



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА

Драган Чукановић

СТАТИЧКА И ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА ПЛОЧА ОД
ФУНКЦИОНАЛНО ГРАДИЈЕНТНО РАСПОРЕЂЕНИХ
МАТЕРИЈАЛА

Докторска дисертација

Крагујевац, 2017. година

I. Аутор

Име и презиме: Драган Чукановић

Датум и место рођења: 19.02.1982. године, Свилајнац, Република Србија

Садашње запослење: Асистент, Факултет техничких наука – Косовска Митровица, Универзитет у Приштини

II. Докторска дисертација

Наслов: Статичка и динамичка анализа плоча од функционално градијентно распоређених материјала

Број страница: 160

Број слика: 49

Број библиографских података: 180

Установа и место где је рад израђен: Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

Научна област (УДК): Примењена механика, Механичке карактеристике материјала, Нумеричка анализа (66.017/.018:620.17]:519.6)

Ментор: Др Гордана Богдановић, ванредни професор, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

III. Оцена и одбрана

Датум пријаве теме: 01-1/2859 од 09.09.2016.

Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: 01-1/4674-19 од 27.12.2016.

Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата:

1. Др Златибор Васић, редовни професор, Факултет техничких наука – Косовска Митровица, Универзитет у Приштини.
2. Др Мирослав Живковић, редовни професор, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу.
3. Др Иван Милетић, доцент, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу.
4. Др Славиша Шалинић, ванредни професор, Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву, Универзитет у Крагујевцу.
5. Др Гордана Богдановић, доцент, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу.

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:

1. Др Златибор Васић, редовни професор, Факултет техничких наука – Косовска Митровица, Универзитет у Приштини.
2. Др Радован Славковић, редовни професор, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу.
3. Др Мирослав Живковић, редовни професор, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу.
4. Др Славиша Шалинић, ванредни професор, Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву, Универзитет у Крагујевцу.
5. Др Иван Милетић, доцент, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу.

Датум одбране дисертације:

РЕЗИМЕ

Функционално градијентно распоређени материјали (ФГМ), као група савремених материјала у породици инжењерских композита добијају све ширу примену у разним гранама индустрије са циљем да се, одговарајућим комбиновањем потенцијала доступних материјала, њихове особине искористе на најбољи могући начин. Отказ или деламинација, изазвана високим локалним интерламинарним напонима, је највећи и најчешће проучавани проблем код конвенционалних композитних ламината. У циљу превазилажења поменутих проблема, у оквиру ове дисертације проучаване су и имплементирани теоријске основе, као и аналитичке и нумеричке процедуре којима се може обезбедити предвиђање понашања плоча од функционално градијентно распоређених материјала изложених различитим врстама оптерећења.

Приказане су основне карактеристике ФГМ и указано је на њихове предности у односу на конвенционалне композитне ламинате. Извршена је њихова класификација у односу на различите критеријуме и описан је широк спектар области у којима се примењују. Посебна пажња је посвећена дефинисању математичких функција, које на адекватан начин могу да опишу њихову градијентну структуру. Те функције су послужиле као основа за добијање математичког модела ФГМ за напонско-деформациону анализу плоча која је урађена у оквиру ове дисертације

Извршена је систематизација теорија плоча које се користе у анализи конвенционалних композитних ламина. Дата је анализа предности и недостатака класичне теорије плоча и смицајних деформационих теорија првог и вишег реда. Смицајна деформациона теорија вишег реда заснована на 13 различитих функција облика, које су првенствено развијене од стране различитих аутора за анализу композитних ламината, у овој дисертацији је прилагођена и имплементирана у теоријске поставке за анализу плоча од ФГМ. Како се велики број инжењерских проблема математички описује моделом плоче на еластичној подлози, проучене су и теоријске поставке плоче од ФГМ на еластичној подлози. Примењен је Винклер-Пастернаков математички модел који се користи за опис поменуте интеракције.

Применом смицајне деформационе теорије вишег реда и варијационих метода изведене су једначине равнотеже и кретања. У циљу анализе и предвиђања понашања плоча од ФГМ, на основу добијених теоријских поставки, развијен је и одговарајући код у програмском пакету MATLAB. Применом развијеног кода, извршена је анализа умерено дебелих и дебелих плоча од ФГМ које чине два конституента, метал (Алуминијум) и керамика (Алумина). Уочене су одређене зависности које су приказане у табелама и на дијаграмима. Анализе су подељене на статичку и динамичку, при чему су, у оквиру статичке анализе, приказани резултати за проблеме савијања, као и извијања услед утицаја температуре на плочу од ФГМ. Код динамичке анализе, приказани су резултати за проблеме слободних непригушених осцилација плоча од ФГМ, као и интеракције плоча од ФГМ и еластичне подлоге. На основу добијених резултата и упоредне анализе за различите случајеве статичких и динамичких проблема, дата су одговарајућа тумачења и донесени су одређени закључци.

Кључне речи: функционално градијентно распоређени материјали, смицајна деформациона теорија вишег реда, еластична подлога, статичка и динамичка анализа

ABSTRACT

Functionally graded materials (FGM), as a group of modern materials in the family of engineering composite materials, are being increasingly used in various branches of industry, striving to make the best use of their characteristics by combining adequately the potentials of available materials. Failure or delamination, caused by high local interlaminar stresses, is the biggest and the most commonly studied problem with conventional composite laminates. With the aim of overcoming those problems, this thesis provides a study and implementation of theoretical basis, as well as analytical and numerical procedures which can predict the behaviour of plates of functionally graded materials exposed to different kinds of loading.

The basic characteristics of FGM are presented and it is pointed to their advantages over conventional composite laminates. They have been classified according to various criteria and a wide range of areas of their use has been presented. Special attention has been given to defining mathematical functions which can adequately describe their graded structure. Those functions were used as a basis for getting a mathematical model of FGM for stress-strain analysis of plates which has been done within this thesis.

A systematization of plate theories which are used in the analysis of conventional composite laminates has been done. The thesis also gives an analysis of advantages and disadvantages of the classical plate theory as well as of the first order and high order shear deformation theories. High order shear deformation theory based on 13 different shape functions, which were previously developed by various authors for the analysis of conventional composite laminates, has been adjusted and implemented into theoretical postulates for the analysis of FGM plates. Since a big number of engineering problems are mathematically described by a model of plate on an elastic foundation, the thesis studies theoretical postulates for FGM plates on an elastic foundation. Winkler-Pasternak mathematical model which is used for the description of the mentioned interaction was applied.

Applying high order shear deformation theory and variational methods, the equilibrium and motion equations were developed. With the aim of analysing and predicting the behaviour of FGM, based on the established theoretical postulates, an adequate code has been developed in the software package MATLAB. Using the developed code, an analysis has been done of moderately thick and thick plates of FGM, which are composed of two constituents, a metal (aluminium) and ceramics (alumina). Certain dependancies have been observed and presented in tables and diagrams. The analyses were divided into the static and dynamic one. Within the static analysis results were presented for problems of bending, as well as buckling which occurs due to the influence of temperature on the FGM plate. In the dynamic analysis, the results for free vibration of FGM plates as well as for the interaction of FGM plates and an elastic foundation have been presented. Based on the obtained results and comparative analysis for different cases of static and dynamic problems, relevant interpretations have been given and certain conclusions drawn.

Key words: functionally graded plate, high order shear deformation theory, elastic foundation, static and dynamic analysis

Ова дисертација настала је као резултат мог дугогодишњег научног и стручног усавршавања, као и успешне сарадње са професорима и колегама којима дугујем велику захвалност.

Највећу захвалност дугујем свом ментору, др Гордани Богдановић, ванредном професору, на помоћи у дефинисању теме дисертације, оригиналним идејама и подстицању да проблем увек посматрам са више различитих страна. Разумевање, стрпљење, оптимизам и велику подршку коју ми је пружила, умногоме је олакшало израду дисертације.

Посебну захвалност дугујем свом предметном професору, др Златибору Васићу, редовном професору, на вишегодишњој успешној сарадњи. Стручну помоћ и корисне савете, које сам добио кроз наше сталне консултације и дискусије, дали су немерљив допринос током израде дисертације.

За корисне сугестије захваљујем се и др Мирославу Живковићу, редовном професору, као члану комисије и руководиоцу пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја, на којима сам био ангажован.

Захваљујем се члановима комисије, др Радовану Славковићу, редовном професору, др Славиши Шалинићу, ванредном професору, др Ивану Милетићу, доценту, који су својим конструктивним сугестијама, у стручном и техничком смислу, допринели бољем коначном облику дисертације.

Захвалност дугујем и др Драгану Милосављевићу, редовном професору, на дугогодишњој сарадњи и саветима при изради дисертације.

Велику захвалност дугујем свом пријатељу, др Александру Радаковићу, на пријатељским саветима и несебичној помоћи у добијању и тумачењу нумеричких резултата у дисертацији.

На крају, своју неизмерну захвалност дугујем својој породици, оцу Велибору, мајци Десанки и сестри Славици, на константној и неискључивој подршци током мог професионалног усавршавања и израде дисертације. Посебно место у мом животу припада малој Калини, која је била мој највећи извор енергије да истрајем у изради дисертације у тренуцима када ми је понестајало мотива.

САДРЖАЈ

1 УВОД.....	1
1.1 Предмет и циљ дисертације.....	2
1.2 Преглед литературе.....	3
1.3 Садржај рада.....	6
2 ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛНО ГРАДИЈЕНТНО РАСПОРЕЂЕНИХ МАТЕРИЈАЛА (ФГМ).....	10
2.1 Концепт ФГМ.....	10
2.2 Подела ФГМ.....	20
2.3 Методе производње ФГМ.....	21
2.3.1 Металургија прахова.....	22
2.3.1.1 Пресовање слојева.....	22
2.3.1.2 Формирање мешавине праха центрифугалном силом.....	23
2.3.1.3 Седиментација гравитационом силом.....	23
2.3.1.4 Седиментација центрифугалном силом.....	23
2.3.2 Центрифугално ливење.....	24
2.3.3 Центрифугална метода талога.....	25
2.3.4 Центрифугална метода мешавине прахова.....	26
2.3.5 Техника напаравања.....	27
2.4 Примена ФГМ.....	27
3 ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ НЕПРЕКИДНИХ СРЕДИНА. КОНСТИТУТИВНЕ РЕЛАЦИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ И ТЕРМОЕЛАСТИЧНОСТИ. ВАРИЈАЦИОНЕ МЕТОДЕ.....	31
3.1 Тензор напона.....	31
3.2 Тензор деформације.....	32
3.2.1 Гринов тензор деформације.....	33
3.2.2 Вон Карманов тензор деформације.....	34
3.3 Конститутивне релације еластичности и термоеластичности.....	35
3.3.1 Конститутивне релације термоеластичности у зависности од класе симетрије.....	37
3.3.2 Конститутивни еластични тензор изражен преко инжењерских константи.....	39
3.4 Варијационе методе.....	43
3.4.1 Принцип виртуалног рада.....	44
3.4.2 Принцип минимума укупне потенцијалне енергије.....	46
3.4.3 Хамилтонов принцип.....	46
3.5 Математички модел интеракције греде/плоче и еластичне подлоге.....	47
3.5.1 Једнодимензиони модел (модел греде) на еластичној подлози.....	48
3.5.1.1 Једнопараметарски модел – Винклеров модел.....	49
3.5.1.2 Двопараметарски модел – Винклер-Пастернаков модел.....	50
3.5.2 Дводимензиони модел (модел плоче) на еластичној подлози.....	51
3.5.2.1 Једнопараметарски модел – Винклеров модел.....	52
3.5.2.2 Двопараметарски модел – Винклер-Пастернаков модел.....	52
4 СМИЦАЈНЕ ДЕФОРМАЦИОНЕ ТЕОРИЈЕ У АНАЛИЗИ ПЛОЧА ОД ФГМ.....	53
4.1 Класична теорија плоча.....	53

4.2	Смицајна деформациона теорија првог реда	55
4.3	Смицајне деформационе теорије вишег реда	56
4.3.1	Смицајна деформациона теорија вишег реда заснована на различитим функцијама облика	57
4.3.2	Смицајна деформациона теорија другог реда	60
4.3.3	Смицајна деформациона теорија трећег реда	60
5	СТАТИЧКА АНАЛИЗА ПЛОЧА ОД ФГМ ПРИМЕНОМ СМИЦАЈНЕ ДЕФОРМАЦИОНЕ ТЕОРИЈЕ ВИШЕГ РЕДА	62
5.1	Кинематичке релације померање-деформација	63
5.2	Конститутивне једначине еластичности и термоеластичности за ФГМ	66
5.3	Једначине равнотеже	68
5.3.1	Извијање услед утицаја температуре на плоче од ФГМ	69
5.3.2	Извијање услед утицаја температуре на плоче од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу	71
5.3.2.1	Једначине стабилности	72
5.3.2.2	Аналитичко решавање једначина стабилности	73
5.3.3	Савијање плоча од ФГМ	75
5.3.4	Савијање плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу	76
5.3.4.1	Аналитичко решавање једначина равнотеже	77
6	ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА ПЛОЧА ОД ФГМ ПРИМЕНОМ СМИЦАЈНЕ ДЕФОРМАЦИОНЕ ТЕОРИЈЕ ВИШЕГ РЕДА	80
6.1	Кинематичке релације померање-деформација	80
6.2	Једначине кретања	81
6.2.1	Слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ	81
6.2.2	Слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу	82
6.3	Аналитичко решавање једначина кретања	83
7	НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ	86
7.1	Статичка анализа	88
7.1.1	Линеарна анализа	88
7.1.1.1	Савијање плоча од ФГМ	89
7.1.1.2	Савијање плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу	97
7.1.2	Нелинеарна анализа	104
7.1.2.1	Извијање услед утицаја температуре на плоче од ФГМ	104
7.1.2.2	Извијање услед утицаја температуре на плоче од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу	117
7.2	Динамичка анализа	123
7.2.1	Линеарна анализа	123
7.2.1.1	Слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ	123
7.2.1.2	Слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу	130
8	ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА	135
	ЛИТЕРАТУРА	141
	ДОДАТАК	154

ЛИСТА СЛИКА

Слика 2.1	Хијерархија модерних материјала [5].....	10
Слика 2.2	Раслојавање ламинатног композита.....	11
Слика 2.3	Конвенционални композит наспрам ФГМ [114]	11
Слика 2.4	Примери природних ФГМ [5].....	12
Слика 2.5	Континуално градијентни ФГМ са метал/керамика конституентима [5]	13
Слика 2.6	Варијација запреминског удела конституената ФГМ у правцу дебљине плоче у зависности од индекса p	15
Слика 2.7	Графички приказ запреминског удела за $p = 0.1$	16
Слика 2.8	Графички приказ запреминског удела за $p = 0.5$	16
Слика 2.9	Графички приказ запреминског удела за $p=1$	17
Слика 2.10	Графички приказ запреминског удела за $p = 10$	17
Слика 2.11	Графички приказ типова градијената [132].....	20
Слика 2.12	ФГМ са различитим типом градијента заснованим на а) запреминском уделу честица, б) облику честица, в) оријентацији честица, г) величини честица [133].....	21
Слика 2.13	Фабрикација ФГМ методом металургије прахова (пресовање слојева) [134] ..	22
Слика 2.14	Уређаји за центрифугално ливење [136]	24
Слика 2.15	Шематски приказ центрифугалне методе талоба [134].....	26
Слика 2.16	Шематски приказ центрифугалне методе мешавине прахова [137]	26
Слика 2.17	Различите области примене ФГМ.....	27
Слика 2.18	ФГМ конвертор енергије [139].....	29
Слика 2.19	Нуклеарни реактор [7].....	29
Слика 2.20	Нож за струг [7].....	30
Слика 3.1	Напони на инфинитезималном делу запремине облика паралелепипеда.....	32
Слика 3.2	Греда на еластичној подлози	48
Слика 3.3	Једнопараметарски модел еластичне подлоге (Винклеров модел): а) модел подлоге са опругама, б) оптерећење концентрисаном силом, в) оптерећење крутом гредом, г) континуално оптерећење идеално савитљивом гредом.....	49
Слика 3.4	Греда на двопараметарском моделу еластичне подлоге [155]	50
Слика 3.5	Двопараметарски модел еластичне подлоге (Винклеров-Пастернаков модел): а) модел подлоге са опругама и смичућим слојем, б) оптерећење	

	концентрисаном силом, в) оптерећење крутом гредом, г) континуално оптерећење идеално савитљивом гредом	51
Слика 3.6	Плоча на еластичној подлози	51
Слика 4.1	Ротација нормале на средњу раван плоче према класичној ламинатној теорији	54
Слика 4.2	Ротација нормале на средњу раван плоче према смицајној деформационој теорији првог реда	55
Слика 4.3	Упоредни приказ деформационих теорија	57
Слика 4.4	Дијаграми функција облика за вредност $h=2$	59
Слика 5.1	Геометрија плоче од ФГМ	63
Слика 5.2	Геометрија плоче од ФГМ ослоњене на еластичну подлогу, описана Винклер-Пастернаковим моделом	71
Слика 7.1	Упоредни приказ хомогених плоча (керамика, односно метал) и плоча од функционално градијентно распоређених керамика/метал материјала	87
Слика 7.2	Расподела нормализованих вредности нормалног напона $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\sigma}_{yy}$ по дебљини плоче за различите вредности индекса p	92
Слика 7.3	Расподела нормализованих вредности смицајног напона $\bar{\tau}_{xy}$ по дебљини плоче за различите вредности индекса p	93
Слика 7.4	Расподела нормализованих вредности трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче за различите вредности индекса p и различите функције облика	94
Слика 7.5	Нормализоване вредности померања \bar{w} за различите односе a/h и a/b и вредности индекса p	97
Слика 7.6	Расподела нормализованих вредности нормалног напона $\bar{\sigma}_{xx}$, смицајног напона $\bar{\tau}_{xy}$ и трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче ослоњене на еластичну подлогу за различите вредности коефицијента k_0	102
Слика 7.7	Расподела нормализованих вредности трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче ослоњене на еластичну подлогу за различите функције облика	103
Слика 7.8	Нормализоване вредности померања \bar{w} плоче ослоњене на еластичну подлогу за различите вредности индекса p и коефицијената k_0 и k_1	103
Слика 7.9	Утицај односа a/b и a/h и индекса p на критичну температуру извијања при равномерној промени температуре	108
Слика 7.10	Утицај односа a/b и a/h и индекса p на критичну температуру извијања при линеарној промени температуре	112

Слика 7.11	Утицај односа a/b и a/h , индекса p и степена нелинеарности s на критичну температуру извијања при нелинеарној промени температуре.....	116
Слика 7.12	Утицај односа a/b и a/h , индекса p и коефицијената k_0 и k_1 на критичну температуру извијања плоче ослоњене на еластичну подлогу при линеарној промени температуре.....	119
Слика 7.13	Утицај односа a/b и a/h , индекса p и s и коефицијената k_0 и k_1 на критичну температуру извијања плоче ослоњене на еластичну подлогу при нелинеарној промени температуре.....	122
Слика 7.14	Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\hat{\omega}$ плоча за различите вредности односа a/h и a/b и индекса p	128
Слика 7.15	Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\bar{\omega}$ плоча за различите вредности односа a/h и a/b и вредности индекса p	129
Слика 7.16	3D дијаграми нормализованих вредности сопствених фреквенција $\bar{\omega}$ плоча за различите вредности m и n , односа a/h и индекса p	129
Слика 7.17	Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ плоча ослоњених на еластичну подлогу за различите вредности односа a/h и a/b , коефицијената k_0 и k_1 и индекса p	133
Слика 7.18	3D дијаграми нормализованих вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ плоча ослоњених на еластичну подлогу за различите вредности односа a/h и a/b , вредности коефицијената k_0 и k_1 и индекса p	134

ЛИСТА ТАБЕЛА

Табела 4.1	Смицајне деформационе функције облика	58
Табела 7.1	Материјалне карактеристике конституената ФГМ	87
Табела 7.2	Нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$)	90
Табела 7.3	Нормализоване вредности померања плоче \bar{w} за различите вредности односа a/h и a/b и индекса p	95
Табела 7.4	Нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу за $p = 0$ и различите вредности k_0 и k_1 и односа a/h ($a/b = 1$)	98
Табела 7.5	Нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу за $p = 5$ и различите вредности k_0 и k_1 и односа a/h ($a/b = 1$)	99
Табела 7.6	Нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу за $p = 10$ и различите вредности k_0 и k_1 и односа a/h ($a/b = 1$)	100
Табела 7.7	Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при равномерној промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$ и $m = n = 1$)	105
Табела 7.8	Критична температура извијања (ΔT_{cr}) правоугаоне плоче при равномерној промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/b ($a/h = 20$ и $m = n = 1$)	106
Табела 7.9	Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при линеарној промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)	109
Табела 7.10	Критична температура извијања (ΔT_{cr}) правоугаоне плоче при линеарној промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/b ($a/h = 20$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)	110
Табела 7.11	Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при нелинеарној промени температуре ($s = 2$) за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)	113

Табела 7.12	Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при нелинераној промени температуре за различите вредности индекса p и s ($a/h = 20$, $a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)	114
Табела 7.13	Упоредни приказ критичне температуре извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при равномерној (P), линераној (Л) и нелинераној (НЛ) промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)...	115
Табела 7.14	Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу при линеарној промени температуре за различите вредности коефицијената k_0 , k_1 , индекса p и односа a/h ($a/b=1$, $m=n=1$ и $T_m = 5^\circ$)	118
Табела 7.15	Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу при нелинеарној промени ($s=3$) температуре за различите вредности коефицијената, k_0 , k_1 , индекса p и односа a/h ($a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$).....	120
Табела 7.16	Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ плоче за различите вредности односа a/b и a/h и индекса p ($m=1$, $n=1$).....	124
Табела 7.17	Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\hat{\omega}$ квадратне плоче односа $a/h = 5$ и различитих вредности индекса p	125
Табела 7.18	Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\hat{\omega}$ квадратне плоче односа $a/h = 10$ и различитих вредности индекса p	126
Табела 7.19	Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ правоугаоне плоче, односа $a/h = 5$, ослоњене на еластичну подлогу, за различите вредности коефицијената k_0 , и k_1 и индекса p ($m = 1$, $n = 1$)	130
Табела 7.20	Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ квадратне плоче, односа $a/h = 5$, ослоњене на еластичну подлогу, за различите вредности коефицијената k_0 и k_1 и индекса p	131

ЛИСТА ОЗНАКА

Ознака	Назив
a	дужина плоче
b	ширина плоче
h	дебљина плоче
$P(z), P_t, P_b$	Материјална карактеристика у произвољном пресеку z , на горњој и доњој ивици плоче од ФГМ
V_p	Запремински удео конституента у ФГМ
$K(z), K_t, K_b$	Модул стишљивости у произвољном пресеку z , на горњој и доњој ивици плоче од ФГМ
$G(z), G_t, G_b$	Модул смицања у произвољном пресеку z , на горњој и доњој ивици плоче од ФГМ
$E(z), E_t, E_b$	Модул еластичности у произвољном пресеку z , на горњој и доњој ивици плоче од ФГМ
$\alpha(z), \alpha_t, \alpha_b$	Коефицијент термичког ширења у произвољном пресеку z , на горњој и доњој ивици плоче
$\nu(z), \nu_t, \nu_b$	Поасонов коефицијент у произвољном пресеку z , на горњој и доњој ивици плоче
σ_{ij}	Компоненте тензора напона
E_{ij}	Компоненте тензора деформација
ε_{ij}	Компоненте тензора малих деформација
C_{ijkl}	Компоненте тензора еластичности
S_{ijkl}	Компоненте тензора попустљивости
ε_j^σ	Компоненте деформације услед механичких оптерећења
ε_j^T	Компоненте деформације услед слободног термичког ширења

U	Енергија унутрашње деформације
V	Потенцијална енергија спољашњих сила
Π	Укупна потенцијална енергија
K	Кинетичка енергија
q_e	Ефективно контактено оптерећење
U_e	Енергија деформације еластичне подлоге
u, v, w	Компоненте померања произвољне тачке на плочи
u_0, v_0, w_0	Компоненте померања тачке на средњој равни плоче
ψ_x, ψ_y, ψ_z	Углови ротације трансверзалне нормале у односу на осе x , y и z , респективно
θ_x, θ_y	Ротација трансверзалне нормале услед трансверзалног смицања
$f(z)$	Функција облика
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Функције уведене деформационом теоријом вишег реда
$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$	Вектор мембранских деформација
$\mathbf{k}^{(0)}$	Вектор деформација услед савијања
$\mathbf{k}^{(1)}$	Вектор деформација услед раванског смицања
$\mathbf{k}^{(2)}$	Вектор деформација услед трансверзалног смицања
T_{ref}	Референтна температура - температура при којој не долази до деформације
T_f	Коначна вредност температуре након загревања
$T(z), T_t, T_b$	Температура у произвољном пресеку z , на горњој и доњој ивици плоче од ФГМ
\mathbf{N}	Главни вектор сила
\mathbf{M}	Главни моменти
\mathbf{P}, \mathbf{R}	Главни моменти вишег реда

\mathbf{N}^T	Силе услед утицаја температуре
\mathbf{M}^T	Моменти услед утицаја температуре
\mathbf{P}^T	Моменти вишег реда услед утицаја температуре
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}$	Компоненте матрица крутости плоче
κ_0	Коефицијент трансверзалне крутости еластичне подлоге (Винклеров коефицијент)
κ_1	Коефицијент смицајне крутости (Пастернаков коефицијент)
$\bar{\mathbf{U}}$	Матрица амплитуда претпостављених облика померања
ΔT_{cr}	Критична температура извијања
\mathbf{J}	Јакобијан система
$\rho(z), \rho_t, \rho_b$	Густина материјала у произвољном пресеку z , на горњој и доњој ивици плоче од ФГМ
ω	Сопствена фреквенција система
E_c, E_m	Модул еластичности керамике односно метала
α_c, α_m	Коефицијент термичког ширења керамике односно метала
ρ_c, ρ_m	Густина керамике односно метала
$\bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{yy}$	Нормализоване вредности нормалних напона
$\bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$	Нормализоване вредности смицајних напона
$\hat{\omega}, \tilde{\omega}, \bar{\omega}$	Нормализоване вредности сопствене фреквенције система

1 УВОД

У развоју наше културе и друштва материјали имају веома важну улогу. Свакодневни живот човека, кроз целокупну историју, одређен је постојањем, откривањем, производњом, прерадом и применом различитих врста материјала. У почетку је човек узимао материјале из природе и примитивним поступцима и сопственим вештинама их обликовао у предмете одређене намене. Са развојем и стицањем квантитативних знања и законитости из области математике, физике (механике, термодинамике и слично), хемије и других, откриване су и методе и поступци за добијање нових материјала. Наука о материјалима је једна од најстаријих форми инжењерства и примењене науке. У савременом друштву материјали се јављају као једна од најважнијих области истраживања на глобалном нивоу кроз разне дисциплине. Основни разлози убрзаног развоја и истраживања нових материјала леже у порасту интердисциплинарних интеракција са једне стране, и откривању нових теорија, метода и експерименталних техника са друге стране. Било да произилазе као ресурс из природе или као продукт вештачких супстанци, сви материјали који се користе имају огроман утицај на животну средину, индустрију, економију и на крају на човека као крајњег корисника. Непрекидни развој индустрије намеће потребу да се конвенционални материјали, где год је то могуће, замене новим, савременим материјалима и на тај начин животно окружење учини сигурнијим и квалитетнијим. Све већа употреба нових материјала у медицини, стоматологији, авиоиндустрији, аутомобилској индустрији, грађевини и слично, омогућава удобније, поузданије и безбедније животно окружење.

Са једне стране, материјали се могу сврстати у групу коју, уобичајено, карактерише широка област примене, велики обим континуиране производње, неограничени ресурси, а самим тим и веома конкурентна цена и рапосложивост на тржишту. Са друге стране, постоји група нових материјала, коју карактеришу посебна својства и примена, ограничени ресурси, високи захтеви у погледу производње, карактеристика и квалитета, што узрокује високу цену, а тиме и примену ограничену само на скупе и одговорне конструкције. Интезивни развој нових материјала у свету резултира све већом количином информација о поступцима њиховог добијања (производње и обликовања), о њиховим својствима и могућностима примене. Неопходност непрестаног праћења главних тенденција у истраживањима и примени материјала и припадајућих технологија намеће се као обавеза у области инжењерства и примењене науке.

Данашња истраживања материјала могу се, уопштено, поделити у две групе:

- примена нових експерименталних метода и савремених инструмената за карактеризацију материјала на микро, а у новије време и на нано нивоу;
- примена рачунарских симулација које доводе до креирања математичких модела који омогућавају анализу материјала на микромеханичком и макромеханичком нивоу. Тако креирани модели омогућавају анализирање понашања материјала у

реалним условима експлоатације кроз напонско-деформационе анализе и проучавање механизма настајања и развијања оштећења при деловању различитих врста механичких оптерећења и утицаја температуре.

1.1 Предмет и циљ дисертације

Предмет истраживања и анализе у овој дисертацији су плоче од функционално градијентно распоређених материјали (ФГМ), као група савремених материјала у породици инжењерских композита. ФГМ добијају све ширу примену у разним гранама инжењерства и технологије са циљем да се, одговарајућим комбиновањем потенцијала доступних материјала, њихове особине искористе на најбољи могући начин. То укључује смањење раванских напона, смицајних напона по дебљини плоче и побољшање термомеханичких својстава. Отказ или деламинација на граници два суседна слоја је највећи и најчешће проучавани проблем код конвенционалних композитних ламината. Деламинација слојева изазвана високим локалним интерламинарним напонима доводи до смањења крутости и губитка структурног интегритета конструкције, а што као крајњу последицу има функционални отказ конструкције. Да би се елиминисали ови проблеми користе се ФГМ, који све више добијају на значају као напредни материјали за иновативне инжењерске конструкције.

У дисертацији ће бити представљене теоријске основе, као и аналитичке и нумеричке процедуре којима се може обезбедити предвиђање понашања плоча од ФГМ изложених различитим врстама оптерећења. Узимајући у обзир да су ови материјали састављени од два или више конституента, напонско-деформациона анализа ових материјала је доста сложена. Већина постојећих софтвера за анализу композитних материјала заснива се на класичној теорији плоча и смицајно деформационој теорији првог реда коју је развио Миндлин (*Mindlin*) [1], и на сличан начин, али не идентично, Рајзнер (*Reissner*) [2, 3]. Иако класична теорија не узима у обзир утицај трансверзално смицајних напона, она може да обезбеди прихватљива предвиђања понашања и резултате за танке плоче од ФГМ где су занемарљиви ефекти смицајних (угаоних) и нормалних (линијских) деформација по дебљини плоче. Миндлинова и Рајзнерова теорија узимају у обзир утицај смицајних напона по дебљини плоче, али задржавају геометријску линеарност нормале на раван плоче и захтевају употребу корекционих фактора који у општем случају зависе од облика и геометрије. Код анализе умерено дебелих и дебелих плоча од ФГМ, које ће бити предмет анализе у овој дисертацији, поменута теорија не даје задовољавајуће резултате. Са друге стране, за анализу умерено дебелих и дебелих плоча може се применити 3D теорија еластичности континуума (*Continuum-based 3D elasticity theory*). Међутим, 3D методе решавања су математички комплексне, што за последицу има повећање времена рачунања, потребу за хардвером високих перформанси, што доводи до повећавања трошкова анализе. Имајући у виду претходно наведено, развијање и коришћење 2D смицајних деформационих теорија плоча, које узимају у обзир ефекте поменутих смицајних и нормалних деформација,

а које дају тачност као и 3D модели, представља тренд када је анализа ФГ плоча у питању. У овој дисертацији биће детаљно развијена методологија примене смицајне деформационе теорије вишег реда засноване на функцијама облика. Функцијама облика уводи се геометријска нелинеарност и избегава компликована употреба корекционих фактора. Једначине равнотеже и кретања изведене применом смицајне деформационе теорије вишег реда и варијационим методама биће искоришћене за линеарну и нелинеарну статичку и линеарну динамичку анализу плоча од ФГМ. У циљу успостављања процедуре за анализу и предвиђање понашања плоча од ФГМ, развијене теоријске поставке биће имплементирани у софтвер написан у програмском пакету MATLAB (*MATrix LABoratory*). На основу добијених резултата и упоредном анализом за различите случајеве статичке и динамичке анализе, биће донесени одговарајући закључци.

1.2 Преглед литературе

Функционално градијентни материјали као савремени материјали у групи композитних материјала представљају актуелну тему којом се последњих година бави велики број аутора, о чему сведочи и врло велики број публикација у еминентним часописима из области композитних материјала. О актуелности и значају поменуте теме говори и велики број прегледних радова [4, 5, 6, 7, 8, 9], што недвосмислено указује на намеру аутора да прикажу тренутно стање истраживања у овој области и укажу на даље правце истраживања везано за ову веома интересантну област.

ФГМ је композитни материјал формиран од два или више конституента са континуалном променом особина у одређеном правцу. Другим речима, ови материјали се могу дефинисати и као материјали који поседују градијентну промену особина због материјалне хетерогености. Градијент особина може да буде дуж једног или више праваца и такође, континуалан или дисконтинуалан од једне до друге површине. Како је иницијална идеја за концепт ФГМ настала из разлога превазилажења концентрације интерламинарних напона на интерфејсу, која представља основни недостатак конвенционалних композитних ламината, разматрају се ФГМ са континуалном променом особина у жељеном правцу. Имајући у виду ову чињеницу, било је потребно развити функције које ће, уз најмањи степен апроксимације, најбоље описати градијентну промену особина у жељеном правцу [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

За тако дефинисане функционалне зависности које описују градијентну структуру ФГМ, напонско-деформациона анализа плоча од ФГМ у области линеарне и нелинеарне еластичности може се спровести применом познатих теорија које се користе у анализи изотропних или анизотропних композитних плоча. Генерално, понашање плоча и љуски од ФГМ под дејством механичког оптерећења или утицаја температуре може се анализирати употребом 3D еластичне теорије или еквивалентних теорија слоја (*equivalent single layer theories - ESL*). Модели ESL:

- класична теорија плоча (*classical plate theory - CPT*),

- смицајна деформациона теорија првог реда (*first - order shear deformation theory - FSDT*),
- смицајне деформационе теорије вишег реда (*Higher - order shear deformation theories - HSDT*),
- ламинатну теорију базирану на концепту слоја,

развијени су из 3D еластичне теорије уз одговарајуће претпоставке о кинематици деформације. Самим тим што су ESL теорије изведене из 3D теорије оне се могу сматрати апроксимативним теоријама које су нашле широку примену.

Иако наизглед доста једноставна, класична теорија плоча (позната и као Кирхофова (*Kirchhoff*) теорија) [17], према којој нормала на средњу равну плоче у недеформисаној конфигурацији остаје нормална и после деформације, се и данас доста користи, о чему сведочи велики број радова новијег датума заснованих на овој теорији. Према овој теорији не узимају се у разматрање смицајне и нормалне деформације по дебљини плоче. Статичким проблемима савијања и извијања плоча од ФГМ, применом СРТ, за различите случајеве контурних услова бавили су се аутори у радовима [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Одзивом плоча од ФГМ, узимајући у обзир вон Карманов (*von Karman*) тип геометријске нелинеарности, анализиран је у [25, 26]. Утицај градијентне расподеле материјала код танких квадратних и правоугаоних плоча од ФГМ проучаван је и за различите случајеве динамичког оптерећења. У радовима [27, 28, 29, 30] анализирани су слободне осцилације плоча од ФГМ коришћењем СРТ при различитим контурним условима у области линеарности, односно у области вон Кармановог типа нелинеарности у радовима [31, 32, 33]. Како се велики број реалних проблема у пракси своди на интеракцију елемената конструкције са неким видом еластичне подлоге, велики број публикација се бави анализом одзива плоча од ФГМ ослоњене на еластичну подлогу. У зависности од врсте конкретне проблема који се решава, постоји велики број математичких модела који описују еластичну подлогу, али се најчешће могу срести Винклеров (*Winkler*) модел [34] и побољшани Винклер-Пастернаков (*Winkler - Pasternak*) модел [35, 36, 37, 38] у анализи интеракције плоча од ФГМ и еластичне подлоге.

Са циљем да уклоне недостатке класичне теорије плоча, Миндлин [1] и Рајзнер [3, 2] су развили смицајну деформациону теорију првог реда (FSDT), узимајући у обзир утицај смицајне деформације применом линеарне расподеле раванских померања по дебљини плоче. С обзиром на то да и у овом случају нема деформације нормале у односу на средњу равну плоче, већ она остаје права линија, за добијање реалних решења, било је неопходно увести смицајне корекционе факторе. Мада је FSDT теорија доста раније разматрана у великом броју радова, слично као и СРТ, и данас се ова теорија доста користи, претежно у нелинеарним проблемима. Статички проблеми увођењем геометријске нелинеарности разматрани су у [39], применом Гриновог (*Green*) тензора, односно у [40, 41] применом вон Кармановог тензора деформације. Динамичком анализом слободних осцилација бавили су

се аутори у [42, 43, 44] , као и понашањем плоче од ФГМ у интеракцији са еластичном подлогом применом Винклер-Пастернак модела [45, 46].

Како би се избегла употреба смицајних корекционих фактора, уведене су смицајне деформационе теорије вишег реда (HSDT). HSDT теорије се могу развити проширивањем компоненти померања у степене редове по координати дебљине. У принципу, код теорија развијених на овај начин, жељена прецизност анализе може се постићи укључивањем довољног броја чланова у степени ред. Најчешће коришћена HSDT теорија је смицајна деформациона теорија трећег реда (*Third-order shear deformation theories-TSDT*) коју је развио Реди (*Reddy*) [47, 48] за ламинатне композитне материјале узимајући у обзир ефекте смицајних деформација и испуњавањем услова да су горња и доња површ ламината слободне од напона. Касније је поменути теорију применио и на анализу плоча од ФГМ [49]. Након тога, велики број аутора је користио Редијеву TSDT теорију у анализи савијања [50, 51], слободних осцилација и динамичке стабилности [52, 53] плоча од ФГМ, без или са интеракцијом плоче и еластичне подлоге [54]. Утицај температуре, као и структуре материјала, геометрије плоче на слободне осцилације проучавано је у [55]. Претпостављено је да је температура константна у равни плоче и да је променљива у правцу дебљине плоче. Једначине кретања су решаване Рејли - Рицовом (*Rayleigh - Ritz*) методом. Хамилтонов принцип извођења једначина кретања на основу TSDT и претварање у нелинеарни систем са два степена слободе коришћењем Галеркиновог (*Galerkin*) приступа примењен је у [56, 57] за нелинеарну динамичку анализу укљештене правоугаоне плоче од ФГМ оптерећење тренасверзалним оптерећењем.

Поред TSDT, посебну групу HSDT теорија, које су уведене у циљу елиминације потребе коришћења корекционих фактора, предствљају HSDT теорије засноване на функцијама облика. За разлику од CPT и FSDT, претпостављени облици померања код ове теорије не предвиђају да нормала на средњу површ ламинатне плоче остаје права линија, већ да ће током деформације доћи до кривљења нормале. Уопштено, функције облика могу бити полиномне, хиперболичке, експоненцијалне, параболичке итд. Полиномне HSDT теорије се уобичајено раздвајају од других врста ових теорија и у складу са степеном полинома по координати дебљине су сврстане у групу смицајно деформационих теорија другог (*Second-order shear deformation theories-SSDT*) или трећег реда (TSDT). Управо су полиномне теорије најзаступљеније у радовима аутора који се баве анализама ФГ плоча применом HSDT теорија. Према [58, 59] све полиномне HSDT теорије трећег реда се могу класификовати тако да претпостављена поља померања садрже једанаест непознатих. Претходно поменути формулацију проширена је у [60, 61] претпостављањем да су померања кубне функције координате дебљине плоче, тј. претпостављена померања садрже дванаест независних променљивих. У [62, 63, 64] аутори су предложили смицајну деформациону теорију n -тог реда, која је добијена модификовањем поља померања TSDT теорије, да би се објаснили полиномни чланови n -тог реда. За разлику од HSDT теорија заснованих на полиномним функцијама облика, поједини аутори су се бавили истраживањем и увођењем различитих хиперболичких, експоненцијалних, параболичких и

других функција облика [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73]. Предложене функције примењивали су у анализи конвенционалних ламинатних композита у циљу описивања понашања умерено дебелих и дебелих плоча при различитим статички и динамичким оптерећењима.

Како је иницијална идеја развијања ФГМ била да се добије материјал високе отпорности на температурни градијент са једне стране и уједно добрих механичких особина са друге стране, велики број аутора се бавио проблемима понашања ФГ плоча од метал-керамика конституената у условима термичких и спрегнутих термомеханичких оптерећења применом претходно поменутих ESL теорија. Из тог разлога, следи посебан осврт на преглед публикованих резултата у области термоеластичности. Једначине равнотеже и стабилности танких, умерено дебелих и дебелих плоча од ФГМ изложене утицају температуре разматране су у области линеарне [74, 75, 76, 77, 78] и нелинеарне еластичности [79, 80, 81, 82]. Утицај градијентне промене температуре за случајеве равномерне, линеарне и нелинеарне промене температуре у правцу дебљине плоче анализиран је у линеарним [83, 84, 85, 86] и нелинеарним динамичим проблемима [87, 88]. Интеракцију плоча/подлога и утицај еластичности подлоге, моделиране Винклер-Пастернак моделом, на одзив плоче, анализирали су аутори у [89, 90, 91, 92, 93].

Поред претходно поменутих 2D деформационих теорија, које ће бити предмет анализе у овој дисертацији, велики број аутора бавио се и проблемима заснованим на 3D теоријом еластичности [94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101] и разним модификованим облицима ове теорије.

На крају, као крајњи циљ и сврха свих претходно поменутих истраживања и анализа јесте примена ФГМ у различитим сферама инжењерства и гранама индустрије. Иако су иницијално ФГМ примену нашли као материјал за термичке штитове код свемирски летелица, данас узимају своје учешће у различитим областима индустрије. Захваљујући својим предностима у односу на конвенционалне материјале, ФГМ своју примену све више налазе у медицини [102, 103, 104], стоматологији [105, 106], енергетском и нуклеарном сектору [107, 108], аутомобилској индустрији [109], војној индустрији [110], оптоелектроници [111, 112] и др.

1.3 Садржај рада

У оквиру ове дисертације изложена литература је обрађена, примењена на појаве које се проучавају у овом раду и у знатној мери је помогла да се резултати презентују на начин, како је то кроз осам поглавља у овом раду приказано.

У **првом поглављу** дата су уводна разматрања о материјалима као увек присутној и актуелној области истраживања, са једне стране, односно указано је на значај и утицај који материјали имају у различитим гранама индустрије и животном окружењу човека као крајњег корисника. Представљени су основни проблеми који су предмет решавања у оквиру

ове дисертације, а односе се на превазилажење примарних недостатка ламинатних композитних материјала, увођењем функционално градијентно распоређених материјала, као савремених материјала у групи композита. Дефинисани су и основни циљеви који су постављени и реализовани током израде ове дисертације. Свеобухватним прегледом литературе и публикованих радова, дат је систематизован преглед теорија, метода и приступа у анализи плоча од ФГМ при статичким и динамичким оптерећењима, које ће бити предмет анализе и у оквиру ове дисертације.

Концепт функционално градијентно распоређених материјала, као напредних инжењерских композита, представљен је у оквиру **другог поглавља**. Иницијална идеја настанка и развоја ФГМ, као и предности градијентне структуре материјала, у односу на конвенционалне материјале, представљене су кроз њихов значај у превазилажењу основних недостатака ламинатних композитних материјала. Тако уведена нови концепт материјала, градијентне структуре у жељеном правцу, потребно је описати математичком функцијом у циљу формирања одговарајућег математичког модела за предвиђање понашања ФГМ у различитом статичком и динамичком окружењу. Из тог разлога, дат је преглед метода и функција за опис градијентне структуре ФГМ. Приказана је основна класификација ФГМ у односу на различите критеријуме. Економска исплативост употребе ФГМ у различитим инжењерским структурама директно зависи од трошкова фабрикација истих. Описане су различите технике производње које омогућавају како контролу састава, тако и контролу структуре. И на крају овог поглавља, као крајњи смисао и циљ увођења концепта ФГМ, приказане су области инжењерства и индустријске гране где ФГМ налазе своју примену.

