+diff(wzve,1,x); 3*teta_yzve+diff(wzve,1,y)];
K2S=[diff(teta_zzve,1,x);diff(teta_zzve,1,y)];
%=====
% Matrica koja objedinjuje matrice sprezanja
%=====
MAT=[A B C D;
      B C D E;
      C D E GG;
      D E GG H];
DEF=[Eps;K0;K1;K2];
%=====
% SILE I OPTERECENJA
%=====
OpterR=MAT*DEF;
N_x=OpterR(1,1);
N_y=OpterR(2,1);
N_z=OpterR(3,1);
N_xy=OpterR(4,1);
M_x=OpterR(5,1);
M_y=OpterR(6,1);
M_z=OpterR(7,1);
M_xy=OpterR(8,1);
N_xzve=OpterR(9,1);
N_yzve=OpterR(10,1);
N_zzve=OpterR(11,1);
N_xyzve=OpterR(12,1);
M_xzve=OpterR(13,1);
M_yzve=OpterR(14,1);
M_zzve=OpterR(15,1);
M_xyzve=OpterR(16,1);
%=====
% Smicajni Mod
%=====
MATS=[AS BS CS DS;
      BS CS DS ES;
      CS DS ES GGS;
      DS ES GGS HS];
DEFS=[EpsS;K0S;K1S;K2S];
OpteS=MATS*DEFS;
Q_y=OpteS(2,1);
Q_x=OpteS(1,1);
S_y=OpteS(4,1);
S_x=OpteS(3,1);
Q_yzve=OpteS(6,1);
Q_xzve=OpteS(5,1);
S_yzve=OpteS(8,1);
S_xzve=OpteS(7,1);
%=====
% Jednacine savijanja
%=====
Prva_jednacina=diff(N_x,1,x)+diff(N_xy,1,y);
Druga_jednacina=diff(N_xy,1,x)+diff(N_y,1,y);
Trecja_jednacina=diff(Q_x,1,x)+diff(Q_y,1,y)+pz*omega;
Cetvrta_jednacina=diff(M_x,1,x)+diff(M_xy,1,y)-Q_x;

```

```

Peta_jednacina=diff(M_y,1,y)+diff(M_xy,1,x)-Q_y;
Sesta_jednacina=diff(S_x,1,x)+diff(S_y,1,y)-N_z+(h/2)*pz*omega;
Sedma_jednacina=diff(N_xzve,1,x)+diff(N_xyzve,1,y)-2*S_x;
Osma_jednacina=diff(N_yzve,1,y)+diff(N_xyzve,1,x)-2*S_y;
Deveta_jednacina=diff(Q_xzve,1,x)+diff(Q_yzve,1,y)-2*M_zzve+((h*h)/4)*pz*omega;
Deseta_jednacina=diff(M_xzve,1,x)+diff(M_xyzve,1,y)-3*Q_xzve;
Jedanaesta_jednacina=diff(M_yzve,1,y)+diff(M_xyzve,1,x)-3*Q_yzve;
Dvanaesta_jednacina=diff(S_xzve,1,x)+diff(S_yzve,1,y)-3*N_zzve+((h*h*h)/8)*pz*omega;
Jednacine=[Prva_jednacina;Druga_jednacina;Trecja_jednacina;Cetvrta_jednacina;...
Peta_jednacina;Sesta_jednacina;Sedma_jednacina;Osma_jednacina;Deveta_jednacina;...
Deseta_jednacina;Jedanaesta_jednacina;Dvanaesta_jednacina];
for ii=1:12
    KolUmn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Umn);
    KolVmn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Vmn);
    KolWmn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Wmn)+diff(Jednacine(ii),1,Pzmn);
    KolTxmn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Txmn);
    KolTymn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Tymn);
    KolTzmn(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Tzmn)+diff(Jednacine(ii),1,Pzmn);
    KolUmnzve(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Umnzve);
    KolVmnzve(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Vmnzve);
    KolWmnzve(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Wmnzve)+diff(Jednacine(ii),1,Pzmn);
    KolTxmnzve(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Txmnzve);
    KolTymnzve(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Tymnzve);
    KolTzmnzve(ii,:)=diff(Jednacine(ii),1,Tzmnzve)+diff(Jednacine(ii),1,Pzmn);
end