Иако су ФГМ веома хетерогени, приликом анализе врши се њихова апроксимација где се посматрају као континуум чија се механичка својства равномерно мењају у правцу одређене координате. Из тог разлога, у **трећем поглављу** дате су основе механике непрекидних средина (континуума), где разликујемо статичко поље променљивих, које представља напон, и кинематичке променљиве, које представљају померања и деформације. Посебан осврт је дат на свођење Гриновог тензора деформације на вон Карманов тензор, који даје нелинеарну везу између померања и деформације, као и свођење на тензор малих (инфинитезималних) деформација. Како је предмет разматрања у оквиру ове дисертације напонско-деформациона анализа плоча од ФГМ у статичком и динамичком окружењу, описане су основне конститутивне релације еластичности и термоеластичности. Дефинисани су и облици конститутивног еластичног тензора у зависности од класа симетрије и приказано је одређивање компоненти поменутог тензора преко инжењерских константи. Варијациони принцип, који је у раду коришћен за одређивање статичких једначина равнотеже и динамичких једначина кретања, описан је кроз принцип минимума укупне потенцијалне енергије и Хамилтонов принцип. С обзиром да је, поред плоча од ФГМ, предмет истраживања у овој дисертацији и интеракција плоча од ФГМ са еластичном подлогом, у оквиру овог поглавља су показане и основне релације које дефинишу интеракцију греда/еластична подлога и плоча/еластична подлога. Посебан осврт је стављен на Винклер и Винклер-Пастернак математички модел који описује поменути интеракцију.

Са развојем индустрије и напретком технологије појавила се потреба за применом композитних материјала, не само у танкозидним конструкцијама, већ и у умерено дебелим и дебелим структурама. За разлику од анализе понашања плоча, чија је дебљина занемарљива у односу на друге две димензије, која се заснива на класичној теорији плоча, код анализе умерено дебелих и дебелих плоча, потребно је увести деформационе теорије вишег реда. У **четвртом поглављу** дат је упоредни приказ различитих деформационих теорија, почев од најелементарније, класичне теорије плоча, преко смицајне деформационе теорије првог реда, до смицајних деформационих теорија вишег реда и анализирани су њихове предности и недостаци. Извршена је кратка подела теорија вишег реда у зависности од степена полинома који се појављује у претпостављеним облицима померања. Како макромеханичка анализа у овој дисертацији произилази из деформационе теорије вишег реда засноване на функцијама облика, дат је преглед разлитих функција облика које су примењене у поменутој анализи. Кроз упоредни приказ графика ових функција, објашњене су уочене сличности и разлике између појединих функција облика.

На основу дефинисаних претпостављених облика померања заснованих на смицајној деформационој теорији вишег реда које укључују функције облика, у **петом поглављу** су успостављене нелинеарне везе померања и деформације у складу са вон Кармановим тензором деформације. Дефинисане су конститутивне релације еластичности и термоеластичности за плочу од ФГМ, при чему је претпостављено да се модул еластичности и коефицијент термичког ширења међају у складу са степеном функцијом (*power law*). Применом принципа минималне укупне потенцијалне енергије, изведене су једначине равнотеже за плочу изложу савијању и извијању услед утицаја температуре, као и за плочу ослоњену на еластичну подлогу, а за поменута оптерећења. За случај извијања услед утицаја температуре дефинисана је и једначина стабилности. Применом Навијеових претпостављених облика решења, показана је процедура аналитичког решавања изведених једначина равнотежа. За проблеме извијања плоче услед утицаја температуре, одређивана је критична температура извијања за случај равномерне промене температуре у правцу дебљине плоче, односно, за случај градијентне линеарне и нелинеарне промене температуре дуж дебљине плоче.

Како би се, поред анализе понашања плоча од ФГМ у статичким условима, извршила анализа и у динамичком окружењу, у **шестом поглављу** су разматрани проблеми слободних непригушених осцилација. Под претпоставком малих померања, успостављена је линеарна веза померања и деформације, уз коришћење претпостављених облика померања заснованих на смицајној деформационој теорији вишег реда која укључује функције облика. Дефинисане су енергија деформације, потенцијална енергија и кинетичка енергија за случај плоче од ФГМ и случај плоче у интеракцији са еластичном подлогом. Применом Хамилтоновог принципа изведене су једначине кретања за два поменута динамичка проблема. Применом Навијеових претпостављених облика померања, развијен је поступак аналитичког решавања постављених једначина кретања.

На основу развијених теоријских поставки, развијеног и имплементираног програмског кода, дошло се до одговарајућих резултата, који су систематски приказани у **седмом поглављу**. Приказани су резултати за умерено дебеле и дебеле плоче од ФГМ сачињене од два конституента – метала (Алуминијум - Al) и керамике (Алумина - Al₂O₃). Извршене анализе и добијени резултати подељени су на статичку и динамичку анализу. У оквиру статичке анализе приказани су резултати за проблеме савијања и извијања услед утицаја температуре на плоче од ФГМ, као и плоче од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу. Када је динамичка анализа у питању, разматрани су проблеми слободних непригушених осцилација плоча од ФГМ, као и поменуте интеракције плоча/еластична подлога. Резултати су представљени кроз табеларни приказ и у виду дијаграма где су анализирани одговарајуће законитости. Верификација добијених резултата извршена је поређењем са резултатима доступним у литератури.

Коначно, у **осмом поглављу** дата су систематизована закључна разматрања и дефинисани су правци даљих истраживања.

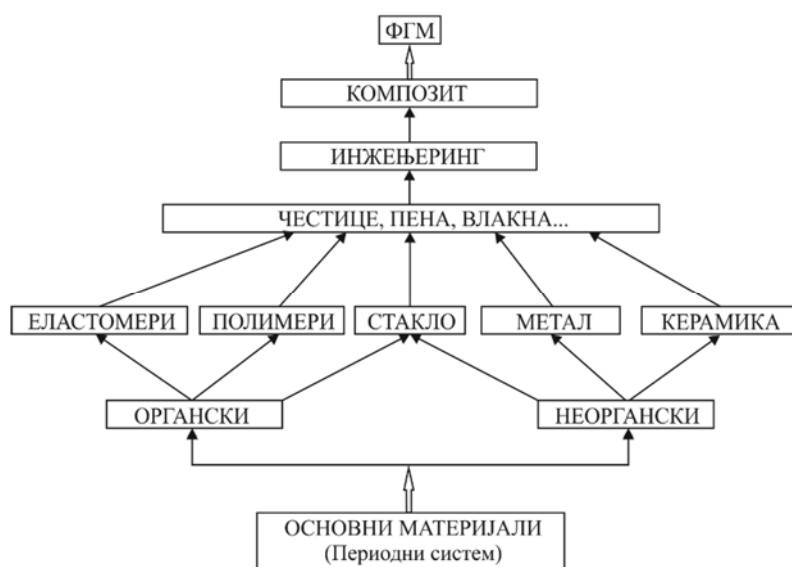
На крају је дат преглед коришћене **литературе** која је послужила, са једне стране, као полазна основа за дефинисање актуелног стања у области истраживања која су предмет ове дисертације, односно, са друге стране, за поређење појединих резултата до којих се дошло током израде дисертације.

У **додатку** су дати развијени MATLAB кодови за статичку и динамичку анализу плоча од ФГМ. Због обимности, дати су само репрезентативни кодови.

2 ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛНО ГРАДИЈЕНТНО РАСПОРЕЂЕНИХ МАТЕРИЈАЛА (ФГМ)

2.1 Концепт ФГМ

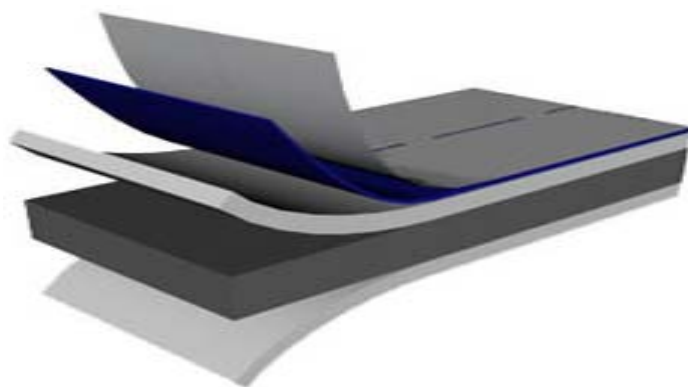
Тенденција ка развоју и примени иноватних решења са једне стране и незадржива индустријализација са друге стране наметнула је потребу да се конвенционални материјали, где год је то могуће, замене новим, савременим материјалима. Такође, савремене конструкције захтевају нове материјале који, својим карактеристикама, могу да одговоре на све захтеве који се пред њих постављају. Коришћење расположивих материјала из разних органских и неорганских једињења, отворило је пут развоју напредних полимера, инжењерских легура, структурне керамике и сл. Хијерархијски развој модерних материјала приказан је на слици 2.1.



Слика 2.1 Хијерархија модерних материјала [5]

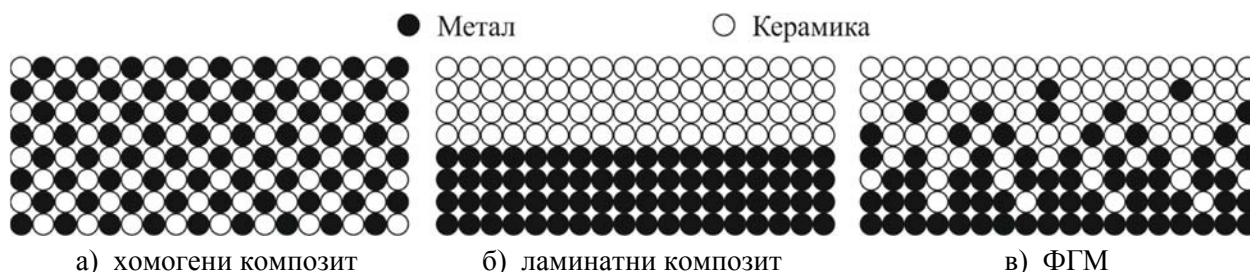
Функционално градијентно распоређени материјали (ФГМ) су савремени материјали у породици инжењерских композита. ФГМ су материјали у којима постоји континуална или дисконтинуална промена хемијског састава и/или микроструктуре (величина зрна, густина/порозност) кроз дефинисано геометријско растојање. Градијенти могу бити континуални или дисконтинуални на микроскопском нивоу. За процесирање ФГМ користе се различите технике, којима је могуће контролисати како састав, тако и структуру. Стални напредак у методама процесирања омогућио је да се концептом градијентних материјала креирају нови системи и реше различити инжењерски проблеми. После више деценија истраживања и развоја, ФГМ чине класу атрактивних материјала у којима је могуће креирати градијент особина који је немогуће постићи код било ког просторно хомогеног материјала. Данас је могуће креирати ФГМ са градијентом електричних и/или магнетних особина, са изузетним механичким и термичким карактеристикама и сл. Механичке

особине као што су: модул еластичности, Поасонов коефицијент, модул смицања, као и густина материјала, мењају се континуално у препорученим правцима. Ови материјали добијају све ширу примену у разним гранама инжењерства и технологије са циљем да се, одговарајућим комбиновањем потенцијала доступних материјала, њихове особине искористе на најбољи могући начин. То укључује смањење раванских напона, попречних напона по дебљини плоче, побољшање термичких својстава, жилавости, итд. Код конвенционалних композитних ламината уочавају се различита механичка својства на интерфејсу услед спајања два дискретна материјала. Као резултат обично се јавља концентрација напона на интерфејсу, што може да доведе до оштећења ламината попут раслојавања или ломљења матрице и слабљења међусобних веза (Слика 2.2) [5], [113].



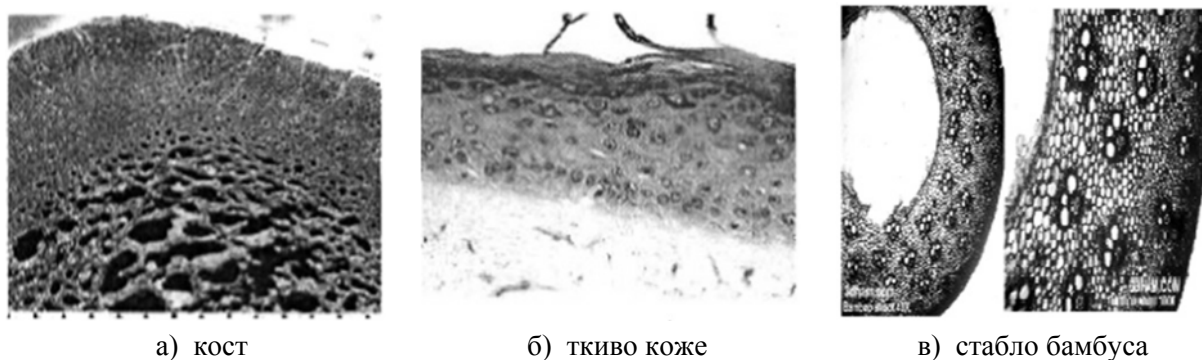
Слика 2.2 Раслојавање ламинатног композита

Деламинација слојева изазвана високим локалним интерламинарним напонима доводи до смањења крутости и губитка структурног интегритета конструкције, а што као крајњу последицу има функционални отказ конструкције. Да би се елиминисали ови проблеми користе се ФГМ, који добијају све више на значају као најновији напредни материјали за иновативне инжењерске конструкције. На слици 2.3 приказана је основна разлика између конвенционалног композита (хомогеног (Слика 2.3а) и ламинатног (Слика 2.3б) у односу на ФГМ (Слика 2.3в) [5]. За разлику од ламинатних композита, где постоји јасна граница прелаза између два материјала (нпр. керамике и метала), код ФГМ је тај прелаз континуиран. Код ФГМ доња површина је од чистог метала, горња од чисте керамике, а између је континуиран прелаз од једног до другог материјала.



Слика 2.3 Конвенционални композит наспрам ФГМ [114]

Иако се на први поглед чини да је концепт ФГМ настао као резултат напредног инжењерског изума, идеја за ову врсту материјала је, заправо, добијена из природе. Кроз читаву историју људи су проналазили у природи и користили материјале који су поседовали градијентну структуру на микроскопском нивоу. Ова врста материјала се јавља у природи у структурама као што су: кост, ткиво коже, дрво бамбуса итд (Слика 2.4). Тако на пример, кожа човека има градијентну структуру у правцу дебљине са циљем да пружи одговарајућу жилавост, осетљивост, еластичност у зависности од локације на телу и дубине коже. На увећаним фотографијама попречног пресека стабла бамбуса могу се уочити снопови (налик на зрна) који имају улогу влакана у овим биљкама. Може се рећи да су ове биљке изграђене од композитних материјала ојачаним сноповима влакана, при чему су влакна за око 10 пута јача од матрице. Осим тога, дистрибуција влакана је гушћа у спољашњем региону и смањује се ка унутрашњем региону, па се може рећи да дистрибуција влакана формира градијентну структуру [113].

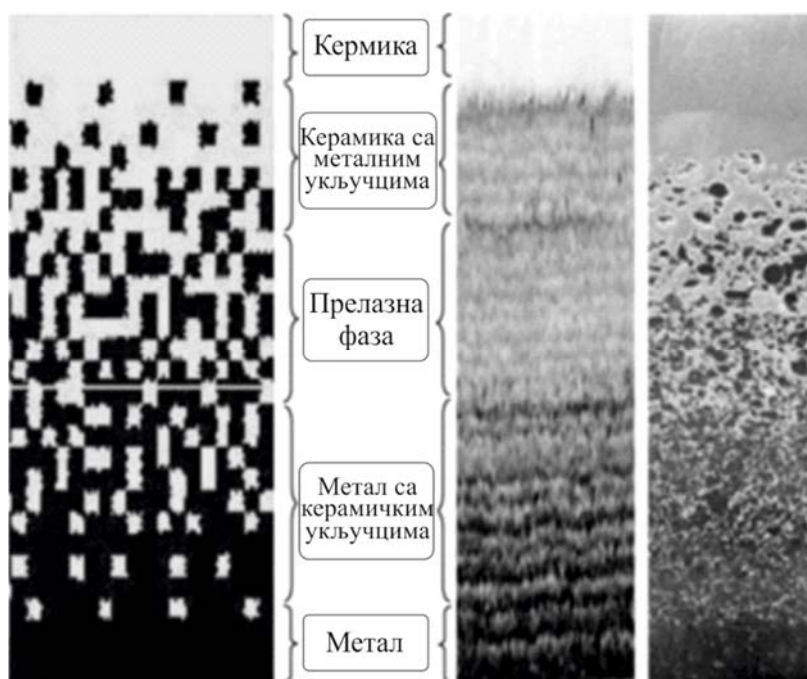


Слика 2.4 Примери природних ФГМ [5]

На бази тог концепта настали су ФГМ који, мада могу садржати и више, најчешће садрже две изотропне материјалне фазе. Ове компоненте често укључују легуре магнезијума, алуминијума, бабра, титанијума, волфрама, челика, итд и напредне структурне керамике као што су циркон, глинице (алумина), силицијум-карбид и волфрам-карбид. Први пут ФГМ се помињу у националном програму јапанске владе у оквиру којег је формиран програм развоја структурног материјала који ће моћи да одговори на потребе новонастале технологије. Нове технологије захтевају и нове, модерне материјале, са вишеструким функцијама које не поседује ни један постојећи, конвенционални материјал. Након одржаног Првог интернационалног симпозијума о функционално градијентним материјалима у Јапану, почиње убрзани развој ових материјала. У оквиру поменутог националног програма јапанске Владе формиран је пројекат развоја структурног материјала који ће моћи да се користи као термички штит за космичке бродове. При уласку великим брзинама у оксидациону атмосферу, услови на површини космичког брода, као што су температура од око 1800 - 2000°C и велика температурска разлика између спољашњег и унутрашњег зида трупа летелице, захтевале су материјале који су термостабилни и отпорни на оксидацију на спољашњој, високотемпературској страни и који поседују механичку чврстоћу на унутрашњој, нискотемпературској страни. У том тренутку није постојао

индустријски материјал који може да издржи наведене екстремне експлоатационе услове и изузетно термомеханичко оптерећење. У ту сврху произведена је термичка баријера чија је спољашња површина, која је у контакту са високотемпературским гасовима, изграђена од керамичких материјала који могу да обезбеде адекватну термичку стабилност, док је са нискотемпературске стране ова баријера била изграђена од тврдог метала, чиме је постигнута неопходна термичка проводљивост и механичка чврстоћа. Термичка баријера креирана је тако што је састав градијентно вариран од керамике до метала. На тај начин, обезбеђивањем оптималне дистрибуције састава, микроструктуре и/или порозности између нискотемпературске и високотемпературске површине обезбеђена је ефикасна релаксација термичког напрезања. Резултат континуалне промене састава у монолитној компоненти било је формирање градијента особина, односно формирање функционално градијентно распоређених материјали [113].

Најчешће коришћени ФГМ је метал/керамика, при чему керамика има добру топлотну отпорност, док је удео метала значајан у погледу механичке чврстоће, жилавости. ФГМ који се састоје од металних и керамичких конституената побољшавају термомеханичка својства на граници слојева, чиме се деламинација на граници слоја избегава због континуираног прелаза између својстава конституената. Варирањем процента запреминског удела два или више материјала, ФГМ може бити формиран тако да се постигне жељени градијент особина у одређеним правцима. Континуално градијентни ФГМ са метал/керамика конституентима је приказан на слици 2.5 [5].



Слика 2.5 Континуално градијентни ФГМ са метал/керамика конституентима [5]

Иако су ФГМ веома хетерогени, приликом анализа врши се апроксимација при чему се посматрају као континуум чија се механичка својства равномерно мењају у правцу одређене координате. Хомогенизација њихове компликоване хетерогене микроструктуре је потребна

у циљу анализирања ФГМ на ефикасан начин. Затворени облик решења неких фундаменталних проблема механике крутих тела може се добити ако се примени поменута апроксимација. Треба напоменути да ФГМ могу бити различито пројектовани и произведени контролисаним распоредом и уделом конституената у жељеном правцу. Самим тим и математичке функције које описују добијени градијент особина у одређеном правцу су различите. Најчешће коришћене функције у литератури за опис промене механичких особина при креирању математичког модела ФГМ су [9]:

- а) степена функција,
- б) сигма функција,
- в) експоненцијална функција,
- г) Мори-Танака метода.

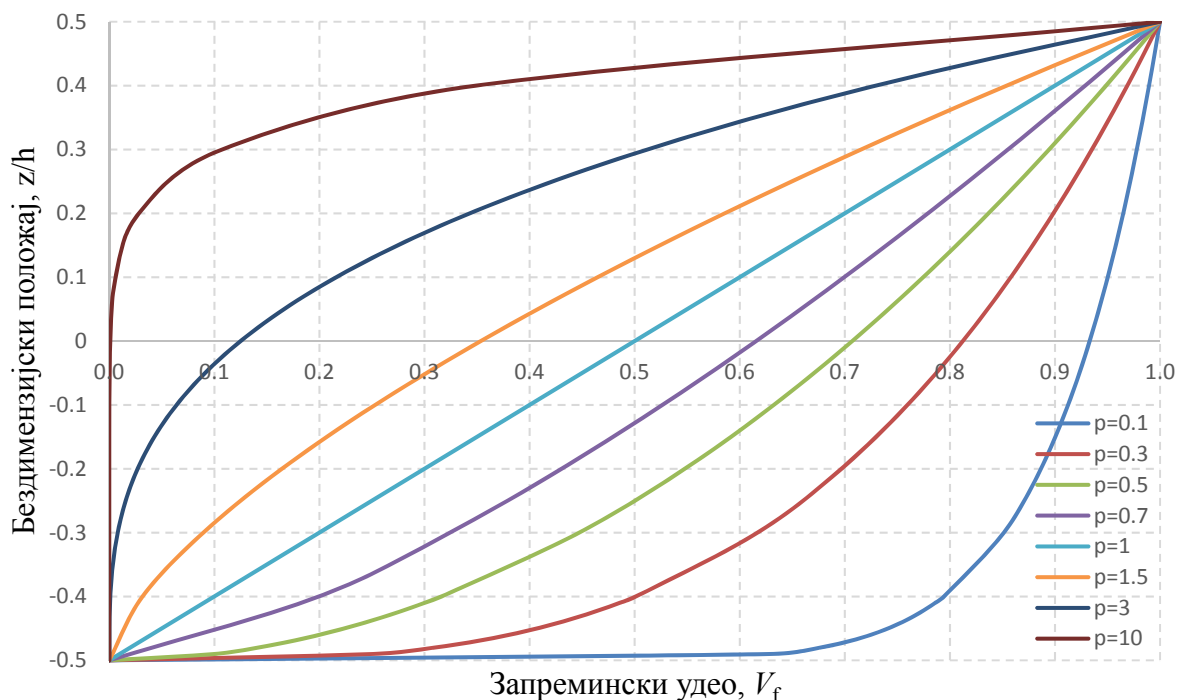
а) Степена функција

Ова функција за опис промене термомеханичких особина ФГМ у правцу дебљине плоче је једна од најчешће коришћених у литератури и како се користи и у овој дисертацији, биће детаљно описана. Промена особина ФГМ у правцу дебљине плоче према поменутој функцији дата је као:

$$P(z) = P_b + P_{tb} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \quad P_{tb} = P_t - P_b, \quad (2.1)$$

$$V_f = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p. \quad (2.2)$$

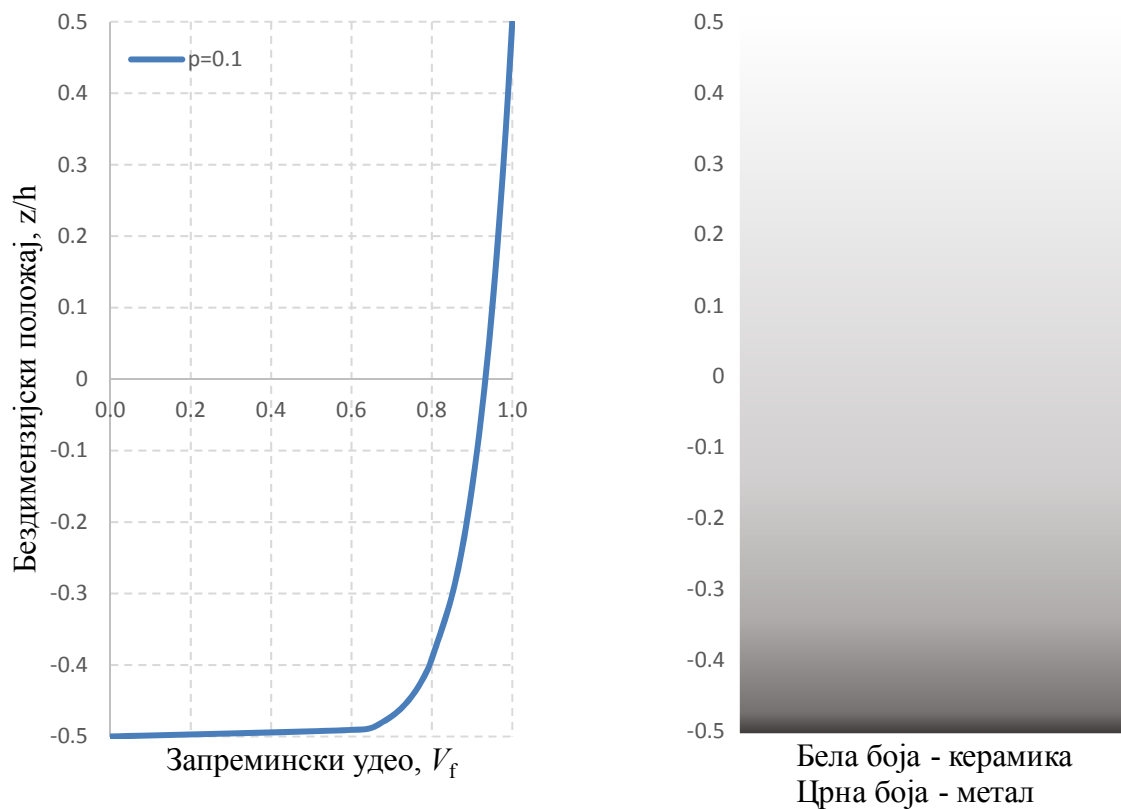
Приказана степена функција дефинише промену механичких особина као функцију запреминског удела конституената ФГМ у правцу дебљине плоче. $P(z)$ означава материјалну карактеристику у пресеку “ z ”, h је укупна дебљина плоче, P_t је материјална карактеристика на врху плоче ($z = h/2$), а P_b је материјална карактеристика на дну плоче ($z = -h/2$). Ако, рецимо, V_f дефинише запремински удео керамике, онда је запремински удео метала $1 - V_f$. Практично, индекс p , у једначини која дефинише запремински удео конституената ФГМ, дефинише количину и расподелу керамике, односно метала у правцу дебљине плоче. Већа вредност индекса p значи већи удео метала и обрнуто, мања вредност поменутог индекса значи већи удео керамике. Варирањем индекса p , могу се добити ФГМ прилагођени за тачно одређене и специфичне намене у савременим конструкцијама. Слика 2.6 детаљно приказује промену запреминског удела конституената кроз дебљину плоче за различите вредности индекса p . Треба нагласити да је при вредности $p = 0$ плоча од чисте керамике, при вредностима $p = 0.3; 0.5; 1; 3$ смањује се удео керамике, а расте удео метала, да би при вредностима $p = \infty$ плоча била од метала.



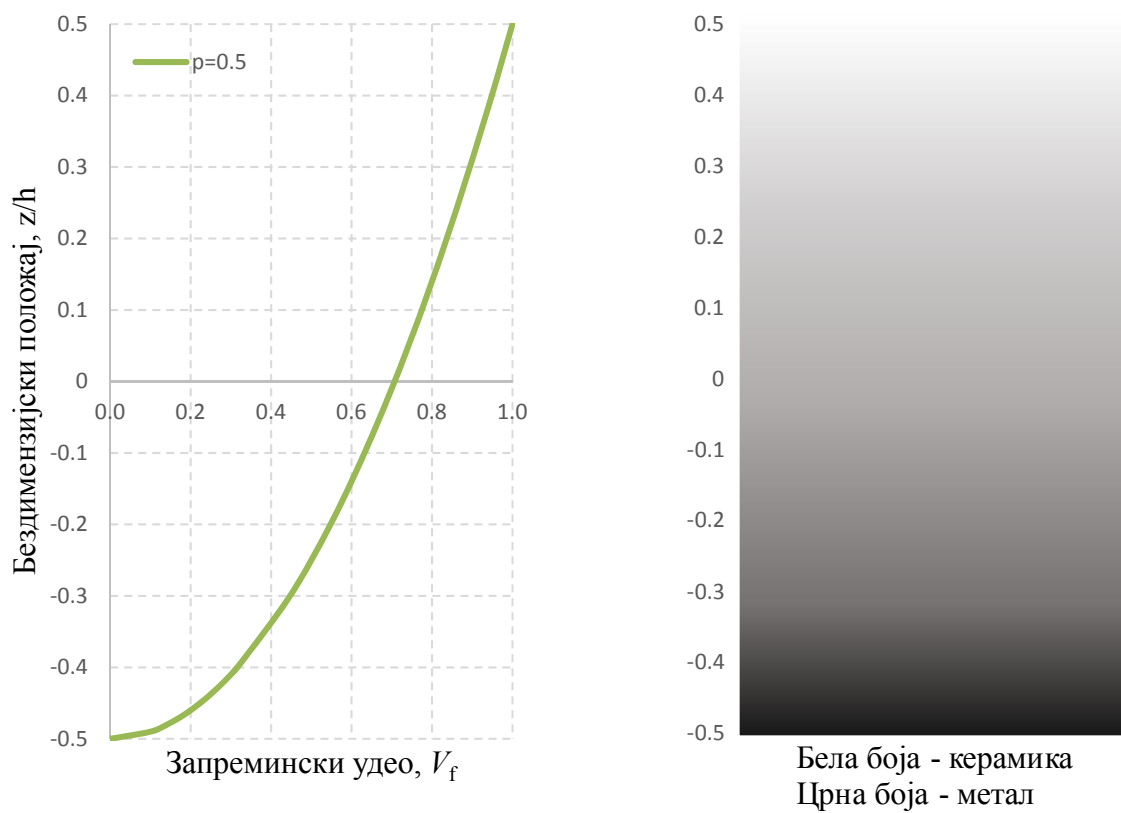
Слика 2.6 Варијација запреминског удела конституената ФГМ у правцу дебљине плоче у зависности од индекса p

Ради бољег разумевања утицаја индекса p , детаљнији приказ је дат на сликама 2.7 - 2.10, где обојени графикони приказују прегледније постепену промену у својствима материјала. Црна боја се односи на метал и бела на керамички материјал. Сиво сенчење у региону између црне и беле боје је визуелни показатељ мешавине метала и керамике. Тамно сива боја је мешавина богатија металом, док светло сива боја показује мешавину богатију керамиком. Анализом дијаграма, можемо приметити да за, рецимо, $p = 0,1$ има врло мало метала у материјалу и да оштрији прелаз из већинског удела метала у већински удео керамике креће код $z/h = -0.45$. Како се вредност индекса p повећава, расте удео метала, а при $p = 1$ прелаз између метала-керамика је линеаран.

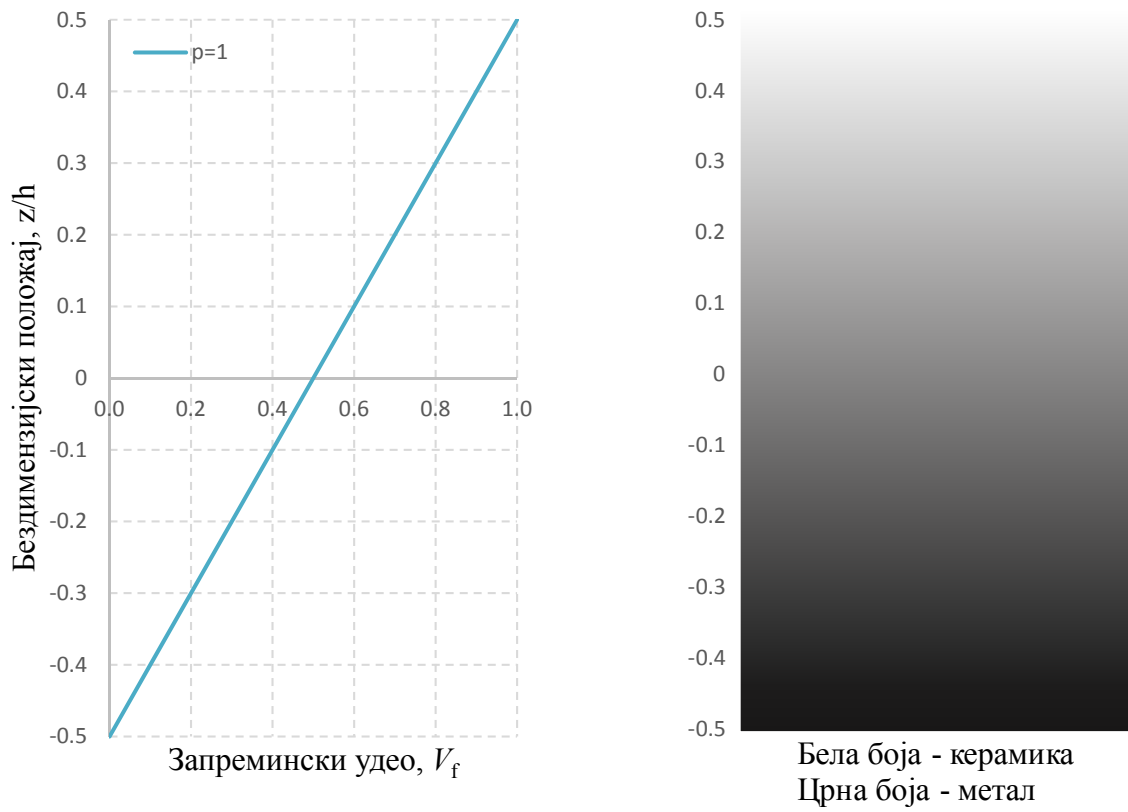
На основу претходно наведеног, јасно је да приликом производње плоче од ФГМ, уколико се жели да се добије боља термичка отпорност, отпорност на корозију, потребно је узети у обзир мањи индекс p , што ће дати плочу “богатију” керамиком. Ако се жели добити плоча велике носивости и жилавости, потребно је узети већи индекс p , што практично значи производња плоче “богатија” металом.



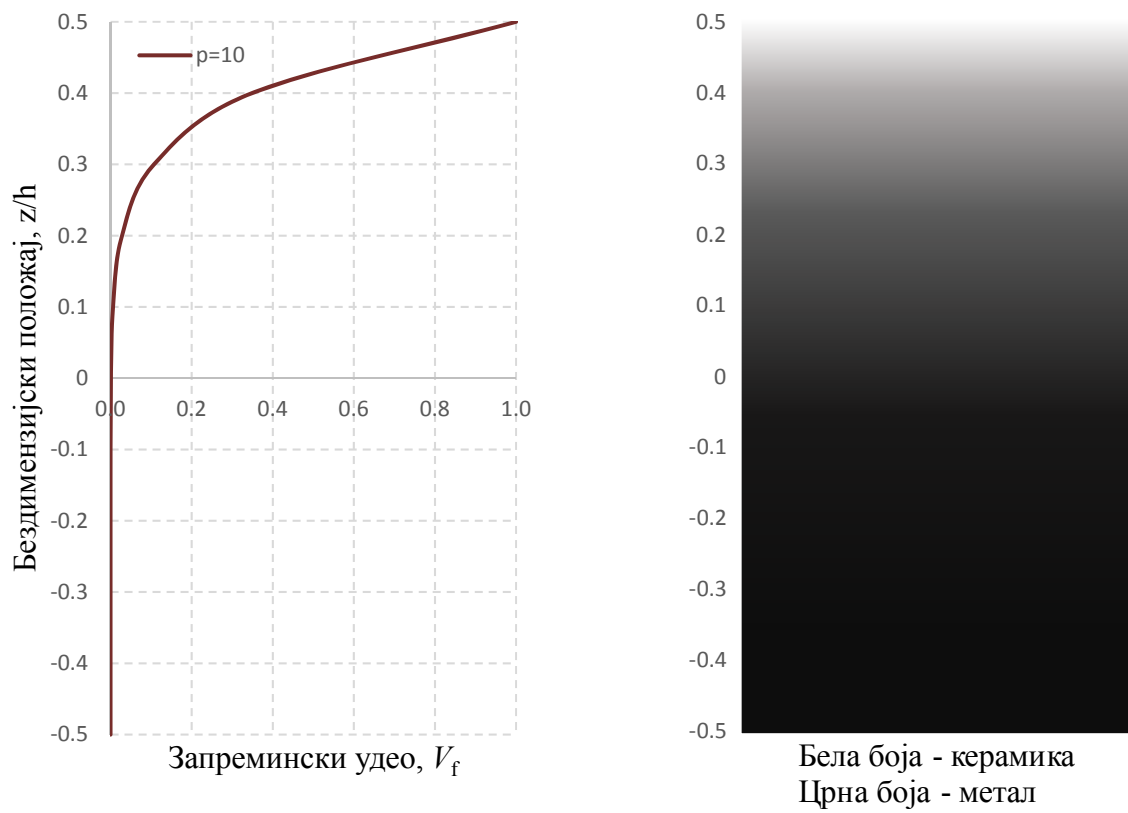
Слика 2.7 Графички приказ запреминског удела за $p = 0.1$



Слика 2.8 Графички приказ запреминског удела за $p = 0.5$



Слика 2.9 Графички приказ запреминског удела за $p=1$



Слика 2.10 Графички приказ запреминског удела за $p = 10$

б) Сигма функција

Ова функција се највише примењује код слојевитих ФГ плоча, на пример, плоча са керамиком у центру и градијентном променом особина до метала на обе крајње ивице плоче (сендвич плоча). У таквим случајевима, ако се користи једна степен функција, јавља се концентрација напона на интерфејсу, због, иако континуиране, ипак нагле промене карактеристика. Према томе, да би се описала равномерна промена напона, потребно је користити две степене функције, при чему се добија сигмоидна функција [115, 116, 117, 118, 119]. Промена запреминског удела конституента од средње равни према горњој ивици плоче (V_{f1}) и од доње ивице према средњој равни (V_{f2}) дата је као:

$$\begin{aligned} V_{f1} &= 1 + \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^p, & \text{за } 0 \leq z \leq h/2, \\ V_{f2} &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p, & \text{за } -h/2 \leq z \leq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Затим се, ефективне материјалне карактеристике у правцу дебљине плоче рачунају на основу једначине (2.1). Такође, оптимални удео конституента може се постићи варирањем индекса p .

в) Експоненцијална функција

Ова врста функције за апроксимацију ФГМ се најчешће користи код решавања и анализирања проблема у механици лома. Више аутора користило је експоненцијалну функцију у анализи ФГМ плоча [120, 121, 122, 123, 124] и сендвич плоча [125, 126]. Промена термомеханичких особина у правцу дебљине плоче дата је следећом експоненцијалном функцијом:

$$P(z) = P_b e^{\left(\frac{z}{h} \ln \left(\frac{P_t}{P_b} \right) \right)}. \quad (2.4)$$

г) Мори-Танака метода

Мори-Танака метода процене се највише примењује код градијентне микроструктуре која има јасно дефинисану континуалну матрицу и насумично распоређену фазу сферних честица. Ова метода разматра ефекат еластичних поља и интеракције између суседних честица конституената. Према [127, 128, 129, 130], ефективне материјалне карактеристике у правцу дебљине плоче ($K(z)$ - модул стишљивости, $G(z)$ - модул смицања) се овом методом рачунају:

$$\frac{K(z) - K_b}{K_t - K(z)} = \frac{V_f^p}{1 + (1 - V_f^p) \left(\frac{K_t - K_b}{K_b + \frac{4}{3} G_b} \right)}, \quad (2.5)$$

$$\frac{G(z) - G_b}{G_t - G(z)} = \frac{V_f^p}{1 + (1 - V_f^p) \left(\frac{G_t - G_b}{G_b + f_b} \right)}, \quad (2.6)$$

где је:

$$f_b = \frac{G_b (9K_b + 8G_b)}{6(K_b + 2G_b)}. \quad (2.7)$$

Ефективна вредност модула еластичности $E(z)$, Поасоновог коефицијента $\nu(z)$ и коефицијента термичког ширења $\alpha(z)$, рачунају се на основу $K(z)$ и $G(z)$ као:

$$E(z) = \frac{9K(z)G(z)}{3K(z) + G(z)}, \quad (2.8)$$

$$\nu(z) = \frac{3K(z) - 2G(z)}{2(3K(z) + G(z))}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\alpha(z) - \alpha_b}{\alpha_t - \alpha(z)} = \frac{\frac{1}{K(z)} - \frac{1}{K_b}}{\frac{1}{K_t} - \frac{1}{K_b}}, \quad (2.10)$$

при чему је запремински удео V_f дат у (2.2).

Иако постоји више поменутих метода хомогенизације које се примењују за апроксимацију ефективних термомеханичких карактеристика функционално градијентних материјала у правцу дебљине плоче, Мори-Танака метода и степена функција се најчешће користе за анализу у последњих неколико година.

ФГМ као нови концепт материјала носи са собом и одређене проблеме и отворена питања која је потребно да, кроз будућа истраживања, буду решена. Нека од тих питања су [131]:

- иако су у одређеној мери истражена, још увек су потребна истраживања у области физичких карактеристика материјалног модела ФГМ. Микроскопска структура и квантитативна веза у зависности од услова производње потребно је да се прецизно утврди у циљу прецизног и поузданог предвиђања понашања ФГМ,
- истраживање треба да се фокусира на варирање градијента материјала у циљу добијања материјала који могу да се примене у различитим конструкцијама у којима тренутно још увек нису нашла своју примену,
- одговарајућа база градијентних материјала (укључујући материјалне параметре, припрему материјала, процену перформанси и слично) мора бити развијена,
- потребно је још развијати и побољшати теоријске поставке које се користе у анализи ФГМ, у циљу добијања што тачнијег модела за нумеричку анализу и симулације понашања ФГМ у различитим статичким и динамичким условима,

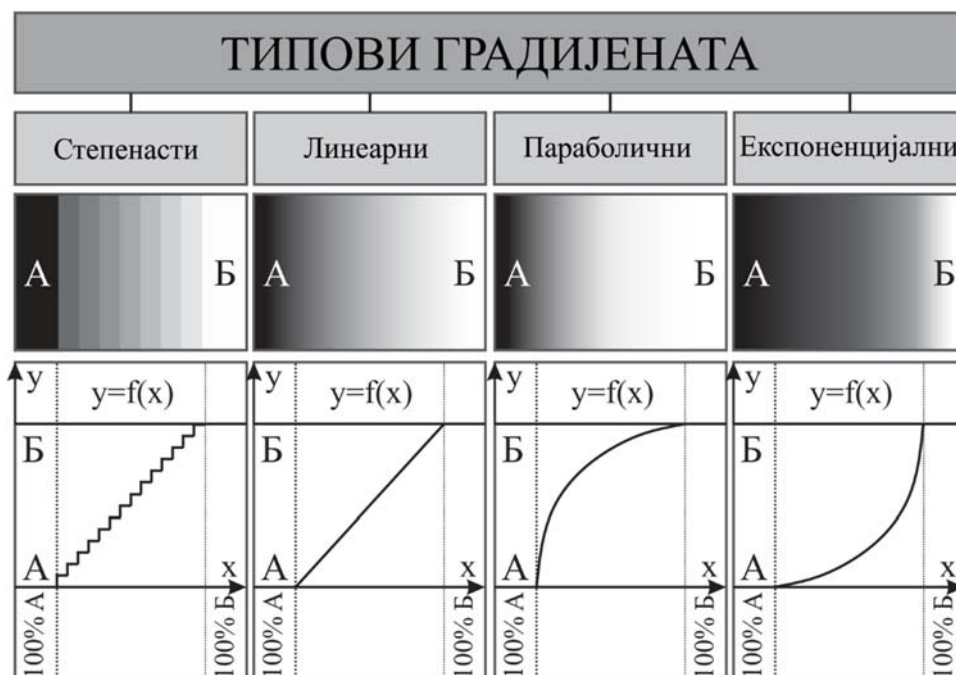
- развијање технологија производње које ће омогућити још прецизнију контролу градијента особина,
- развијање техника за производњу делова од ФГМ великих димензија и комплексних облика,
- детаљније студије оправданости знатно масовније производње и примене ФГМ него што је то тренутно,
- смањивање укупних трошкова производње ФГМ, односно развијање јефтинијих аутоматизованијих техника производње.

Оно што је, прегледом литературе актуелних публикација у реномираним светским часописима из области композитних материјала, очигледно јесте да се интересовање за област ФГМ наставља и расте са повећањем сазнања о њиховим могућностима.

2.2 Подела ФГМ

Особине ФГМ се градијентно мењају са положајем, а у зависности од типа градијента особина, ФГМ могу бити са (Слика 2.11) [132]:

- степенастим градијентом (скоковит),
- континуалним градијентом (линеаран, параболичан или експоненцијалан).



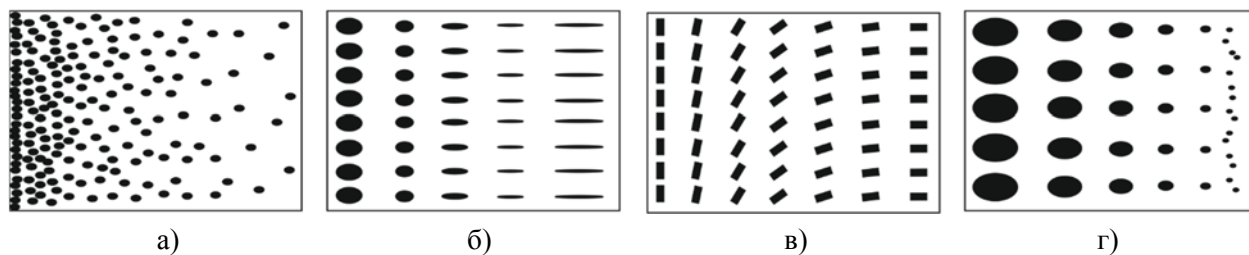
Слика 2.11 Графички приказ типова градијената [132]

У зависности од природе (структуре) градијента, ФГМ могу бити са градијентом који зависи од [133]:

- запреминског удела честица (Слика 2.12а),
- облика честица (Слика 2.12б),

в) оријентације честица (Слика 2.12в),

г) величине честица (Слика 2.12г).



Слика 2.12 ФГМ са различитим типом градијента заснованим на а) запреминском уделу честица, б) облику честица, в) оријентацији честица, г) величини честица [133]

На основу димензија, функционално градијентни материјали се деле на [113]:

- а) ФГМ филмове,
- б) ФГМ међуслојеве и
- в) масивне ФГМ.

ФГМ филмови су танке градијентне превлаке (дебљине од 10^{-6} до 10^{-4} m) које се користе за повезивање филмова и супстрата између којих постоји термомеханичко неслагање,

ФГМ међуслојеви (дебљине од 10^{-4} до 10^{-3} m) су филмови који се користе за спајање два различита материјала. До данас су развијене различите технике за производњу ФГМ филмова и међуповршина,

Масивни ФГМ имају велики попречни пресек (дебљине од 10^{-2} до 10^{-1} m) и велику запремину. Њихова потенцијална примена је изузетно значајна и они ће бити предмет изучавања и анализе у овој дисертацији.

2.3 Методе производње ФГМ

Развијен је велики број различитих метода за производњу ФГМ које омогућавају како контролу састава, тако и контролу структуре. Основна подела метода производње је формирање функционално градијентних материјала из прахова или из растопа.

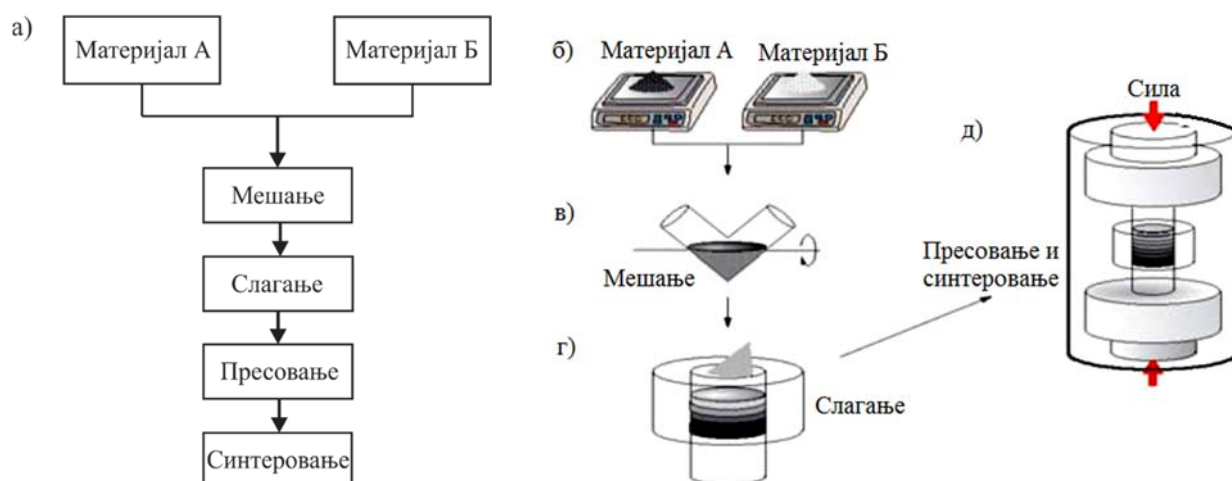
Методе засноване на металургији прахова које се најчешће примењују су пресовање слојева, формирање мешавине праха центрифугалном силом, седиментација гравитационом силом, седиментација центрифугалном силом. Методе за производњу ФГМ које као полазне сировине користе растопе, су: центрифугално ливење, центрифугална метода талога и центрифугална метода мешавине прахова. Физичко и хемијско напаравање су технике које се обично користе за процесирање ФГМ филмова са градијентном структуром састава на нанометарском нивоу.

2.3.1 Металургија прахова

Једна од најчешће коришћених техника за производњу ФГМ је металургија прахова. Овај технолошки поступак за производњу материјала подразумева производњу прахова, формирање мешавине компонената и синтеровање. Поред синтеровања може се користити и нека друга метода консолидације. Ова метода може да се примени на велики број прахова, како металних, тако и легура, керамике, са величином честица од неколико нанометара до неколико стотина микрометара. Металургија праха има више предности, као што су већа доступност сировина, једноставнија опрема за производњу, мања потрошња енергије, краће време обраде, а самим тим и мањи трошкови. Основни недостатак методе металургије прахова је тај што је врло тешко добити ФГМ са континуалном променом особина, већ се углавном добијају ФГМ са градијентом особина степенастог типа.

2.3.1.1 Пресовање слојева

Код производње ФГМ применом пресовања слојева потребно је испратити четири корака (Слика 2.13а). У првом кораку, прахови се налазе у одвојеним посудама и контролисано се врши премеравање жељене количине материјала А и материјала Б (Слика 2.13б), од односа 100% материјала А и 0% материјала Б до односа 0% материјала А и 100% материјала Б. Затим се поменута два материјала мешају помоћу “V”-миксера, као што је приказано на слици 2.13в. Након тога (Слика 2.13г), добијена мешавина прахова се слаже у калуп у одвојеним слојевима дебљине око 0,2-1mm [7]. Степенасто-градијентна структура у калупу постиже се тако што се се у претходној фази, фази мешања прахова, различито дозира однос материјал А/материјал Б. Зато се може рећи да је код ове методе главни акценат на прецизности у мерењу количина прахова, јер ће он одредити градијент особина формираног ФГМ и зато је потребно прецизно и пажљиво реализовати тај корак. После попуњавања калупа, следи фаза пресовања и синтеровања.



Слика 2.13 Фабрикација ФГМ методом металургије прахова (пресовање слојева) [134]

Пресовање може бити: хладно и топло. Код хладног пресовања, процес синтеровања следи тек после завршетка процеса сабијања и добијања компактне структуре. Са друге стране,

код топлог пресовања, синтеровање се врши симултано са фазом пресовања. Најчешћи начини синтеровања су: синтеровање у присуству течне фазе, ласерско и плазма синтеровање [113]. Веома је важно да се током синтеровања очува градијент који је формиран током фазе попуњавања калуца. Плазма синтеровање (*spark plasma sintering - SPS*) је једна од најнапреднијих метода синтеровања која омогућава добијање висококвалитетних материјала помоћу високог притиска сабијања (Слика 2.13д).

2.3.1.2 Формирање мешавине праха центрифугалном силом

Смеша прахова са континуалном (компјутерски контролисаном) променом састава се поставља на ротирајући дистрибутивни диск. Током ротирања диска, честице се убрзавају и рапосређују по унутрашњем зиду ротирајућег цилиндра. Наизменично се наносе слој праха и слој органског везива. Ова метода је ограничена на формирање цилиндричних ФГМ, али нуди велику флексибилност у погледу креирања градијента који је независтан од карактеристика прахова [113], [135].

2.3.1.3 Седиментација гравитационом силом

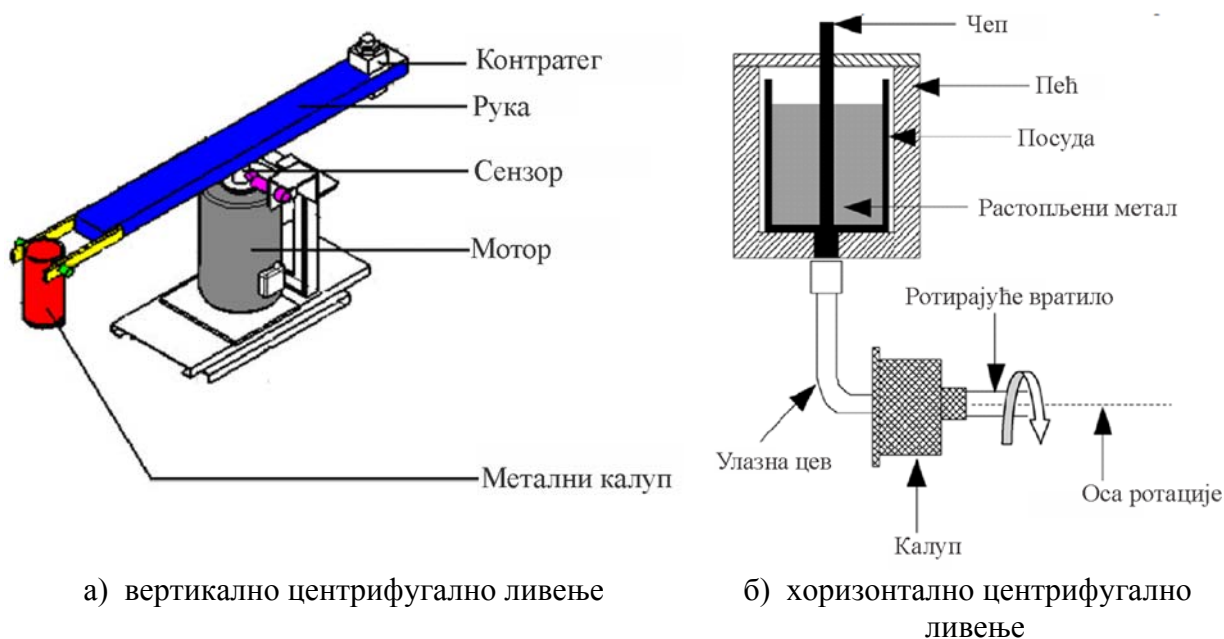
Седиментација се врши у стубном калуци кроз који се честице праха крећу различитом брзином услед разлике у густини или величини. На овај начин се формира градијент порозности или састава. Уколико се талог у стубном калуци појави без честица, биће формиран градијент са континуалним порастом или смањењем концентрације једне врсте честица. Ако је талог директно формиран од суспензије, тешко се постиже жељени градијент особина. Доњи слој талоба ће и даље имати просечни састав суспензије, затим расте удео праха, док ће врх талоба садржати само фракције праха са најнижом брзином седиментације. Ако се таложее обавља при великој испуни суспензијом, често се јављају проблеми због интеракција између честица. Још један очигледан проблем који се јавља код ове методе је ограничење у типу градијента који се може постићи односно произвести. У лабораторијским условима, овом методом су формиран цилиндрични ФГМ пречника 50mm. После финалне консолидације, дебљина ФГМ може да буде 10mm или већа. Упркос својим ограничењима, ова метода, због једноставности, има потенцијал за производњу плочастих ФГМ већих димензија [113], [135].

2.3.1.4 Седиментација центрифугалном силом

Градијентна структура може да се формира из суспензије прахова (финих честица) применом центрифугирања. С обзиром на ограничену концентрацију у суспензији, овом методом могу да се формирају само танки филмови. При седиментацији из суспензије, основни параметри који утичу на процес и омогућавају формирање градијентне структуре су особине прахова (густина, облик и величина зрна) и особине течности (густина, вискозност и способност квашења), као и контрола запреминског односа прах/течност [113].

2.3.2 Центрифугално ливење

Центрифугално ливење је једна од најефикаснијих метода за производњу ФГМ због могућности широког опсега контроле састава и микроструктуре. Код ове методе центрифугална сила се користи да се формира градијентна структура у растопљеном металу који садржи неку другу чврсту фазу (чврсте честице ојачања). Две основне врсте уређаја за центрифугално ливење су: уређај вертикалног типа, код кога калуп ротира око вертикалне осе (Слика 2.14а), и хоризонталног типа, где је ротација око хоризонталне осе (Слика 2.14б). Хоризонталне центрифугалне машине за ливење се обично користе за добијање цеви, чаура, цилиндричних или цевних одливака од ФГМ који су једноставнијег облика.



Слика 2.14 Уређаји за центрифугално ливење [136]

Производња ФГМ методом центрифугалног ливења може се поделити у две категорије у зависности од температуре при којој долази до топљења честица ојачања. Уколико је радна температура процесирања већа од температуре топљења честице ојачања, оне такође прелазе у течну фазу, а центрифугална сила се примењује у фази очвршћавања честица ојачања и матрице. Ова метода је у литератури позната под називом центрифугална “*in situ*” метода (*centrifugal in situ method - CISM*). Механизам формирања градијентне структуре у ФГМ овом методом се састоји из следећих фаза:

- а) делимично одвајање материјала А и Б у течној фази настаје услед разлике у густини,
- б) градијентна структура се формира пре фазе очвршћавања (кристализације) примарног кристала,
- в) примарни кристал у матрици се појављује у складу са локалним хемијским саставом,

г) због поменуте разлике у густини, примарни кристал се креће и градијентна структура се, на тај начин, формира [136].

Са друге стране, ако је радна температура при којој је се производи ФГМ мања од температуре топљења честица ојачања, оне остају у чврстом стању у растопљеној матрици. Ова метода се назива центрифугална метода чврстих честица (*centrifugal solid-particle method - CSPM*). Ослобађањем чепа (Слика 2.14б), растопљени метал се директно налива из пећи у центрифугални калуп. Пре ливења, центрифугални калуп је загрејан. Ротација калупа ствара центрифугалну силу која потискује метал према зиду калупа. Вредност центрифугалне силе је изражена преко G броја. G број представља однос центрифугалне силе и убрзања земљине теже, g , према једначини [136]:

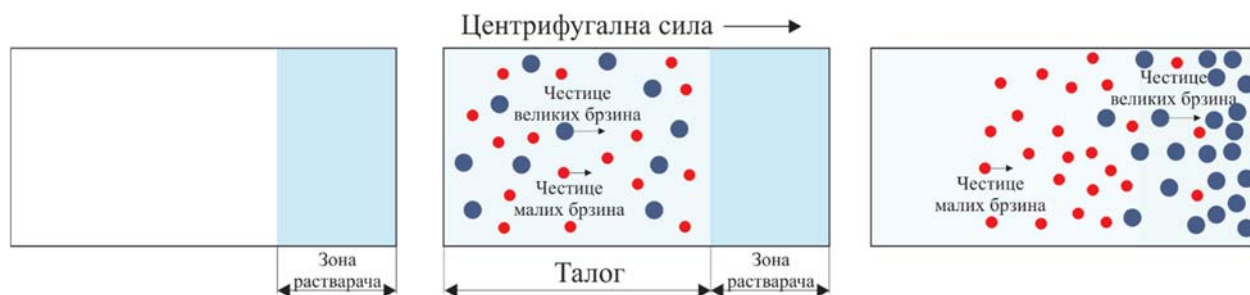
$$G = \frac{r\omega^2}{g}, \quad (2.11)$$

где је: r - полупречник калупа за ливење [m], ω - угаона брзина калупа [s^{-1}], а g - убрзање земљине теже [m/s^2].

На градијентну расподелу у ФГМ произведеном центрифугалном методом значајно утичу параметри који укључују разлику у густини између честица ојачања и истопљеног метала, тежину G , величину честица, вискозитет растопљеног метала, средњи запремински удео честица, амплитуду центрифугалне силе и време очвршћавања. Како су густина и вискозност материјалне константе, један од лако променљивих параметара којим се може контролисати и добијати жељена градијентна структура особина је величина честица. Брзина кретања честица линерано расте од центра ка зидовима калупа. На крају се пећ уклања и калуп се хлади до потпуног очвршћавања одливка. Центрифугално ливење се углавном користи за добијање цилиндричних делова [7].

2.3.3 Центрифугална метода талоба

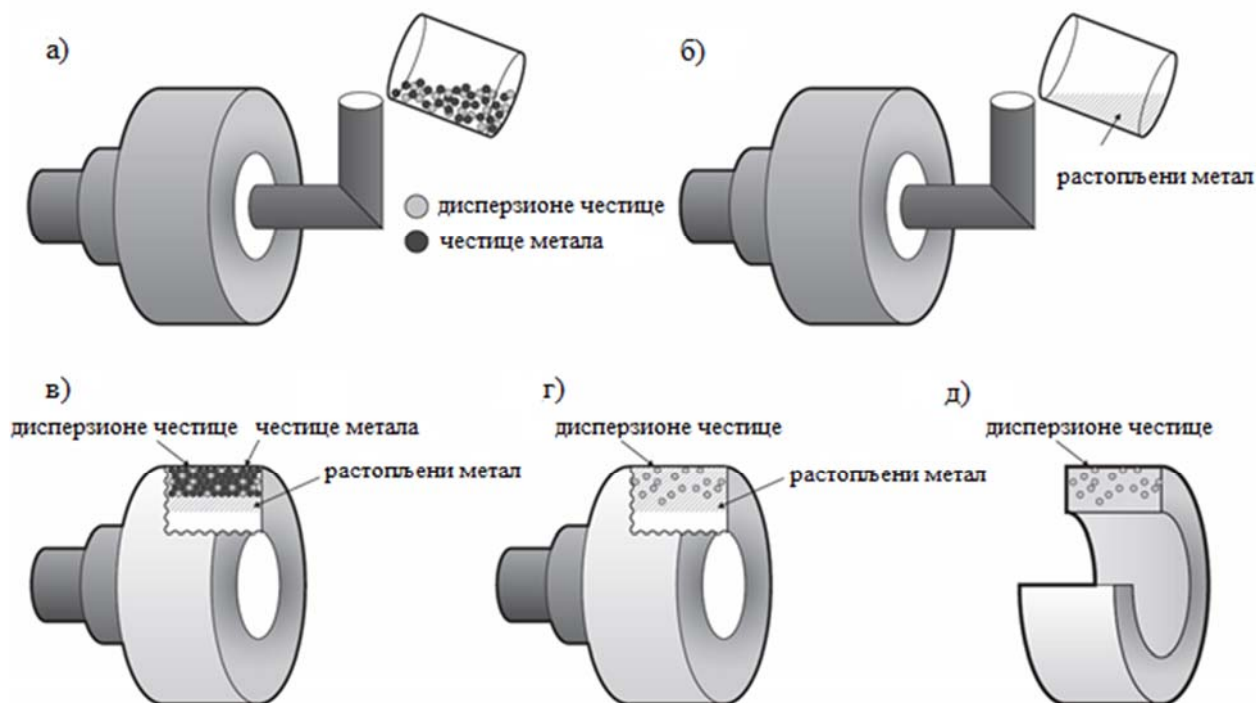
Иако металургија праха има многе предности у производњи ФГМ, још увек је тешко овом методом добити ФГМ са континуалним градијентом особина. Комбинацијом металургије праха и центрифугалне методе талоба, може се превазићи овај недостатак. Код ове методе се користи два типа чврстих честица у талобању. Један тип честица са великим брзинама кретања и већом густином и/или већом величином честица и други тип са мањом брзином, мањом густином и мањом величином честица (Слика 2.15). Градијент честица може се контролисати на основу различите брзине кретања између два типа честица. После завршетка процеса седиментације, течност из левог дела посуде се уклања и добија се тело са континуалним градијентом. Добијено тело се затим синтерује неком од метода за синтеровање и као крајњи резултат се добија ФГМ са континуалним градијентом особина [134].



Слика 2.15 Шематски приказ центрифугалне методе талога [134]

2.3.4 Центрифугална метода мешавине прахова

Ова метода представља унапређену варијанту центрифугалне методе чврстих честица (*CSPM*), која је раније описана у поглављу 2.3.2. Основна разлика је што је поменутом методом тешко добити ФГМ који садржи нано-честице. На слици 2.16 приказана је центрифугална метода мешавине прахова за производњу ФГМ. На почетку, узима се мешавина честица метала А и дисперзиона честица Б и убацују се у центрифугални калуп, као што је приказано на слици 2.16а. У следећем кораку, растопљени метал А се налива у центрифугални калуп са мешавином прахова А+Б (Слика 2.16б). Због центрифугалне силе, растопљени метал А, продире у простор између честица, као што је приказано на слици 2.16в. Истовремено, због врелине растопљеног метала, прах метала А се топи (Слика 2.16г). У последњем кораку, добија се ФГМ прстен са распршеним честицама Б, које се простиру на површини, као што је приказано на слици 2.16д [134].



Слика 2.16 Шематски приказ центрифугалне методе мешавине прахова [137]

2.3.5 Техника напаравања

Напаравање је процес у коме се материјали у фази паре кондезују да би формирали чврст материјал. Овај процес се обично изводи да би се формирале превлаке које ће побољшати својства супстрата, као што су механичке, електричне, термичке особине и сл. У основи, метода напаравања се класификује у две групе:

- а) хемијско напаравање,
- б) физичко напаравање.

Како би се произвела жељена превлака (филм), користећи процес хемијског напаравања, супстрат је изложен дејству испарљивих прекурсора (једињење које учествује у хемијској реакцији која производи друго једињење), да би се омогућила реакција и разлагања на површини супстрата [138]. Ове методе су интензивне у погледу ослобађања енергије, а отровни гас се ослобађа као споредни производ. Одлична микроструктура може се произвести коришћењем поступака напаравања, али се може добити само танак површински слој. Предност ове методе подразумева да се могу производити веома танки слојеви и да се може лако контролисати градијент особина једноставним мењањем састава гасне фазе. С друге стране, мора се обратити пажња на процес термичког третирања како би се избегла дифузија између подлоге (супстрата) и танке превлаке (филма) [113].

2.4 Примена ФГМ

ФГМ имају велики потенцијал за примену у условима експлоатације који захтевају добру отпорност на повишену температуру и топлотне ударе, добру топлотну проводљивост, отпорност на оксидацију и корозију, трење, хабање и слично.



Слика 2.17 Различите области примене ФГМ

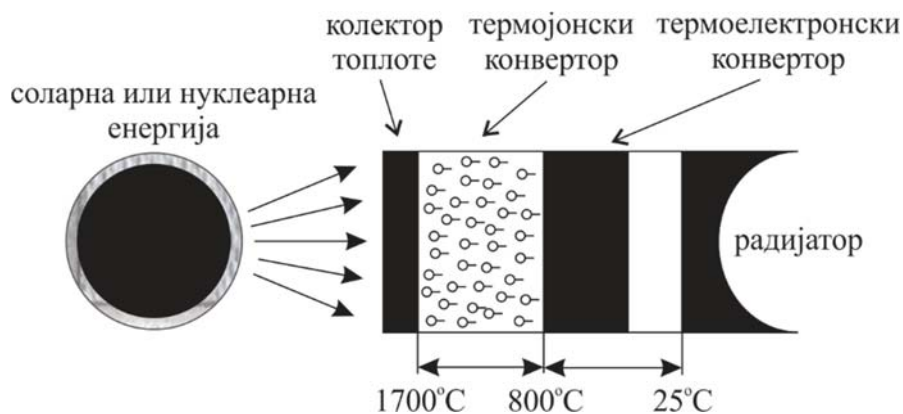
Концепт ФГМ је своју прву примену нашао током пројекта израде свемирске летелице у Националној свемирској лабораторији у Јапану, у циљу елиминисања напона на интерфејсу

код плоча које су се користиле као облоге на свемирској летелици [139]. Касније, примена ФГМ је проширена на многе друге гране индустрије и области, као што су: енергетски и нуклеарни сектор, индустрија електронике, медицина, стоматологија, војна, аутомобилска индустрија и разне друге гране индустрије (Слика 2.17).

Индустрија свемирских летелица (ФГМ као термичке баријере). Иницијална идеја за концепт и пројекат развоја ФГМ је била потреба да се развије и произведе материјал који ће моћи да се користи као термички штит за космичке бродове. ФГМ термички штитови су у експлоатацији изложени екстремним условима у којима се температура мења неколико стотина, а врло често и до 1000 - 2000°C. Термичка баријера се конструише тако што се спољашња површина, која је изложена екстремним условима, формира од термоотпорних керамичких материјала који обезбеђују адекватну термичку стабилност, док се са унутрашње, нискотемпературске стране баријере налази метал, чиме се постиже велика термичка проводљивост и механичка чврстоћа. Кроз термичку баријеру састав се градијентно варира од керамике до метала, при чему се обезбеђивањем оптималне дистрибуције састава, микроструктуре и/или порозности ниско и високо температурске површине, обезбеђује и ефикасна релаксација термичког напрезања [139].

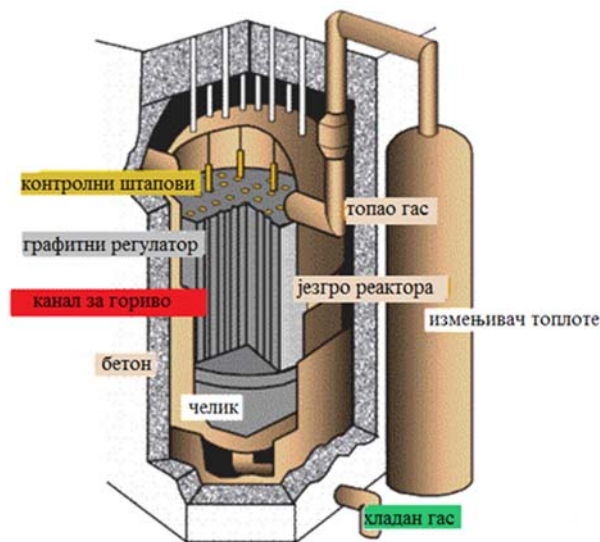
Индустрија електронике (ФГ пиезоелектричне керамике). Пиезоелектрични матријали имају способност да директно преводе електричну енергију у механичко кретање и обрнуто. Директни и инверзни пиезоелектрични ефекат искоришћен је за производњу електричних сензора који дају сигнал за стартовање неког механичког кретања. Пиезоелектричне компоненте су технолошки значајне компоненте, нарочито у микро електро-механичким системима. Мономорфни и биморфни покретачи су типови пиезоелектричних покретача који користе могућност савијања ових материјала да произведу велики померај. Конвенционални мономорфни и биморфни покретачи састоје се од пиезоелектричних плоча и металног носача спојени неким органским везивом, најчешће епокси смолом. Употреба епокси смоле за повезивање слојева у пиезокерамици чини интерфејс крхким и склоним замору, због чега контакт слаби након дужег периода употребе. Овакве пиезокомпоненте имају неједнаку дистрибуцију напрезања, нарочито на граници споја керамике и метала, што доводи до пуцања на интерфејсу, а тиме и до скраћеног и ограниченог века трајања компоненте. Концепт ФГМ показао се као добро решење за поменути проблем. Пиезоелектричне компоненте са функционално градијентном микроструктуром су релативно нове компоненте дизајниране у циљу превазилажења структурних дефеката који се јављају на интерфејсу код конвенционалних, при чему задржавају велику способност савијања, потребну за обављање примарне функције. Предности савитљивих ФГМ прекидача у односу на конвенционалне су: мања цена производње (због једноставнијег начина производње, најчешће металургијом прахова), решен је проблем раслојавања који је постојао код конвенционалних компоненти услед спајања смолом, градијентна промена пиезоелектричних особина у правцу дебљине смањује механичко напрезање унутар прекидача. На овај начин продужен је век трајања и поузданост ових компоненти [113].

Енергетски и нуклеарни сектор (ФГМ за конверзију енергије). ФГМ налазе своју примену и код система за конверзију сунчеве или нуклеарне енергије у топлотну енергију. На слици 2.18 приказан је пример система за конверзију енергије. Различити конвертори се користе за различите интервале температуре: термојонски елементи се користе на високим температурама (око 1700°C), термоелектронски елементи на око 800°C и радијатори на око 25°C [139].



Слика 2.18 ФГМ конвертор енергије [139]

Комбинација способности керамике да апсорбује енергију са једне стране и добре жилавости метала са друге стране искоришћења је код унутрашњег зида нуклеарног реактора који се производи од керамика/метал ФГМ, као што је приказано на слици 2.19 [7].



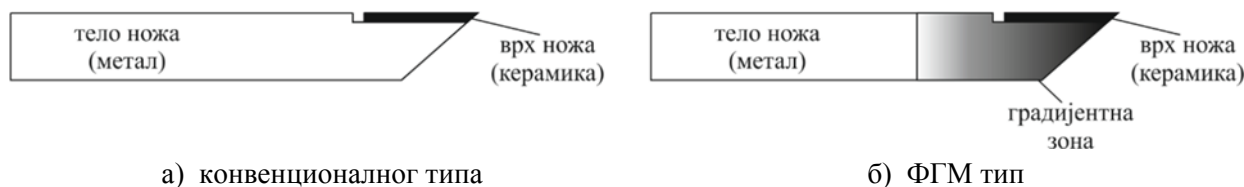
Слика 2.19 Нуклеарни реактор [7]

Медицина. Концепт ФГМ се користе и у медицинске сврхе за производњу биоматеријала, као на пример импланта за репарацију меких ткива. Основна карактеристика меких биолошких ткива је мали модул компресије при малим напрезањима. Мали модул компресије биолошких ткива је могуће постићи употребом органских или неорганских ФГМ структура ткива. На пример, за реконструкцију зглобног лигамента користи се

функционално градијентни биоматеријал формиран од умрежене протеинске матрице и кристалног калцијум-карбоната [113].

Стоматологија. Структуру живих ткива, као што су људска кост или зуб, карактерише градијентна структура материјала као продукта природе. Са друге стране, приликом оштећења поменутих ткива, јавља се потреба за вештачким материјалима који могу на адекватан начин да замене оно што је продукт природе. На тај начин, концепт градијентне структуре користи се и у стоматологији, где протетски имплантати представљају ФГМ сачињен од колаген хидроксиапатита и титанијума [140]. Поменути ФГМ се такође користи и у биомедицинске сврхе код израде ортопедских имплантата.

Резни алати. Резни алати су такође пример употребе ФГМ, као што је приказано на слици 2.20: а) конвенционални тип, б) ФГМ тип. За разлику од конвенционалног типа, где често долази до појаве прслине на споју керамике и метала, код ФГМ дизајна прелазна зона градијентне структуре омогућава релаксацију напона. ФГМ се користе код резних алата јер побољшавају термичку чврстоћу ножа у зони резања [7].



Слика 2.20 Нож за струг [7]

Остале гране индустрије. Концепт ФГМ налази своју примену и у многим другим гранама индустрије. У војној индустрији ФГМ се користе за израду делова оклопних возила (термоотпорна врата), панцира (материјали градијентне структуре отпорни на пробијање) и слично. У аутомобилској индустрији примену налазе код кочионих система (кочиони дискови), где су потребни ФГМ са особинама као што су отпорност на високе радне температуре, трење, хабање, добра топлотна проводљивост и слично. Такође, користе се код издувних и погонских система, где су потребни материјали повећане отпорности на високе температуре, топлотне ударе, оксидацију и корозију. Затим код компоненти система за пренос енергије (вентили), од којих се захтева да буду мале специфичне тежине, добре отпорности на високе температуре и отпорности на хабање и корозију.

Имајући у виду да је ово релативно нов концепт материјала, још увек недовољно истражен у погледу могућности и примене, употреба ФГМ је још увек ограничена. Даља истраживања материјала са функционално градијентном структуром, побољшање њихових особина и смањење цене производње, омогућиће знатно ширу примену и комерцијалну оправданост.

3 ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ НЕПРЕКИДНИХ СРЕДИНА. КОНСТИТУТИВНЕ РЕЛАЦИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ И ТЕРМОЕЛАСТИЧНОСТИ. ВАРИЈАЦИОНЕ МЕТОДЕ

Механика непрекидних средина или механика континуума је део механике који изучава опште проблеме кретања и равнотеже континуално распоређеног скупа материјалних тачака (континуума). При описивању континуума у механици непрекидних средина уводи се претпоставка о непрекидно испуњеном делу простора материјом, тј. не улази се у молекулални састав материје. На основу претходно поменутог, механичке величине које описују стања равнотеже и кретања су непрекидне функције положаја тачака и времена. Ове функције су диференцијабилне у односу на координате, па су изводи, уопштено посматрано, континуални. Поред претпоставке о непрекидности, битне за механику континуума, значајне су још две претпоставке о природи материјала, а то су хомогеност (нехомогеност) и изотропност (анизотропност). Под хомогеним материјалом подразумева се такав материјал који у односу на неку његову особину поседује једнаке особине у свим тачкама, док се материјал код кога овај услов није задовољен сматра нехомогеним. Са друге стране, у зависности од тога да ли су особине исте у свим правцима или не, материјал је изотропан или анизотропан.

Према [141] механика континуума се може поделити на три дела:

1. Општи принципи применљиви на све врсте непрекидних средина (закон конзервације масе, закон о одржању количине кретања, закон о одржању момента количине кретања, закон о одржању енергије итд.),
2. Конститутивне једначине,
3. Специјалне теорије разних идеалних материјала које су засноване на општим принципима и конститутивним једначинама тог материјала (теорија еластичности, теорија пластичности, итд).

У механици непрекидних средина разликујемо статичко поље променљивих, које представља напон, и кинематичке променљиве, које представљају померања и деформације.

3.1 Тензор напона

Напон представља меру унутрашњег дејства између појединих материјалних тачака и као такав представља основу механике непрекидних средина. Тензор напона у Декартовом координатном систему може се записати у облику:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j, \quad (3.1)$$

где су:

σ_{ij} -компоненте тензора напона,

\mathbf{i}_i и \mathbf{i}_j - јединични вектори Декартовог (*Descartes*) правоуглог координатног система,

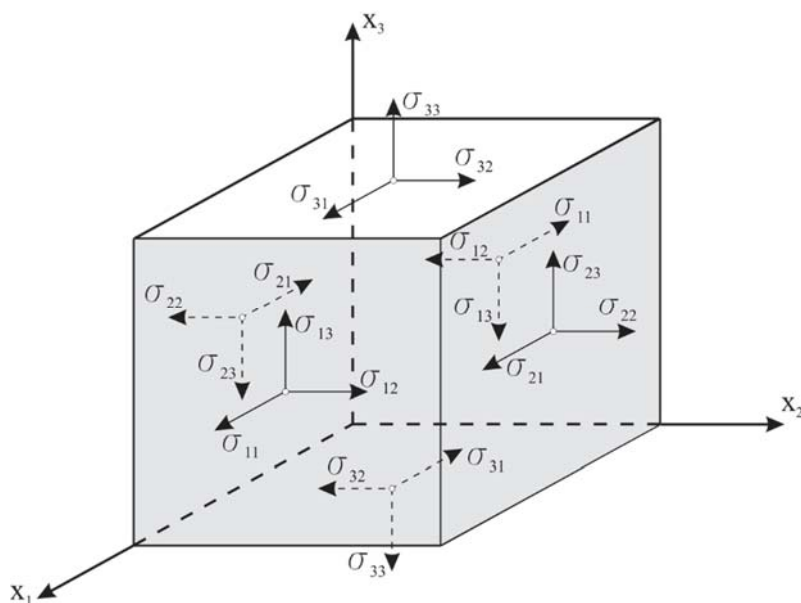
$\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$ - општи тензорски или дијадски производ

Поновљени индекси према Ајнштајновој (*Einstein*) конвенцији означавају сабирање.

У матричном облику тензор напона се може записати као:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Компоненте на главној дијагонали тензора напона, код којих су оба индекса међусобно једнака, представљају нормалне напоне, док су компоненте са различитим индексима смицајни напони. На слици 3.1 дат је приказ напона на произвољном издвојеном сегменту запремине облика паралелепипеда.



Слика 3.1 Напони на инфинитезималном делу запремине облика паралелепипеда

3.2 Тензор деформације

Под деформацијом се подразумева механичка величина којом се дефинише стање деформисаности материјала (непрекидне средине) [142]. Основна подела деформација је на велике и мале деформације. Мале деформације су основа линеарне еластичности, док се велике деформације користе као мера у нелинеарној еластичности, еласто-пластичности, пластичности, вискоеластичности, итд. Тензор деформације у Декартовом координатном систему може се записати у облику:

$$\mathbf{E} = e_{ij} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j. \quad (3.3)$$

По својој природи, разликују се две врсте деформација: нормалне (линијске) и смицајне (угаоне). Скуп свих нормалних деформација у некој тачки даје слику издужења (скраћења) свих линијских елемената у посматраној тачки. Са друге стране, смицајна деформација је

промена угла између два почетно управна правца, па према томе, скуп свих смицајних деформација у некој тачки материјала карактерише кривљење, односно промену облика материјала.

Тензор деформације може да се прикаже помоћу матрице 3x3 на следећи начин:

$$\mathbf{E} = \{e_{ij}\} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

У литератури се, поред приказане тензорске нотације e_{ij} , често користе ткз. инжењерске ознаке за смицајне деформације γ_{ij} облика: $\gamma_{12} = 2e_{12}$, $\gamma_{13} = 2e_{13}$, $\gamma_{23} = 2e_{23}$.

Како ће у оквиру ове дисертације предмет анализе бити нелинеарна статичка и линеарна динамичка анализа, укратко ће бити описане основне релације које дефинишу Гринов и вон Карманов тензор деформације, као и тензор малих деформација.

3.2.1 Гринов тензор деформације

Детаљно извођење Гриновог тензора деформације описано је у [141, 143, 144], па се, из тог разлога, овде неће вршити детаљно објашњавање поступка, већ ће се само укратко представити облик поменутог тензора и објаснити свођење Гриновог тензора на вон Карманов тензор деформације и тензор малих деформација, значајаних за макромеханичку анализу плоча од ФГМ која је предмет ове дисертације.

Гринов тензор деформације у функцији градијента вектора померања може се изразити као:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (3.5)$$

где су:

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор померања,

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ - Декартове координате.

У развијеном облику Гринов тензор деформације је:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right), \\ E_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right), \\ E_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
E_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\
E_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \\
E_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right).
\end{aligned}$$

Ако су компоненте градијента померања $\partial u_i / \partial x_j$ знатно мање од јединице, занемаривањем чланова вишег реда, Гринов тензор деформације дат у (3.5), своди се на тензор малих деформација, при чему је $E_{ij} = \varepsilon_{ij}$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.7)$$

или са компонентама:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right).
\end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2.2 Вон Карманов тензор деформације

За мале деформације, али умерене ротације $\partial u_3 / \partial x_1$, $\partial u_3 / \partial x_2$ трансверзалне нормале у односу на x_1 осу, односно x_2 осу (ротације од 10 - 15°), чланови вишег реда који се не смеју занемарити су: $(\partial u_3 / \partial x_1)^2$, $(\partial u_3 / \partial x_2)^2$, $(\partial u_3 / \partial x_1)(\partial u_3 / \partial x_2)$. Ови чланови треба да буду укључени у релације које дају везу померања и деформације. Занемарујући све друге чланове вишег реда, Гринов тензор деформације се своди на Вон Карманов (*von Kármán*) тензор деформације:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right).
\end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3 Конститутивне релације еластичности и термоеластичности

Веза између напона и деформација у зони еластичности, успостављена је још у 17. веку када је Хук (*Hook*), вршећи тестове материјала на истезање до одређене тачке, која је позната под називом граница пропорционалности, успоставио функционалну зависност између напона и деформација изотропног материјала у облику $\sigma = E\varepsilon$, где је E Јангов (*Young*) модул еластичности изотропног материјала. Касније је извршена генерализација овог закона за различите класе симетрије материјала. Генерализовани Хуков закон представља везу између компонената тензора напона и тензора деформације у облику:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (3.10)$$

где су:

C_{ijkl} - тензор еластичности четвртог реда,

σ_{ij} - тензор напона другог реда,

ε_{kl} - тензор деформације другог реда.

Ова једначина одговара еластичном материјалу и представља генерализовани облик Хуковог закона и чини основу читаве теорије еластичности. Узимајући у обзир симетричност тензора напона $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, односно тензора деформација $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$, као и познато правило о сажимању индекса у складу са Војтовом (*Voight*) конвенцијом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{11} & \leftarrow 6 & \sigma_{12} & \rightarrow 5 & \sigma_{13} \\ & & 2 & \sigma_{22} & & 4 & \sigma_{23} \\ & & & & 3 & & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{11} & \leftarrow 6 & 2\varepsilon_{12} & \rightarrow 5 & 2\varepsilon_{13} \\ & & 2 & \varepsilon_{22} & & 4 & 2\varepsilon_{23} \\ & & & & 3 & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1, & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1, \\ \sigma_{22} &= \sigma_2, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2, \\ \sigma_{33} &= \sigma_3, & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3, \\ \sigma_{23} &= \sigma_4, & 2\varepsilon_{23} &= \varepsilon_4, \\ \sigma_{13} &= \sigma_5, & 2\varepsilon_{13} &= \varepsilon_5, \\ \sigma_{12} &= \sigma_6, & 2\varepsilon_{12} &= \varepsilon_6, \end{aligned} \quad (3.11)$$

добија се генерализовани Хуков закон у сажетој нотацији као:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.12)$$

Према [144] да би тензор еластичности имао свој физички смисао мора да задовољи следеће услове:

- тензор треба да буде позитивно дефинитан,
- дијагонални елементи матрице тензора треба да буду позитивни,

- матрица тензора еластичности треба да буде несингуларна, односно да је детерминанта матрице тензора еластичности различита од нуле, тј. $\det(\mathbf{C}) > 0$,
- сви квадратни минори који садрже дијагоналне елементе треба да имају позитивну детерминанту.

Инверзијом генерализованог Хуковог закона добија се:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (3.13)$$

где је:

S_{ijkl} - тензор попустљивости четвртог реда.

Тензор попустљивости такође мора да буде позитивно дефинитан и симетричан.

Инверзија генерализованог Хуковог закона такође се може записати у сажетој нотацији као:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.14)$$

Генерализован Хуков закон проширен је 1838. године од стране Духмела (*Duhamel*) и 1888. године од Нојмана (*Neumann*) укључивањем ефеката температуре [145]. Овај закон се заснива на претпоставци суперпозиције деформација, тј. да се укупна деформација ε_j у посматраној тачки чврстог тела, изложеног термомеханичком оптерећењу, састоји од деформације услед механичких оптерећења, ε_j^σ и деформације узроковане слободним термичким ширењем, ε_j^T :

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^\sigma + \varepsilon_j^T. \quad (3.15)$$

Када је материјал изложен промени температуре, деформације, ε_j^T које настају услед слободног термичког ширења пропорционалне су промени температуре $\Delta T = T - T_{ref}$:

$$\varepsilon_j^T = \alpha_j \Delta T = \alpha_j (T - T_{ref}), \quad (3.16)$$

при чему је:

T - температура тела након промене температуре,

T_{ref} - референтна температура, тј. температура при којој не долази до деформације,

α_j - коефицијент термичког ширења.

Уопштено посматрано, температурно поље је функција положаја тачке у континууму, тј. $T = T(x_1, x_2, x_3)$ и $T_{ref} = T_{ref}(x_1, x_2, x_3)$. Ова особина је нарочито значајна имајући у виду да је предмет ове дисертације анализа плоча од ФГМ, тј. да се особине материјала градијентно мењају у одређеном правцу, а самим тим и поље температуре ће директно зависити од положаја материјалне тачке. Када је чврсто тело изложено нехомогеном температурном

пољу или се коефицијент термичког ширења, по одређеној функционалној зависности, мења дуж неког правца у континууму, долази до различитог термичког ширења суседних честица континуума. Поље температуре, такође, представља и функцију времена, тј. може се мењати у току времена, али је уобичајено да се узима да је референтна температура, T_{ref} константна у времену.

На основу (3.14) релација између деформација, које настају услед механичких оптерећења, и напона је:

$$\varepsilon_i^\sigma = S_{ij} \sigma_j, \quad (3.17)$$

Заменом (3.15) у (3.17), добија се:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j + \varepsilon_i^T, \quad (3.18)$$

Коришћењем везе $C_{ij} = S_{ij}^{-1}$, из једначине (3.18), а на основу генерализованог Хуковог закона датог у (3.12) и Духмеловог и Нојмановог проширења, добија се основна конститутивна релација термоеластичности у сажетој нотацији:

$$\sigma_i = C_{ij} (\varepsilon_j - \varepsilon_j^T), \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.19)$$

Утицај температуре игра веома важну улогу у проучавању композитних материјала из више разлога. Разматрање понашања композитних материјала на повишеним температурама је веома значајано, јер превасходни циљ многих композитних материјала је да се комбиновањем особина конституената добије материјал који показује добру термичку отпорност. У таквим случајевима, циљ је изабрати такве конституенте, који задржавају своје особине и на повишеним температурама. Такође, композитни материјали врло често имају значајне заостале термичке напоне из процеса фабрикации.