%=====
% Jednacine matricne analize
%=====

Matrica_jednacina=[KolUmn KolVmn KolWmn KolTxmn KolTymn KolTzmn KolUmnzve,...
KolVmnzve KolWmnzve KolTxmnzve KolTymnzve KolTzmnzve];

KoefOmega=diff(Matrica_jednacina,1,omega);
Delilac=[cos(alfa*x)*sin(betaU*y) sin(alfa*x)*cos(betaU*y) sin(alfa*x)*sin(betaU*y),...
cos(alfa*x)*sin(betaU*y) sin(alfa*x)*cos(betaU*y) sin(alfa*x)*sin(betaU*y),...
cos(alfa*x)*sin(betaU*y) sin(alfa*x)*cos(betaU*y) sin(alfa*x)*sin(betaU*y),...
cos(alfa*x)*sin(betaU*y) sin(alfa*x)*cos(betaU*y) sin(alfa*x)*sin(betaU*y)];
for j=1:12
    KoefOmega(j,:)=KoefOmega(j,:)/Delilac(j);
    Test(j,:)=KoefOmega(j,:)*Delilac(j)*omega;
    KoefA(j,:)=Matrica_jednacina(j,:)-Test(j,:);
    KoefA(j,:)=KoefA(j,:)/Delilac(j);
end
%=====
%!TRECI DEO KODA ZA RAD SA SIMBOLICKIM PROMENLJIVIMA I BROJNIM VREDNOSTIMA!
%=====
a=ahodnos*h;
b=ahodnos*h;
n1=1;
m1=1;
alfap=(m1*pi)/a;
betaUp=(n1*pi)/b;
x=a/2;
y=0;
KoefOmega=simplify(KoefOmega);
KoefA=(-1)*simplify(KoefA);
PomocnaPP=KoefOmega(:,3);
%=====
% Zamene simbolickih promenljivih brojnim vrednostima
%=====
PomocnaPP=subs(PomocnaPP,alfa,alfap);
PomocnaPP=subs(PomocnaPP,betaU,betaUp);

```

```

KoefAP=subs(KoefA,MAT,S);
KoefA=subs(KoefAP,MATS,SS);
KoefA=subs(KoefA,alfa,alfap);
KoefA=subs(KoefA,betaU,betaUp);
Pomeranja=inv(KoefA)*PomocnaPP;
Pomeranja=subs(Pomeranja,alfa,alfap);
Pomeranja=subs(Pomeranja,betaU,betaUp);
%=====
% Odredjivanje brojnih vrednosti pomeranja
%=====
for brojac=1:12
PomeranjaTRIG(brojac,:)=Pomeranja(brojac,1);
end
PomeranjaTRIG=subs(PomeranjaTRIG,alfa,alfap);
PomeranjaTRIG=subs(PomeranjaTRIG,betaU,betaUp);
zz=0;
PomeranjeU=(PomeranjaTRIG(1)+zz*PomeranjaTRIG(4)+zz*zz*PomeranjaTRIG(7)+zz*zz*zz*PomeranjaTRIG(10))*((100*h*h*h
*E2k)/(a*a*a*a));
PomeranjeV=(PomeranjaTRIG(2)+zz*PomeranjaTRIG(5)+zz*zz*PomeranjaTRIG(8)+zz*zz*zz*PomeranjaTRIG(11))*((100*h*h*h
*E2k)/(a*a*a*a));
PomeranjeW=(PomeranjaTRIG(3)+zz*PomeranjaTRIG(6)+zz*zz*PomeranjaTRIG(9)+zz*zz*zz*PomeranjaTRIG(12))*((100*h*h*h
*E2k)/(a*a*a*a));
syms x y
Zam=[Umn; Vmn; Wmn; Txmn; Tymn; Tzmn; Umnzve; Vmnzve; Wmnzve; Txmnzve; Tymnzve; Tzmnzve];
Zam1=[x y];
Kordinate=[a/2 0];
RavanskeDeformacije=[Eps K0 K1 K2];
%=====
%Odredjivanje brojnih vrednosti deformacija
%=====
RavanskeDeformacije=subs(RavanskeDeformacije,Zam,PomeranjaTRIG);
RavanskeDeformacije=subs(RavanskeDeformacije,Zam1,Kordinate);
RavanskeDeformacije=subs(RavanskeDeformacije,alfa,alfap);
RavanskeDeformacije=subs(RavanskeDeformacije,betaU,betaUp);
SmicajneDeformacije=[EpsS K0S K1S K2S];
SmicajneDeformacije=subs(SmicajneDeformacije,Zam,PomeranjaTRIG);
SmicajneDeformacije=subs(SmicajneDeformacije,Zam1,Kordinate);
SmicajneDeformacije=subs(SmicajneDeformacije,alfa,alfap);
SmicajneDeformacije=subs(SmicajneDeformacije,betaU,betaUp);
for r=1:4
Deformacije(r,:)=RavanskeDeformacije(r,1)+zz*RavanskeDeformacije(r,2)+zz*zz*RavanskeDeformacije(r,3)+zz*zz*zz*RavanskeD
eformacije(r,4);
end
Deformacije(6,1)=SmicajneDeformacije(1,1)+zz*SmicajneDeformacije(1,2)+zz*zz*SmicajneDeformacije(1,3)+zz*zz*zz*Smicajne
Deformacije(1,4);
Deformacije(5,1)=SmicajneDeformacije(2,1)+zz*SmicajneDeformacije(2,2)+zz*zz*SmicajneDeformacije(2,3)+zz*zz*zz*Smicajne
Deformacije(2,4);
for ii=1:n
%=====
%Odredjivanje brojnih vrednosti koeficijenta lokalne i globalne matrice
%krutosti sa ciljem dobijanja napona
%=====
QQ=ReducedStiffness2(E1(ii),E2(ii),E3(ii),NU12(ii),NU23(ii),NU13(ii),G12(ii),G23(ii),G13(ii));
QQbar1=Qbar(QQ,teta(ii));
Naponi(:,ii)=QQbar1*Deformacije;
end
Naponi=Naponi*(h/a);
Test=Naponi(5,1);
end

```

-Пример кода за добијање дисперзионих кривих пропагације таласа у ламинату чији се слојеви састоје од материјала ојачаног једном фамилијом влакана применом смицајне деформационе теорије другог реда (SSDT)