3.3.1 Конститутивне релације термоеластичности у зависности од класе симетрије

У макромеханичкој анализи композитних материјала, па самим тим и ФГМ као напредних композитних материјала, класе симетрије имају велики утицај. Број независних коефицијената у конститутивној матрици може утицати на могућност налажења решења. Према [145], у зависности од типова материјалне симетрије, разликују се материјали са 8 типова симетрије, од којих у инжењерству највећи значај имају следеће класе симетрије:

1. анизотропни материјали са триклиничким типом симетрије,
2. анизотропни материјали са моноклиничким типом симетрије,
3. ортотропни материјали,
4. трансверзално-изотропни материјали,
5. изотропни материјали.

Узимајући у обзир симетричност тензора еластичности, конститутивна релација термоеластичности за потпуно анизотропан материјал са триклиничким типом симетрије је:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} (T - T_{ref}), \quad (3.20)$$

са 21 независним коефицијентом тензора еластичности и 6 независних коефицијената термичког ширења.

Ако материјал поседује раван еластичне симетрије, која је рецимо одређена осама x_1 и x_2 , а оса x_3 је нормална на раван симетрије, број независних коефицијената тензора еластичности се своди са 21 на 13, а број независних коефицијената термичког ширења са 6 на 4. У том случају конститутивна релација термоеластичности, у сажетој нотацији, добија облик:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} (T - T_{ref}). \quad (3.21)$$

Облик (3.21) одговара анизотропном материјалу са моноклиничким типом симетрије, односно материјалу који поседује једну раван материјалне симетрије.

Ако постоји још једна раван симетрије, рецимо одређена осама x_2 и x_3 , број независних коефицијената тензора еластичности се додатно смањује на 9, односно број коефицијената термичког ширења се смањује са 4 на 3, чиме се добија конститутивна релација термоеластичности ортотропне групе материјала:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (T - T_{ref}). \quad (3.22)$$

Специјално, ако се, код ортотропне групе материјала, раван $x_1 - x_2$ дефинише тако да свака раван управна на њу буде раван еластичне симетрије добија се трансверзално изотропни материјал, као специјалан случај ортотропне групе материјала. То практично значи да раван симетрије садржи осу x_3 , која у овом случају представља осу трансверзалне изотропије. Конститутивна релација термоеластичности овако дефинисаног материјала садржи 5 независних коефицијената тензора еластичности и 2 независна коефицијента термичког ширења и има облик:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} (T - T_{ref}) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Слично томе, ако су осе x_1 и x_2 додатне осе трансверзалне изотропије, добио би се материјал са бесконачно много равни симетрије који се назива изотропним материјалом. Изотропни материјал садржи само 2 независна коефицијента (C_{11} и C_{12}) у тензору еластичности, 1 независан коефицијент термичког ширења и представља најједноставнију групу материјала чија је конститутивна релација термоеластичности облика:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} (T - T_{ref}) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

3.3.2 Конститутивни еластични тензор изражен преко инжењерских константи

Елементе конститутивног еластичног тензора могуће је према [144] изразити на два начина:

1. преко инжењерских константи
2. преко константи еластичности дефинисаним у радовима Спенсера (*Spenser*) [146, 147].

Изражавање елемената конститутивног еластичног тензора преко инжењерских константи се више користи, нарочито у инжењерској пракси. Други начин изражавања елемената

конститутивне матрице се користи из разлога његове инваријатности у односу на ротацију координатног система, па није потребно користити трансформације тензора еластичности, већ ће он имати исти облик у било ком координатном систему [148, 149]. Имајући у виду поменуту практичну примену у инжењертву, као и то да су предмет анализе у овој дисертацији ФГМ, овде ће бити изложено изражавање елемената еластичног тензора преко инжењерских константи. Како је сам процес одређивања константи врло комплексан и захтева експерименталне статичке и динамичке методе, неће се улазити детаљно у опис процедура добијања, већ ће бити приказани облици конститутивног еластичног тензора у зависности од појединих класа симетрије наведених у претходном поглављу. При изражавању коефицијената тензора еластичности преко инжењерских константи, уобичајено је у литератури да се прво изрази тензор попустљивости преко материјалних константи, а затим се применом правила линеарне алгебре изводе и коефицијенте конститутивног тензора еластичности. Као што је раније наведено, у зависности од класа симетрије материјала, неопходно је одредити различит број независних чланова у тензору попустљивости, односно конститутивном тензору еластичности. Тако, за анизотропне материјале са триклиничким типом симетрије, као најопштији облик симетрије, потребно је одредити 21 независан коефицијент, да би се потпуно дефинисао тензор попустљивости:

$$S = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{1,13}}{G_{13}} & \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\eta_{2,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{2,13}}{G_{13}} & \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} \\ \frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{3,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{3,13}}{G_{13}} & \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}} \\ \hline \frac{\eta_{23,1}}{E_1} & \frac{\eta_{23,2}}{E_2} & \frac{\eta_{23,3}}{E_3} & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\mu_{23,13}}{G_{13}} & \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{13,1}}{E_1} & \frac{\eta_{13,2}}{E_2} & \frac{\eta_{13,3}}{E_3} & \frac{\mu_{13,23}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\mu_{13,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{12,1}}{E_1} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} & \frac{\eta_{12,3}}{E_3} & \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} & \frac{\mu_{12,13}}{G_{13}} & \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right], \quad (3.25)$$

где су:

E_1, E_2, E_3 - модули еластичности у правцу оса x_1, x_2 и x_3 ,

G_{12}, G_{13}, G_{23} - модули смицања у равнима x_1x_2, x_1x_3 и x_2x_3 ,

ν_{12} - Поасонов коефицијент који одређује деформацију у правцу осе x_1 коју изазива нормални напон у правцу осе x_2 ,

$\nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ - Поасонов коефицијенти који се дефинишу аналогно коефицијенту ν_{12}

$\eta_{1,23}$ - коефицијент спрезања нормалне и смицајне деформације који одређује деформацију у правцу осе x_1 коју изазива смицајни напон у равни x_2x_3 ,

$\eta_{1,12}, \eta_{1,13}, \eta_{2,12}, \eta_{2,13}, \eta_{2,23}, \eta_{3,12}, \eta_{3,13}, \eta_{3,23}$ - коефицијенти спрезања нормалне и смицајне деформације који се дефинишу аналогно $\eta_{1,23}$,

$\eta_{12,3}$ - коефицијент спрезања смицајне и нормалне деформације који одређује смицајну деформацију у равни x_1x_2 коју изазива нормални напон у правцу осе x_3 ,

$\eta_{12,1}, \eta_{12,2}, \eta_{13,1}, \eta_{13,2}, \eta_{13,3}, \eta_{23,1}, \eta_{23,2}, \eta_{23,3}$ - коефицијент спрезања смицајне и нормалне деформације који се дефинишу аналогно $\eta_{12,3}$,

$\mu_{12,23}$ - коефицијент спрезања смицајних деформација који дефинише смицајну деформацију у равни x_1x_2 коју изазива смицајни напон у равни x_2x_3 ,

$\mu_{13,13}, \mu_{13,12}, \mu_{12,13}, \mu_{23,13}, \mu_{23,12}$ - коефицијенти спрезања смицајних деформација који се дефинишу аналогно $\mu_{12,23}$.

Код ортотропне класе симетрије, потребно је дефинисати 9 различитих коефицијената, тако да тензор попустљивости има облик:

$$S = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right], \quad (3.26)$$

при чему важи једнакост релација:

$$\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2, \quad \nu_{13}E_1 = \nu_{31}E_3, \quad \nu_{23}E_2 = \nu_{32}E_3. \quad (3.27)$$

Тензор еластичности добија се инверзијом тензора попустљивости и преко инжењерских константи се може писати као:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{array} \right], \quad (3.28)$$

при чему је:

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}. \quad (3.29)$$

Код изотропне класе симетрије, као најједноставнијег материјалног модела, потребно је дефинисати 2 различита коефицијента, тако да тензор попустљивости има облик:

$$S = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{array} \right]. \quad (3.30)$$

Инверзијом добија се тензор еластичности облика:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right]. \quad (3.31)$$

Као што се може видети, модул еластичности E , модул смицања G и Поасонов коефицијент μ , немају више индексе, који дефинишу материјалне карактеристике у појединим правцим из разлога изотропности материјала.

3.4 Варијационе методе

У теорији еластичности, поред директног приступа у анализи континуалних система, могуће је користити и алтернативни прилаз као што је варијациони прилаз. Овај прилаз представља изузетно значајан алат за анализу континуалних система. Основни разлог ефикасности овог прилаза лежи у томе што неки контурни услови (природни контурни услови) при варијационом приступу могу бити узети у обзир у имплицитном облику. Једноставност овог принципа лежи у чињеници да се у њима разматрају скаларне величине (енергија, потенцијали, итд), затим да неке величине које морају да буду укључене у директној нотацији, не морају да се разматрају у варијационој формулацији (унутрашње силе које не врше рад) и да се шира класа може применити за апроксимативна решења. На основу свега наведеног, варијациони принципи се најчешће користе при примени нумеричких метода у области линеарне еластичности. Најчешћи варијациони принципи који се користе у варијационој анализи композитних ламината су принцип виртуалног рада, из којег произилазе Принцип минимума потенцијалне енергије, Хамилтонов принцип итд. Како су варијациони принципи погодни за аналитичку и нумеричку анализу композитних материјала и како ће бити коришћени у извођену основних једначина равнотеже и кретања у овој дисертацији, укратко ће бити описане основне законитости поменутих принципа.

3.4.1 Принцип виртуалног рада

Као што је претходно наглашено варијационе методе имају велику улогу у механици континуума. Посебно је значајан принцип виртуалног рада који представља један од основних принципа механике континуума. Виртуални рад је фиктивног карактера израчунат за скуп допустивих сила и напона, за које се претпоставља да остају константни у току рада на скупу кинематички допустивих померања. На основу ове дефиниције [141, 148, 150] закључује се да напони и померања не морају да буду стварни напони и померања, односно да не мора да одговарају напонима и померањима реалног физичког тела. Такви напони и померања су независни за разлику од напона и померања при стварном кретању на основу којих се одређују тензори деформација, који су конститутивним релацијама повезани са тензором напона.

Принцип виртуалног рада, који је познат и под именом принцип виртуалних померања, у механици система материјалних тачака и крутих тела представља алтернативни приступ одређивања једначина кретања, може у исту сврху да се употреби и у механици деформабилних тела. Под појмом виртуалних померања подразумевају се могућа бесконачно мала померања која су непрекидне и диференцијалбилне функције координата тачака тела и која су једнака нули у свим оним тачкама контуре у којима су задати контурни услови по померањима.

Нека се тело налази у статичкој равнотежи под дејством запреминских сила $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3\} = \{f_i\}$ и површинских сила $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{t_i\}$. Нека се контурна површ S састоји из два дела и то дела S_σ , на коме су прописане површинске силе \mathbf{t} , и дела S_u , на коме су прописана померања \mathbf{u} . Очигледно је $S_\sigma \cup S_u = S$. Нека постоји поље померања $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\} = \{u_i\}$, које задовољава једначине равнотеже, које могу да се напишу у следећем облику:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0, \quad (3.32)$$

где важи конвенција о сабирању по поновљеним индексима и контурни услови претходно описани.

Једначине кретања су облика:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3.33)$$

и представљају први Кошијев закон кретања.

Могуће је посматрати класу произвољних померања $u_i + \delta u_i$, која су у сагласности са ограничењима којима је тело подвргнуто. Дакле, δu_i мора да је једнако нули на делу површине S_u , а произвољно на делу површине S_σ , троструко диференцијабилно и таквог

реда величине да материјал остане еластичан. Таква произвољна померања зову се виртуална померања, као што је већ наглашено. Претпоставимо да статичка равнотежа остаје и када се померању дода δu_i и израчунајмо виртуални рад остварен запреминским и површинским силама (рад спољашњих сила δA^s). Тај рад може да се представи следећим изразом:

$$\delta A^s = \int_v \rho f_i \delta u_i dv + \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i ds, \quad (3.34)$$

при чему је

- $dv = dx_1 dy_1 dz_1$ елементарна запремина,
- ds означава површински елемент.

Имајући у виду да је $t_i = \sigma_{ij} n_j$ добија се:

$$\begin{aligned} \delta A^s &= \int_v \rho f_i \delta u_i dv + \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds \\ &= \int_v \rho f_i \delta u_i dv + \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dv \\ &= \int_v (\rho f_i + \sigma_{ij,j}) \delta u_i dv + \int_v \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv. \end{aligned} \quad (3.35)$$

У другом реду израза претходног израза други сабирак је добијен применом Гаусове теореме о дивергенцији, која може да се изрази следећом једначином:

$$\int_v M_{i,i} dv = \int_S M_i n_i ds, \quad (3.36)$$

где је $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\} = \{n_i\}$ јединични вектор спољашње нормале на површину S унутар које је запремина v . Први интеграл у трећем реду израза (3.35) једнак је нули ако је задовољена једначина равнотеже $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0$, а с обзиром да је напон σ_{ij} симетричан по индексима i

и j , $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, могуће је написати:

$$\begin{aligned} \delta A^s &= \int_v \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv = \int_V \sigma_{ij} \delta \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \right] dv \\ &= \int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \delta A^u, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где је $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ тензор малих деформација. Претходном једначином је постављен принцип виртуалног рада који гласи:

„Виртуални рад спољашњих сила једнак је виртуалном раду унутрашњих сила“.

Математички овај принцип може да се напише на следећи начин:

$$\int_v \rho f_i \delta u_i dv + \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i ds = \int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv. \quad (3.38)$$

при чему би требало запазити да се у другом сабирку интеграција врши по површини S_σ , јер је $\delta u_i = 0$ на површини S_u , где су прописана померања на контури.

3.4.2 Принцип минимума укупне потенцијалне енергије

Ако постоји функција специфичне енергије деформације $U_0(\varepsilon_{ij})$, онда важи релација $\sigma_{ij} = \partial U_0 / \partial \varepsilon_{ij}$, може да се напише:

$$\int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_v \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dv = \delta \int_v U_0 dv. \quad (3.39)$$

Принцип виртуалног рада може да се напише у следећем облику:

$$\delta \int_v U_0 dv - \int_v \rho f_i \delta u_i dv - \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i ds = 0. \quad (3.40)$$

Ако су запреминске силе ρf_i и површинске силе t_i конзервативне, и ако се претпостави да постоји потенцијал V одговарајућих сила чија је прва варијација:

$$\delta V = - \left(\int_v f_i \delta u_i dv + \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i ds \right), \quad (3.41)$$

онда принцип виртуалног рада добија облик:

$$\delta U + \delta V = \delta(U + V) \equiv \delta \Pi = 0 \quad (3.42)$$

Функција Π се назива Потенцијална енергија система. Ова једначина показује да, у равнотежном стању, потенцијална енергија има стационарну вредност у класи допустивих варијација δu_i померања u_i . Другачије речено: од свих померања, која задовољавају дате контурне услове, она која задовољавају једначину равнотеже даје стационарну (екстремну) вредност потенцијалне енергије, при чему једнакост може да се постигне само када је $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^*$ односно $u_i = u_i^*$, што је представа принцип минимума потенцијалне енергије.

3.4.3 Хамилтонов принцип

Хамилтонов принцип представља генерализацију принципа виртуалног рада на динамичке системе. Овим принципом се претпоставља да систем који се разматра карактеришу две функције енергије: кинетичка енергија K и потенцијална енергија Π . За деформабилна тела, енергије се могу изразити у смислу зависних променљивих (које су функције положаја) проблема. Хамилтонов принцип подразумева да се свако стварно кретање система честица са холономним везама, код кога постоји потенцијали сила, врши тако да Хамилтоново дејство при стварном кретању има стационарну вредност у поређењу са вредностима дејства при другим замишљеним кретањима, која се врше у исто време, између

истих тачака са задовољавањем веза и која врло мало одступају од стварног кретања. Хамилтонов принцип је варијациони принцип и представља важан обједињујући фактор целе физике.

Израз за рад виртуални рад спољашњих и унутрашњих сила дат у (3.34) може да се запише у облику:

$$\delta \int_v U_0 dv - \int_v \rho f_i \delta u_i dv - \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i ds = 0, \quad (3.43)$$

а ако f_i и t_i представљају компоненте конзервативних сила за идеално еластично тело, могуће је записати варијацију потенцијала одговарајућих сила:

$$\delta V = - \left(\int_v f_i \delta u_i dv + \int_{S_2} t_i \delta u_i ds \right). \quad (3.44)$$

Ако постоји функција енергије релативне деформације $U_0 = U_0(\varepsilon_{ij})$, онда важи релација $\sigma_{ij} = \partial U_0 / \partial \varepsilon_{ij}$, па следи:

$$\int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_v \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dv = \delta \int_v U_0 dv. \quad (3.45)$$

Према [150] даље следи:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_v \rho \ddot{u}_i \delta u_i dv - \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i ds - \int_v [\rho f_i \delta u_i - \sigma_{ij} \delta u_{i,j}] dv \right\} dt = 0. \quad (3.46)$$

Једначина је позната као општи облик Хамилтоновог принципа за континуум.

Заменом једначина (3.45) и (3.44) у претходну једначину и имајући у виду да је $\int_v \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv = \int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv$, добија се:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (V + U)] dt = 0, \quad (3.47)$$

где су K и U кинетичка и енергија деформације.

Једначина (3.47) представља Хамилтонов принцип за еластично тело (линеарно и нелинеарно). Треба нагласити да збир енергије деформације и потенцијалне енергије спољашњих сила $U + V = \Pi$ представља укупну потенцијалну енергију тела. За тела која се налазе у стању мировања Хамилтонов принцип се своди на принцип виртуалног рада.

3.5 Математички модел интеракције греде/плоче и еластичне подлоге

Поред анализе слободно ослоњених или учвршћених плоча, у великом броју публикованих радова и књига, аутори се баве проблемом интеракције плоче и еластичне подлоге [151, 152,

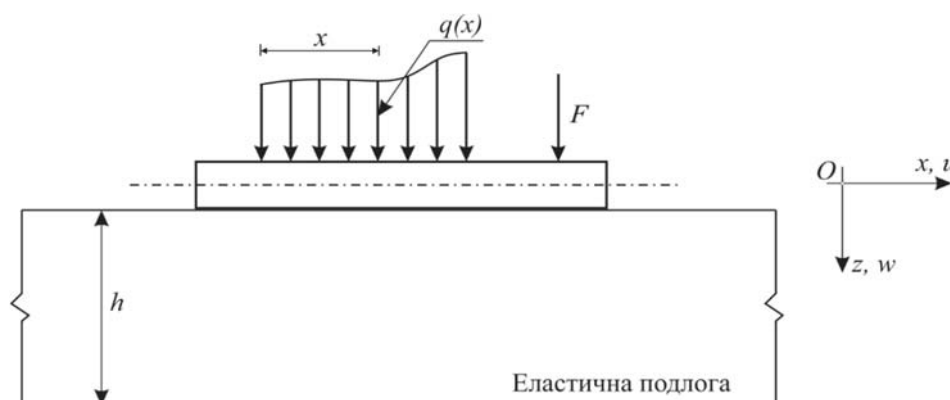
153]. Математички модели греде или плоче на еластичној подлози се често користе да опишу велики број инжењерских проблема у геотехници, друмској и железничкој индустрији, биомеханици, бродоградњи и другим областима инжењерства. Кључно питање у анализи поменутих проблема је како математички описати понашање еластичне подлоге и интеракцију између греде, односно плоче и подлоге. Без обзира на велики број комерцијалних софтвера, развијених за решавање проблема интеракције елемената конструкције и еластичне подлоге, аналитичка решења једноставнијих примера су алат за контролу нумеричких поступака, односно начин да се разуме физичка суштина проблема и да се јасно сагледају претпоставке на којима се заснива прорачунски модел, како би се он могао критички примењивати у пракси. Мада је највећи број решења проблема интеракције заснован на линеарно еластичној анализи, употребом савремене рачунарске опреме и нумеричких метода, за анализу и прорачун врло сложених конструкција на еластичној подлози користе се реалније особине материјала еластичне подлоге, као што су анизотропија, нелинеарност, еласто-пластичност, вискозност и слично.

Постоји велики број математичких модела који описују поменути интеракцију са еластичном подлогом који се могу поделити на:

- једнопараметарски модел (Винклеров модел),
- двопараметарски модел (модел Винклер - Пастернак, Филоненко - Бородич (*Filolenko - Borodich*), Хетени (*Heteny*), Власов (*Vlasov*), Власов - Леонтиев (*Vlasov - Leontiev*), Рајзнер и други),
- континуум модел (Хуков модел)

3.5.1 Једнодимензиони модел (модел греде) на еластичној подлози

У зависности од конкретног проблема који се жели описати, плоча димензија $a \times b$ (a - дужина плоче, b - ширина плоче) на еластичној подлози, може се поједностављено посматрати као греду на еластичној подлози, идеализацијом и свођењем на једнодимензиони проблем (Слика 3.2).



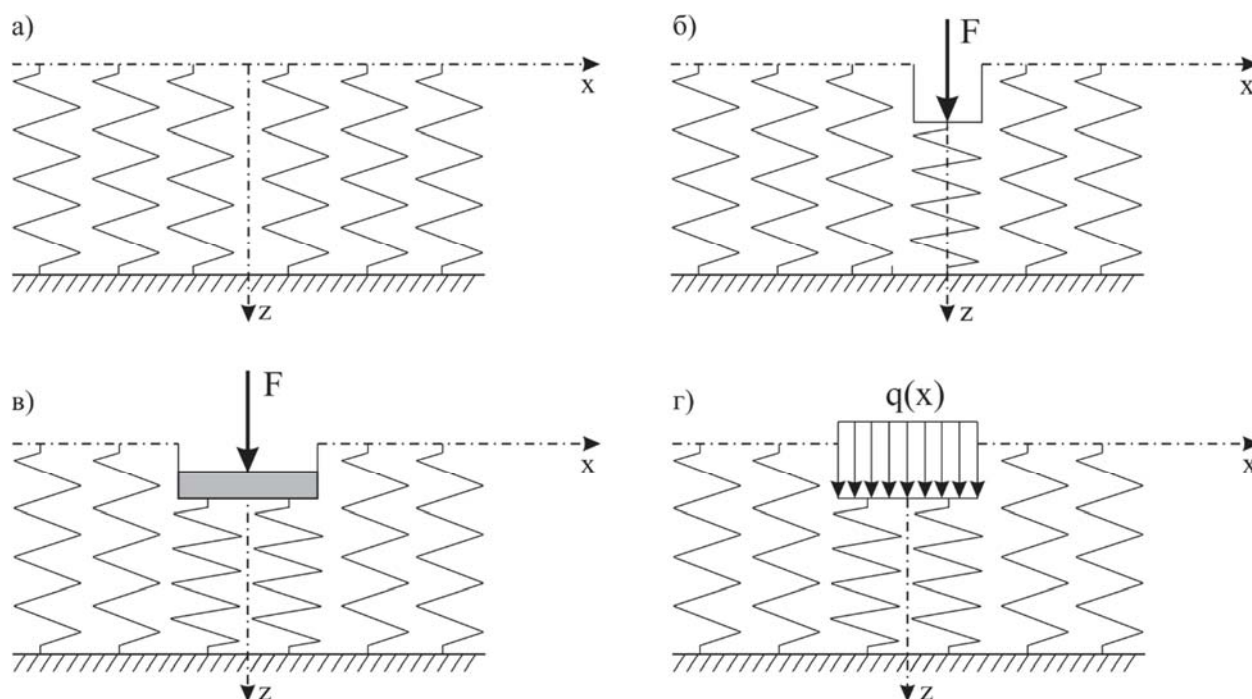
Слика 3.2 Грета на еластичној подлози

Оваква апроксимација је нарочито честа у описивању елемената конструкција у геотехници, где је једна димензија плоче знатно већа од друге. Према [154]:

- за $a/b > 5$ плоча се може апроксимирати и анализирати као греда,
- за $a/b < 3$ плоча се не сме апроксимирати моделом греде и мора се анализирати као плоча,
- за $3 < a/b < 5$ плоча се може анализирати или као греда или као плоча у зависности од конкретног проблема и оправданости апроксимације.

3.5.1.1 Једнопараметарски модел – Винклеров модел

Најједноставнији модел еластичне подлоге је заснован на концепту модула реакције подлоге k . У примењеној механици први је овај модел увео Винклер. Код овог модела основна претпоставка је да је вертикално померање тачке на еластичној подлози пропорционално притиску у тој тачки и не зависи од притиска на суседне тачке. Према овој идеализацији, деформације еластичне подлоге услед примењеног оптерећења су ограничене само на оптерећени регион (Слика 3.3). Винклеров модел представља се системом међусобно независних, вертикалних, линеарно еластичних опруга крутости k .



Слика 3.3 Једнопараметарски модел еластичне подлоге (Винклеров модел): а) модел подлоге са опругама, б) оптерећење концентрисаном силом, в) оптерећење крутом гредом, г) континуално оптерећење идеално савитљивом гредом

Пошто се еластична подлога описује једним параметром, овај модел се назива и једнопараметарски модел подлоге [155], који се може представити једначином:

$$q_e(x) = kw(x) \quad (3.48)$$

где су: $q_e(x)$ - ефективно контактано оптерећење,

k - коефицијент крутости опруге (модул реакције подлоге),

$w(x)$ - вертикално померање (слегање подлоге).

Енергија деформације еластичне подлоге је:

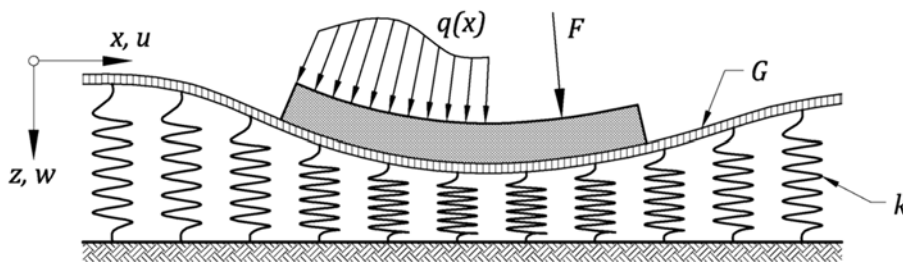
$$U_e = \int_0^l \frac{1}{2} kbw^2 dx, \quad (3.49)$$

где су b и l ширина и дужина зоне деформације подлоге.

Критички посматрано, претпоставка о еластичној подлози као о систему независних опруга у већини случајева представља велику апроксимацију. На пример, код решавања проблема у геомеханици, елементи конструкције су ослоњени на тло, тако да је тло у том случају еластична подлога. Тло је континуум, у којем се утицај из једне тачке преноси на околне тачке обрнуто сразмерно неком степену растојања. Ова чињеница јасно указује на апроксимацију коју је увео Винклер где је претпоставио да опруге међусубно не утичу једна на другу. Међутим, Винклеров модел се због једноставности задржао у употреби до данас, а велики број аутора се у међувремену бавио његовим побољшањем, увођењем двопараметарских модела.

3.5.1.2 Двопараметарски модел – Винклер-Пастернаков модел

Пастернак је предложио побољшање Винклеровог модела увођење смичуће интеракције између опруга, тако што их је повезао слојем фиктивних, нестишљивих клизних елемената који се деформишу само смицањем (Слика 3.4).



Слика 3.4 Грета на двопараметарском моделу еластичне подлоге [155]

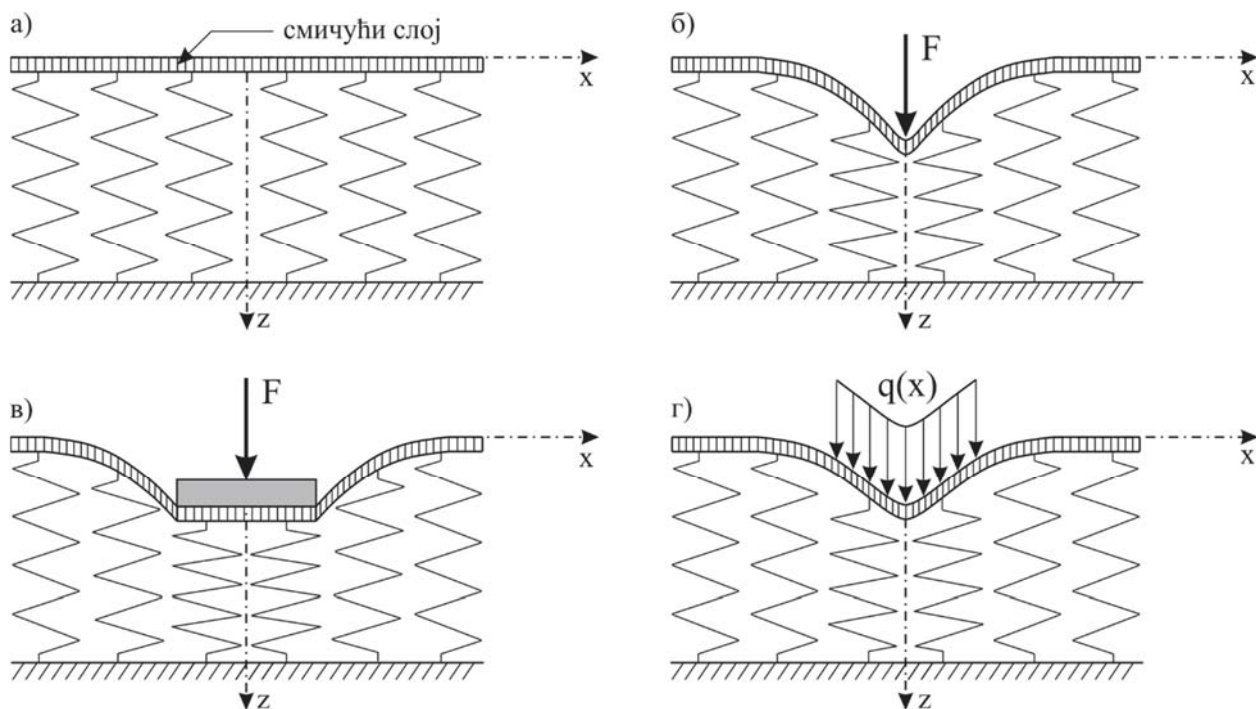
Ефективно контактано оптерећење код овог модела је дато изразом:

$$q_e(x) = kw(x) - G \frac{d^2w(x)}{dx^2}. \quad (3.50)$$

где је G - модул смицања.

Енергија деформације еластичне подлоге за случај двопараметарског модела је према [155]:

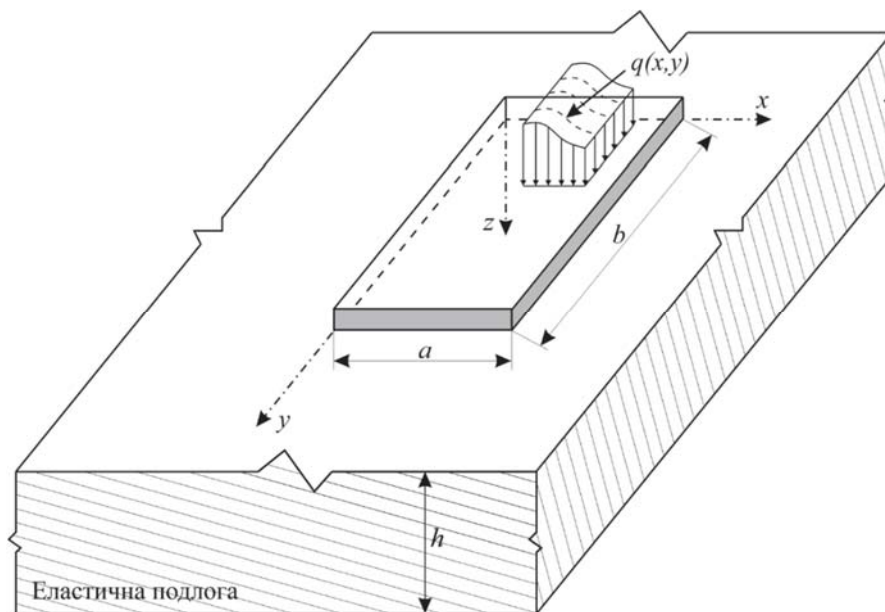
$$U_e = \int_0^l \frac{1}{2} kbw^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} Gb \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (3.51)$$



Слика 3.5 Двопараметарски модел еластичне подлоге (Винклеров-Пастернаков модел): а) модел подлоге са опругама и смичућим слојем, б) оптерећење концентрисаном силом, в) оптерећење крутом гредом, г) континуално оптерећење идеално савитљивом гредом

На слици 3.5 приказан је двопараметарски, Винклер-Пастернаков модел за различите случајеве оптерећења. На приказаним примерима јасно се види основно побољшање овог модела у односу на Винклеров модел које се огледа у увођењу смичућег слоја који повезује вертикалне еластичне опруге.

3.5.2 Дводимензиони модел (модел плоче) на еластичној подлози



Слика 3.6 Плоча на еластичној подлози

Аналогно претходно описаним једнодимензионим проблемима греде на еластичној подлози, могу се разматрати и дводименциони модели плоче на еластичној подлози. На слици 3.6 приказана је плоча димензије $a \times b$ ослоњена на еластичну подлогу и оптерећена произвољним оптерећењем $q(x, y)$.

3.5.2.1 Једнопараметарски модел – Винклеров модел

На основу једначине (3.48), ефективно контактено оптерећење код Винклеровог модела плоче на еластичној подлози је дато изразом:

$$q_e(x, y) = kw(x, y). \quad (3.52)$$

Према (3.49) енергија деформације еластичне подлоге гласи:

$$U_e = \int_A \frac{1}{2} kw^2 dA. \quad (3.53)$$

3.5.2.2 Двопараметарски модел – Винклер-Пастернаков модел

Аналогно (3.50), ефективно контактено оптерећење код Винклер-Пастернаковог модела плоче на еластичној подлози је дато изразом:

$$q_e(x, y) = kw(x, y) - G\nabla^2 w(x, y), \quad (3.54)$$

где је $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Лапласов (*Laplace*) оператор.

На основу (3.51) енергија деформације еластичне подлоге за случај двопараметарског модела је:

$$U_e = \int_A \frac{1}{2} kw^2 dA + \int_A \frac{1}{2} G \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dA. \quad (3.55)$$

4 СМИЦАЈНЕ ДЕФОРМАЦИОНЕ ТЕОРИЈЕ У АНАЛИЗИ ПЛОЧА ОД ФГМ

У највећој мери композитни материјали су своју примену примарно нашли у танкозидним конструкцијама. Међутим, са напретком технологије и појавом различитих индустријских захтева, отворила се потреба за употребом композитних материјала и у умерено дебелим и дебелим структурама. У почетку, за испитивање понашања умерено дебелих и дебелих плоча, коришћене су теоријске поставке које су употребљаване у анализи танкозидних плоча. Међутим, теоријске претпоставке, на којима се заснива класична теорија плоча, давале су добре резултате за танке, али не и за умерено дебеле и дебеле плоче. Имајући у виду претходно поменути чињеницу, јавила се потреба да се теоријске претпоставке, оригинално развијене за изотропне танке плоче, прошире на изотропне и анизотропне умерено дебеле и дебеле плоче. Поред тога, развијене су и нове, побољшане смицајне деформационе теорије за анализу ламинатних композитних плоча. Различите теорије плоча су од суштинске важности за прецизну анализу и предвиђање понашања плоча у различитим статичким и динамичким условима оптерећења.

Као што је у уводном делу ове дисертације наведено, у постојећој литератури могуће је наћи различите теоријске приступе које си примењују у анализи ламинатних композитних плоча. Преглед различитих теорија заснованих на претпостављеним облицима померања и смицајно деформационим теоријама дали су аутори у [156, 157, 158]. Према овим ауторима, теорије ламинатних плоча могу грубо да се поделе у две категорије:

1. Еквивалентне теорије слоја,
2. 3D теорија еластичности континуума.

У зависности од претпостављених облика померања, класификација еквивалентних теорија слоја је према [159, 160] извршена на:

- Класичну теорију плоча (СРТ),
- Смицајну деформациону теорију првог реда (FSDT),
- Смицајну деформациону теорију вишег реда (HSDT),
- Ламинатну теорију базирану на концепту слоја.

Основне карактеристике претпостављеног облика померања сваке од наведених ESL теорија, као и предности и недостаци према [161], биће дате у овом поглављу.

У овој дисертацији смицајно деформациона теорија вишег реда заснована на функцијама облика, која се користи у анализи ламинатних композитних плоча, биће прилагођена за анализу плоча од ФГМ, као напредног композитног материјала.

4.1 Класична теорија плоча

Ова теорија је заснована на Кирхофовој теорији плоча која је најједноставнија и најчешће коришћена ESL теорија у напонској анализи композитних ламината. При формулацији ове

теорије претпоставља се да нормала на средњу раван плоче остаје управна и недеформисана и после деформације плоче, што за последицу има да су смицајне компоненте тензора деформације $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Такође се претпоставља да су померања у равни ламината линеарна функција координате у правцу дебљине ламината, као и да је нормални напон у правцу дебљине $\sigma_z = 0$, па се, по овој теорији, ламинат анализира при условима ткз. равнотостања напона. Претпостављени облици померања, сагласно претпоставци да представљају линеарне функције координате z , гласе:

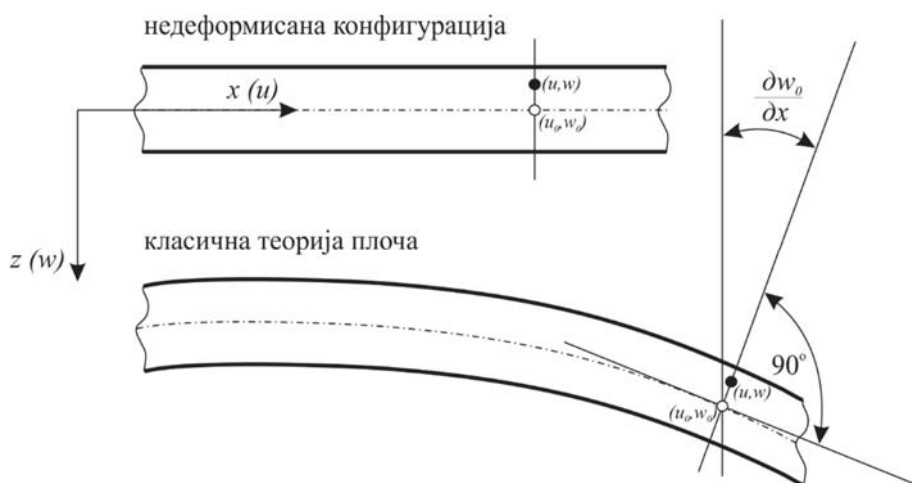
$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x}, \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y}, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где су:

u_0, v_0, w_0 - компоненте померања тачке на средњој равни плоче,

$\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$ - углови ротације трансверзалне нормале у односу на осе x и y (Слика 4.1).

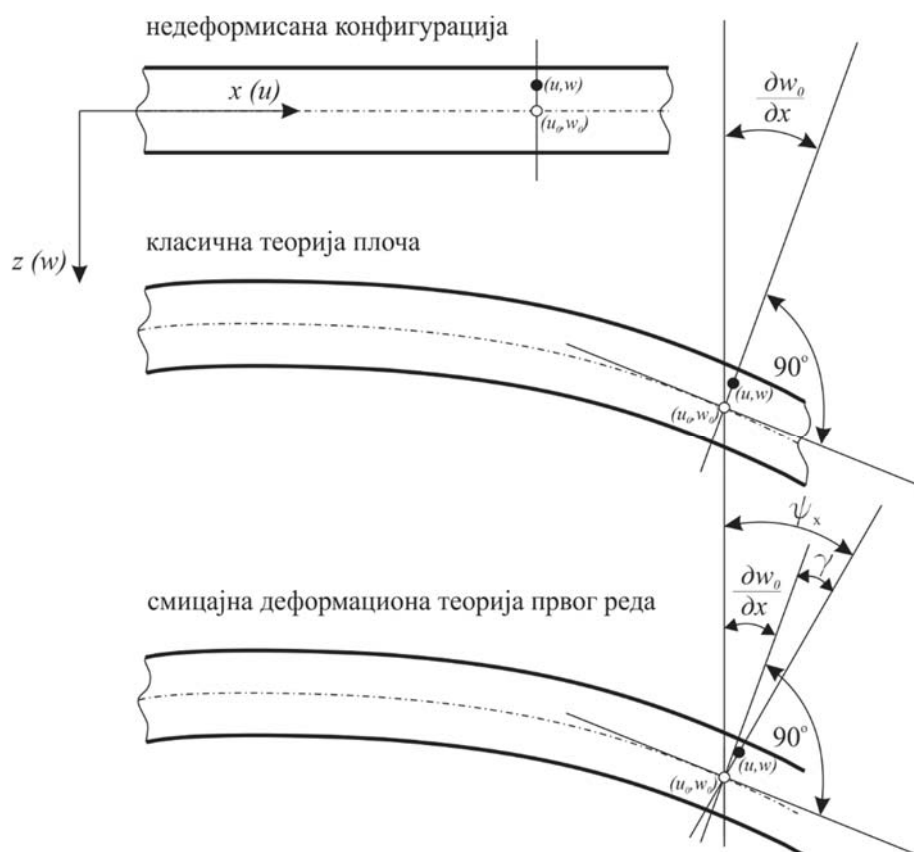
Деформације са индексом нула су деформације у средњој равни плоче које се још називају и мембранским деформацијама. Како се ESL теорије могу примењивати и за динамичка испитивања, у претпостављеним облицима померања, скупу независних припада и време t .



Слика 4.1 Ротација нормале на средњу раван плоче према класичној ламинатној теорији. Уведене кинематичке претпоставке о стању напона или деформација редукују тродимензиони проблем, узимајући у обзир да је дебљина много мања од преостале две димензије, на равански проблем. Због поменуте апроксимације, класична теорија плоча се примењује у анализи танких плоча.

4.2 Смицајна деформациона теорија првог реда

Значај утицаја трансверзалних смицајних деформација при савијању ламинатних плоча међу првима је анализирао Миндлин [1], узимајући у обзир смицајне деформационе ефекте линеарном расподелом раванских померања у правцу дебљине ламинатне плоче. Према овој теорији потребно је увести смицајне корекционе факторе како би се детаљно објаснила енергија деформације смицања. Смицајне корекционе факторе није једноставно одредити због тога што они не зависе само од геометријских параметара, већ и од оптерећења и контурних услова. Још једна теорија која узима у обзир смицајне деформационе ефекте развијена је од стране Рајзнера [2], због чега се ове две теорије често поистовећују. У литератури је често присутан назив Миндлин-Рајзнерова теорија, мада многи аутори оспоравају такав назив сматрајући да се те две теорије у многоме разликују. Као најбитнију разлику навели су да, из разлога што је Рајзнерова теорија заснована на претпоставци линеарне дистрибуције напона при савијању и параболичке дистрибуције смицајних напона, њена формулација неизбежно води до тога да варијација померања неће нужно бити линеарна у правцу дебљине плоче, што је у директној супротности са Миндлиновој претпоставци о пољу померања.



Слика 4.2 Ротација нормале на средњу раван плоче према смицајној деформационој теорији првог реда

Према смицајној деформационој теорији првог реда, померања се претпостављају у облику:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где су:

u_0, v_0, w_0 - компоненте померања тачке на средњој равни плоче,
 ψ_x, ψ_y - углови ротације трансверзалне нормале у односу на осе x и y , респективно.