```
%=====
% !!!!!!!!!!!!!!!PRVI DEO KODA ZA RAD SA BROJNIM VREDNOSTIMA!!!!!!!!!!!!!!
%=====

%=====
% Deo programa koji definise tipove matrica potrebne za staticku analizu
% Prvo se odredi kog tipa su matrice sprezanja uz pomoc programa
% TipoviMatricaSprezanja
%=====
%
%=====
syms z
A=zeros(4,4);
BPR=zeros(4,3);
DPR=zeros(4,3);
BDR=zeros(3,4);
DDR=zeros(3,3);
F=zeros(3,3);
DTR=zeros(3,4);
HTR=zeros(3,3);
A45=zeros(2,2);
B45PR=zeros(2,2);
B45DR=zeros(2,2);
D45=zeros(2,2);
%=====
%Unosenje broja monoslojeva u laminatu
%=====
n=input('Unesi broj monoslojeva n=:');
Hukupno=input('Unesi debljinu laminata=:');
%=====
% Definisanje zbirnih matrica ravanskog i odvojeno razmakom smicajnog moda
%=====
ZbirnaA=zeros(4,4);
ZbirnaBPR=zeros(4,3);
ZbirnaDPR=zeros(4,3);
ZbirnaBDR=zeros(3,4);
ZbirnaDDR=zeros(3,3);
ZbirnaF=zeros(3,3);
ZbirnaDTR=zeros(3,4);
ZbirnaHTR=zeros(3,3);
ZbirnaA45=zeros(2,2);
ZbirnaB45PR=zeros(2,2);
ZbirnaB45DR=zeros(2,2);
ZbirnaD45=zeros(2,2);
ZbirI0p=0;
ZbirI1p=0;
ZbirI2p=0;
ZbirI3p=0;
ZbirI4p=0;
%=====
% Petlja za unos podataka i odredjivanje ukupne debljine laminata
% Indeks p je dodat sa ciljem da pamti trenutne vrednosti unetih parametara
%=====
ZbirH=0;
for i=1:n
    nil(i)=5.66;%input('Unesi parametar E1=:');
    nilp=nil(i);%*10^9;
    nit(i)=2.46;%input('Unesi parametar E2=:');
```

```

nitp=nit(i);%*10^9;
lambda(i)=5.65;%input('Unesi parametar E3=:');
lambdap=lambda(i);%*10^9;
alfas(i)=-1.28;%input('Unesi parametar NU12=:');
alfaps=alfas(i);
beta(i)=22.09;%input('Unesi parametar NU13=:');
betap=beta(i);

teta(i)=input('Unesi parametar teta=:')*(pi/180);
tetap=teta(i);

H(i)=Hukupno/n;%
Hp=H(i);%*10^-3;

Ro(i)=1.61;%input('Unesite gustinu materijala=:');
Rop=Ro(i);

ZbirH=ZbirH+Hp;
end
Debljina=ZbirH;

h=Debljina;
ROk=1;
E2k=7;
%=====
% Izracunavanje pocetne i krajnje koordinate svakog lejera
%=====
l(1)=-ZbirH/2;
brojac=-1;
dodatak=0;
for i=2:n+1
    brojac=brojac+1;
    dodatak=dodatak+H(n-brojac);
    l(i)=-ZbirH/2+dodatak;
end
podela=1;
for i=1:n
    %=====
    % Debljine slojeva
    %=====
    z1=l(i);
    z2=l(i+1);
    %=====
    % Odredjivanje matrice elasticnosti za svaki od slojeva pristup
    % invarijantan u odnosu na koordinatne transformacije
    %=====
    Q=ReducedStiffness2S(nil(i),nit(i),lambda(i),alfas(i),beta(i),teta(i));
    Qbarcl=ReducedStiffness2S(nil(i),nit(i),lambda(i),alfas(i),beta(i),0);
    Qbarl=Q;
    %=====
    % Pozivanje funkcija kojima se odredjuju matrice sprezanja
    %=====
    AP=Amatrix(A,Qbarl,z1,z2);
    ZbirnaA=ZbirnaA+AP;
    BPPR=BPRmatrix(BPR,Qbarl,z1,z2);
    ZbirnaBPR=ZbirnaBPR+BPPR;
    DPPR=DPRmatrix(DPR,Qbarl,z1,z2);
    ZbirnaDPR=ZbirnaDPR+DPPR;
    BPDR=BDRmatrix(BDR,Qbarl,z1,z2);
    ZbirnaBDR=ZbirnaBDR+BPDR;
    DPDR=DDRmatrix(DDR,Qbarl,z1,z2);
    ZbirnaDDR=ZbirnaDDR+DPDR;

```



```

FP=Fmatrix(F,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaF=ZbirnaF+FP;
DPTR=DTRmatrix(DTR,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaDTR=ZbirnaDTR+DPTR;
HTRP=HTRmatrix(HTR,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaHTR=ZbirnaHTR+HTRP;
%=====
%Matrice za smicajni mod; USvim matrica skracenice PR, DR i TR
%oznacavaju prvi, drugi i treci red
%=====
AP45=A45matrix(A45,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaA45=ZbirnaA45+AP45;
BP45PR=B45PRmatrix(B45PR,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaB45PR=ZbirnaB45PR+BP45PR;
BP45DR=B45DRmatrix(B45DR,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaB45DR=ZbirnaB45DR+BP45DR;
DP45=D45matrix(D45,Qbar1,z1,z2);
ZbirnaD45=ZbirnaD45+DP45;
%=====
%Odredjivanje parametara I
%=====
I0p=Ro(i)*(z2-z1);
ZbirI0p=ZbirI0p+I0p;
I1p=int(Ro(i)*z,z1,z2);
ZbirI1p=ZbirI1p+I1p;
I2p=int(Ro(i)*z*z,z1,z2);
ZbirI2p=ZbirI2p+I2p;
I3p=int(Ro(i)*z*z*z,z1,z2);
ZbirI3p=ZbirI3p+I3p;
I4p=int(Ro(i)*z*z*z*z,z1,z2);
ZbirI4p=ZbirI4p+I4p;
end