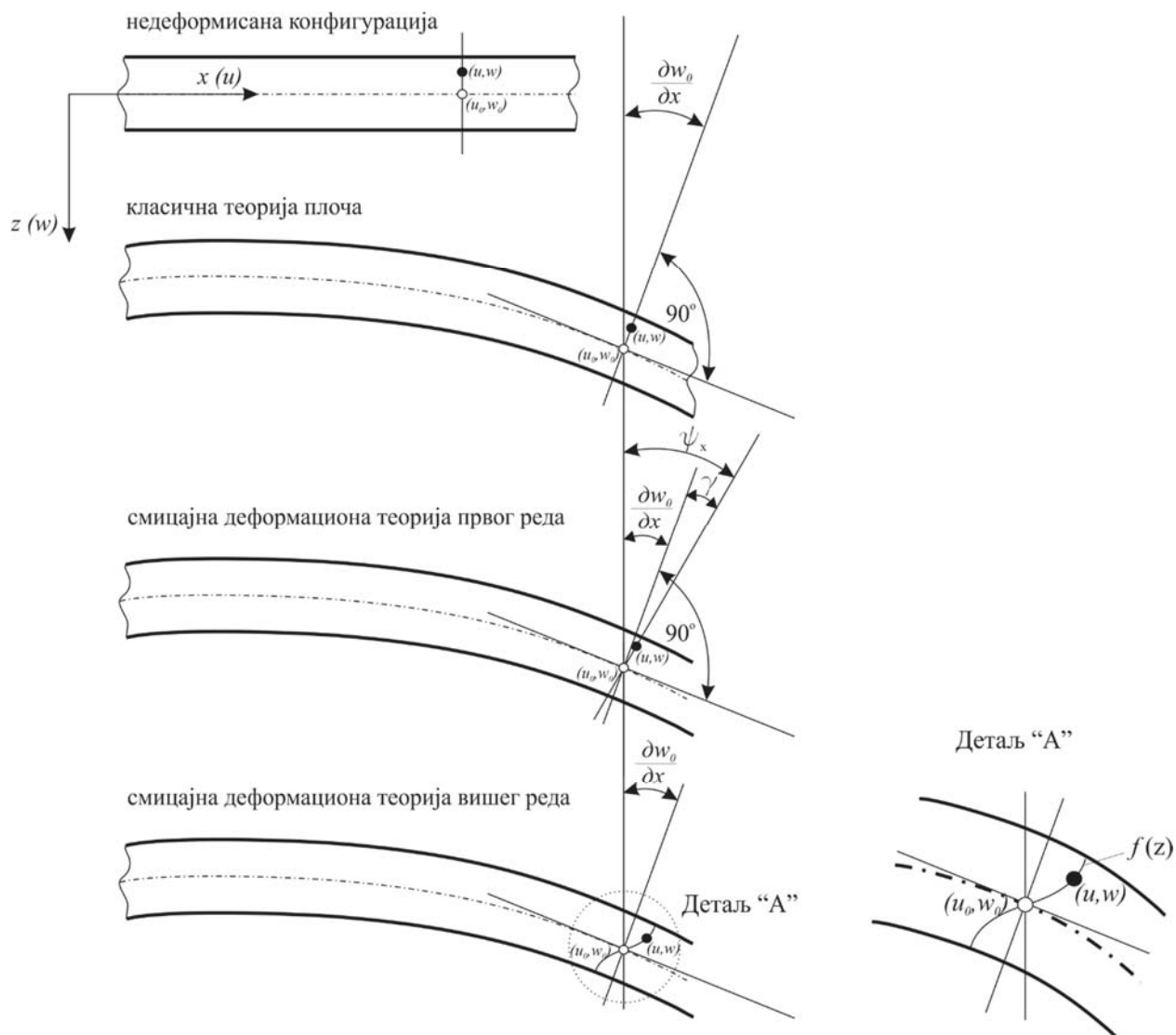
Као што се може видети на слици 4.2 код ове теорије укупна ротација нормале добија се као збир ротације услед савијања и услед трансверзалног смицања. Треба нагласити да попречни пресек остаје недеформисан, па самим тим нема појаве геометријске нелинеарности при деформисању нормале на средњу раван.

4.3 Смицајне деформационе теорије вишег реда

Константни напредак рачунарске технологије, са једне стране, и нумеричких метода решавања математичких проблема, са друге стране, створио је предуслове за примену сложенијих теорија од претходно описаних CPT и FSDT теорија. Основни циљ увођења теорија вишег реда је да се смањи степен апроксимације реалних проблема који се описују математичким моделом и добију резултати што приближнијих експерименталним резултатима. HSDT теорије треба да отклоне недостатке примене теорија нижег реда на дебеле и умерено дебеле ламинатне плоче и да елиминишу употребу корекционих фактора. HSDT теорија представља функционалну зависност померања од степена променљиве “ z ”, која и у деформационој теорији представља координатну осу нормалну на средњу раван у недеформисаној конфигурацији плоче.

На слици 4.3 дат је упоредни приказ деформационих теорија. Са слике се јасно види да, за разлику од CPT и FSDT, код теорија вишег реда долази до кривљења попречног пресека (депланације), па нормала на средњу раван плоче не задржава праволинијски облик, већ добија криволинијски облик (Слика 4.3 - Детаљ “А”). Сам тип ове нелинеарности се, код деформационих теорија вишег реда, дефинише претпостављеним облицима померања, односно избором функција које се уводе у претпостављене облике померања. При томе, основни циљ је увести такав претпостављени облик померања, да се добију што једноставније и математички мање захтевне функције. Једноставнији математички облик претпостављених облика померања скраћује време прорачуна. Одабир различитих поља померања подразумева и увођење различитог броја независно променљивих које дефинишу претходно описану деформацију нормале. HSDT теорије могу бити засноване на различитим функцијама облика, као што су експоненцијалне, тригонометријске, хиперболичке итд. Поред HSDT заснованих на функцијама облика, у макромеханичкој анализи, користе се и други облици ових теорија засновани на полиномним функцијама,

пре свега из разлога поједностављене и олакшане процедуре рада са полиномима. У зависности од степена полинома, могу бити смицајне деформационе теорије другог, трећег, n -тог реда.



Слика 4.3 Упоредни приказ деформационих теорија

4.3.1 Смицајна деформациона теорија вишег реда заснована на различитим функцијама облика

Потребу за увођењем корекционих фактора код смицајне деформационе теорије првог реда, многи аутори су отклонили увођењем смицајних деформационих функција облика (*shape functions*). У литератури се може наћи велики број ових функција које могу бити полиномне, тригонометријске, експоненцијалне, хиперболичке итд. Неки примери функција облика дати су у табели 4.1. Треба нагласити да све предложене функције облика нису применљиве на све типове проблема. Многе од ових функција облика су уведене на тај начин да дају

добре резултате за одређене врсте оптерећења и специфичне статичке и динамичке проблеме.

Табела 4.1 Смицајне деформационе функције облика

Редни број ф-је облика (ФО)	Име аутора	Функција облика $f(z)$
1	<i>Ambartsumain</i> [162]	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
2	<i>Kaczkowski, Panc</i> и <i>Reissner</i> [163]	$\frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)$
3	<i>Levy, Stein, Touratier</i> [164]	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{h} z \right)$
4	<i>Mantari</i> и остали [165]	$\sin \left(\frac{\pi}{h} z \right) e^{\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{h} z \right)} + \frac{\pi}{2h} z$
5-6	<i>Mantari</i> и остали [67]	$\tan(mz) - z m \sec^2(mh/2), m = \{1/5h, \pi/2h\}$
7	<i>Karama</i> и остали [166], <i>Aydogdu</i> [66]	$z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}, \left(z e^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln \alpha}} \right), \forall \alpha > 0$
8	<i>Mantari</i> и остали [68]	$z \cdot 2.85^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} + 0.028z$
9	<i>El Meiche</i> и остали [69]	$\xi \left[\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{h} z \right) - z \right], \xi = \left\{ 1, 1 / \cosh \left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 \right\}$
10	<i>Soldatos</i> [65]	$h \sinh(z/h) - z \cosh(1/2)$
11	<i>Akavci</i> и <i>Tanrikulu</i> [73]	$z \sec h \left(\frac{z^2}{h^2} \right) - z \sec h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left[1 - \frac{\pi}{2} \tanh \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]$
12	<i>Akavci</i> и <i>Tanrikulu</i> [73]	$\frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{3\pi}{2} z \sec h^2 \left(\frac{1}{2} \right)$
13	<i>Mechab</i> и остали [70]	$\frac{z \cos \left(\frac{1}{2} \right)}{-1 + \cos \left(\frac{1}{2} \right)} - \frac{h \sin \left(\frac{z}{h} \right)}{-1 + \cos \left(\frac{1}{2} \right)}$

Претпостављени облици поља померања у овом случају су облика:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + f(z)\theta_x, \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + f(z)\theta_y, \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t),
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

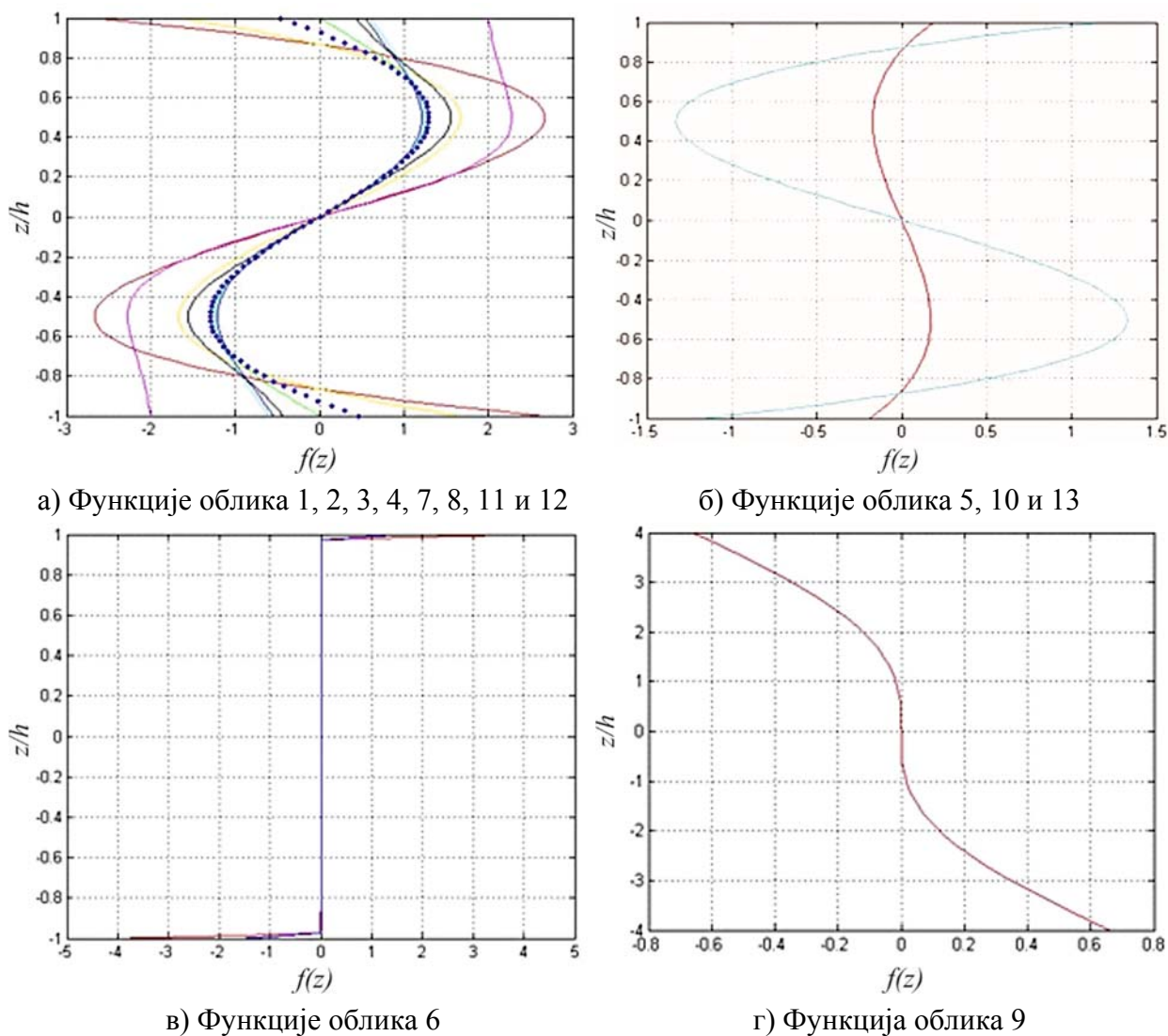
где су:

u_0, v_0, w_0 - компоненте померања тачке на средњој равни плоче,

$\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$ - углови ротације трансверзалне нормале у односу осе x и y , респективно,

θ_x, θ_y - ротације трансверзалне нормале услед трансверзалног смицања,

$f(z)$ - функција облика.



Слика 4.4 Дијаграми функција облика за вредност $h=2$

Према [161], на основу приказа функција облика из табеле 4.1 преко дијаграма (Слика 4.4), могу се извести одређени закључци о понашању предложених функција облика. Анализом дијаграма предложених смицајних деформационих функција облика, у координатном систему чија ордината представља однос z/h , јасно се може уочити да међу њима постоје криве чији су графици сличног облика. Затим, може се закључити да су све предложене функције облика непарне функције координате z . Још једна јасно видљива карактеристика многих од ових функција је да за вредност ординате $z/h=0.5$ остварују максималне вредности гледано у односу на апсису.

4.3.2 Смицајна деформациона теорија другог реда

Полиномне HSDT теорије се раздвајају од других врста ових теорија и у зависности од степена полинома по координати z су сврстане у групу смицајних деформационих теорија другог, односно трећег реда. Према смицајно деформационој теорији другог реда, поље померања плоче се може представити у облику:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + \frac{z^2}{2}\phi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + \frac{z^2}{2}\phi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где су:

- u_0, v_0, w_0 - компоненте померања тачке на средњој равни плоче,
- ψ_x, ψ_y - углови ротације трансверзалне нормале у односу осе x и y , респективно,
- ϕ_x, ϕ_y - функције уведене деформационом теоријом вишег реда.

Према овој теорији раванска померања су квадратне функције, док су трансверзална померања линеарне функције координате z . Примена ове теорије добија на значају код макромеханичке анализе дебелих и умерено дебелих композитних плоча.

4.3.3 Смицајна деформациона теорија трећег реда

Велики број аутора је своје анализе композитних плоча заснивао на смицајним деформационим теоријама трећег реда, па је отуда и настао велики број варијација у претпостављеним облицима померања код ове теорије. Као резиме свих постојећих смицајних деформационих теорија трећег реда, уопштени облик померања може се представити у облику:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\phi_x(x, y, t) + z^3\xi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\phi_y(x, y, t) + z^3\xi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\phi_z(x, y, t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из једначине (4.5) може се закључити да је потребно одредити 11 функција, $u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \xi_x, \xi_y$.

У литератури се може наћи велики број радова из области статичке и динамичке анализе ламината, која се заснива на смицајној деформационој теорији трећег реда, а коју су у својим радовима предложили Реди и Робинсон (*Robinson*) [167]. Деформациона теорија трећег реда коју су презентовали ови аутори, заснована је на истим претпоставкама као и код СРТ и FSDT, с том разликом што се претпоставља да трансверзална нормала након деформације не задржава праволинијски облик, већ добија облик криве трећег реда. Ако се погледају претпостављени облици померања, према овим ауторима јасно се већ на први поглед може уочити да претпостављена поља померања садрже парцијалне изводе, што одмах асоцира на отежану процедуру интегралнења, а самим тим и на повећано време обраде проблема, што директно условљава и хардверски захтевнију рачунарску конфигурацију. Деформациона теорија према овим ауторима описана је помоћу седам независних параметара. Претпостављена поља померања у функцији 7 непознатих функција, $u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \phi_z$ дата су у облику:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) - z^2 \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_z(x, y, t)}{\partial x} \\
 &\quad - z^3 \left[C_1 \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \psi_x(x, y, t) \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi_z(x, y, t)}{\partial x} \right], \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) - z^2 \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_z(x, y, t)}{\partial y} \\
 &\quad - z^3 \left[C_1 \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \psi_y(x, y, t) \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi_z(x, y, t)}{\partial y} \right], \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2 \phi_z(x, y, t),
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

где су:

$C_1 = \frac{4}{3h^2}$ - корекциони фактор,

u_0, v_0, w_0 - компоненте померања тачке на средњој равни плоче,

ψ_x, ψ_y - углови ротације трансверзалне нормале у односу на осе x и y , респективно,

ψ_z - угао ротације трансверзалне нормале у односу на осу z ,

ϕ_z - функција уведена деформационом теоријом вишег реда.

Полиномне функције трећег реда, поред тога што се могу једноставно интегралити, дају и велику тачност резултата и не захтевају корекционе факторе, који представљају један вид апроксимације. Иако ове функције, у односу на теорије нижег реда, усложњавају саму нумеричку процедуру, то усложњавање због једноставне интеграције није превелико ни нумерички презахтевно.

5 СТАТИЧКА АНАЛИЗА ПЛОЧА ОД ФГМ ПРИМЕНОМ СМИЦАЈНЕ ДЕФОРМАЦИОНЕ ТЕОРИЈЕ ВИШЕГ РЕДА

Све интензивнија и масовнија употреба композитних материјала, па тако и ФГМ као савремених композита, наметнула је потребу за детаљном напонско-деформационом анализом ових материјала. Са друге стране, развој компјутерске технологије омогућио је развијање математичких модела и примену рачунарских симулација за предвиђање понашања поменутих материјала у реалним условима експлоатације при статичким и динамичким оптерећењима. Проблемима линеарне и нелинеарне статичке анализе плоча од ФГМ бавили су се разни аутори заснивајући своје анализе на класичној теорији плоча и смицајно деформационој теорији првог реда. За танке плоче, где је дебљина плоче далеко мањег реда величине у односу на друге две димензије, поменуте теорије дају добре резултате. Међутим, како, поред танкозидних конструкција, ФГМ налазе своју примену и у конструкцијама умерено дебелих и дебелих зидова, потребно је макромеханичку анализу заснивати на деформационим теоријама вишег реда, које узимају у обзир трансверзалне смицајне напоне, односно, геометријску нелинеарност услед деформације трансверзалне нормале, о чему је детаљно било речи у претходном поглављу. Из поменутог разлога, све је већи број аутора који се последњих година бави проблемима статичке и динамичке анализе плоча од ФГМ применом различитих деформационих теорија вишег реда описаних у поглављу 4.

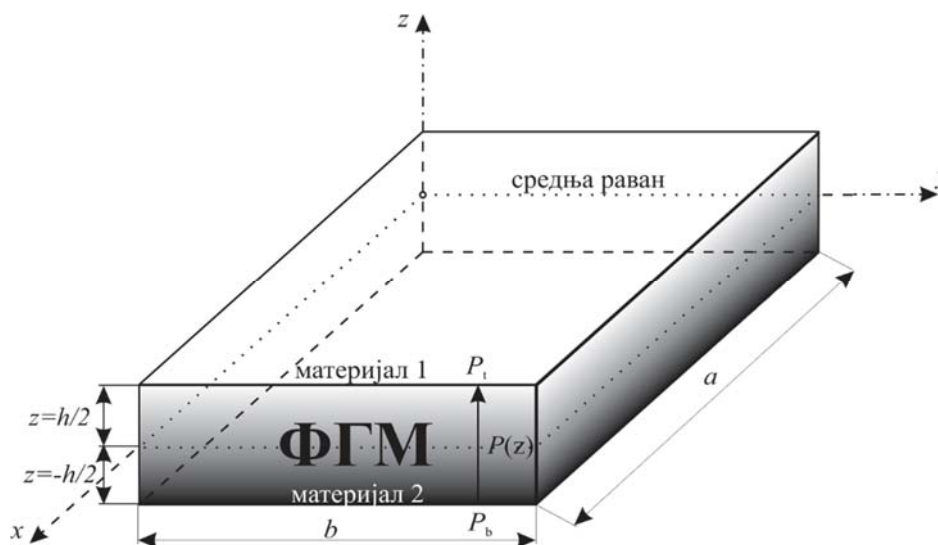
У оквиру овог поглавља развијене су теоријске поставке нелинеарне анализе савијања услед произвољног трансверзалног оптерећења, као и нелинеарне анализе извијања плоча од ФГМ услед утицаја температуре засноване на смицајној деформационој теорији вишег реда која укључује функције облика. Такође, разматрани су поменути проблеми и у случају интеракције плоче од ФГМ и еластичне подлоге. На основу претпостављених облика померања HSDT теорије, извршена је анализа оправданости увођења 13 различитих функција облика (табела 4.1) при статичкој анализи ФГ плоча , које су поједини аутори користили у анализи ламинатних композитних материјала. Многе од ових функција нису погодне за решавање интеграла који се јављају у самом поступку анализе плоча, па као такве захтевају додатну нумеричку интеграцију.

Предмет анализе у оквиру овог поглавља је плоча, дужине a , ширине b и висине h , од функционално градијентно распоређеног материјала кога чине два конституента (Слика 5.1). Термомеханичке особине ФГМ у правцу дебљине плоче претпостављено је да се мењају у складу са степеном функцијом:

$$P(z) = P_b + P_{tb} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \quad P_{tb} = P_t - P_b. \quad (5.1)$$

Овај закон дефинише промену механичких особина као функцију запреминског удела конституената ФГМ у правцу дебљине плоче. Како је h укупна дебљина плоче, $P(z)$

означава материјалну карактеристику у пресеку “ z ” при чему је $(-h/2 < z < h/2)$. P_t је материјална карактеристика на врху плоче ($z = h/2$) - материјал 1, а P_b је материјална карактеристика на дну плоче ($z = -h/2$) - материјал 2. У једначини (5.1) индекс p је експонент једначине која дефинише запремински удео конституената ФГМ. Практично, p индекс дефинише количину и расподелу материјала 1, односно материјала 2 у правцу дебљине плоче. Мања вредност индекса p значи већи удео материјала 1 и обрнуто, већа вредност поменутог индекса значи већи удео материјала 2. Варирањем индекса p , могу се добити ФГМ тачно одређене и специфичне градијентне структуре.



Слика 5.1 Геометрија плоче од ФГМ

5.1 Кинематичке релације померање-деформација

На основу претходно описаних предности смицајних деформационих теорија вишег реда заснованих на функцијама облика, као полазна основа за дефинисање кинематичких релација померање-деформација биће претпостављени облици компонената померања било које тачке на плочи у облику датом у (4.3):

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + f(z) \theta_x, \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + f(z) \theta_y, \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t),
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Основне претпоставке, које су узете у обзир овако формулисаним обликом померања су:

- померања $u(x, y, z, t)$ у правцу осе x и $v(x, y, z, t)$ у правцу осе y садрже компоненте померања средње равни плоче u_0, v_0 , затим компоненте услед савијања $\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$ и компоненте услед трансверзалног смицања θ_x, θ_y ,
- померање у трансверзалном правцу, $w(x, y, z, t)$, је функција само x и y координате,
- померања су мала у поређењу са дебелином плоче,
- компонента деформације $\varepsilon_{zz} = 0$, односно нормални напон у трансверзалном правцу σ_{zz} је занемарљив у поређењу са напонима σ_{xx} и σ_{yy} у равни xy .

За мале деформације и умерене ротације трансверзалне нормале у односу на осу x и осу y , нормалне и смицајне компоненте деформације добијају се применом вон Карманових релација датих у једначини (3.9), које дефинишу нелинеарну везу померања и деформације. Узимајући претпостављени облик померања дат у (5.2), компоненте деформације, применом вон Кармановог тензора, добијају се на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} \right)^2 \\
&= \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \theta_x(x, y, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 \\
&= \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \right)^2}_{\varepsilon_{xx}^{(0)}} - z \underbrace{\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x^2}}_{k_{xx}^{(0)}} + f(z) \underbrace{\frac{\partial \theta_x(x, y, t)}{\partial x}}_{k_{xx}^{(1)}} \\
&= \varepsilon_{xx}^{(0)} + z k_{xx}^{(0)} + f(z) k_{xx}^{(1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} \right)^2 \\
&= \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \theta_y(x, y, t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 \\
&= \underbrace{\frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \right)^2}_{\varepsilon_{yy}^{(0)}} - z \underbrace{\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial y^2}}_{k_{yy}^{(0)}} + f(z) \underbrace{\frac{\partial \theta_y(x, y, t)}{\partial y}}_{k_{yy}^{(1)}} \\
&= \varepsilon_{yy}^{(0)} + z k_{yy}^{(0)} + f(z) k_{yy}^{(1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial z} = 0, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x \partial y} + f(z) \frac{\partial \theta_x(x, y, t)}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x \partial y} + f(z) \frac{\partial \theta_y(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\
&= \underbrace{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y}}_{\gamma_{xy}^{(0)}} \\
&\quad + z(-2) \underbrace{\frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial x \partial y}}_{k_{xy}^{(0)}} + f(z) \underbrace{\left(\frac{\partial \theta_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x, y, t)}{\partial x} \right)}_{k_{xy}^{(1)}} \\
&= \gamma_{xy}^{(0)} + z k_{xy}^{(0)} + f(z) k_{xy}^{(1)}, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial z} - \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + f'(z) \theta_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\
&= f'(z) \underbrace{\theta_x(x, y, t)}_{k_{xz}^{(2)}}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial z} - \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + f'(z) \theta_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\
&= f'(z) \underbrace{\theta_y(x, y, t)}_{k_{yz}^{(2)}}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Груписањем одоговарајућих чланова, вектор раванских деформација ε и вектор трансверзално смицајних деформација γ , могу се представити као:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + z\mathbf{k}^{(0)} + f(z)\mathbf{k}^{(1)}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= f'(z)\mathbf{k}^{(2)},\end{aligned}\quad (5.4)$$

при чему су вектори $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ дефинисани као:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (5.5)$$

Даље, линеарне и нелинеарне компоненте мембранске деформације $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$, деформације услед савијања $\mathbf{k}^{(0)}$, деформације услед раванског смицања $\mathbf{k}^{(1)}$ и деформације услед трансверзалног смицања $\mathbf{k}^{(2)}$ су:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} + \frac{1}{2}(w_{0,x})^2 \\ v_{0,y} + \frac{1}{2}(w_{0,y})^2 \\ u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}^{(0)} = \begin{Bmatrix} k_{xx}^{(0)} \\ k_{yy}^{(0)} \\ k_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{0,xx} \\ -w_{0,yy} \\ -2w_{0,xy} \end{Bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{Bmatrix} k_{xx}^{(1)} \\ k_{yy}^{(1)} \\ k_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}^{(2)} = \begin{Bmatrix} k_{xz}^{(2)} \\ k_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix},$$

док је $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$ први извод функције облика по координати у правцу дебљине плоче.

5.2 Конститутивне једначине еластичности и термоеластичности за ФГМ

Функционално градијентно распоређени материјали су класа композита која има континуалну промену особина у жељеном правцу, најчешће, како је то и речено у уводном делу овог поглавља, у правцу дебљине плоче. Структура ФГМ може бити сачињена од различитих изотропних или анизотропних конституената. С обзиром да су најчешће коришћени ФГМ сачињени од изотропних компоненти, управо такви ФГМ ће бити предмет анализе у оквиру ове дисертације. Имајући то у виду, плоча од ФГМ се може посматрати као плоча сачињена од изотропног, али нехомогеног материјала, због варирања особина у правцу дебљине плоче. За тако дефинисану класу симетрије, а на основу релација датих у поглављу 3.3, конститутивна једначина термоеластичности за ФГМ, према једначини (3.24), може се дефинисати као:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}(z) & C_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha(z)T(z) \\ \alpha(z)T(z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.7)$$

односно уколико нема суперпозиције деформација услед механичких оптерећења и деформација узрокованих слободним термичким ширењем, конститутивна релација еластичности за ФГМ је дата са:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}(z) & C_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (5.8)$$

при чему се коефицијенти конститутивног тензора еластичности, према (3.31), могу дефинисати преко инжењерских константи као:

$$\begin{aligned} C_{11}(z) &= C_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \\ C_{44}(z) &= C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \\ C_{12}(z) &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Због градијентне промене структуре плоче у правцу координате z , на основу (5.1), модул еластичности се може дефинисати:

$$E(z) = E_b + E_{tb} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \quad E_{tb} = E_t - E_b, \quad (5.10)$$

док се Поасонов коефицијент ν , због мале варијације вредности у правцу дебљине плоче, може сматрати константним, $\nu = const$.

Као што се може видети, коефицијенти конститутивног тензора су функционално зависни од координате z , што практично значи, да за $p \neq 0$ постоји коначан број равни паралелних средњој равни, при чему свака од тих равни има другачије вредности коефицијената тензора C_{ij} .

У конститутивној релацији (5.7) коефицијент термичког ширења, $\alpha(z)$, такође нема константну вредност, већ представља функцију положаја и може се дефинисати у складу са степеном функцијом (5.1):

$$\alpha(z) = \alpha_b + \alpha_{tb} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \quad \alpha_{tb} = \alpha_t - \alpha_b. \quad (5.11)$$

Када је промена температуре $T(z)$ у питању, у овој дисертацији разматраће се два различита случаја промене:

- равномерно промене температуре и
- градијентне промене температуре у правцу z координате.

Претпоставимо да је иницијална (почетна) температура плоче T_{ref} и да се током загревања, температура равномерно мења у свим пресецима плоче до неке коначне вредности T_f . Температура у произвољном пресеку z , као и сваком другом паралелном пресеку може се израчунати као:

$$T(z) = T_f - T_{ref} = const. \quad (5.12)$$

Са друге стране, у случају претпоставке о градијентној промени температуре у правцу z координате, температура се од вредности T_b , на доњој основи плоче, до вредности T_t , на горњој основи плоче, мења у складу са степеном функцијом, тако да је температура у произвољном пресеку z :

$$T(z) = T_b + (T_t - T_b) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^s, \quad (5.13)$$

при чему експонент функције s може да се мења у границама $0 < s < \infty$. За вредности $s=1$, температура има линеарну промену у правцу дебљине плоче, односно нелинеарну промену за $s > 1$.

5.3 Једначине равнотеже

С обзиром да су у овој дисертацији анализирани различити статички проблеми, као што су проблеми извијања плоча услед утицаја температуре, савијање плоче, затим интеракција плоче и еластичне подлоге за поменуте случајеве оптерећења, комплетан поступак извођена и решавања једначина равнотеже је дат само за случај анализе плоче услед утицаја температуре, док ће за остале случајеве бити приказани само коначни облици једначина равнотеже. Једначине равнотеже су изведене применом принципа минималне укупне потенцијалне енергије описаног у поглављу 0.

5.3.1 Извијање услед утицаја температуре на плоче од ФГМ

За извођење једначина равнотеже, применом принципа минимума укупне потенцијалне енергије, најпре је неопходно, за термоеластични конститутивни модел дат у (5.7), дефинисати енергију деформације у облику:

$$U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_{xx} [\varepsilon_{xx} - \alpha(z)T(z)] + \sigma_{yy} [\varepsilon_{yy} - \alpha(z)T(z)] + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) dAdz, \quad (5.14)$$

где је A – површина плоче.

Заменом кинематичких веза (5.3) у претходној једначини и интегралњем по променљивој z добија се:

$$U = \int_A (N_{xx}\varepsilon_{xx}^{(0)} - N_{xx}^T + N_{yy}\varepsilon_{yy}^{(0)} - N_{yy}^T + N_{xy}\gamma_{xy}^{(0)} + M_{xx}k_{xx}^{(0)} + M_{yy}k_{yy}^{(0)} + M_{xy}k_{xy}^{(0)} + P_{xx}k_{xx}^{(1)} + P_{yy}k_{yy}^{(1)} + P_{xy}k_{xy}^{(1)} + R_x k_{xz}^{(2)} + R_y k_{yz}^{(2)}) dA, \quad (5.15)$$

при чему су главни вектори сила, главни моменти и главни моменти вишег реда, добијени као:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \boldsymbol{\varepsilon} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \mathbf{k}^{(0)} z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \mathbf{k}^{(1)} f(z) dz - \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_T \alpha(z) T(z) dz, \\ \mathbf{M} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \boldsymbol{\varepsilon} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \mathbf{k}^{(0)} z^2 dz + \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \mathbf{k}^{(1)} z f(z) dz - \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_T z \alpha(z) T(z) dz, \\ \mathbf{P} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} f(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \boldsymbol{\varepsilon} f(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} f(z) dz + \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \mathbf{k}^{(0)} z f(z) dz + \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_p \mathbf{k}^{(1)} (f(z))^2 dz \\ &\quad - \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_T f(z) \alpha(z) T(z) dz, \\ \mathbf{R} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau} f'(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_s \mathbf{k}^{(2)} (f'(z))^2 dz, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где се матрице у развијеном облику могу представити као:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, & \mathbf{M} &= \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, & \mathbf{P} &= \begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix}, & \mathbf{R} &= \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{C}_p &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_s &= \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_T &= \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} \\ C_{11} + C_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, & (5.17) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, & \boldsymbol{\tau} &= \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

У једначини (5.16) груписањем чланова уз елементе конститутивне матрице могу се дефинисати нове матрице чије су компоненте:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} dz, & B_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z dz, \\
D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} f(z) dz, & E_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z^2 dz, & (i, j) &= (1, 2, 6), \\
F_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} z f(z) dz, & G_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} (f(z))^2 dz, \\
H_{lr} &= \int_{h^-}^{h^+} C_{lr} (f'(z))^2 dz, & & & (l, r) &= (4, 5),
\end{aligned} \tag{5.18}$$

тако да се вектори оптерећења сада могу дефинисати у облику:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & D_{ij} \\ B_{ij} & E_{ij} & F_{ij} \\ D_{ij} & F_{ij} & G_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \\ \mathbf{k}^{(0)} \\ \mathbf{k}^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^T \\ \mathbf{M}^T \\ \mathbf{P}^T \end{Bmatrix}, \\
\{\mathbf{R}\} &= [H_{lr}] \{\mathbf{k}^{(2)}\},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

где су компоненте сила и момената настале услед утицаја температуре:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_T \alpha(z) T(z) dz, \\
\mathbf{M}^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_T z \alpha(z) T(z) dz, \\
\mathbf{P}^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_T f(z) \alpha(z) T(z) dz,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

при чему су матрице \mathbf{N}^T , \mathbf{M}^T , \mathbf{P}^T записани преко компонената:

$$\mathbf{N}^T = \begin{Bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}^T = \begin{Bmatrix} M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T = \begin{Bmatrix} P_{xx}^T \\ P_{yy}^T \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.21}$$

Применом принципа минимума укупне потенцијалне енергије датог у (3.42) на једначину (5.15) добија се:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_A (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xx} \delta k_{xx}^{(0)} + M_{yy} \delta k_{yy}^{(0)} + M_{xy} \delta k_{xy}^{(0)} \\
&\quad + P_{xx} \delta k_{xx}^{(1)} + P_{yy} \delta k_{yy}^{(1)} + P_{xy} \delta k_{xy}^{(1)} + R_x \delta k_{xz}^{(2)} + R_y \delta k_{yz}^{(2)}) dA = 0.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

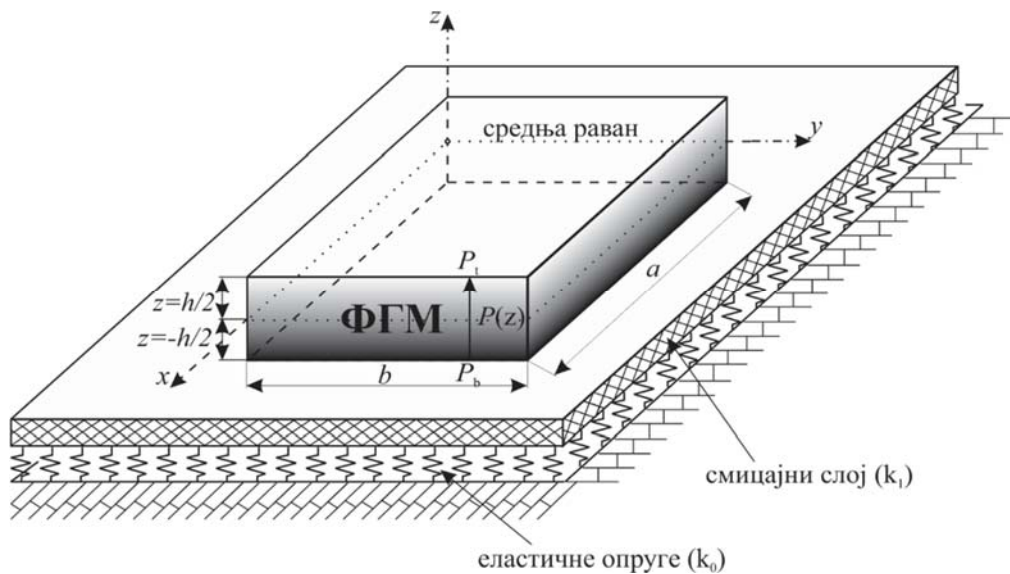
Коришћењем теорије варијационог рачуна и интегралњем једначине (5.22), а потом и груписањем чланова уз δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta_x$ и $\delta \theta_y$ добијају се једначине равнотеже, као резултат примене смицајне деформационе теорије вишег реда, у облику:

$$\begin{aligned} \delta u_0: & N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0, \\ \delta v_0: & N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0, \\ \delta w_0: & M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xx}w_{0,xx} + 2N_{xy}w_{0,xy} + N_{yy}w_{0,yy} = 0, \\ \delta \theta_x: & P_{xx,x} + P_{xy,y} - R_x = 0, \\ \delta \theta_y: & P_{xy,x} + P_{yy,y} - R_y = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

5.3.2 Извијање услед утицаја температуре на плоче од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу

Математички модели плоче на еластичној подлози се често користе да, уз дозвољене апроксимације, опишу одређене проблеме у различитим областима инжењерства. Аналитичка решења једноставнијих примера су погодан модел да се разуме физичка суштина проблема и да се јасно сагледају претпоставке на којима се, затим, заснивају и знатно сложенији прорачунски модели и развијају комерцијални софтвери. Из претходно поменутих разлога, велики број аутора који се бави проблемима из области ФГМ, поред анализе плоча, разматра и проблеме интеракције плоче и еластичне подлоге.

На слици 5.2 приказана је плоча од ФГМ ослоњена на еластичну подлогу која је описана Винклер-Пастернаковим математичким моделом. Еластичност подлоге описана је системом вертикалних, линеарно еластичних опруга, док су смицајне интеракције између плоче и еластичне подлоге описане слојем фиктивних, нестишљивих клизних елемената који повезују опруге и који се деформишу само смицањем.



Слика 5.2 Геометрија плоче од ФГМ ослоњене на еластичну подлогу, описана Винклер-Пастернаковим моделом

Ефективно контактано оптерећење, услед интеркације плоче и еластичне подлоге, се према (3.54) може дефинисати као:

$$q_e(x, y) = k_0 w(x, y) - k_1 \nabla^2 w(x, y). \quad (5.24)$$

На основу (3.55) енергија деформације еластичне подлоге, применом Винклер-Пастернаковог модела еластичне подлоге, дефинисана је са:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \left\{ k_0 w^2 + k_1 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dA, \quad (5.25)$$

при чему су:

- k_0 - коефицијент трансверзалне крутости еластичне подлоге (Винклеров коефицијент),
- k_1 - коефицијент смицајне крутости (Пастернаков коефицијент).

На основу (5.25) и узимајући енергију деформације плоче дефинисану у (5.15), применом принципа минимума укупне потенцијалне енергије:

$$\delta U + \delta U_e = \delta(U + U_e) \equiv \delta \Pi = 0, \quad (5.26)$$

добија се:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_A & (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xx} \delta k_{xx}^{(0)} + M_{yy} \delta k_{yy}^{(0)} + M_{xy} \delta k_{xy}^{(0)} \\ & + P_{xx} \delta k_{xx}^{(1)} + P_{yy} \delta k_{yy}^{(1)} + P_{xy} \delta k_{xy}^{(1)} + R_x \delta k_{xz}^{(2)} + R_y \delta k_{yz}^{(2)}) dA \\ & + \int_A \left\{ k_0 w \delta w + k_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} dA = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Решавањем једначине (5.27) и груписањем чланова уз δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta_x$ и $\delta \theta_y$, добијају се једначине равнотеже за плочу од ФГМ, ослоњене на еластичну подлогу и описане Винклер-Пастернаковим математичким моделом, у облику:

$$\begin{aligned} \delta u_0: & N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0, \\ \delta v_0: & N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0, \\ \delta w_0: & M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xx} w_{0,xx} + 2N_{xy} w_{0,xy} + N_{yy} w_{0,yy} - k_0 w_0 + k_1 (w_{0,xx} + w_{0,yy}) = 0, \quad (5.28) \\ \delta \theta_x: & P_{xx,x} + P_{xy,y} - R_x = 0, \\ \delta \theta_y: & P_{xy,x} + P_{yy,y} - R_y = 0. \end{aligned}$$

5.3.2.1 Једначине стабилности

Имајући у виду да се проблеми извијања свде на проверу стабилности тела, потребно је дефинисати и једначине стабилности. Једначине стабилности за плочу, могу се извести коришћењем, у литератури познате, ткз. методе суседне равнотеже (*adjacent equilibrium method*) [168]. Равнотежно стање плоче под утицајем температуре може бити дефинисано

преко компоненти померања $u_0, v_0, w_0, \theta_{x0}$ и θ_{y0} . Нека су компоненте померања суседне стабилне конфигурације дате са:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1, & \theta_x &= \theta_{x0} + \theta_{x1}, \\ v &= v_0 + v_1, & \theta_y &= \theta_{y0} + \theta_{y1}, \\ w &= w_0 + w_1, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где су $u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}$ и θ_{y1} компоненте померања произвољно мале девијације у односу на стабилну конфигурацију. Претпостављајући да је температура константна у ху-равни плоче и да се мења једино у правцу дебљине плоче, једначине стабилности се добијају заменом једначина (5.29) и (5.19) у једначину (5.23). У тако изведеним једначинама, чланови $u_0, v_0, w_0, \theta_{x0}$ и θ_{y0} не фигуришу, јер испуњавају услов равнотеже из једначине (5.23). Према томе, једначине стабилности плоче од ФГМ су облика:

$$\begin{aligned} \delta u_0: & N_{xx,x}^1 + N_{xy,y}^1 = 0, \\ \delta v_0: & N_{yy,y}^1 + N_{xy,x}^1 = 0, \\ \delta w_0: & M_{xx,xx}^1 + 2M_{xy,xy}^1 + M_{yy,yy}^1 + N_{xx}^0 w_{1,xx} + 2N_{xy}^0 w_{1,xy} + N_{yy}^0 w_{1,yy} = 0, \\ \delta \theta_x: & P_{xx,x}^1 + P_{xy,y}^1 - R_x^1 = 0, \\ \delta \theta_y: & P_{xy,x}^1 + P_{yy,y}^1 - R_y^1 = 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

односно, за случај интеракције плоче и еластичне подлоге:

$$\begin{aligned} \delta u_0: & N_{xx,x}^1 + N_{xy,y}^1 = 0, \\ \delta v_0: & N_{yy,y}^1 + N_{xy,x}^1 = 0, \\ \delta w_0: & M_{xx,xx}^1 + 2M_{xy,xy}^1 + M_{yy,yy}^1 + N_{xx}^0 w_{1,xx} + 2N_{xy}^0 w_{1,xy} + N_{yy}^0 w_{1,yy} - k_0 w_1 + k_1 (w_{1,xx} + w_{1,yy}) = 0, \\ \delta \theta_x: & P_{xx,x}^1 + P_{xy,y}^1 - R_x^1 = 0, \\ \delta \theta_y: & P_{xy,x}^1 + P_{yy,y}^1 - R_y^1 = 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где су N_{xx}^0, N_{yy}^0 и N_{xy}^0 резултанте сила пре извијања:

$$N_{xx}^0 = N_{yy}^0 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\alpha(z)T(z)}{1-\nu} dz, \quad N_{xy}^0 = 0. \quad (5.32)$$

5.3.2.2 Аналитичко решавање једначина стабилности

Парцијалне диференцијалне једначине (5.30) и (5.31) је могуће решити аналитичким и нумеричким путем. За добијање аналитичких решења претпостављени облици решења и контурни услови су усвојени у складу са Навијеовим поступцима решавања коришћеним у радовима [71, 150, 169]. У оквиру развијеног MATLAB кода за нелинеарну статичку анализу, развијена је и имплементирана процедура добијања резултата комбинацијом

симболичких и нумеричких вредности коефицијената који фигуришу у проблемима ове врсте.

За правоугаону плочу страница a и b , код које су дозвољене ротације дуж страница плоче и ограничене translације, према [150], контурни услови су:

$$\begin{aligned} u_1 = v_1 = w_1 = \theta_{y1} = N_{xx}^1 = M_{xx}^1 = P_{xx}^1 = 0, \text{ на страницама код којих је } x = 0 \text{ односно } x = a, \\ u_1 = v_1 = w_1 = \theta_{x1} = N_{yy}^1 = M_{yy}^1 = P_{yy}^1 = 0, \text{ на страницама код којих је } y = 0 \text{ односно } y = b. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Узимајући у обзир претходно дефинисане контурне услове на основу [73] могуће је претпоставити Навијеов облик решења, који задовољава (5.33), као:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}^1 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ v_1(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}^1 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ w_1(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^1 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \theta_{x1}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn}^1 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \theta_{y1}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn}^1 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

где су $U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{mn}^1, T_{xmn}^1, T_{ymn}^1$ произвољни параметри које треба одредити, а m и n представљају број полуталаса извијања у правцу оса x и y , респективно.