SR=[ZbirnaA ZbirnaBPR ZbirnaDPR;
     ZbirnaBDR ZbirnaDDR ZbirnaF;
     ZbirnaDTR ZbirnaF ZbirnaHTR]
SSR=[ZbirnaA45 ZbirnaB45PR;
     ZbirnaB45DR ZbirnaD45];

syms A11 A12 A13 A16 A22 A23 A26 A33 A36 A44 A45 A55 A66
syms B11 B12 B13 B16 B22 B23 B26 B33 B36 B44 B45 B55 B66
syms D11 D12 D13 D16 D22 D23 D26 D33 D36 D44 D45 D55 D66
syms F11 F12 F13 F16 F22 F23 F26 F33 F36 F44 F45 F55 F66
syms H11 H12 H13 H16 H22 H23 H26 H33 H36 H44 H45 H55 H66
syms kap1 kap2 kap3 k kl
syms x y z t omega vbrz Fre
syms U0 V0 W0 KSIZ FIX FIY KSIX KSIY
syms I0 I1 I2 I3 I4 I5 I6 I7

%=====
% Projekcije talasnog broja kx ky
%=====
alfa=(45*pi)/180;
kx=k*cos(alfa);
ky=k*sin(alfa);
%=====
%Formiranje matrica
%=====
A=[A11 A12 A13 A16;
   A12 A22 A23 A26;
   A13 A23 A33 A36;
   A16 A26 A36 A66];

```

B1=[B11 B12 B16;
 B12 B22 B26;
 B13 B23 B36;
 B16 B26 B66];

B2=[B11 B12 B13 B16;
 B12 B22 B23 B26;
 B16 B26 B36 B66];

D1=[D11 D12 D16;
 D12 D22 D26;
 D13 D23 D36;
 D16 D26 D66];

D2=[D11 D12 D16;
 D12 D22 D26;
 D16 D26 D66];

D3=[D11 D12 D13 D16;
 D12 D22 D23 D26;
 D16 D26 D36 D66];

F=[F11 F12 F16;
 F12 F22 F26;
 F16 F26 F66];

H3=[H11 H12 H16;
 H12 H22 H26;
 H16 H26 H66];

%Matrice smicajnog moda

AS=[A55 A45;
 A45 A44];

BS1=[B55 B45;
 B45 B44];

BS2=[B55 B45;
 B45 B44];

DS=[D55 D45;
 D45 D44];

MAT=[A B1 D1;
 B2 D2 F;
 D3 F H3];

MATS=[AS BS1;
 BS2 DS];

%Pretpostavljeni oblici resenja

%
 u_0=U0*exp(1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
 v_0=V0*exp(1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
 w_0=W0*exp(1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
 ksi_x=KSIX*exp(1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
 ksi_y=KSIY*exp(1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
 ksi_z=KSIZ*exp(1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
 fi_x=FIX*exp(1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
 fi_y=FIY*exp(1i*(kx*x+ky*y-omega*t));