Даље, заменом Навијеових облика решења (5.34) у (5.30) једначине равнотеже се могу записати у матричном облику:

$$[\mathbf{K} - \mathbf{I}] \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (5.35)$$

где су \mathbf{K} и $\bar{\mathbf{U}}$ дефинисани као:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ & \text{сим} & & K_{44} & K_{45} \\ & & & & K_{55} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \\ V_{mn}^1 \\ W_{mn}^1 \\ T_{xmn}^1 \\ T_{ymn}^1 \end{Bmatrix}. \quad (5.36)$$

Коефицијенти K_{ij} , ($i, j = 1 \div 5$) су дефинисани као:

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, & K_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), & K_{13} &= -\alpha(\alpha^2 B_{11} + \beta^2(B_{12} + 2B_{66})), \\
K_{14} &= \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66}, & K_{15} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{16}), & K_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, \\
K_{23} &= -\beta(\alpha^2(B_{12} + 2B_{66}) + \beta^2 B_{22}), & K_{24} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{66}), \\
K_{25} &= \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22}, & K_{33} &= \alpha^4 E_{11} + 2\alpha^2 \beta^2 E_{12} + 4\alpha^2 \beta^2 E_{66} + \beta^4 E_{22}, \\
K_{34} &= -\alpha^3 F_{11} - \alpha\beta^2 F_{12} - 2\alpha\beta^2 F_{66}, & K_{35} &= -\alpha^2 \beta F_{12} - 2\alpha^2 \beta F_{66} - \beta^3 F_{22}, \\
K_{44} &= H_{55} + \alpha^2 G_{11} + \alpha^2 G_{66}, & K_{45} &= \alpha\beta(G_{12} + G_{66}), & K_{55} &= H_{44} + \alpha^2 G_{66} + \alpha^2 G_{22},
\end{aligned} \tag{5.37}$$

док је матрица I_{ij} , ($i, j = 1 \div 5$) дефинисана као:

$$\mathbf{I} = \begin{cases} 0, \\ \alpha^2 N_x^0 + \beta^2 N_y^0, \end{cases} \quad (i, j = 3), \tag{5.38}$$

где је: $\alpha = \frac{m\pi}{a}$, $\beta = \frac{n\pi}{b}$.

Матрице $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}$ за $(i, j) = (1, 2, 6)$ и H_{lr} за $(l, r) = (4, 5)$ дате су у једначини (5.18).

Да би постојала нетривијална решења хомогеног система једначина, потребно је да детерминанта матрице система (5.35) буде једнака нули, односно да је:

$$|\mathbf{K} - \mathbf{I}| = 0. \tag{5.39}$$

Критична темепратура извијања, рачунаће се, како је то већ раније поменуто, за случај равномерне промене температуре и градијентне промене температуре. У случају равномерне промене температуре у правцу дебљине плоче, дате у (5.12), критична температура извијања је $\Delta T_{cr} = T_f - T_{ref}$. За случај градијентне линеарне ($s = 1$) и нелинеарне ($1 < s < \infty$) промене температуре у правцу дебљине плоче, дате у (5.13), критична температура извијања је у облику $\Delta T_{cr} = T_t - T_b$.

5.3.3 Савијање плоча од ФГМ

Нека је плоча оптерећена произвољним трансверзалним оптерећењем $q(x, y)$. Рад услед спољашњег оптерећења дефинисан је са:

$$V = -\frac{1}{2} \int_A q w dA. \tag{5.40}$$

Како је у питању савијање без утицаја температуре, енергија деформације плоче добија се из (5.15) елиминацијом сила N_{xx}^T и N_{yy}^T :

$$U = \int_A (N_{xx}\varepsilon_{xx}^{(0)} + N_{yy}\varepsilon_{yy}^{(0)} + N_{xy}\gamma_{xy}^{(0)} + M_{xx}k_{xx}^{(0)} + M_{yy}k_{yy}^{(0)} + M_{xy}k_{xy}^{(0)} + P_{xx}k_{xx}^{(1)} + P_{yy}k_{yy}^{(1)} + P_{xy}k_{xy}^{(1)} + R_x k_{xz}^{(2)} + R_y k_{yz}^{(2)})dA, \quad (5.41)$$

Заменом енергије деформације плоче (5.41) и рада услед спољашњег оптерећења (5.40) у једначину која дефинише принцип минимума укупне потенцијалне енергије:

$$\delta U + \delta V = \delta(U + V) \equiv \delta \Pi = 0, \quad (5.42)$$

добија се:

$$\delta \Pi = \int_A (N_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{(0)} + N_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^{(0)} + N_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(0)} + M_{xx}\delta k_{xx}^{(0)} + M_{yy}\delta k_{yy}^{(0)} + M_{xy}\delta k_{xy}^{(0)} + P_{xx}\delta k_{xx}^{(1)} + P_{yy}\delta k_{yy}^{(1)} + P_{xy}\delta k_{xy}^{(1)} + R_x\delta k_{xz}^{(2)} + R_y\delta k_{yz}^{(2)})dA - \int_A q\delta w dA = 0. \quad (5.43)$$

Заменом компоненти деформације и применом теорије варијационог рачуна, добијају се једначине равнотеже:

$$\begin{aligned} \delta u_0: \quad N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0, \\ \delta v_0: \quad N_{yy,y} + N_{xy,x} &= 0, \\ \delta w_0: \quad M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xx}w_{0,xx} + 2N_{xy}w_{0,xy} + N_{yy}w_{0,yy} + q &= 0, \\ \delta \theta_x: \quad P_{xx,x} + P_{xy,y} - R_x &= 0, \\ \delta \theta_y: \quad P_{xy,x} + P_{yy,y} - R_y &= 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

5.3.4 Савијање плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу

За случај плоче ослоњене на еластичну подлогу и оптерећене произвољним трансверзалним оптерећењем $q(x, y)$, укупна потенцијална енергија се добија као збир енергије деформације плоче (5.41), рада услед спољашњег оптерећења (5.40) и енергије деформације еластичне подлоге (5.25). Применом принципа минимума укупне потенцијалне енергије:

$$\delta U + \delta V + \delta U_e = \delta(U + V + U_e) \equiv \delta \Pi = 0, \quad (5.45)$$

добија се:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_A (N_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{(0)} + N_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^{(0)} + N_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(0)} + M_{xx}\delta k_{xx}^{(0)} + M_{yy}\delta k_{yy}^{(0)} + M_{xy}\delta k_{xy}^{(0)} + P_{xx}\delta k_{xx}^{(1)} + P_{yy}\delta k_{yy}^{(1)} + P_{xy}\delta k_{xy}^{(1)} + R_x\delta k_{xz}^{(2)} + R_y\delta k_{yz}^{(2)})dA - \int_A q\delta w dA \\ + \int_A \left\{ k_0 w \delta w + k_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} dA = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Увођењем компоненти деформације изражених преко претпостављених облика померања, применом теорије варијационог рачуна и интегралњем једначине (5.46), добијају се једначине равнотеже :

$$\begin{aligned}
\delta u_0: N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0, \\
\delta v_0: N_{yy,y} + N_{xy,x} &= 0, \\
\delta w_0: M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xx}w_{0,xx} + 2N_{xy}w_{0,xy} + N_{yy}w_{0,yy} \\
&\quad + q - k_0 w_0 + k_1 (w_{0,xx} + w_{0,yy}) = 0, \\
\delta \theta_x: P_{xx,x} + P_{xy,y} - R_x &= 0, \\
\delta \theta_y: P_{xy,x} + P_{yy,y} - R_y &= 0.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

5.3.4.1 Аналитичко решавање једначина равнотеже

Увођењем Навијеових облика решења (5.34), систем парцијалних диференцијалних једначина вишег реда (5.44) преводи се у систем нелинеарних алгебарских једначина. За решавање система нелинеарних алгебарских једначина коришћен је Њутн - Рапсонов метод (*Newton - Raphson method*) [170].

Ако се свака од једначина равнотеже дефинише као функција амплитуда померања, добија се систем нелинеарних једначина у облику:

$$\begin{aligned}
f_1(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) &= 0, \\
f_2(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) &= 0, \\
f_3(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) &= 0, \\
f_4(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) &= 0, \\
f_5(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

или у матричном облику:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}, \tag{5.49}$$

где је $\bar{\mathbf{U}}$ вектор независно променљивих, док је $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T$ вектор који садржи функције $f_i(\bar{\mathbf{U}})$:

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}) = \begin{Bmatrix} f_1(\bar{\mathbf{U}}) \\ f_2(\bar{\mathbf{U}}) \\ f_3(\bar{\mathbf{U}}) \\ f_4(\bar{\mathbf{U}}) \\ f_5(\bar{\mathbf{U}}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) \\ f_2(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) \\ f_3(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) \\ f_4(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) \\ f_5(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}) \end{Bmatrix}. \tag{5.50}$$

За решавање система нелинеарних једначина Њутн-Рапсоновом методом потребно је увести Јакобијан (*Jacobian*) система дефинисан као:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)}{\partial(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_{mn}} & \frac{\partial f_2}{\partial U_{mn}} & \frac{\partial f_3}{\partial U_{mn}} & \frac{\partial f_4}{\partial U_{mn}} & \frac{\partial f_5}{\partial U_{mn}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial V_{mn}} & \frac{\partial f_2}{\partial V_{mn}} & \frac{\partial f_3}{\partial V_{mn}} & \frac{\partial f_4}{\partial V_{mn}} & \frac{\partial f_5}{\partial V_{mn}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial W_{mn}} & \frac{\partial f_2}{\partial W_{mn}} & \frac{\partial f_3}{\partial W_{mn}} & \frac{\partial f_4}{\partial W_{mn}} & \frac{\partial f_5}{\partial W_{mn}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial T_{xmn}} & \frac{\partial f_2}{\partial T_{xmn}} & \frac{\partial f_3}{\partial T_{xmn}} & \frac{\partial f_4}{\partial T_{xmn}} & \frac{\partial f_5}{\partial T_{xmn}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial T_{ymn}} & \frac{\partial f_2}{\partial T_{ymn}} & \frac{\partial f_3}{\partial T_{ymn}} & \frac{\partial f_4}{\partial T_{ymn}} & \frac{\partial f_5}{\partial T_{ymn}} \end{bmatrix}^T. \quad (5.51)$$

Ако $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}}_0$ представља прво тачно решење, узастопне апроксимације у односу на решење се добијају из:

$$\bar{\mathbf{U}}_{n+1} = \bar{\mathbf{U}}_n - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_n) = \bar{\mathbf{U}}_n + \Delta \bar{\mathbf{U}}_{n+1}, \quad (5.52)$$

при чему је $\Delta \bar{\mathbf{U}}_{n+1} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_n)$.

Како су нумеричке методе за решавање система нелинеарних једначина приближне методе, које не дају тачно решење, извршавање имплементираног алгорита се зауставља када се решење добије у границама дефинисане толеранције тачности ε .

Критеријум конвергенције за решење система нелинеарних једначина може бити различит. Тако, на пример, као критеријум конвергенције може се узети да је максимум апсолутних вредности $f_i(\bar{\mathbf{U}}_n)$ мањи од дефинисане толеранције ε :

$$\max_i |f_i(\bar{\mathbf{U}}_n)| < \varepsilon. \quad (5.53)$$

Друга могућност за критеријум конвергенције је да вредност вектора $f_i(\bar{\mathbf{U}}_n)$ буде мања од дефинисане толеранције:

$$|f_i(\bar{\mathbf{U}}_n)| < \varepsilon. \quad (5.54)$$

Такође, критеријум конвергенције може бити дефинисан тако да разлика између узастопних вредности решења буде мања од толеранције ε :

$$\max_i |(\bar{U}_i)_{n+1} - (\bar{U}_i)_n| < \varepsilon, \quad (5.55)$$

или:

$$|\Delta \bar{\mathbf{U}}_n| = |\bar{\mathbf{U}}_{n+1} - \bar{\mathbf{U}}_n| < \varepsilon. \quad (5.56)$$

Главни услов који мора бити задовољен при решавању система нелинеарних једначина применом Њутн-Рапсонове методе је тај да све функције морају да буду диференцијабилне, тј. да морају да постоје сви изводи:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \bar{U}_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \text{ и } 5, \quad (5.57)$$

који се појављују у Јакобијану (5.51).

За описану Њутн-Рапсонову методу за решавање система парцијалних диференцијалних једначина вишег реда развијен је и имплементиран MATLAB код у програму за статичку и динамичку анализу плоча од ФГМ који је настао као резултат ове дисертације.

6 ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА ПЛОЧА ОД ФГМ ПРИМЕНОМ СМИЦАЈНЕ ДЕФОРМАЦИОНЕ ТЕОРИЈЕ ВИШЕГ РЕДА

Како је иницијална идеја концепта ФГМ настала у циљу превазилажења проблема деламинације (раслојавања) ламинатних композитних материјала, а имајући у виду да до деламинације на интерфејсу најчешће долази услед динамичких оптерећења, недвосмислен је значај динамичке анализе. Динамичка анализа обухвата широк спектар проблема, али за правилну процену понашања конструкција изложених динамичким силама пресудан утицај има познавање сопствених кружних учетаности (фреквенција). Из поменутих разлога, у оквиру овог поглавља разматраће се проблеми слободних непригушених осцилација плоча од ФГМ и плоча ослоњених на еластичну подлогу. Анализа ће се вршити у области малих деформација, тако да ће најпре бити успостављене линеарне везе између деформације и претпостављених облика померања заснованих на смицајној деформационој теорији вишег реда која укључује функције облика. У општем случају кретања материјалног система, диференцијалне једначине кретања можемо да напишемо, на пример, применом Лагранжевих (*Lagrange*) једначина друге врсте или коришћењем Даламберовим (*d'Alembert*) принципом. У оквиру ове дисертације, диференцијалне једначине кретања континуума изведене су применом Хамилтоновог принципа. На крају овог поглавља развијен је теоријски поступак аналитичког решавања једначина кретања применом Навијеових претпостављених облика померања која дефинишу кинематичке контурне услове за слободно ослоњену правоугаону плочу.

6.1 Кинематичке релације померање-деформација

Како је предмет разматрања у оквиру овог поглавља линеарна динамичка анализа, кинематичке везе померања и деформације биће дефинисане под претпоставком малих деформација. Узимајући претпостављени облик померања заснован на HSDT, дат у (5.2), и применом тензора малих (инфинитезималних) деформација (3.8), линеарна веза померање-деформација може се, уз занемаривање нелинеарних чланова, дефинисати аналогно изразу (5.3). Наиме, груписањем одоговарајућих чланова, вектор раванских деформација $\boldsymbol{\varepsilon}$ и вектор трансверзално смицајних деформација $\boldsymbol{\gamma}$, могу се представити као у (5.4):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + z\mathbf{k}^{(0)} + f(z)\mathbf{k}^{(1)}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= f'(z)\mathbf{k}^{(2)},\end{aligned}\tag{6.1}$$

при чему, због елиминисања нелинеарних компоненти, вектор раванске (мембранске) деформације $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$ добија облик:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} + \frac{1}{2}(w_{0,x})^2 \\ v_{0,y} + \frac{1}{2}(w_{0,y})^2 \\ u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y} \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}. \quad (6.2)$$

Остале компоненте деформације, услед савијања $\mathbf{k}^{(0)}$, услед раванског смицања $\mathbf{k}^{(1)}$ и услед трансверзалног смицања $\mathbf{k}^{(2)}$, задржавају облик дефинисан у (5.6).

6.2 Једначине кретања

Најчешће коришћени метод за добијање динамичких једначина кретања континуума, па самим тим и плоча од ФГМ посматраних у макромеханичком смислу, је Хамилтонов принцип дефинисан у поглављу 0. Хамилтонов принцип представља генерализацију принципа виртуалног рада на динамичке системе и овим принципом се претпоставља да систем који се разматра карактеришу две функције енергије: кинетичка енергија K и потенцијална енергија Π . Како се у оквиру ове дисертације разматрају слободне непригушене осцилације плоче од ФГМ и плоче од ФГМ ослоњене на еластичну подлогу, следи опис поступка добијања једначина кретања за поменуте проблеме.

6.2.1 Слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ

С обзиром да је укупна потенцијална енергија Π , представљена као збир енергије деформације плоче и рада услед спољашњег оптерећења, дефинисана у поглављу 5.3, за примену Хамилтоновог принципа, неопходно је још дефинисати кинетичку енергију у облику:

$$K = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dAdz, \quad (6.3)$$

при чему је:

$\rho(z)$ - густина материјала у произвољном пресеку z ,

u, v, w - претпостављена померања у правцима оса x, y, z , респективно.

Као што се може видети, као последица градијентне структуре материјала плоче, густина материјала, као и раније дефинисани модул еластичности, представљају функције координате z . Промена густине у правцу дебљине плоче дефинисана је, на основу степене функције дате у (5.1), као:

$$\rho(z) = \rho_b + \rho_{tb} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \quad \rho_{tb} = \rho_t - \rho_b, \quad (6.4)$$

где су ρ_b и ρ_t густина материјала на доњој и горњој ивици плоче.

Заменом израза за енергију деформације датог у (5.41) и кинетичке енергије (6.3) у израз за Хамилтонов принцип (3.47), добија се:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} (K - U) dt = & \int_{t_1}^{t_2} \left[- \int_A (N_{xx} \varepsilon_{xx}^{(0)} + N_{yy} \varepsilon_{yy}^{(0)} + N_{xy} \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xx} k_{xx}^{(0)} + M_{yy} k_{yy}^{(0)} + M_{xy} k_{xy}^{(0)} \right. \\ & + P_{xx} k_{xx}^{(1)} + P_{yy} k_{yy}^{(1)} + P_{xy} k_{xy}^{(1)} + R_x k_{xz}^{(2)} + R_y k_{yz}^{(2)}) dA \\ & \left. + \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dA dz \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ако се сада у последњи израз замене изрази за деформације (6.2) и (5.6) изражене преко претпостављених облика померања и примени теорија варијационог рачуна и интегралне, добијају се једначине кретања у следећем облику:

$$\begin{aligned} \delta u_0: \quad N_{xx,x} + N_{xy,y} &= I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{w}_{,x} + I_4 \ddot{\theta}_{,x}, \\ \delta v_0: \quad N_{yy,y} + N_{xy,x} &= I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{,y} + I_4 \ddot{\theta}_{,y}, \\ \delta w_0: \quad M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} &= I_1 \ddot{w} + I_2 (\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y}) - I_3 (\ddot{w}_{,xx} + \ddot{w}_{,yy}) + I_5 (\ddot{\theta}_{,xx} + \ddot{\theta}_{,yy}), \\ \delta \theta_x: \quad P_{xx,x} + P_{xy,y} - R_x &= I_4 \ddot{u} - I_5 \ddot{w}_{,x} + I_6 \ddot{\theta}_{,x}, \\ \delta \theta_y: \quad P_{xy,x} + P_{yy,y} - R_y &= I_4 \ddot{v} - I_5 \ddot{w}_{,y} + I_6 \ddot{\theta}_{,y}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где су I_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$ и 6) чланови услед инерције, дефинисани као:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz, & I_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz, \\ I_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) f(z) dz, & I_4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz, \\ I_5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z f(z) dz, & I_6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (f(z))^2 dz. \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.2.2 Слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу

За дефинисање једначина кретања у случају ослањања плоче од ФГМ на еластичну подлогу, потребно је, као што је описано код статичке анализе, увести енергију деформације еластичне подлоге. Као и у статичкој анализи, и код динамичке анализе слободних непригушених осцилација плоче од ФГМ ослоњене на еластичну подлогу користиће се Винклер-Пастернаков математички модел за описивање еластичне подлоге. Заменом енергије деформације плоче (5.41), енергије деформације еластичне подлоге (5.25) и кинетичке енергије (6.3) у Хамилтонов принцип, добија се:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (U + U_e)] dt = & \int_{t_1}^{t_2} \left[- \int_A (N_{xx} \varepsilon_{xx}^{(0)} + N_{yy} \varepsilon_{yy}^{(0)} + N_{xy} \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xx} k_{xx}^{(0)} + M_{yy} k_{yy}^{(0)} + M_{xy} k_{xy}^{(0)} \right. \\
& + P_{xx} k_{xx}^{(1)} + P_{yy} k_{yy}^{(1)} + P_{xy} k_{xy}^{(1)} + R_x k_{xz}^{(2)} + R_y k_{yz}^{(2)}) dA \\
& - \int_A \left\{ k_0 w \delta w + k_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} dA \\
& \left. + \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dA dz \right] dt = 0.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Интеграљењем претходне једначине и груписањем чланова уз δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta_x$ и $\delta \theta_y$ добијају се једначине кретања за плоче од ФГМ ослоњене на еластичну подлогу, која је описана Винклер-Пастернаковим математичким моделом, у облику:

$$\begin{aligned}
\delta u_0: \quad N_{xx,x} + N_{xy,y} &= I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{w}_{,x} + I_4 \ddot{\theta}_x, \\
\delta v_0: \quad N_{yy,y} + N_{xy,x} &= I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{,y} + I_4 \ddot{\theta}_y, \\
\delta w_0: \quad M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} - k_0 w_0 + k_1 (w_{0,xx} + w_{0,yy}) &= I_1 \ddot{w} + I_2 (\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y}) \\
&\quad - I_3 (\ddot{w}_{,xx} + \ddot{w}_{,yy}) + I_5 (\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{\theta}_{y,y}), \\
\delta \theta_x: \quad P_{xx,x} + P_{xy,y} - R_x &= I_4 \ddot{u} - I_5 \ddot{w}_{,x} + I_6 \ddot{\theta}_x, \\
\delta \theta_y: \quad P_{xy,x} + P_{yy,y} - R_y &= I_4 \ddot{v} - I_5 \ddot{w}_{,y} + I_6 \ddot{\theta}_y.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

6.3 Аналитичко решавање једначина кретања

С обзиром да претходно формиране једначине кретања представљају парцијалне диференцијалне једначина вишег реда, за које није увек могуће наћи решења у затвореном облику, неопходно је пронаћи одговарајући математички алат којим ће се оне решити.

Аналитичке методе решавања, иако ограничене на проблеме који имају једноставнију геометрију, контурне услове и задата оптерећења, могу да дају јасан увид у физички смисао проблема и њихова решења су изузетно прецизна. Како су аналитичка решења од изузетне важности у развоју нових теоријских модела, пре свега због могућности поменутих физичких тумачења проблема, а имајући у виду да се у оквиру ове дисертације развијао нови модел плоче од ФГМ заснован на HSDT теорији, у наставку ће бити приказано аналитичко решавање једначина кретања за правоугаону плочу.

За прорачуне сложених инжењерских конструкција, које са собом повлаче и решавање система великог броја једначина, неопходна је употреба нумеричких метода које дају приближне, али задовољавајуће резултате. Најчешће употребљаване нумеричке методе у макромеханичкој анализи су метода коначних разлика (*Finite difference methode - FDM*) и метода коначних елемената (*Finite element methode - FEM*). Развој рачунарске технике довео је до експанзије употребе нумеричких метода, тако да су данас нумеричке симулације често

обавезан део пројектне документације. Употребом нумеричких метода може се остварити значајна уштеда у економског смислу, а нарочито код конструкција код којих није неопходно изводити експерименте.

Аналитичка решења биће изведена за слободно ослоњену правоугаону плочу од ФГМ, при чему су контурни услови дефинисани, према [150], као:

$$\begin{aligned} v_0 = w_0 = \theta_y = N_{xx} = M_{xx} = P_{xx} = 0, \text{ на страницама код којих је } x = 0 \text{ односно } x = a, \\ u_0 = w_0 = \theta_x = N_{yy} = M_{yy} = P_{yy} = 0, \text{ на страницама код којих је } y = 0 \text{ односно } y = b. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Да би овако усвојени кинематички гранични услови били задовољени, уводе се претпостављени облици Навијеових решења у облику:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\ v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\ w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\ \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}, \\ \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ако се погледа претпостављени облик Навијеових решења дат једначином (5.34), може се уочити да је једина разлика између ових облика у члану $e^{i\omega t}$, при чему је ω сопствена фреквенција система, а $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}$ произвољни параметри које треба одредити. Заменом (6.11) у једначине кретања (6.6) добија се једначина:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{I}] \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (6.12)$$

при чему су \mathbf{K} и $\bar{\mathbf{U}}$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ \text{сим} & & & K_{44} & K_{45} \\ & & & & K_{55} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ T_{xmn} \\ T_{ymn} \end{Bmatrix}. \quad (6.13)$$

Коефицијенти K_{ij} , ($i, j = 1 \div 5$) су дефинисани као:

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, & K_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), & K_{13} &= -3B_{16}\alpha^2\beta - B_{26}\beta^3, \\
K_{14} &= 2D_{16}\alpha\beta, & K_{15} &= \alpha^2 D_{16} + \beta^2 D_{26}, & K_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, \\
K_{23} &= -B_{16}\alpha^3 - 3B_{26}\alpha\beta^2, & K_{24} &= \alpha^2 E_{16} + \beta^2 E_{26}, & K_{25} &= 2\alpha\beta E_{26}, \\
K_{33} &= \alpha^4 E_{11} + 2\alpha^2\beta^2 E_{12} + 4\alpha^2\beta^2 E_{66} + \beta^4 E_{22}, & K_{34} &= -\alpha^3 F_{11} - \alpha\beta^2 F_{12} - 2\alpha\beta^2 F_{66}, \\
K_{35} &= -\alpha^2\beta F_{12} - 2\alpha^2\beta F_{66} - \beta^3 F_{22}, & K_{44} &= H_{44} + \alpha^2 G_{11} + \beta^2 G_{66}, \\
K_{45} &= \alpha\beta(G_{12} + G_{66}), & K_{55} &= H_{55} + \alpha^2 G_{66} + \beta^2 G_{22}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

док је матрица I_{ij} , ($i, j = 1 \div 5$) дефинисана као:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -\alpha I_2 & I_4 & 0 \\ 0 & I_4 & -\beta I_2 & 0 & I_4 \\ -\alpha I_2 & -\beta I_2 & I_3(\alpha^2 + \beta^2) + I_1 & -\alpha I_5 & -\beta I_5 \\ I_4 & 0 & -\alpha I_5 & I_6 & 0 \\ 0 & I_4 & -\beta I_5 & 0 & I_6 \end{bmatrix}, \tag{6.15}$$

где је $\alpha = \frac{m\pi}{a}$, $\beta = \frac{n\pi}{b}$.

Треба нагласити да коефицијенти K_{ij} у једначини (6.14) немају исти облик као коефицијенти у једначини (5.37).

За постојање нетривијалних решења једначине (6.12) потребно је да детерминанта матрице систем буде једнака нули, односно:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{I}| = 0. \tag{6.16}$$

7 НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ

Како би се претходно добијени теоријски резултати применили за симулацију конкретних проблема, у оквиру програмског пакета MATLAB, развијен је код за нелинеарну статичку и линеарну динамичку анализу плоча од ФГМ. MATLAB је развојно програмско окружење које се данас користи на већини светских универзитета и истраживачких установа у различитим фазама дизајна, моделирања, симулације, развоја и тестирања нових модела и технологија. Омогућава релативно лако манипулисање матрицама, приказивање функција, имплементацију алгоритама, дизајнирање корисничког интерфејса, као и повезивање са програмима писаним у другим програмским језицима. Његова погодност за математичке симулације и комплексне нумеричке прорачуне огледа се и у великом броју придружених библиотека које садрже сложене функције специјализоване за одређену примену [171]. Предности симболичког дела програмирања у MATLAB програму су искоришћење за теоријску разраду модела, а након тога су добијена аналитичка решења за одређене врсте проблема. У Додатку су дати развијени MATLAB кодови за статичку и динамичку анализу плоча од ФГМ. Због обимности, дати су само репрезентативни кодови.

У оквиру овог поглавља биће приказани резултати добијени за проблеме линеарне статичке анализе савијања плоча од ФГМ и плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу, као и резултати нелинеарне анализе извијања услед утицаја температуре на плочу од ФГМ и плочу од ФГМ у интеракцији са еластичном подлогом. Када је динамичка анализа у питању, биће приказани резултати који се односе на слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ и плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу. Приказани резултати представљају производ анализе плоча од ФГМ сачињених од метал и керамика конституената. При томе, за метал су коришћене материјалне карактеристике алуминијума (Al), односно карактеристике алумине (Al_2O_3) када је керамика у питању.

Алуминијум (Al). Због своје широко распрострањене примене у разним областима савремене технике, пре свега у електротехници и електроници, као и разним гранама авио, аутомобилске, железничке и хемијске индустрије, алуминијум представља метал који је веома присутан у нашој свакодневници. Алуминијум се по низу особина разликује од других метала, па га тако карактеришу мала густина, задовољавајућа механичка чврстоћа, висока топлотна и електрична проводљивост. Такође, он је нетоксичан, немагнетичан и корозионо постојан у многим срединама. Због своје добре топлотне проводљивости и добрих механичких особина, као што је жилавост, алуминијум је типичан метални конституент у ФГМ. Материјалне карактеристике алуминијума, које су коришћене у овој дисертацији, при анализи плоча од ФГМ, дате су у табели 7.1.

Алумина (Al_2O_3). За разлику од метала, керамичке материјале карактерише велика физичка чврстоћа, али и велика кртост, ниска електрична и топлотна проводљивост, односно изузетна отпорност на високе температуре и корозију. Због те своје особине, поред многих

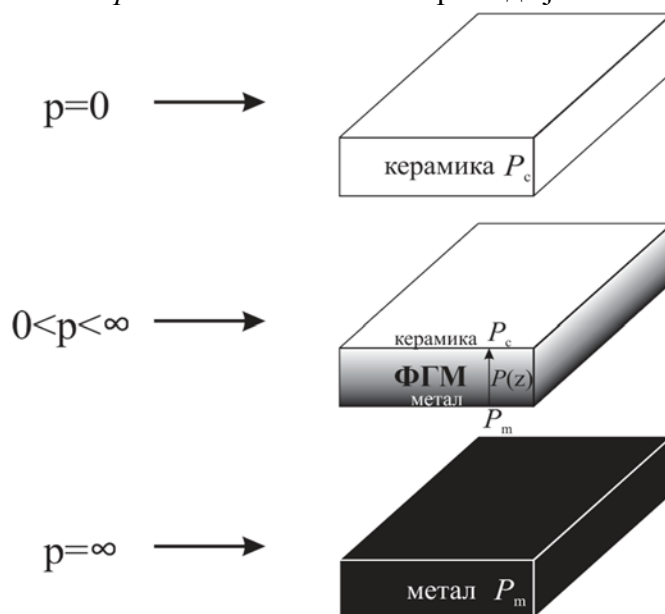
других примена, користи се као топлотни штит у конструкцијама изложеним изузетно високим температурама. Најчешћи тип монофазне керамике су алуминијумов (Алумина Al_2O_3) и магнезијумов оксид. Материјалне карактеристике алумине дате су у табели 7.1.

Табела 7.1 Материјалне карактеристике конституената ФГМ

Материјал	Материјална карактеристика			
	Модул еластичности $E [GPa]$	Поасонов коефицијент ν	Густина материјала $\rho [kg / m^3]$	Коефицијент термичког ширења $\alpha [^{\circ}C^{-1}]$
Алуминијум (Al)	$E_m = 70$	$\nu = 0.3$	$\rho_m = 2702$	$\alpha_m = 23 \cdot 10^{-6}$
Алумина (Al_2O_3)	$E_c = 380$	$\nu = 0.3$	$\rho_c = 3800$	$\alpha_c = 7.4 \cdot 10^{-6}$

Имајући у виду да је у оквиру ове дисертације коришћена степена функција за математички опис градијентне структуре ФГМ, на основу једначине (5.1), особине на горњој ивици плоче су особине керамике $P_t = P_c$, док су на доњој ивици плоче особине метала $P_b = P_m$. Ако се материјалне карактеристике $E(z)$, $\rho(z)$ и $\alpha(z)$ мењају у складу са поменутом степеном функцијом, онда индекс p дефинише удео конституената керамика/метал, при чему, како је то приказано на слици 7.1:

- за вредности $p = 0$ плоча је хомогена, од керамике,
- за вредности $0 < p < \infty$ плоча је градијентне структуре,
- теоријски, за вредност $p = \infty$ плоча је опет хомогена, од метала, мада се, практично, већ при вредностима $p > 20$ плоча може сматрати да је хомогена.



Слика 7.1 Упоредни приказ хомогених плоча (керамика, односно метал) и плоча од функционално градијентно распоређених керамика/метал материјала

7.1 Статичка анализа

У оквиру овог поглавља приказани су резултати до којих се дошло у току израде дисертације за случајеве статичке анализе савијања плоча од ФГМ и плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу. Такође, приказани су и резултати за случај извијања услед утицаја температуре на плочу од ФГМ и плочу од ФГМ у интеракцији са еластичном подлогом. За случај анализе савијања плоча, најпре су приказани резултати за линеарну анализу, на основу којих је, поређењем са резултатима доступним у литератури, извршена верификација развијене и имплементиране теорије за решавање поменутих проблема, а потом су приказани и резултати за случај нелинеарне анализе извијања услед утицаја температуре. Када су у питању проблеми извијања услед утицаја температуре, како је описано у поглављу 5.3.2.2, разматрани су случајеви равномерне, као и линеарне и нелинеарне градијентне расподеле температуре у правцу дебљине плоче, па су сходно томе и приказани резултати за поменуте случајеве. Резултати су дати кроз табеларне приказе, ради лакшег поређења и верификације са резултатима из литературе, као и преко одговарајућих дијаграма. Како се резултати до којих се дошло током израде ове дисертације заснивају на HSDT теорији која укључује функције облика, дат је и упоредни приказ резултата за 13 различитих функција облика приказаних у табели 4.1. На основу приказаних резултата, дата су одговарајућа тумачења, коментари и донесени су одређени закључци.

7.1.1 Линеарна анализа

У оквиру линеарне анализе савијања плоча од ФГМ и плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу, извршена је верификација добијених теоријских резултата кроз имплементацију у оквиру модула развијеног на MATLAB платформи. Како су предмет анализе у дисертацији умерено дебеле и дебеле плоче, поређење резултата извршено је са 3D теоријом еластичности, како би се дошло до закључка да ли је могуће потпуно адекватно, са задовољавајућом тачношћу резултата користити HSDT теорије засноване на функцијама облика уместо, математички знатно комплекснијих и хардверски захтевнијих, 3D теорија. Имајући у виду да су функције облика, на којима се заснива коришћена HSDT теорија, развијене од стране различитих аутора првенствено за анализу ламинатних композитних плоча и да је у овој дисертацији извршено њихово прилагођавање теоријским поставкама ФГМ, неопходно је било верификовати резултате и са неком другом HSDT теоријом, као што је смицајна деформациона теорија трећег реда (TSDT) описана у поглављу 4.3.3. Поређење добијених резултата је извршено и са класичном теоријом плоча (CPT), које дају добре резултате за танке плоче и донети су одговарајући закључци о њеном недостатку у погледу анализе умерено дебелих и дебелих плоча.

7.1.1.1 Савијање плоча од ФГМ

У овом поглављу приказани су упоредни резултати савијања слободно ослоњених правоугаоних и квадратних плоча од ФГМ под дејством синусоидалног попречног оптерећења:

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad (7.1)$$

где је q_0 амплитуда оптерећења.

За HSDT теорију засновану на функцијама облика дата је упоредна анализа нормализованих вредности вертикалног померања \bar{w} (угиб), нормалних напона $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\sigma}_{yy}$, смицајног напона $\bar{\tau}_{xy}$ и трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$. Нормализација поменутих величина извршена је према:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), & \bar{\sigma}_{xx}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), & \bar{\sigma}_{yy}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\tau}_{xy}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy}(0, 0, z), & \bar{\tau}_{xz}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), & \bar{\tau}_{yz}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

У табели 7.2 приказани су упоредни резултати нормализованих вредности померања и напона квадратних плоча за два различита односа дужина/дебљина плоче ($a/h = 5$ и $a/h = 10$) и различите вредности индекса p . Верификација резултата је извршена са резултатима доступним у литератури за плоче односа $a/h = 10$, а потом су дати и резултати за плоче $a/h = 5$ при различитим вредности индекса p , тј. при различитом уделу конституената у ФГМ. Добијени резултати, применом HSDT теорије за 13 различитих функција облика, поређени су са резултатима добијеним у [172] применом квази 3D теорије еластичности и са резултатима из [173], до којих су аутори дошли применом смицајне деформационе теорије трећег реда (TSDT) засноване на Редијевим претпостављеним облицима померања датим у [47]. Ово поређење је извршено како би се показала валидност приступа, примењеног у овој дисертацији, да плоче од ФГМ могу да се проучавају применом HSDT засноване на функцијама облика. На крају, приказани су и резултати за класичну теорију плоча (CPT), како би се уочили одређени недостаци поменуте теорије. На основу упоредних резултата померања и одговарајућих напона, добијених у овој дисертацији и добијених претходно поменутих различитим теоријама, може се уочити добро поклапање и са TSDT теоријом и са квази 3D теоријом еластичности. На другој страни, јасно је уочљиво велико одступање резултата добијених CPT теоријом, нарочито код напона $\bar{\sigma}_{xx}$, што указује да поменута теорија не даје задовољавајуће резултате код анализе умерено дебелих и дебелих плоча од ФГМ.

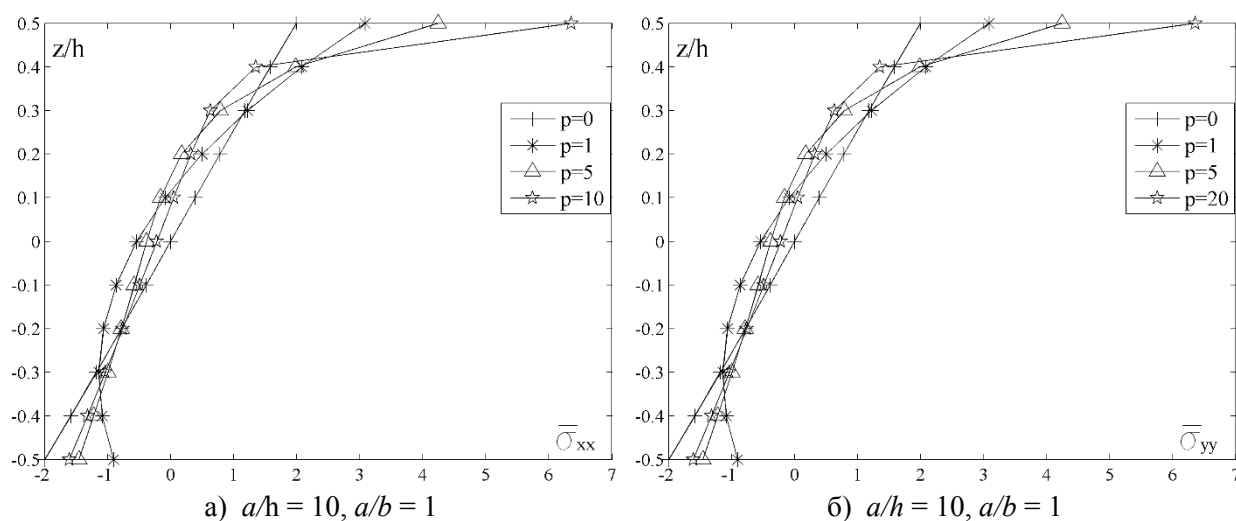
Анализом резултата датих у табели 7.2, може се уочити да са променом односа a/h (нпр, фиксирана дужина плоче, а дебљина плоче се промени два пута), а у зависности од изабране вредност индекса p , померање \bar{w} се промени за око 13-20%, напони $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\tau}_{xy}$ се промене за око два пута, док су промене код напона $\bar{\tau}_{xz}$ веома мале. Упоредни приказ резултата за 13 различитих функција облика показује да све примењене функције дају врло сличне резултате. Међутим, како су ово издвојени резултати за раван на тачно одређеној висини z (нпр. напон $\bar{\sigma}_{xx}$ на висини $h/3$ и слично), прави увид у резултате које дају поменуте функције, може се добити приказивањем расподеле напона по дебљини плоче, што је и учињено кроз одговарајуће дијаграме.