```

%=====
%Parcijalni izvodi po koordinatama
%=====
u_0_x=diff(u_0,1,x);
u_0_y=diff(u_0,1,y);
v_0_x=diff(v_0,1,x);
v_0_y=diff(v_0,1,y);
w_0_x=diff(w_0,1,x);
w_0_y=diff(w_0,1,y);
ksi_x_x=diff(ksi_x,1,x);
ksi_x_y=diff(ksi_x,1,y);
ksi_y_x=diff(ksi_y,1,x);
ksi_y_y=diff(ksi_y,1,y);
ksi_z_x=diff(ksi_z,1,x);
ksi_z_y=diff(ksi_z,1,y);
fi_x_x=diff(fi_x,1,x);
fi_x_y=diff(fi_x,1,y);
fi_y_x=diff(fi_y,1,x);
fi_y_y=diff(fi_y,1,y);
%=====
%Parcijalni izvodi po vremenu
%=====
u_0_t=diff(u_0,2,t);
v_0_t=diff(v_0,2,t);
w_0_t=diff(w_0,2,t);
ksi_x_t=diff(ksi_x,2,t);
ksi_y_t=diff(ksi_y,2,t);
ksi_z_t=diff(ksi_z,2,t);
fi_x_t=diff(fi_x,2,t);
fi_y_t=diff(fi_y,2,t);
%=====
%Kreiranje matrice opterecenja
%=====
N=A*[u_0_x; v_0_y; ksi_z; u_0_y+v_0_x]+B1*[ksi_x_x; ksi_y_y; ksi_x_y+ksi_y_x]+D1*[fi_x_x; fi_y_y; fi_x_y+fi_y_x];
M=B2*[u_0_x; v_0_y; ksi_z; u_0_y+v_0_x]+D2*[ksi_x_x; ksi_y_y; ksi_x_y+ksi_y_x]+F*[fi_x_x; fi_y_y; fi_x_y+fi_y_x];
S=D3*[u_0_x; v_0_y; ksi_z; u_0_y+v_0_x]+F*[ksi_x_x; ksi_y_y; ksi_x_y+ksi_y_x]+H3*[fi_x_x; fi_y_y; fi_x_y+fi_y_x];
Q=AS*[ksi_x+w_0_x; ksi_y+w_0_y]+BS1*[ksi_z_x+fi_x; ksi_z_y+fi_y];
R=BS2*[ksi_x+w_0_x; ksi_y+w_0_y]+DS*[ksi_z_x+fi_x; ksi_z_y+fi_y];
%=====
%Parcijalni izvodi opterecenja
%=====
N_x=diff(N,1,x);%izvod citavog vektora N po x analogno i za ostala opterecenja N(1)=Nx
N_y=diff(N,1,y);
M_x=diff(M,1,x);
M_y=diff(M,1,y);
S_x=diff(S,1,x);
S_y=diff(S,1,y);
Q_x=-diff(Q,1,x);
Q_y=-diff(Q,1,y);
R_x=-diff(R,1,x);
R_y=-diff(R,1,y);
prva_jednacina=N_x(1)+N_y(4)-I0*u_0_t-(1/2)*I2*fi_x_t;
druga_jednacina=N_x(4)+N_y(2)-I0*v_0_t-(1/2)*I2*fi_y_t;
treca_jednacina=Q_x(1)+Q_y(2)+I0*w_0_t;
cetvrta_jednacina=M_x(1)+M_y(3)-Q(1)-I2*ksi_x_t;
peta_jednacina=M_x(3)+M_y(2)-Q(2)-I2*ksi_y_t;
sesta_jednacina=R_x(1)+R_y(2)+N(3)+I2*ksi_z_t;
sedma_jednacina=S_x(1)+S_y(3)-R(1)-(1/2)*I2*u_0_t-(1/4)*I4*fi_x_t;
osma_jednacina=S_x(3)+S_y(2)-R(2)-(1/2)*I2*v_0_t-(1/4)*I4*fi_y_t;
JEDNACINE=[prva_jednacina;druga_jednacina;treca_jednacina;cetvrta_jednacina;peta_jednacina;sesta_jednacina;sedma_jednacina;
osma_jednacina];
AMPLITUDE=[U0; V0; W0; KSIX; KSIY ;KSIZ ;FIX ;FIY ];

```

```

for ii=1:8
    for jj=1:8
        Delilac(ii,jj)=exp(-1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
        Delilac1(ii,jj)=exp(1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
        L1(ii,jj)=diff(JEDNACINE(ii,1),1,AMPLITUDE(jj,1))*exp(-1i*(kx*x+ky*y-omega*t));
        L2(ii,jj)=(L1(ii,jj)/Delilac(ii,jj));
        L(ii,jj)=(-1)*simplify(L2(ii,jj)/(Delilac1(ii,jj)));
    end
end
LS=L;
SimMod=[LS(1,1) LS(1,2) LS(1,6) LS(1,7) LS(1,8);
        LS(1,2) LS(2,2) LS(2,6) LS(1,8) LS(2,8);
        LS(1,6) LS(2,6) LS(6,6) LS(6,7) LS(6,8);
        LS(1,7) LS(1,8) LS(6,7) LS(7,7) LS(7,8);
        LS(1,8) LS(2,8) LS(6,8) LS(7,8) LS(8,8)];
SimModP=subs(SimMod,MAT,SR);
SimMod=subs(SimModP,MATS,SSR);
SimMod=subs(SimMod,I0,ZbirI0p);
SimMod=subs(SimMod,I1,ZbirI1p);
SimMod=subs(SimMod,I2,ZbirI2p);
SimMod=subs(SimMod,I3,ZbirI3p);
SimMod=subs(SimMod,I4,ZbirI4p);
omegap=vbrz*k;
cp=(Fre*2*pi)/(k);
SimMod=subs(SimMod,omega,omegap);
SimMod=subs(SimMod,vbrz,cp);
fh=4.1;
br1=0;
for br=1:410
    fh=fh-0.01
    fhp=fh/h
    fh1(br)=fh
    SimMod1=subs(SimMod,Fre,fhp);
    JednacinaSimetricnog=collect(vpa(det( SimMod1),3),k);
    JednacinaSimetricnog=subs(JednacinaSimetricnog,k^10,k1^5);
    JednacinaSimetricnog=subs(JednacinaSimetricnog,k^8,k1^4);
    JednacinaSimetricnog=subs(JednacinaSimetricnog,k^6,k1^3);
    JednacinaSimetricnog=subs(JednacinaSimetricnog,k^4,k1^2);
    JednacinaSimetricnog=subs(JednacinaSimetricnog,k^2,k1);
    Resenja=(solve(JednacinaSimetricnog,k1));
    Resenja1=((sort(sqrt(Resenja))));
    Ppi=pi;
%=====
% fh*2*Ppi/k deo koji se koristi za uspostavljanje veze izmedju fh i k
%=====
SH2p=vpa((fh*2*Ppi)/Resenja1(1),5);
SH2(br)=double(SH2p);
S2p=vpa((fh*2*Ppi)/Resenja1(2),5);
S2(br)=double(S2p);
S1p=vpa((fh*2*Ppi)/Resenja1(3),5);
S1(br)=double(S1p);
S0p=vpa((fh*2*Ppi)/Resenja1(4),5);
S0(br)=double(S0p);
SH0p=vpa((fh*2*Ppi)/Resenja1(5),5);
SH0(br)=double(SH0p);
end
%=====
% Ovaj deo se koristi za proveru da li su resenja kompleksna
%=====
length(SH2);
duzSH2=0;
for brSH2=1:length(SH2)
    if isreal(SH2(brSH2))==1

```

```

ISH2=brSH2;
duzSH2=duzSH2+1;
ISH2=brSH2;
SH2plotP=SH2(ISH2);
fh2plotP=fh1(ISH2);
SH2plot(duzSH2)=SH2plotP;
fh2plot(duzSH2)=fh2plotP;
end
end
length(S2);
duzS2=0;
for brS2=1:length(S2)
if isreal(S2(brS2))==1
IS2=brS2;
duzS2=duzS2+1;
IS2=brS2;
S2plotP=S2(IS2);
f2plotP=fh1(IS2);
S2plot(duzS2)=S2plotP;
f2plot(duzS2)=f2plotP;
end
end

length(S1)
duzS1=0
for brS1=1:length(S1)
if isreal(S1(brS1))==1
duzS1=duzS1+1;
IS1=brS1;
S1plotP=S1(IS1);
f1plotP=fh1(IS1);
S1plot(duzS1)=S1plotP;
f1plot(duzS1)=f1plotP;
end
end

length(S0);
duzS0=0;
for brS0=1:length(S0)
if isreal(S0(brS0))==1
duzS0=duzS0+1;
IS0=brS0;
S0plotP=S0(IS0);
f0plotP=fh1(IS0);
S0plot(duzS0)=S0plotP;
f0plot(duzS0)=f0plotP;
end
end

length(SH0);
duzSH0=0;
for brSH0=1:length(SH0)
if isreal(SH0(brSH0))==1
duzSH0=duzSH0+1;
ISH0=brSH0;
SH0plotP=SH0(ISH0);
fh0plotP=fh1(ISH0);
SH0plot(duzSH0)=SH0plotP;
fh0plot(duzSH0)=fh0plotP;
end
end
plot(fh2plot,SH2plot/h,'!','LineWidth',2,...
'MarkerEdgeColor','cyan',...

```

```
'MarkerFaceColor','g',...
'MarkerSize',10)
hold on
plot(f2plot,S2plot/h,'','LineWidth',2,...
'MarkerEdgeColor','r',...
'MarkerFaceColor','g',...
'MarkerSize',10)
hold on
plot(f1plot,S1plot/h,'','LineWidth',2,...
'MarkerEdgeColor','magenta',...
'MarkerFaceColor','g',...
'MarkerSize',10)
hold on
plot(f0plot,S0plot/h,'','LineWidth',2,...
'MarkerEdgeColor','b',...
'MarkerFaceColor','g',...
'MarkerSize',10)
hold on
plot(fH0plot,SH0plot/h,'','LineWidth',2,...
'MarkerEdgeColor','g',...
'MarkerFaceColor','g',...
'MarkerSize',10)
hold on
grid
xlim([0 4])
ylim([0 20])
```