Табела 7.2 Нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$)

p	Теорија	\bar{w}		$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$		$\bar{\tau}_{xy}(-h/3)$		$\bar{\tau}_{xz}(h/6)$	
		$a/b = 1$							
		$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$
1	CPT [174]	0.5623	-----	2.0150	-----	-----	-----	-----	-----
	Квази 3D [172]	0.5876	-----	1.5061	-----	0.6112	-----	0.2511	-----
	TSDT [173]	0.5890	-----	1.4898	-----	0.6111	-----	0.2599	-----
	ФО 1	0.5889	0.6687	1.4898	0.7344	0.6111	0.3034	0.2607	0.2602
	ФО 2	0.5889	0.6687	1.4898	0.7344	0.6111	0.3034	0.2607	0.2602
	ФО 3	0.5889	0.6685	1.4894	0.7336	0.6110	0.3033	0.2621	0.2615
	ФО 4	0.5880	0.6648	1.4888	0.7323	0.6109	0.3030	0.2566	0.2554
	ФО 5	0.5889	0.6687	1.4898	0.7344	0.6111	0.3034	0.2607	0.2601
	ФО 6	0.5888	0.6683	1.4908	0.7363	0.6113	0.3038	0.2551	0.2547
	ФО 7	0.5887	0.6679	1.4891	0.7330	0.6109	0.3031	0.2624	0.2616
	ФО 8	0.5887	0.6679	1.4891	0.7330	0.6109	0.3031	0.2623	0.2615
	ФО 9	0.5887	0.6679	1.4891	0.7330	0.6109	0.3031	0.2623	0.2615
	ФО 10	0.5889	0.6687	1.4898	0.7344	0.6111	0.3034	0.2605	0.2600
	ФО 11	0.5887	0.6679	1.4902	0.7352	0.6112	0.3036	0.2569	0.2566
ФО 12	0.5889	0.6686	1.4895	0.7338	0.6110	0.3033	0.2617	0.2611	
ФО 13	0.5889	0.6687	1.4898	0.7343	0.6111	0.3034	0.2609	0.2603	
2	CPT [174]	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	Квази 3D [172]	0.7571	-----	1.4133	-----	0.5436	-----	0.2495	-----
	TSDT [173]	0.7573	-----	1.3960	-----	0.5442	-----	0.2721	-----
	ФО 1	0.7573	0.8671	1.3960	0.6836	0.5442	0.2695	0.2736	0.2730
	ФО 2	0.7573	0.8671	1.3960	0.6836	0.5442	0.2695	0.2736	0.2730
	ФО 3	0.7573	0.8671	1.3954	0.6824	0.5440	0.2693	0.2763	0.2755
	ФО 4	0.7563	0.8629	1.3940	0.6797	0.5437	0.2687	0.2741	0.2726
	ФО 5	0.7572	0.8671	1.3961	0.6836	0.5442	0.2695	0.2735	0.2729
	ФО 6	0.7568	0.8656	1.3975	0.6865	0.5444	0.2701	0.2653	0.2649
	ФО 7	0.7572	0.8667	1.3949	0.6813	0.5439	0.2691	0.2777	0.2767
	ФО 8	0.7572	0.8666	1.3948	0.6812	0.5439	0.2691	0.2777	0.2768
	ФО 9	0.7572	0.8666	1.3948	0.6812	0.5439	0.2691	0.2777	0.2768
	ФО 10	0.7572	0.8670	1.3961	0.6837	0.5442	0.2696	0.2733	0.2727
	ФО 11	0.7567	0.8649	1.3969	0.6854	0.5444	0.2699	0.2667	0.2663
ФО 12	0.7573	0.8672	1.3956	0.6827	0.5441	0.2694	0.2755	0.2748	

	ФО 13	0.7573	0.8671	1.3960	0.6835	0.5442	0.2695	0.2739	0.2733
4	СРТ [174]	0.8281	-----	1.6049	-----	-----	-----	-----	-----
	Квази 3D [172]	0.8823	-----	1.1841	-----	0.5671	-----	0.2362	-----
	TSDT [173]	0.8815	-----	1.1794	-----	0.5669	-----	0.2519	-----
	ФО 1	0.8814	1.0409	1.1794	0.5704	0.5669	0.2798	0.2537	0.2529
	ФО 2	0.8814	1.0409	1.1794	0.5704	0.5669	0.2798	0.2537	0.2529
	ФО 3	0.8818	1.0423	1.1783	0.5684	0.5667	0.2795	0.2580	0.2571
	ФО 4	0.8815	1.0402	1.1756	0.5630	0.5662	0.2784	0.2623	0.2606
	ФО 5	0.8814	1.0408	1.1794	0.5705	0.5669	0.2799	0.2535	0.2528
	ФО 6	0.8802	1.0360	1.1816	0.5749	0.5673	0.2807	0.2421	0.2417
	ФО 7	0.8820	1.0429	1.1774	0.5666	0.5665	0.2791	0.2612	0.2601
	ФО 8	0.8820	1.0429	1.1773	0.5664	0.5665	0.2791	0.2614	0.2603
	ФО 9	0.8820	1.0429	1.1773	0.5664	0.5665	0.2791	0.2614	0.2603
	ФО 10	0.8814	1.0407	1.1795	0.5706	0.5669	0.2799	0.2532	0.2525
	ФО 11	0.8798	1.0346	1.1811	0.5739	0.5672	0.2805	0.2427	0.2423
	ФО 12	0.8817	1.0420	1.1786	0.5690	0.5668	0.2796	0.2568	0.2559
	ФО 13	0.8815	1.0411	1.1793	0.5702	0.5669	0.2798	0.2541	0.2534
8	СРТ [174]	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	Квази 3D [172]	0.9739	-----	0.9622	-----	0.5883	-----	0.2261	-----
	TSDT [173]	0.9747	-----	0.9747	-----	0.5858	-----	0.2087	-----
	ФО 1	0.9746	1.1832	0.9476	0.4541	0.5858	0.2886	0.2087	0.2081
	ФО 2	0.9746	1.1832	0.9476	0.4541	0.5858	0.2886	0.2087	0.2081
	ФО 3	0.9749	1.1845	0.9465	0.4520	0.5856	0.2881	0.2120	0.2113
	ФО 4	0.9739	1.1794	0.9435	0.4461	0.5850	0.2871	0.2139	0.2125
	ФО 5	0.9745	1.1831	0.9477	0.4542	0.5858	0.2886	0.2086	0.2080
	ФО 6	0.9730	1.1774	0.9500	0.4589	0.5863	0.2895	0.1995	0.1991
	ФО 7	0.9751	1.1848	0.9455	0.4500	0.5854	0.2877	0.2143	0.2134
	ФО 8	0.9751	1.1848	0.9454	0.4498	0.5854	0.2877	0.2145	0.2135
	ФО 9	0.9751	1.1848	0.9454	0.4498	0.5854	0.2877	0.2145	0.2135
	ФО 10	0.9745	1.1830	0.9477	0.4543	0.5858	0.2886	0.2084	0.2078
	ФО 11	0.9727	1.1763	0.9496	0.4581	0.5861	0.2893	0.2006	0.2003
	ФО 12	0.9749	1.1842	0.9469	0.4526	0.5856	0.2883	0.2111	0.2104
	ФО 13	0.9746	1.1833	0.9475	0.4539	0.5858	0.2885	0.2091	0.2084
20	СРТ [174]	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	Квази 3D [172]	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	TSDT [173]	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	ФО 1	1.1377	1.3727	0.7709	0.3720	0.6078	0.2993	0.2013	0.2008
	ФО 2	1.1377	1.3727	0.7709	0.3720	0.6078	0.2993	0.2013	0.2008
	ФО 3	1.1374	1.3712	0.7702	0.3707	0.6076	0.2989	0.2025	0.2019
	ФО 4	1.1338	1.3561	0.7687	0.3677	0.6073	0.2982	0.1979	0.1966
	ФО 5	1.1377	1.3727	0.7709	0.3720	0.6078	0.2993	0.2013	0.2007
	ФО 6	1.1375	1.3723	0.7723	0.3748	0.6083	0.3002	0.1963	0.1960
	ФО 7	1.1368	1.3686	0.7697	0.3696	0.6075	0.2986	0.2028	0.2019
	ФО 8	1.1367	1.3683	0.7696	0.3695	0.6075	0.2986	0.2027	0.2019
	ФО 9	1.1367	1.3683	0.7696	0.3695	0.6075	0.2986	0.2027	0.2019
	ФО 10	1.1377	1.3727	0.7709	0.3721	0.6079	0.2993	0.2012	0.2006
	ФО 11	1.1375	1.3722	0.7720	0.3741	0.6081	0.2998	0.1983	0.1979
	ФО 12	1.1375	1.3718	0.7704	0.3711	0.6077	0.2990	0.2022	0.2016
	ФО 13	1.1377	1.3726	0.7708	0.3718	0.6078	0.2993	0.2015	0.2009

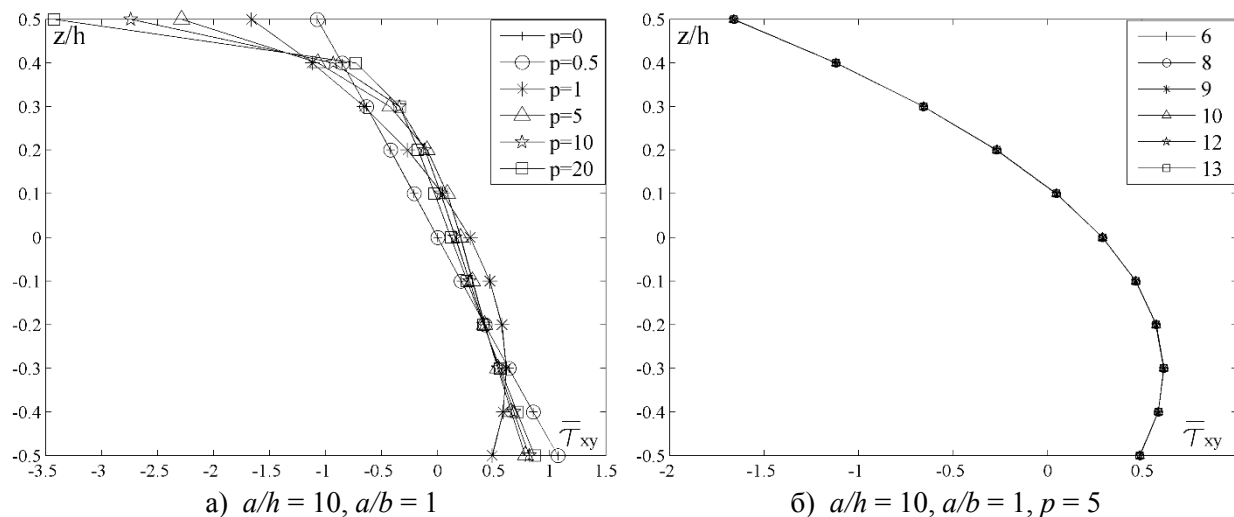
На слици 7.2 приказана је расподела нормалних напона $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\sigma}_{yy}$ по дебљини плоче за различите вредности индекса p . Анализом дијаграма може се уочити да су за оба напона криве расподеле идентичне. Затим, може се запазити и основна карактеристика ФГМ, а то је померање неутралне равни у односу на раван $z/h = 0$. Уочава се да за равни на висини $z/h = 0.1 - 0.15$ (зависно од изабране вредности индекса p) нормални напони су услед истежања, а затим мењају знак, осим у случају када је $p = 0$, што представља хомогени материјал од керамике, чија је расподела напона позната линеарна функција са неутралном равни на висини $z/h = 0$. Максималне вредности нормалних напона услед притиска су на доњој ивици плоче, док су максималне вредности нормалних напона услед истежања на горњој ивици плоче, при чему се може уочити да са порастом вредности индекса p расту и максималне вредности напона услед истежања.



Слика 7.2 Расподела нормализованих вредности нормалног напона $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\sigma}_{yy}$ по дебљини плоче за различите вредности индекса p

На слици 7.3 приказана је расподела смицајног напона $\bar{\tau}_{xy}$ по дебљини плоче за различите вредности индекса p (слика 7.3а) и за различите функције облика (слика 7.3б), а при фиксираним вредностима $a/h = 10$ и $a/b = 1$. При анализи дијаграма, треба узети у обзир раније поменути чињеницу да је за $p = 0$ хомогена плоча од керамике, при $p = 20$ хомогена плоча од метала, а за вредности $0 < p < 20$ плоча од ФГМ. Анализом дијаграма на слици 7.3а уочава се да за све вредности индекса p напон $\bar{\tau}_{xy}$ достиже максималну вредност на горњој ивици плоче. Најмању максималну вредност има плоча од керамике, затим се може видети да са повећавањем удела метала, тек при вредности $p = 1$ максимална вредност напона почиње да расте и највећу вредност достиже за хомогену плочу од метала. Такође, поред утицаја на максималне вредности напона, промена вредности индекса p утиче и на промену облика криве расподеле напона $\bar{\tau}_{xy}$ по дебљини плоче. Да би се извршила упоредна анализа резултата за различите функције облика и донео закључак о њиховој применљивости на

посматране проблеме, на слици 7.3б је приказана расподела смицајног напона $\bar{\tau}_{xy}$ применом различитих функција облика датих у табели 4.1. Очигледно је у том случају да све наведене функције облика дају идентичне резултате када је реч о напону $\bar{\tau}_{xy}$.

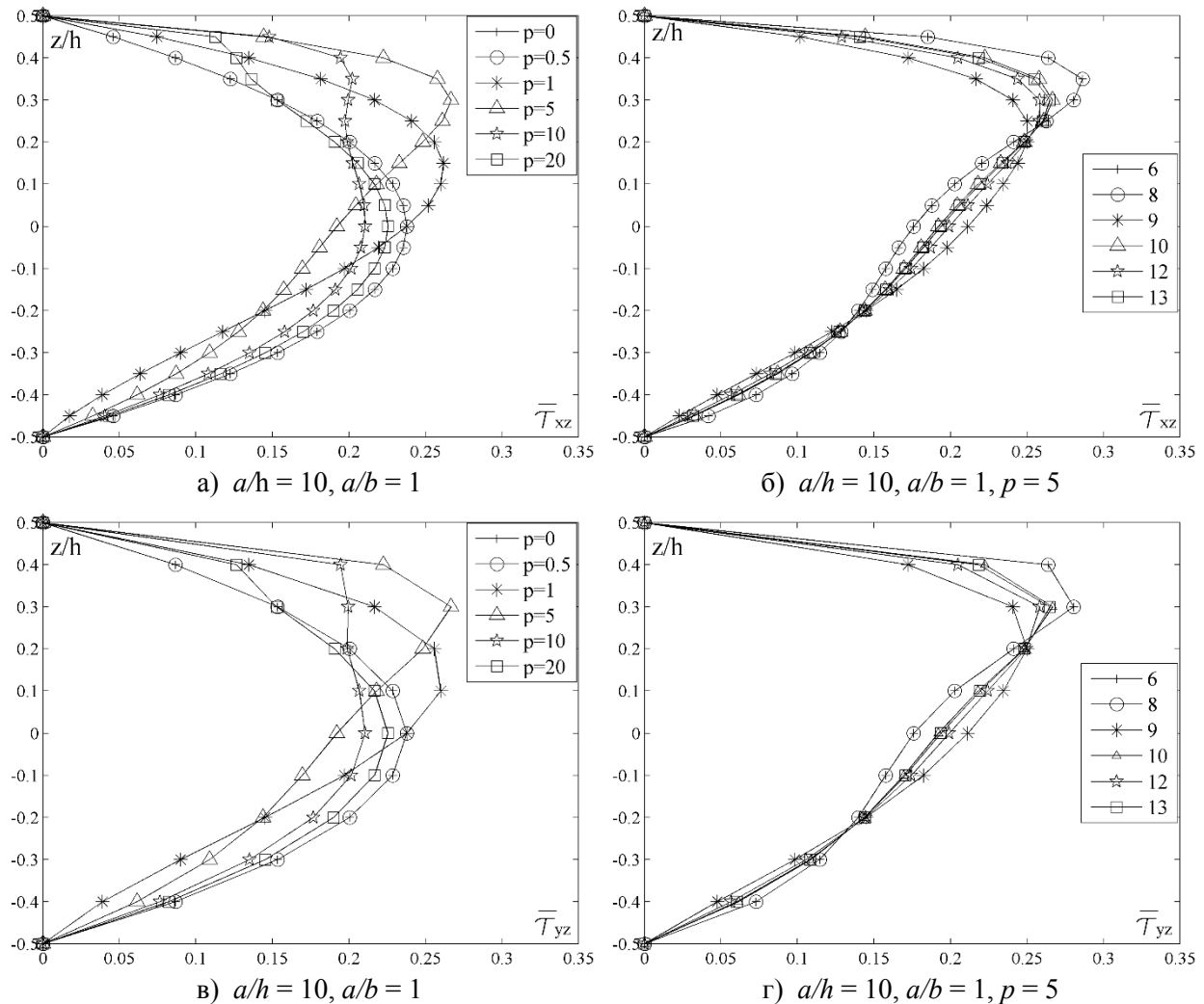


Слика 7.3 Расподела нормализованих вредности смицајног напона $\bar{\tau}_{xy}$ по дебљини плоче за различите вредности индекса p

На слици 7.4 приказана је расподела трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче за различите вредности индекса p и различите функције облика. Анализом трансверзалних смицајних напона на дијаграмима 7.4а и 7.4в уочава се основна разлика између хомогених плоча и плоча од ФГМ. Код плоча од керамике ($p=0$) или метала ($p=20$), може се уочити оба напона достижу максималну вредност у равни на висини $z/h = 0$, због хомогености материјала. Са друге стране, када су плоче од ФГМ у питању, уочава се асиметричност у односу на раван $z/h = 0$, па тако, за вредност $p = 1$ напони достижу максималну вредност у равни $z/h = 0.15$, а за $p = 5$ напони достижу максималну вредност за $z/h = 0.3$. За разлику од хомогене керамичке плоче, чија је расподела напона облика параболе са максималном вредношћу у равни $z/h = 0$, плоче при вредности $p = 10$, које имају већински удео метал конституента, такође достижу максималну вредност напона за $z/h = 0$, али расподела није облика параболе. Са даљим повећавањем удела метала, при $p = 20$, иако се практично може сматрати да је плоча хомогена од метала, уочљиво је на дијаграму да крива и даље нема правилан облик параболе. Због практично незнатних, али ипак још увек присутних обриса честица керамике у горњем делу плоче, јавља се благи деформитет криве (параболе).

Упоредном анализом напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ за различите функције облика, при фиксираним вредностима $a/h = 10, a/b = 1$ и $p = 5$, може се уочити на дијаграмима 7.4б и 7.4г да се, за разлику од напона $\bar{\tau}_{xy}$, резултати не поклапају за све функције облика. Највеће одступање уочава се код резултата за функције облика ФО 6 и ФО 8. Такође, ФО 9 показује благо

одступање и достиже максималну вредност напона на висини $z/h = 0.25$, док су резултати за $\Phi 10$, $\Phi 12$ и $\Phi 13$ готово идентични, са достизањем максималне вредности напона у равни $z/h = 0.3$.



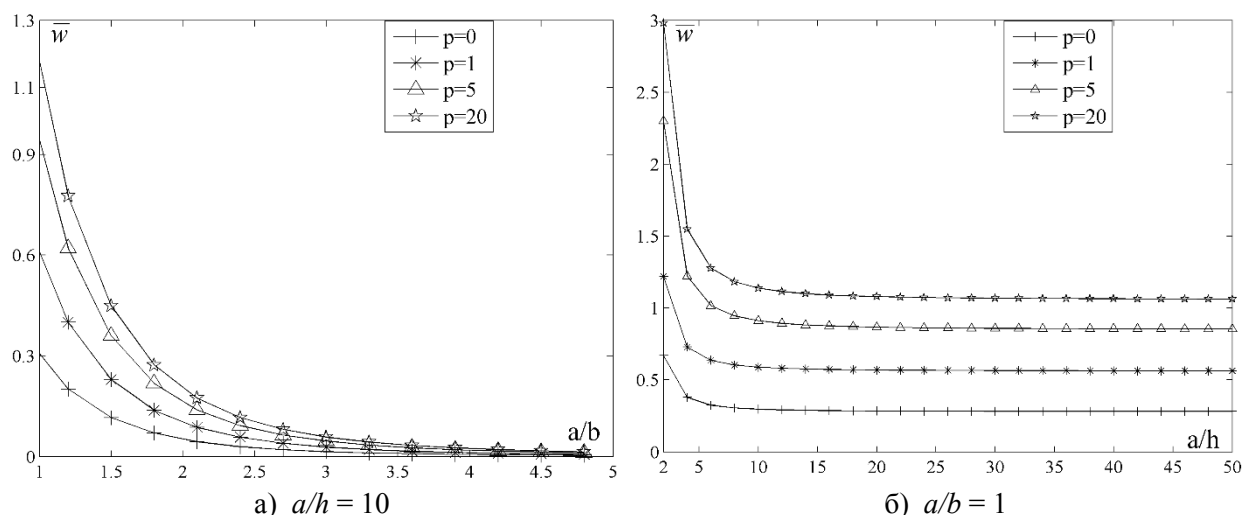
Слика 7.4 Расподела нормализованих вредности трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче за различите вредности индекса p и различите функције облика. Како би се уочио утицај удела метал/керамика конституената у ФГМ, као и утицај дебљине и геометрије плоче на вертикално померање (угиб), у табели 7.3 су приказане нормализоване вредности померања плоче \bar{w} за различите односе a/h , a/b и вредности индекса p . С обзиром да за $p = 0$ имамо хомогену плочу од керамике, док при повећању вредности индекса p расте удео метала у ФГМ, услед чега плоча постаје еластичнија, вредност померања \bar{w} расту са порастом вредности индекса p . Са друге стране, ако се разматра утицај геометрије плоче (квадратна/правоугаона), вредност померања \bar{w} се промени за два пута код правоугаоне ($a/b = 0.5$) у односу на квадратну ($a/b = 1$), без обзира на удео метал/керамика конституената (вредност индекса p).

Табела 7.3 Нормализоване вредности померања плоче \bar{w} за различите вредности односа a/h и a/b и индекса p

a/h	a/b	Теорија	\bar{w}					
			$p = 0.1$	$p = 0.3$	$p = 0.5$	$p = 0.7$	$p = 1$	$p = 1.5$
2	1	Ф0 1	0.7277	0.8448	0.9586	1.0674	1.2186	1.4379
		Ф0 2	0.7277	0.8448	0.9586	1.0674	1.2186	1.4379
		Ф0 3	0.7256	0.8424	0.9559	1.0644	1.2152	1.4344
		Ф0 4	0.7054	0.8199	0.9307	1.0363	1.1829	1.3965
		Ф0 5	0.7278	0.8448	0.9587	1.0675	1.2187	1.4380
		Ф0 6	0.7281	0.8452	0.9592	1.0681	1.2192	1.4372
		Ф0 7	0.7220	0.8384	0.9514	1.0593	1.2094	1.4279
		Ф0 8	0.7216	0.8379	0.9509	1.0587	1.2087	1.4271
		Ф0 9	0.7216	0.8379	0.9509	1.0587	1.2087	1.4271
		Ф0 10	0.7278	0.8449	0.9588	1.0676	1.2188	1.4381
		Ф0 11	0.7270	0.8440	0.9579	1.0666	1.2176	1.4350
		Ф0 12	0.7264	0.8432	0.9569	1.0655	1.2164	1.4357
		Ф0 13	0.7276	0.8446	0.9584	1.0672	1.2184	1.4377
0.5		Ф0 1	1.4669	1.7137	1.9538	2.1821	2.4961	2.9397
		Ф0 2	1.4669	1.7137	1.9538	2.1821	2.4961	2.9397
		Ф0 3	1.4644	1.7109	1.9506	2.1785	2.4921	2.9359
		Ф0 4	1.4360	1.6791	1.9150	2.1388	2.4466	2.8832
		Ф0 5	1.4670	1.7138	1.9539	2.1821	2.4962	2.9398
		Ф0 6	1.4660	1.7127	1.9528	2.1811	2.4946	2.9354
		Ф0 7	1.4597	1.7056	1.9446	2.1718	2.4845	2.9275
		Ф0 8	1.4591	1.7049	1.9438	2.1709	2.4835	2.9264
		Ф0 9	1.4591	1.7049	1.9438	2.1709	2.4835	2.9264
		Ф0 10	1.4671	1.7139	1.9540	2.1823	2.4963	2.9399
		Ф0 11	1.4640	1.7105	1.9504	2.1784	2.4916	2.9313
		Ф0 12	1.4654	1.7120	1.9518	2.1798	2.4936	2.9374
		Ф0 13	1.4668	1.7136	1.9536	2.1819	2.4959	2.9395
0.2		Ф0 1	1.9577	2.2927	2.6186	2.9279	3.3517	3.9443
		Ф0 2	1.9577	2.2927	2.6186	2.9279	3.3517	3.9443
		Ф0 3	1.9550	2.2896	2.6151	2.9240	3.3473	3.9403
		Ф0 4	1.9222	2.2529	2.5739	2.8781	3.2948	3.8797
		Ф0 5	1.9577	2.2928	2.6186	2.9280	3.3518	3.9443
		Ф0 6	1.9560	2.2910	2.6168	2.9260	3.3491	3.9380
		Ф0 7	1.9496	2.2836	2.6083	2.9164	3.3388	3.9310
		Ф0 8	1.9489	2.2828	2.6074	2.9154	3.3376	3.9297
		Ф0 9	1.9489	2.2828	2.6074	2.9154	3.3376	3.9297
		Ф0 10	1.9578	2.2929	2.6188	2.9281	3.3519	3.9444
		Ф0 11	1.9536	2.2882	2.6137	2.9227	3.3452	3.9329
		Ф0 12	1.9560	2.2908	2.6164	2.9255	3.3491	3.9420
		Ф0 13	1.9576	2.2925	2.6184	2.9277	3.3515	3.9441
4	1	Ф0 1	0.4164	0.4920	0.5654	0.6347	0.7284	0.8547
		Ф0 2	0.4164	0.4920	0.5654	0.6347	0.7284	0.8547
		Ф0 3	0.4161	0.4917	0.5651	0.6344	0.7280	0.8544
		Ф0 4	0.4123	0.4874	0.5603	0.6290	0.7219	0.8475
		Ф0 5	0.4164	0.4920	0.5654	0.6347	0.7284	0.8547
		Ф0 6	0.4160	0.4915	0.5650	0.6343	0.7278	0.8536
		Ф0 7	0.4155	0.4910	0.5643	0.6335	0.7270	0.8535
		Ф0 8	0.4155	0.4909	0.5642	0.6334	0.7269	0.8533

	ФО 9	0.4155	0.4909	0.5642	0.6334	0.7269	0.8533
	ФО 10	0.4164	0.4920	0.5654	0.6347	0.7284	0.8547
	ФО 11	0.4156	0.4911	0.5645	0.6338	0.7272	0.8528
	ФО 12	0.4162	0.4918	0.5652	0.6345	0.7281	0.8546
	ФО 13	0.4164	0.4919	0.5654	0.6347	0.7284	0.8547
0.5	ФО 1	0.9650	1.1451	1.3201	1.4847	1.7057	1.9988
	ФО 2	0.9650	1.1451	1.3201	1.4847	1.7057	1.9988
	ФО 3	0.9646	1.1447	1.3196	1.4842	1.7051	1.9984
	ФО 4	0.9588	1.1382	1.3123	1.4760	1.6958	1.9878
	ФО 5	0.9650	1.1451	1.3201	1.4847	1.7057	1.9987
	ФО 6	0.9643	1.1444	1.3193	1.4838	1.7045	1.9967
	ФО 7	0.9638	1.1438	1.3185	1.4830	1.7037	1.9970
	ФО 8	0.9637	1.1436	1.3184	1.4828	1.7036	1.9968
	ФО 9	0.9637	1.1436	1.3184	1.4828	1.7036	1.9968
	ФО 10	0.9650	1.1451	1.3201	1.4848	1.7057	1.9987
	ФО 11	0.9637	1.1437	1.3185	1.4830	1.7036	1.9955
	ФО 12	0.9648	1.1449	1.3198	1.4845	1.7054	1.9986
	ФО 13	0.9650	1.1451	1.3201	1.4847	1.7057	1.9988
0.2	ФО 1	1.3532	1.6079	1.8554	2.0880	2.3996	2.8106
	ФО 2	1.3532	1.6079	1.8554	2.0880	2.3996	2.8106
	ФО 3	1.3528	1.6075	1.8548	2.0874	2.3990	2.8102
	ФО 4	1.3459	1.5997	1.8461	2.0777	2.3879	2.7977
	ФО 5	1.3532	1.6079	1.8554	2.0880	2.3996	2.8106
	ФО 6	1.3523	1.6070	1.8543	2.0869	2.3981	2.8080
	ФО 7	1.3518	1.6063	1.8536	2.0860	2.3973	2.8086
	ФО 8	1.3516	1.6062	1.8534	2.0858	2.3971	2.8083
	ФО 9	1.3516	1.6062	1.8534	2.0858	2.3971	2.8083
	ФО 10	1.3532	1.6079	1.8554	2.0880	2.3996	2.8106
	ФО 11	1.3516	1.6062	1.8534	2.0859	2.3970	2.8066
	ФО 12	1.3503	1.6077	1.8551	2.0877	2.3992	2.8105
	ФО 13	1.3532	1.6079	1.8554	2.0880	2.3996	2.8106

Да би се уочио утицај даљег повећавања индекса p и односа a/b и a/h , на слици 7.5 су приказани дијаграми нормализованих вредности померања \bar{w} за различите односе a/h , a/b и вредности индекса p . Анализом дијаграма 7.5а и 7.5б, може се уочити да су највећа померања \bar{w} за плочу од метала ($p = 20$), најмања за плочу од керамике ($p = 0$), а за плочу од ФГМ ($0 < p < 20$) вредности су између. Практично, варирањем удела метала или керамике, може се постићи жељена савојна крутост плоче. Такође, на дијаграму 7.5а може се видети да се криве постепено приближавају једна другој, тако да код плоча $a/b > 4$, промена индекса p доноси промену вредности односа померања правоугаона/квadratна плоча. На пример, код плоче од керамике, тај однос је 0.3, код плоче од метала је око 1.2, а код плоче од ФГМ је између тих вредности и зависи од удела конституената. За разлику од тога, на дијаграму 7.5б се уочава да повећање односа a/h , не доводи до приближавања кривих, тј. разлика односа померања остаје константна без обзира на промену индекса p . Овај закључак произилази из чињенице да код танких плоча, мала је могућност да се варира удео конституената ФГМ у правцу дебљине, па зато индекс p нема утицај.



Слика 7.5 Нормализоване вредности померања \bar{w} за различите односе a/h и a/b и вредности индекса p

7.1.1.2 Савијање плоче од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу

Како је раније, у оквиру теоријских поставки, речено да се многи инжењерски проблеми у различитим областима описују поједнастављеним математичким моделом интеракције плоче и еластичне подлоге, у оквиру овог поглавља биће приказани резултати до којих се дошло у анализи савијања плоче од ФГМ ослоњене на еластичну подлогу. Као и у претходном поглављу, разматране су слободно ослоњене квадратне и правоугане плоче изложене синусоидалном попречном оптерећењу које је дефинисано једначином (7.1). Да би се уочио утицај еластичне подлоге на померања и напоне плоче од ФГМ, приказани су резултати за различите комбинације удела конституената у ФГМ, односно различите комбинације вредности Винклеровог (k_0) и Пастернаковог (k_1) коефицијента еластичне подлоге. Поред нормализације дате у (7.2) потребно је применити и нормализацију за коефицијенте k_0 и k_1 у облику:

$$\bar{k}_0 = k_0 \frac{a^4}{D} \quad \text{и} \quad \bar{k}_1 = k_1 \frac{a^2}{D} \quad (7.3)$$

при чему је савојна крутост плоче $D = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$.

У табели 7.4 приказани су резултати за нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу за $p = 0$, различите вредности k_0 и k_1 , као и два различита односа дужина/дебљина плоче ($a/h = 10$ и $a/h = 5$). Како би се уочио утицај еластичне подлоге на померања и напоне плоче, најпре су приказане вредности померања и напона за $k_0 = 0$ и $k_1 = 0$, што практично одговара случају плоче без еластичне подлоге. Затим су вариране вредности поменутих коефицијената како би се закључило који од поменута два коефицијента има већи утицај. На основу резултата закључено је да увођење само коефицијента k_0 има мањи утицај на промену вредности померања и напона, него када

се уведе само коефицијент k_1 . Ова појава нарочито ће бити добро уочљива код дијаграмске зависности које ће касније бити приказана.

Табела 7.4 Нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу за $p = 0$ и различите вредности k_0 и k_1 и односа a/h ($a/b = 1$)

p	k_0	k_1	Теорија	\bar{w}		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\tau}_{xy}$		$\bar{\tau}_{xz}$	
				$a/b = 1$							
				$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$
0	0	0	Ф0 1	0.2960	0.3433	1.9943	1.0249	0.7066	0.3494	0.2385	0.2380
			Ф0 2	0.2960	0.3433	1.9943	1.0249	0.7066	0.3494	0.2385	0.2380
			Ф0 3	0.2960	0.3431	1.9955	1.0272	0.7065	0.3491	0.2461	0.2455
			Ф0 4	0.2955	0.3409	1.9990	1.0341	0.7062	0.3487	0.2729	0.2717
			Ф0 5	0.2960	0.3433	1.9942	1.0248	0.7066	0.3494	0.2383	0.2378
			Ф0 6	0.2959	0.3430	1.9917	1.2431	0.7070	0.3501	0.2235	0.2232
			Ф0 7	0.2959	0.3428	1.9966	1.0294	0.7064	0.3489	0.2537	0.2530
			Ф0 8	0.2959	0.3428	1.9967	1.0296	0.7063	0.3489	0.2545	0.2537
			Ф0 9	0.2959	0.3428	1.9967	1.0296	0.7063	0.3489	0.2545	0.2537
			Ф0 10	0.2960	0.3433	1.9942	1.0247	0.7066	0.3494	0.2378	0.2374
			Ф0 11	0.2959	0.3428	1.9917	1.0197	0.7068	0.3497	0.2129	0.2126
			Ф0 12	0.2960	0.3432	1.9951	1.0265	0.7065	0.3492	0.2440	0.2434
			Ф0 13	0.2960	0.3433	1.9944	1.0251	0.7066	0.3494	0.2392	0.2387
100	0	0	Ф0 1	0.2329	0.2611	1.5689	0.7797	0.5559	0.2658	0.1876	0.1811
			Ф0 2	0.2329	0.2611	1.5689	0.7797	0.5559	0.2658	0.1876	0.1811
			Ф0 3	0.2328	0.2611	1.5699	0.7816	0.5558	0.2656	0.1936	0.1868
			Ф0 4	0.2325	0.2598	1.5732	0.7880	0.5558	0.2657	0.2148	0.2070
			Ф0 5	0.2329	0.2611	1.5689	0.7797	0.5559	0.2658	0.1875	0.1809
			Ф0 6	0.2328	0.2610	1.5670	0.7760	0.5562	0.2664	0.1758	0.1698
			Ф0 7	0.2328	0.2609	1.5708	0.7834	0.5557	0.2655	0.1996	0.1925
			Ф0 8	0.2328	0.2609	1.5709	0.7836	0.5557	0.2655	0.2002	0.1931
			Ф0 9	0.2328	0.2609	1.5709	0.7836	0.5557	0.2655	0.2002	0.1931
			Ф0 10	0.2329	0.2611	1.5688	0.7796	0.5559	0.2658	0.1871	0.5218
			Ф0 11	0.2328	0.2609	1.5670	0.7760	0.5561	0.2661	0.1675	0.1618
			Ф0 12	0.2329	0.2611	1.5696	0.7810	0.5558	0.2657	0.1920	0.1852
			Ф0 13	0.2329	0.2611	1.5690	0.7799	0.5559	0.2658	0.1882	0.1816
0	10	0	Ф0 1	0.1928	0.2118	1.2991	0.6324	0.4603	0.2156	0.1554	0.1469
			Ф0 2	0.1928	0.2118	1.2991	0.6324	0.4603	0.2156	0.1554	0.1469
			Ф0 3	0.1928	0.2117	1.2999	0.6339	0.4602	0.2154	0.1603	0.1515
			Ф0 4	0.1926	0.2109	1.3029	0.6398	0.4603	0.2157	0.1779	0.1681
			Ф0 5	0.1928	0.2118	1.2990	0.6323	0.4603	0.2156	0.1552	0.1467
			Ф0 6	0.1928	0.2117	1.2975	0.6295	0.4605	0.2161	0.1456	0.1377
			Ф0 7	0.1928	0.2116	1.3007	0.6355	0.4602	0.2154	0.1653	0.1562
			Ф0 8	0.1928	0.2116	1.3008	0.6357	0.4602	0.2154	0.1658	0.1566
			Ф0 9	0.1928	0.2116	1.3008	0.6357	0.4602	0.2154	0.1658	0.1566
			Ф0 10	0.1928	0.2118	1.2990	0.6323	0.4603	0.2156	0.1549	0.0993
			Ф0 11	0.1927	0.2116	1.2976	0.6295	0.4604	0.2159	0.1387	0.1313
			Ф0 12	0.1928	0.2118	1.2996	0.6335	0.4602	0.2155	0.1589	0.1502
			Ф0 13	0.1928	0.2118	1.2991	0.6325	0.4603	0.2156	0.1558	0.1473
100	10	0	Ф0 1	0.1639	0.1774	1.1041	0.5296	0.3912	0.1805	0.1320	0.1230
			Ф0 2	0.1639	0.1774	1.1041	0.5296	0.3912	0.1805	0.1320	0.1230
			Ф0 3	0.1638	0.1773	1.1048	0.5309	0.3911	0.1804	0.1362	0.1269

ФО 4	0.1637	0.1767	1.1076	0.5362	0.3913	0.1808	0.1512	0.1408
ФО 5	0.1639	0.1774	1.1040	0.5296	0.3912	0.1806	0.1319	0.1229
ФО 6	0.1638	0.1773	1.1028	0.5323	0.3914	0.1810	0.1237	0.1154
ФО 7	0.1638	0.1773	1.1055	0.5325	0.3911	0.1804	0.1405	0.1308
ФО 8	0.1638	0.1772	1.1056	0.5325	0.3911	0.1804	0.1409	0.1312
ФО 9	0.1638	0.1772	1.1056	0.5295	0.3911	0.1804	0.1409	0.1312
ФО 10	0.1639	0.1774	1.1040	0.5273	0.3912	0.1806	0.1316	0.1226
ФО 11	0.1638	0.1772	1.1028	0.5305	0.3913	0.1808	0.1179	0.1099
ФО 12	0.1639	0.1774	1.1045	0.5181	0.3911	0.1805	0.1351	0.1258
ФО 13	0.1639	0.1774	1.1041	0.5298	0.3912	0.1805	0.1324	0.1223

У табелама 7.5 и 7.6 приказане су такође и нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу за различите вредности k_0 и k_1 и односа a/h , али за $p = 5$, односно $p = 10$. Иако су ово сада у питању плоче од ФГМ, за разлику од вредности у табели 7.4, где смо имали хомогену плочу од керамике ($p = 0$), ефекат параметара Винклер - Пастернакове еластичне подлоге је исти. Увођење коефицијената k_0 и k_1 повећава савојну крутост плоче, тј. смањује вредности померања и напона, при чему је утицај Винклеровог коефицијента мањи од утицаја Пастернаковог коефицијента.

Табела 7.5 Нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу за $p = 5$ и различите вредности k_0 и k_1 и односа a/h ($a/b = 1$)

p	k_0	k_1	Теорија	\bar{w}		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\tau}_{xy}$		$\bar{\tau}_{xz}$	
				$a/b = 1$							
				$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$
5	0	0	ФО 1	0.9113	1.0885	4.2447	2.2118	0.5756	0.2839	0.1929	0.1924
			ФО 2	0.9113	1.0885	4.2447	2.2118	0.5756	0.2839	0.1929	0.1924
			ФО 3	0.9118	1.0902	4.2488	2.2199	0.5754	0.2835	0.2016	0.2009
			ФО 4	0.9115	1.0885	4.2612	2.2443	0.5748	0.2824	0.2329	0.2313
			ФО 5	0.9113	1.0884	4.2445	2.2116	0.5756	0.2839	0.1927	0.1921
			ФО 6	0.9098	1.0826	4.2359	2.1945	0.5761	0.2848	0.1759	0.1756
			ФО 7	0.9121	1.0911	4.2527	2.2276	0.5752	0.2831	0.2104	0.2095
			ФО 8	0.9121	1.0911	4.2531	2.2284	0.5752	0.2831	0.2113	0.2104
			ФО 9	0.9121	1.0911	4.2531	2.2284	0.5752	0.2831	0.2113	0.2104
			ФО 10	0.9112	1.0883	4.2443	2.2110	0.5756	0.2839	0.1921	0.1042
			ФО 11	0.9094	1.0810	4.2359	2.1945	0.5760	0.2846	0.1668	0.1665
			ФО 12	0.9117	1.0898	4.2476	2.2175	0.5755	0.2836	0.1991	0.1985
			ФО 13	0.9114	1.0887	4.2450	2.2126	0.5756	0.2839	0.1937	0.1932
100	0	0	ФО 1	0.4967	0.5451	2.3137	1.1076	0.3137	0.1422	0.1051	0.0963
			ФО 2	0.4967	0.5451	2.3137	1.1076	0.3137	0.1422	0.1051	0.0963
			ФО 3	0.4969	0.5455	2.3154	1.1108	0.3136	0.1418	0.1098	0.1005
			ФО 4	0.4968	0.5451	2.3225	1.1239	0.3133	0.1414	0.1269	0.1158
			ФО 5	0.4967	0.5451	2.3136	1.1076	0.3137	0.1422	0.1050	0.0962
			ФО 6	0.4963	0.5436	2.3107	1.1019	0.3142	0.1430	0.0960	0.0882
			ФО 7	0.4969	0.5457	2.3172	1.1142	0.3134	0.1416	0.1146	0.1048
			ФО 8	0.4969	0.5457	2.3174	1.1146	0.3134	0.1416	0.1151	0.1052
			ФО 9	0.4969	0.5457	2.3174	1.1146	0.3134	0.1416	0.1151	0.1052
			ФО 10	0.4967	0.5450	2.3135	1.1074	0.3138	0.1422	0.1047	0.0959
			ФО 11	0.4961	0.5432	2.3112	1.1028	0.3143	0.1430	0.0910	0.0837
			ФО 12	0.4968	0.5454	2.3148	1.1098	0.3136	0.1419	0.1085	0.0993

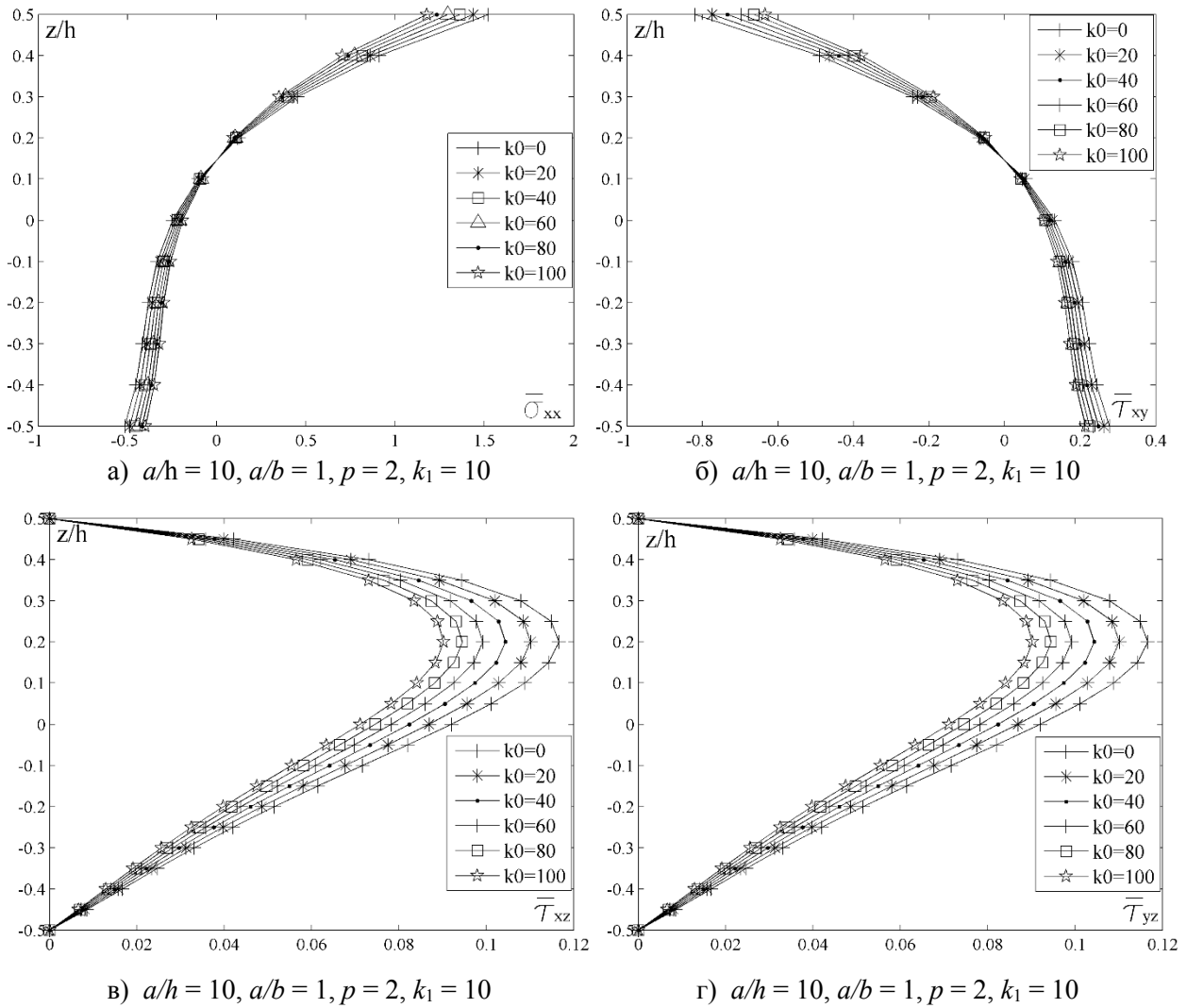
		ФО 13	0.4967	0.5451	2.3138	1.6370	0.3137	0.1421	0.1056	0.0967
0	10	ФО 1	0.3442	0.3667	1.6033	0.7453	0.2174	0.0956	0.0728	0.0648
		ФО 2	0.3442	0.3667	1.6033	0.7453	0.2174	0.0956	0.0728	0.0648
		ФО 3	0.3443	0.3669	1.6043	0.7472	0.2172	0.0954	0.0761	0.0676
		ФО 4	0.3442	0.3667	1.6093	0.7562	0.2171	0.0951	0.0879	0.0779
		ФО 5	0.3442	0.3667	1.6033	0.7452	0.2174	0.0956	0.0727	0.0647
		ФО 6	0.3440	0.3661	1.6017	0.7421	0.2178	0.0963	0.0665	0.0594
		ФО 7	0.3443	0.3670	1.6055	0.7494	0.2171	0.0952	0.0794	0.0704
		ФО 8	0.3443	0.3671	1.6057	0.7496	0.2171	0.0952	0.0797	0.0707
		ФО 9	0.3443	0.3671	1.6057	0.7496	0.2171	0.0952	0.0797	0.0707
		ФО 10	0.3442	0.3667	1.6032	0.7451	0.2174	0.0957	0.0725	0.0645
		ФО 11	0.3439	0.3659	1.6022	0.7428	0.2178	0.0963	0.0631	0.0563
		ФО 12	0.3442	0.3669	1.6040	0.7466	0.2173	0.0955	0.0752	0.0668
		ФО 13	0.3442	0.3668	1.6034	1.2283	0.2174	0.0956	0.0731	0.0650
100	10	ФО 1	0.2617	0.2745	1.2190	0.5579	0.1653	0.0716	0.0554	0.0485
		ФО 2	0.2617	0.2745	1.2190	0.5579	0.1653	0.0716	0.0554	0.0485
		ФО 3	0.2617	0.2746	1.2197	0.5592	0.1652	0.0714	0.0578	0.0506
		ФО 4	0.2617	0.2745	1.2236	0.5661	0.1650	0.0712	0.0668	0.0583
		ФО 5	0.2617	0.2745	1.2190	0.5661	0.1653	0.0716	0.0553	0.0484
		ФО 6	0.2616	0.2741	1.2180	0.5578	0.1656	0.0721	0.0506	0.0444
		ФО 7	0.2617	0.2747	1.2206	0.5608	0.1651	0.0712	0.0604	0.0527
		ФО 8	0.2617	0.2747	1.2207	0.5610	0.1651	0.0712	0.0606	0.0529
		ФО 9	0.2617	0.2747	1.2207	0.5610	0.1651	0.0712	0.0606	0.0529
		ФО 10	0.2617	0.2745	1.2190	0.5578	0.1653	0.0716	0.0551	0.0483
		ФО 11	0.2615	0.2740	1.2184	0.5564	0.1656	0.0721	0.0479	0.0422
		ФО 12	0.2617	0.2746	1.2195	0.5588	0.1652	0.0714	0.0571	0.0500
		ФО 13	0.2617	0.2745	1.2191	0.9722	0.1653	0.0716	0.0556	0.0487

Табела 7.6 Нормализоване вредности померања и напона квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу за $p = 10$ и различите вредности k_0 и k_1 и односа a/h ($a/b = 1$)

p	k_0	k_1	Теорија	\bar{w}		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\tau}_{xy}$		$\bar{\tau}_{xz}$	
				$a/b = 1$							
				$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 5$
10	0	0	ФО 1	1.0087	1.2275	5.0848	2.6434	0.5895	0.2903	0.2113	0.2107
			ФО 2	1.0087	1.2275	5.0848	2.6434	0.5895	0.2903	0.2113	0.2107
			ФО 3	1.0089	1.2282	5.0890	2.6515	0.5893	0.2899	0.2198	0.2190
			ФО 4	1.0071	1.2201	5.1006	2.6742	0.5888	0.2889	0.2488	0.2472
			ФО 5	1.0086	1.2275	5.0847	2.6431	0.5895	0.2903	0.2111	0.2104
			ФО 6	1.0074	1.2229	5.0758	2.6255	0.5900	0.2913	0.1944	0.1940
			ФО 7	1.0088	1.2277	5.0928	2.6590	0.5891	0.2895	0.2281	0.2272
			ФО 8	1.0088	1.2275	5.0931	2.6597	0.5891	0.2895	0.2290	0.2280
			ФО 9	1.0088	1.2275	5.0931	2.6597	0.5891	0.2895	0.2290	0.2280
			ФО 10	1.0086	1.2274	5.0845	2.6426	0.5896	0.2903	0.2105	0.2099
			ФО 11	1.0072	1.2222	5.0762	2.6263	0.5899	0.2910	0.1852	0.1849
			ФО 12	1.0088	1.2281	5.0877	2.6491	0.5894	0.2900	0.2174	0.2166
			ФО 13	1.0087	1.2276	5.0852	2.6442	0.5895	0.2903	0.2121	0.2115
100	0	0	ФО 1	0.5243	0.5779	2.6432	1.2444	0.3064	0.1366	0.1098	0.0992
			ФО 2	0.5243	0.5779	2.6432	1.2444	0.3064	0.1366	0.1098	0.0992
			ФО 3	0.5244	0.5780	2.6451	1.2479	0.3063	0.1364	0.1142	0.1030
			ФО 4	0.5239	0.5762	2.6534	1.2630	0.3063	0.1364	0.1294	0.1167

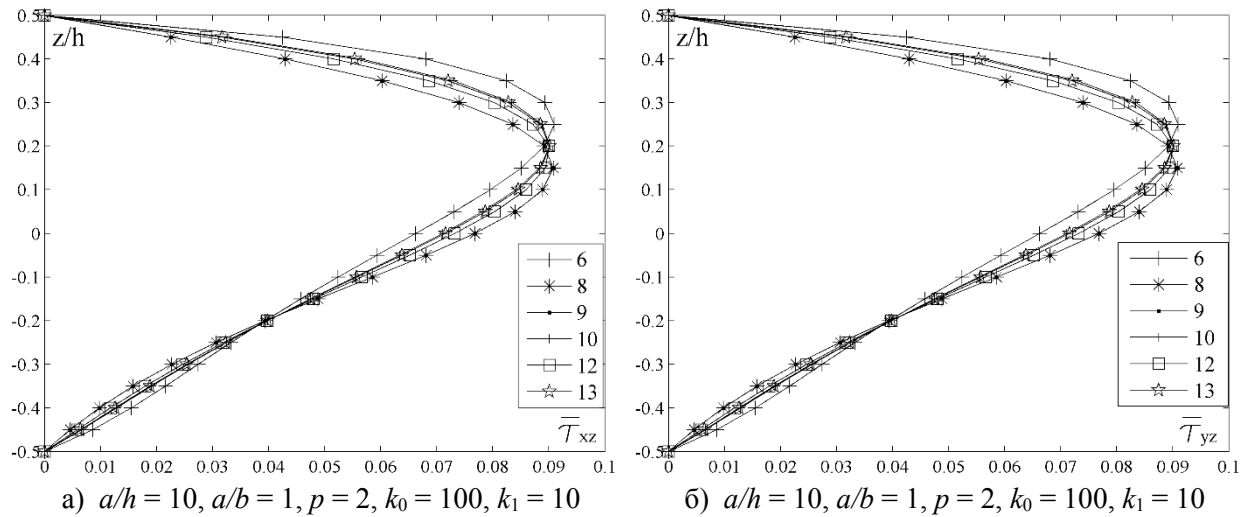
		ФО 5	0.5243	0.5779	2.6432	1.2443	0.3064	0.1367	0.1097	0.0990
		ФО 6	0.5240	0.5768	2.6401	1.2385	0.3069	0.1374	0.1011	0.0915
		ФО 7	0.5243	0.5779	2.6471	1.2517	0.3062	0.1363	0.1186	0.1069
		ФО 8	0.5243	0.5779	2.6474	1.2521	0.3062	0.1363	0.1190	0.1073
		ФО 9	0.5243	0.5779	2.6474	1.2521	0.3062	0.1363	0.1190	0.1073
		ФО 10	0.5243	0.5778	2.6431	1.2441	0.3064	0.1367	0.1094	0.0988
		ФО 11	0.5239	0.5767	2.6405	1.2392	0.3068	0.1373	0.0963	0.0872
		ФО 12	0.5243	0.5780	2.6445	1.2468	0.3063	0.1365	0.1130	0.1019
		ФО 13	0.5243	0.5779	2.6434	1.2447	0.3064	0.1366	0.1102	0.0995
0	10	ФО 1	0.3572	0.3813	1.8010	0.8212	0.2088	0.0902	0.0748	0.0654
		ФО 2	0.3572	0.3813	1.8010	0.8212	0.2088	0.0902	0.0748	0.0654
		ФО 3	0.3572	0.3814	1.8022	0.8234	0.2087	0.0900	0.0778	0.0680
		ФО 4	0.3570	0.3806	1.8084	0.8342	0.2087	0.0901	0.0882	0.0771
		ФО 5	0.3572	0.3813	1.8009	0.8211	0.2088	0.0902	0.0747	0.0653
		ФО 6	0.3571	0.3809	1.7992	0.8177	0.2091	0.0907	0.0689	0.0604
		ФО 7	0.3572	0.3813	1.8036	0.8259	0.2086	0.0899	0.0808	0.0705
		ФО 8	0.3572	0.3813	1.8038	0.8262	0.2086	0.0899	0.0811	0.0708
		ФО 9	0.3572	0.3813	1.8038	0.8262	0.2086	0.0899	0.0811	0.0708
		ФО 10	0.3572	0.3813	1.8009	0.8210	0.2088	0.0902	0.0745	0.0652
		ФО 11	0.3570	0.3808	1.7995	0.8183	0.2091	0.0906	0.0656	0.0576
		ФО 12	0.3572	0.3814	1.8018	0.8227	0.2087	0.0900	0.0770	0.0672
		ФО 13	0.3572	0.3813	1.8011	0.9376	0.2088	0.0901	0.0751	0.0657
100	10	ФО 1	0.2691	0.2826	1.3570	0.6086	0.1573	0.0668	0.0564	0.0485
		ФО 2	0.2691	0.2826	1.3570	0.6086	0.1573	0.0668	0.0564	0.0485
		ФО 3	0.2692	0.2826	1.3579	0.6102	0.1572	0.0667	0.0586	0.0504
		ФО 4	0.2690	0.2822	1.3628	0.6186	0.1573	0.0668	0.0664	0.0571
		ФО 5	0.2691	0.2826	1.3570	0.6086	0.1573	0.0668	0.0563	0.0484
		ФО 6	0.2691	0.2823	1.3558	0.6062	0.1576	0.0672	0.0519	0.0448
		ФО 7	0.2692	0.2826	1.3590	0.6121	0.1572	0.0666	0.0608	0.0523
		ФО 8	0.2692	0.2826	1.3591	0.6123	0.1572	0.0666	0.0611	0.0525
		ФО 9	0.2692	0.2826	1.3591	0.6123	0.1572	0.0666	0.0611	0.0525
		ФО 10	0.2691	0.2826	1.3569	0.6085	0.1573	0.0668	0.0562	0.0483
		ФО 11	0.2690	0.2823	1.3561	0.6067	0.1575	0.0672	0.0494	0.0427
		ФО 12	0.2692	0.2826	1.3576	0.6097	0.1572	0.0667	0.0580	0.0498
		ФО 13	0.2692	0.2826	1.3571	0.6087	0.1573	0.0668	0.0566	0.0486

На слици 7.6 приказан је утицај Винклеровог коефицијента k_0 на расподелу нормалног напона $\bar{\sigma}_{xx}$, смицајног напона $\bar{\tau}_{xy}$ и трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче ослоњене на еластичну подлогу. Анализом дијаграма, може се уочити да повећање вредности параметра k_0 има мањи утицај на вредности напона $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\tau}_{xy}$, него на вредности трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$, где је тај утицај израженији. Такође, може се уочити да су напони $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\tau}_{xy}$ за $z/h = 0.15$ једнаки нули, тј. мењају знак, при чему су код напона $\bar{\sigma}_{xx}$, на доњој ивици плоче максималне вредности напона услед притиска, а на горњој максималне вредности напона услед истезања, док је код напона $\bar{\tau}_{xy}$ обрнуто. Са друге стране, максималне вредности напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ су у равни попречног пресека на висини $z/h = 0.2$.



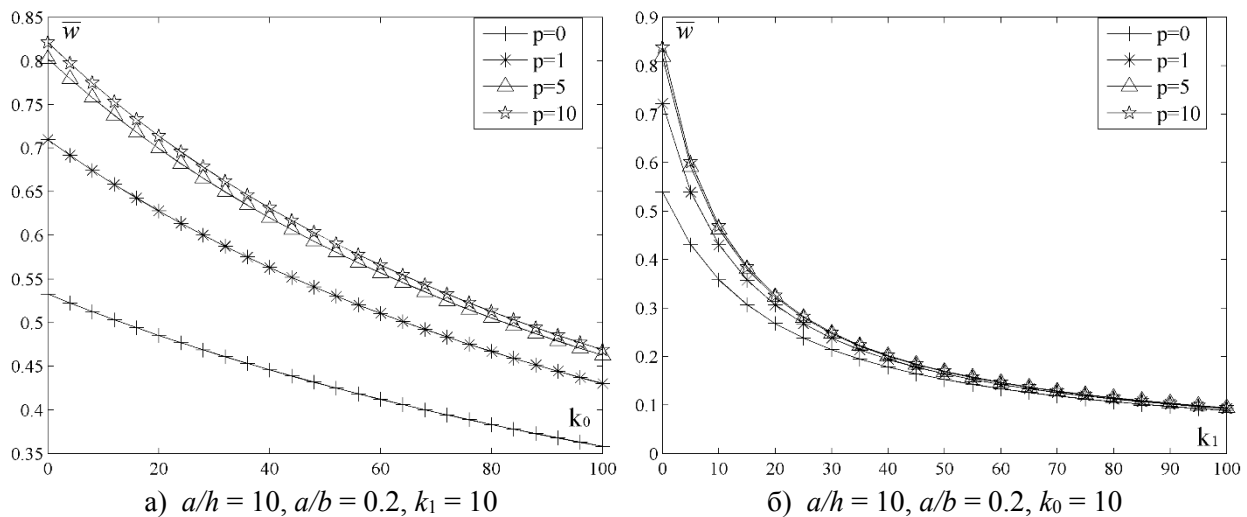
Слика 7.6 Распореда нормализованих вредности нормалног напона $\bar{\sigma}_{xx}$, смицајног напона $\bar{\tau}_{xy}$ и трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче ослоњене на еластичну подлогу за различите вредности коефицијента k_0

На слици 7.7 дат је упоредни приказ распореде трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче ослоњене на еластичну подлогу за различите функције облика. Као и код савијања плоче без еластичне подлоге и овде се може уочити да све функције облика не дају исте резултате. Тако се може видети да за ФО 6 напони достижу максималну вредност у равни $z/h = 0.25$, за ФО 8 у равни $z/h = 0.15$, док за остале приказане функције облика у равни $z/h = 0.2$.



Слика 7.7 Расподела нормализованих вредности трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче ослоњене на еластичну подлогу за различите функције облика

Како би се добио јасан увид о утицају Винклервог, односно Пастернаковог коефицијента еластичне подлоге, на слици 7.8 су дати дијаграми померања \bar{w} плоче ослоњене на еластичну подлогу за различите вредности индекса p и коефицијената k_0 и k_1 . Поређењем ова два дијаграма, може се уочити да је промена вредности померања \bar{w} већа са порастом вредности коефицијента k_1 , него са порастом коефицијента k_0 . На пример, за плочу од ФГМ при вредности $p = 5$, са променом коефицијента $k_0 = 0$ на $k_0 = 100$, вредност угиба се промени за два пута. У другом случају са променом коефицијента $k_1 = 0$ на $k_1 = 100$, вредност угиба се промени за 8 пута. Такође, може се видети да са порастом вредности индекса p , разлика у померањима која постоји, остаје готово константна, без обзира на повећавање вредности k_0 , док код дијаграма на слици 7.8б криве се, са повећавањем вредности за k_1 , све више приближавају и већ при вредностима $k_1 > 50$ се преклапају.



Слика 7.8 Нормализоване вредности померања \bar{w} плоче ослоњене на еластичну подлогу за различите вредности индекса p и коефицијената k_0 и k_1

7.1.2 Нелинеарна анализа

7.1.2.1 Извијање услед утицаја температуре на плоче од ФГМ

У оквиру овог поглавља приказани су, како кроз табеларни приказ, тако и кроз дијаграме, резултати извијања плоче од ФГМ. Анализирана су три случаја расподеле температуре у правцу дебљине плоче: равномерне, линеарне и нелинеарне градијентне расподеле. Разматран је утицај различитих фактора на промену критичне температуре извијања, као што су индекс p , степен нелинеарности s , код нелинеарне градијентне расподеле, промена дебљине плоче a/h , промена геометрије плоче a/b . Добијени резултати верификовани су поређењем са резултатима из литературе [78] који су добијени применом HSDT^R (смицајна деформациона теорија вишег реда заснована на Редијевој теорији). Са друге стране, предности коришћења HSDT теорије, засноване на функцијама облика, код умерено дебелих и дебелих плоча показане су кроз поређење са резултатима датим у [175], који су добијени применом СРТ.

7.1.2.1.1 Равномерна промена температуре

У табели 7.7 дате су вредности критичне температуре извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при равномерној промени температуре у правцу дебљине плоче описане једначином (5.12). Разматран је утицај индекса p на ΔT_{cr} , са једне стране, односно дебљине плоче (a/h), са друге стране. Аналитичким поступком добијене су вредности критичне температуре коришћењем HSDT засноване на 13 различитих функција облика датих у табели 4.1 и упоређење су са вредностима добијених у [175] применом СРТ. Оно што се недвосмислено може уочити је да, код танких плоча ($a/h \geq 40$), HSDT и CPL дају готово идентичне резултате, док код умерено дебелих ($a/h = 20$) и дебелих ($a/h = 10$) плоча разлика постаје све већа са смањивањем односа a/h . Тако на пример, код $a/h = 20$ та разлика је око 1,5 -2 %, док за $a/h = 10$ износи 5 - 8% у зависности од индекса p . Са повећавањем дебљине плоче та разлика је све већа, што јасно указује да код умерено дебелих и дебелих плоча CPL не даје задовољавајуће резултате за ΔT_{cr} . Са друге стране, резултати добијени у оквиру ове дисертације, засновани на HSDT показују одлично слагање са резултатима из [78], добијени другом деформационом теоријом вишег реда (HSDT^R). Анализом резултата, може се уочити и да при повећавању вредности индекса p , ΔT_{cr} се смањује за све вредности a/h , што је потпуно у складу са чињеницом да већа вредност индекса p смањује удео керамике у ФГМ, а тиме се и термичка отпорност плоче смањује [176].

Табела 7.7 Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при **равномерној** промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$ и $m = n = 1$)

p	Теорија	ΔT_{cr}					
		$a/b = 1$					
		$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
0	CPT [175]	1709.911	427.477	106.869	47.479	26.717	17.099
	HSDT ^R [78]	1617.484	421.516	106.491	47.423	26.692	17.088
	ΦО 1	1618.681	421.535	106.494	47.423	26.693	17.049
	ΦО 2	1618.681	421.535	106.494	47.423	26.693	17.049
	ΦО 3	1618.820	421.543	106.494	47.423	26.693	17.049
	ΦО 4	1621.682	421.734	106.506	47.425	26.694	17.049
	ΦО 5	1618.681	421.535	106.494	47.423	26.693	17.049
	ΦО 6	1619.120	421.566	106.496	47.423	26.693	17.049
	ΦО 7	1619.225	421.570	106.496	47.423	26.693	17.049
	ΦО 8	1619.283	421.574	106.496	47.423	26.693	17.049
	ΦО 9	1619.283	421.574	106.496	47.423	26.693	17.049
	ΦО 10	1618.681	421.535	106.494	47.423	26.693	17.049
	ΦО 11	1619.429	421.587	106.497	47.423	26.694	17.049
	ΦО 12	1618.752	421.539	106.494	47.423	26.693	17.049
ΦО 13	1618.684	421.535	106.494	47.423	26.693	17.049	
1	CPT [175]	794.377	198.594	49.648	22.066	12.412	7.943
	HSDT ^R [78]	757.890	196.256	49.500	22.037	12.402	7.939
	ΦО 1	758.395	196.265	49.501	22.037	12.402	7.940
	ΦО 2	758.395	196.265	49.501	22.037	12.402	7.940
	ΦО 3	758.450	196.268	49.501	22.037	12.403	7.940
	ΦО 4	759.588	196.343	49.506	22.038	12.403	7.940
	ΦО 5	758.395	196.265	49.501	22.037	12.402	7.940
	ΦО 6	758.570	196.277	49.502	22.037	12.403	7.940
	ΦО 7	758.611	196.279	49.502	22.037	12.403	7.940
	ΦО 8	758.634	196.280	49.502	22.037	12.403	7.940
	ΦО 9	758.634	196.280	49.502	22.037	12.403	7.940
	ΦО 10	758.395	196.265	49.501	22.037	12.402	7.940
	ΦО 11	758.692	196.285	49.503	22.037	12.403	7.940
	ΦО 12	758.423	196.266	49.501	22.037	12.403	7.940
ΦО 13	758.396	196.265	49.501	22.037	12.402	7.940	
5	CPT [175]	726.571	181.642	45.410	20.182	11.352	7.265
	HSDT ^R [78]	678.926	178.528	45.213	20.143	11.339	7.259
	ΦО 1	679.310	178.535	45.213	20.143	11.340	7.260
	ΦО 2	679.310	178.535	45.213	20.143	11.340	7.260
	ΦО 3	678.949	178.509	45.212	20.143	11.340	7.260
	ΦО 4	679.144	178.521	45.213	20.143	11.340	7.260
	ΦО 5	679.323	178.536	45.214	20.143	11.340	7.260
	ΦО 6	680.460	178.615	45.219	20.144	11.340	7.260
	ΦО 7	678.752	178.495	45.211	20.143	11.340	7.260
	ΦО 8	678.741	178.494	45.211	20.143	11.340	7.260
	ΦО 9	678.741	178.494	45.211	20.143	11.340	7.260
	ΦО 10	679.350	178.538	45.214	20.143	11.340	7.260
	ΦО 11	680.761	178.636	45.220	20.144	11.340	7.260
	ΦО 12	679.039	178.516	45.212	20.143	11.340	7.260
ΦО 13	679.270	178.532	45.213	20.143	11.340	7.260	

10	CPT [175]	746.927	186.731	46.682	20.747	11.670	7.469
	HSDT ^R [78]	692.519	183.140	46.454	20.703	11.656	7.461
	ΦО 1	692.694	183.144	46.455	20.702	11.656	7.463
	ΦО 2	692.694	183.144	46.455	20.702	11.656	7.463
	ΦО 3	692.544	183.133	46.454	20.702	11.656	7.463
	ΦО 4	693.799	183.218	46.460	20.703	11.656	7.463
	ΦО 5	692.702	183.145	46.455	20.702	11.656	7.463
	ΦО 6	693.549	183.205	46.459	20.703	11.656	7.463
	ΦО 7	692.597	183.136	46.454	20.702	11.656	7.463
	ΦО 8	692.615	183.137	46.455	20.702	11.656	7.463
	ΦО 9	692.615	183.137	46.455	20.702	11.656	7.463
	ΦО 10	692.717	183.146	46.455	20.702	11.656	7.463
	ΦО 11	693.664	183.213	46.459	20.703	11.656	7.463
	ΦО 12	692.570	183.135	46.454	20.702	11.656	7.463
	ΦО 13	692.672	183.142	46.455	20.702	11.656	7.463

У табели 7.8 разматран је утицај геометрије плоче (квадратна $a/b = 1$, односно правоугаона плоча $a/b > 1$) на ΔT_{cr} при равномерној промени температуре, а за различите вредности индекса p и фиксирану вредност $a/h = 20$. На основу приказаних резултата, може се закључити да са порастом односа a/b расте ΔT_{cr} , односно да су правоугаоне плоче знатно отпорније на термичко извијање од квадратних. Такође, упоредним приказом резултата за свих 13 функција облика, које су предмет разматрања у дисертацији, може се закључити да све функције дају добре резултате за ΔT_{cr} .

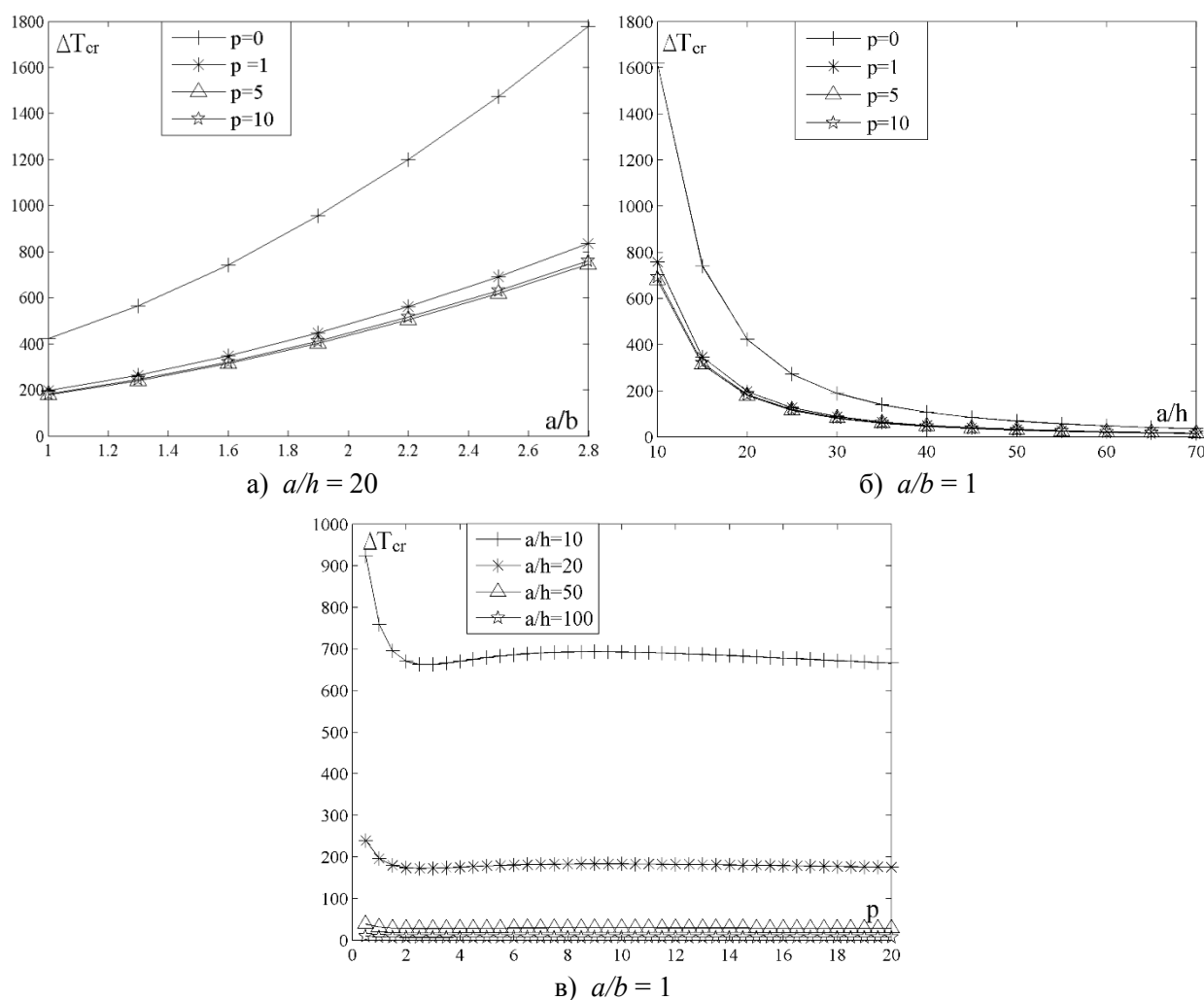
Табела 7.8 Критична температура извијања (ΔT_{cr}) правоугаоне плоче при **равномерној** промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/b ($a/h = 20$ и $m = n = 1$)

p	Теорија	ΔT_{cr}		
		$a/h = 20$		
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$
0	CPT [175]	427.477	-----	-----
	HSDT ^R [78]	421.516	-----	-----
	ΦО 1	421.535	1032.322	1996.742
	ΦО 2	421.535	1032.322	1996.742
	ΦО 3	421.543	1032.376	1996.957
	ΦО 4	421.734	1033.530	2001.337
	ΦО 5	421.535	1032.322	1996.741
	ΦО 6	421.566	1032.503	1997.401
	ΦО 7	421.570	1032.538	1997.579
	ΦО 8	421.574	1032.562	1997.668
	ΦО 9	421.574	1032.562	1997.668
	ΦО 10	421.535	1032.322	1996.741
	ΦО 11	421.587	1032.629	1997.869
	ΦО 12	421.539	1032.349	1996.853
ΦО 13	421.535	1032.322	1996.746	
1	CPT [175]	198.594	-----	-----
	HSDT ^R [78]	196.256	-----	-----
	ΦО 1	196.265	482.184	937.388

	ФО 2	196.265	482.184	937.388
	ФО 3	196.268	482.205	937.474
	ФО 4	196.343	482.661	939.223
	ФО 5	196.265	482.184	937.388
	ФО 6	196.277	482.256	937.651
	ФО 7	196.279	482.269	937.723
	ФО 8	196.280	482.279	937.758
	ФО 9	196.280	482.279	937.758
	ФО 10	196.265	482.184	937.388
	ФО 11	196.285	482.305	937.838
	ФО 12	196.266	482.195	937.433
	ФО 13	196.265	482.184	937.390
5	CPT [175]	181.642	-----	-----
	HSDT ^R [78]	178.528	-----	-----
	ФО 1	178.535	435.177	835.566
	ФО 2	178.535	435.177	835.566
	ФО 3	178.509	435.027	835.024
	ФО 4	178.521	435.101	835.337
	ФО 5	178.536	435.183	835.586
	ФО 6	178.615	435.651	837.301
	ФО 7	178.495	434.945	834.730
	ФО 8	178.494	434.940	834.715
	ФО 9	178.494	434.940	834.715
	ФО 10	178.538	435.194	835.627
	ФО 11	178.636	435.775	837.755
	ФО 12	178.516	435.065	835.159
	ФО 13	178.532	435.161	835.506
10	CPT [175]	186.731	-----	-----
	HSDT ^R [78]	183.140	-----	-----
	ФО 1	183.144	445.044	850.450
	ФО 2	183.144	445.044	850.450
	ФО 3	183.133	444.980	850.227
	ФО 4	183.218	445.490	852.137
	ФО 5	183.145	445.047	850.461
	ФО 6	183.205	445.400	851.732
	ФО 7	183.136	445.000	850.312
	ФО 8	183.137	445.007	850.339
	ФО 9	183.137	445.007	850.339
	ФО 10	183.146	445.054	850.484
	ФО 11	183.213	445.447	851.905
	ФО 12	183.135	444.991	850.265
	ФО 13	183.142	445.035	850.417

Како би се боље уочиле неке зависности, као и утицај поједних параметара на критичну температуру извијања, на слици 7.9 су приказани дијаграми ΔT_{cr} у функцији односа a/b , a/h и индекса p . Како је кроз табеларни приказ јасно да све предложене функције облика дају врло сличне резултате, резултати на дијаграмима су, из хардверских разлога у смислу смањења времена прорачуна, приказани само за функцију облика предложену од стране Солдатоса (ФО 10). На дијаграму, приказаном на слици 7.9а, показано је да са повећањем вредности индекса p долази до смањења разлика међу добијеним резултатима, па већ за

$p > 5$, константан однос $a/h = 20$ и променљив однос a/b , криве почињу да се стапају у једну криву. Стапање кривих потиче од чињенице да су већ при вредностима $p > 5$ плоче од ФГМ са већинским уделом метала и врло малим уделом керамике, па су и ΔT_{cr} врло сличне. На слици 7.9б, није тешко приметити да повећање односа a/h при било којој вредности индекса p утиче да се криве асимптотски приближавају ка нули, што је у складу са логичном чињеницом да су танке плоче мање отпорне на температурне промене. Дијаграм 7.9в показује да при порасту вредности индекса p до одређене вредности, ΔT_{cr} опада и, у зависности од дебљине плоче достиже минимум за одређену вредносту индекса p . После тога, даље повећавање вредности индекса p незнатно повећава вредности ΔT_{cr} , да би се потом ушло у зону идентичних вредности за ΔT_{cr} без обзира на даље повећање вредности индекса p .



Слика 7.9 Утицај односа a/b и a/h и индекса p на критичну температуру извијања при **равномерној** промени температуре

7.1.2.1.2 Линеарна промена температуре

У табелама 7.9 и 7.10 дате су вредности критичних температура извијања (ΔT_{cr}) плоче при линеарној промени температуре у правцу дебљине плоче, описаној у једначини (5.13). Критичне температуре извијања добијене су под претпоставком да је температура доње ивице плоче, која је од метала, $T_m = 5^\circ$. У табели 7.9 разматран је утицај индекса p и дебљине плоче (a/h) на ΔT_{cr} и аналогно као у табели 7.7, може се закључити да са порастом дебљине плоче расте ΔT_{cr} , док са порастом индекса p опада ΔT_{cr} . Такође, поређењем резултата добијених у овој дисертацији применом HSDT заснованих на функцијама облика и резултата из литературе добијених применом CPT, може се закључити да је неопходна примена HSDT код умерено дебелих и дебелих плоча.

Табела 7.9 Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при **линеарној** промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)

p	Теорија	ΔT_{cr}					
		$a/b = 1$					
		$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
0	CPT [175]	-----	844.955	203.738	84.995	43.434	24.198
	HSDT ^R [78]	-----	833.032	202.984	84.848	43.381	24.177
	Ф0 1	-----	833.071	202.988	84.846	43.387	24.178
	Ф0 2	-----	833.071	202.988	84.846	43.387	24.178
	Ф0 3	-----	833.088	202.989	84.846	43.387	24.178
	Ф0 4	-----	833.470	203.250	84.851	43.389	24.179
	Ф0 5	-----	833.071	202.988	84.846	43.387	24.178
	Ф0 6	-----	833.132	202.992	84.847	43.387	24.179
	Ф0 7	-----	833.141	202.993	84.847	43.387	24.179
	Ф0 8	-----	833.149	202.993	84.847	43.388	24.179
	Ф0 9	-----	833.149	202.993	84.847	43.388	24.179
	Ф0 10	-----	833.071	202.988	84.846	43.387	24.178
	Ф0 11	-----	833.175	202.995	84.847	43.388	24.179
	Ф0 12	-----	833.079	202.989	84.846	43.387	24.178
Ф0 13	-----	833.071	202.988	84.846	43.387	24.178	
1	CPT [175]	1480.450	363.079	83.736	32.006	13.901	5.520
	HSDT ^R [78]	1412.022	358.695	83.459	31.952	13.882	5.513
	Ф0 1	1412.968	358.711	83.461	31.952	13.884	5.513
	Ф0 2	1412.968	358.711	83.461	31.952	13.884	5.513
	Ф0 3	1413.071	358.717	83.461	31.952	13.884	5.513
	Ф0 4	1415.205	358.858	83.470	31.954	13.884	5.514
	Ф0 5	1412.967	358.711	83.461	31.952	13.884	5.513
	Ф0 6	1413.295	358.734	83.462	31.952	13.884	5.513
	Ф0 7	1413.373	358.737	83.463	31.952	13.884	5.513
	Ф0 8	1413.416	358.740	83.463	31.952	13.884	5.513
	Ф0 9	1413.416	358.740	83.463	31.952	13.884	5.513
	Ф0 10	1412.968	358.711	83.461	31.952	13.884	5.513
	Ф0 11	1413.525	358.749	83.463	31.952	13.884	5.513
	Ф0 12	1413.021	358.714	83.461	31.952	13.884	5.513

	ФО 13	1412.969	358.711	83.461	31.952	13.884	5.513
5	CPT [175]	1242.035	304.054	69.558	26.133	10.934	3.899
	HSDT ^R [78]	1160.024	298.693	69.219	26.066	10.912	3.890
	ФО 1	1160.685	298.705	69.219	26.066	10.913	3.891
	ФО 2	1160.685	298.705	69.219	26.066	10.913	3.891
	ФО 3	1160.063	298.661	69.217	26.066	10.913	3.891
	ФО 4	1160.400	298.680	69.218	26.066	10.913	3.891
	ФО 5	1160.707	298.706	69.220	26.066	10.913	3.891
	ФО 6	1162.664	298.843	69.228	26.068	10.914	3.891
	ФО 7	1159.724	298.636	69.215	26.065	10.913	3.891
	ФО 8	1159.706	298.635	69.215	26.065	10.913	3.891
	ФО 9	1159.706	298.635	69.215	26.065	10.913	3.891
	ФО 10	1160.754	298.709	69.220	26.066	10.913	3.891
	ФО 11	1163.182	298.878	69.231	26.068	10.914	3.892
	ФО 12	1160.218	298.672	69.217	26.066	10.913	3.891
ФО 13	1160.616	298.700	69.219	26.066	10.913	3.891	
10	CPT [175]	1314.743	322.040	73.864	27.906	11.820	4.375
	HSDT ^R [78]	1218.328	315.677	73.461	27.826	11.796	4.363
	ФО 1	1218.639	315.683	73.461	27.826	11.795	4.365
	ФО 2	1218.639	315.683	73.461	27.826	11.795	4.365
	ФО 3	1218.372	315.663	73.460	27.826	11.795	4.365
	ФО 4	1220.596	315.814	73.470	27.828	11.796	4.365
	ФО 5	1218.652	315.684	73.461	27.826	11.795	4.365
	ФО 6	1220.154	315.791	73.468	27.828	11.796	4.365
	ФО 7	1218.467	315.669	73.460	27.826	11.795	4.365
	ФО 8	1218.498	315.671	73.460	27.826	11.795	4.365
	ФО 9	1218.498	315.671	73.460	27.826	11.795	4.365
	ФО 10	1218.680	315.686	73.461	27.826	11.795	4.365
	ФО 11	1220.358	315.805	73.469	27.828	11.796	4.365
	ФО 12	1218.418	315.667	73.460	27.826	11.795	4.365
ФО 13	1218.600	315.680	73.461	27.826	11.795	4.365	

У табели 7.10 разматран је утицај односа a/b и индекса p на ΔT_{cr} при линеарној промени температуре у правцу дебљине плоче, а за фиксирану дебљину плоче $a/h = 20$. Са порастом односа a/b знатно расте ΔT_{cr} , док, као што је раније већ речено, пораст индекса p смањује вредност ΔT_{cr} , јер се смањује удео керамике у ФГМ.

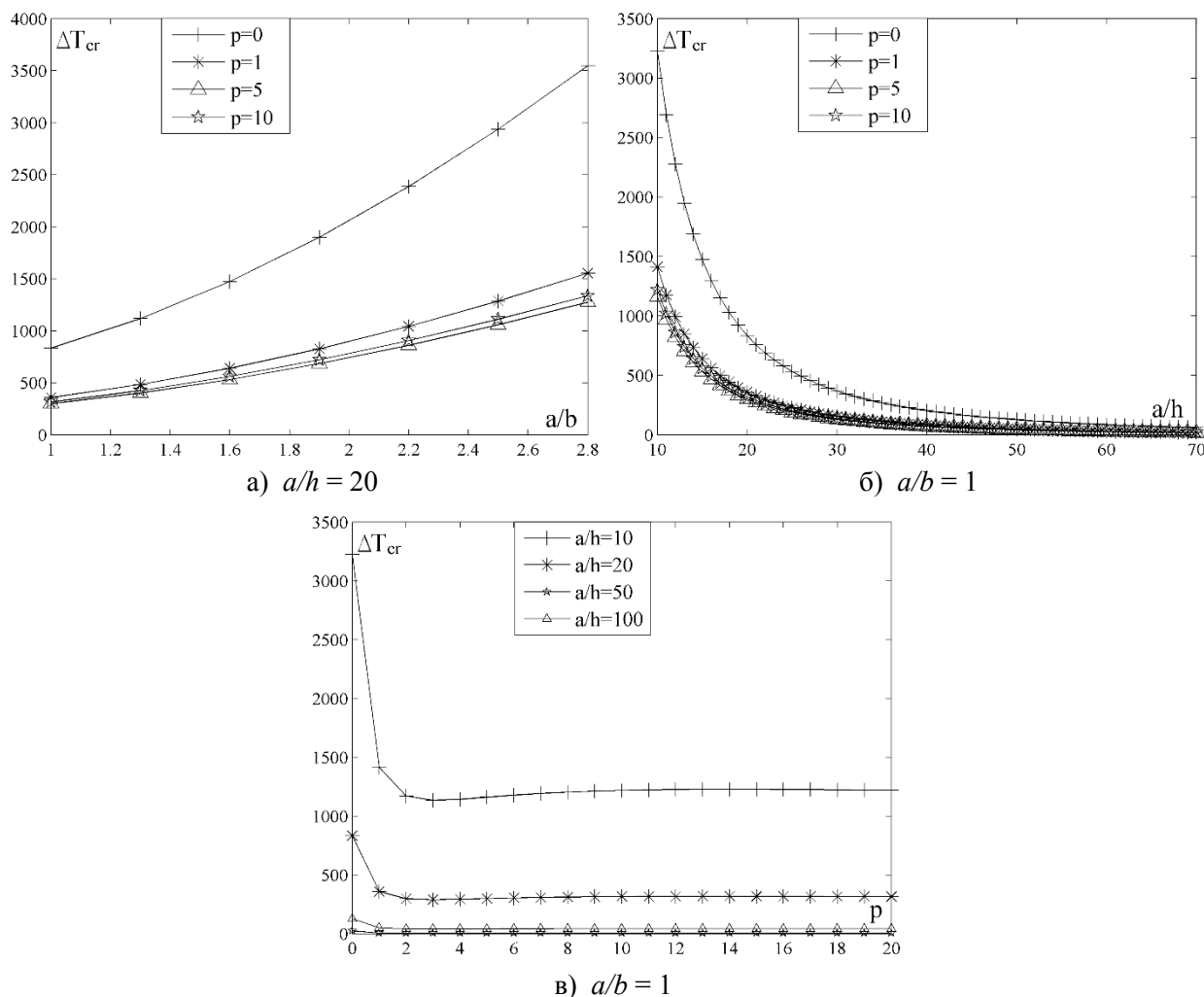
Табела 7.10 Критична температура извијања (ΔT_{cr}) правоугаоне плоче при **линеарној** промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/b ($a/h = 20$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)

p	Теорија	ΔT_{cr}		
		$a/h = 20$		
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$
1	CPT [175]	363.079	-----	-----
	HSDT ^R [78]	358.695	-----	-----
	ФО 1	358.711	894.942	1748.663
	ФО 2	358.711	894.942	1748.663

	ФО 3	358.717	894.982	1748.825
	ФО 4	358.858	895.838	1752.104
	ФО 5	358.711	894.942	1748.663
	ФО 6	358.734	895.077	1749.157
	ФО 7	358.737	895.103	1749.291
	ФО 8	358.740	895.120	1749.357
	ФО 9	358.740	895.120	1749.357
	ФО 10	358.711	894.942	1748.663
	ФО 11	358.749	895.171	1749.508
	ФО 12	358.714	894.963	1748.747
	ФО 13	358.711	894.943	1748.666
5	CPT [175]	304.054	-----	-----
	HSDT ^R [78]	298.693	-----	-----
	ФО 1	298.705	740.461	1429.648
	ФО 2	298.705	740.461	1429.648
	ФО 3	298.661	740.203	1428.714
	ФО 4	298.680	740.329	1429.253
	ФО 5	298.706	740.470	1429.682
	ФО 6	298.843	741.277	1432.633
	ФО 7	298.636	740.061	1428.208
	ФО 8	298.635	740.053	1428.183
	ФО 9	298.635	740.053	1428.183
	ФО 10	298.709	740.490	1429.752
	ФО 11	298.878	741.490	1433.416
	ФО 12	298.672	740.268	1428.947
	ФО 13	298.700	740.433	1429.545
10	CPT [175]	322.040	-----	-----
	HSDT ^R [78]	315.677	-----	-----
	ФО 1	315.683	779.786	1498.192
	ФО 2	315.683	779.786	1498.192
	ФО 3	315.663	779.673	1497.797
	ФО 4	315.814	780.578	1501.182
	ФО 5	315.684	779.792	1498.211
	ФО 6	315.791	780.417	1500.464
	ФО 7	315.669	779.709	1497.948
	ФО 8	315.671	779.721	1497.996
	ФО 9	315.671	779.721	1497.996
	ФО 10	315.686	779.803	1498.253
	ФО 11	315.805	780.501	1500.770
	ФО 12	315.667	779.693	1497.865
	ФО 13	315.680	779.770	1498.134

На слици 7.10 приказани су дијаграми утицаја односа a/b , a/h и индекса p на критичну температуру извијања при линеарној промени температуре. Аналогно претходно датој анализи при равномерној промени температуре, природа кривих на слици 7.10 је иста, тако да се може закључити да ΔT_{cr} , и при линеарној расподели температуре, расте са порастом односа a/b и опада са порастом односа a/h и индекса p . Такође, на основу слике 7.10 в може се уочити да вредност хоризонталне асимптоте, при којој се ΔT_{cr} не мења упркос даљем повећавању индекса p , примарно зависи од односа a/h . Треба истаћи да код плоча од

керамике ($p = 0$), при вредностима односа $a/h > 15$ и $a/b > 2$, анализа излази из области линеарне еластичности, која је предмет разматрања у овој дисертацији.



Слика 7.10 Утицај односа a/b и a/h и индекса p на критичну температуру извијања при линеарној промени температуре

7.1.2.1.3 Нелинеарна промена температуре

Критичне температуре извијања при нелинеарној градијентној промени температуре у правцу дебљине плоче, описаној у (5.13), дате су у табелама 7.11 и 7.12. У табели 7.11 приказане су вредности за ΔT_{cr} код квадратне плоче, за различите односе a/h , при чему је $s = 2$. Добијени резултати верификовани су са резултатима доступним у литератури, а затим су приказани резултати и за друге дебљине плоча и вредности индекса p . Поређењем резултата, може се уочити добро поклапање резултата добијених у овом раду, применом различитих функција облика, са резултатима добијеним у [177] применом HSDT која се заснива на ткз. побољшаној теорији плоча, која укључује четири непознате величине у претпостављене облике померања (*four variable refined plate theory*).

Табела 7.11 Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при **нелинераној** промени температуре ($s = 2$) за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)

p	Теорија	ΔT_{cr}					
		$a/b = 1$					
		$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
0	CPT [178]	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	HSDT [177]	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	Ф0 1	-----	1249.606	304.482	127.269	65.081	36.268
	Ф0 2	-----	1249.606	304.482	127.269	65.081	36.268
	Ф0 3	-----	1249.632	304.483	127.270	65.081	36.268
	Ф0 4	-----	1250.204	304.520	127.277	65.083	36.269
	Ф0 5	-----	1249.606	304.482	127.269	65.081	36.268
	Ф0 6	-----	1249.698	304.488	127.270	65.081	36.268
	Ф0 7	-----	1249.712	304.488	127.271	65.081	36.268
	Ф0 8	-----	1249.724	304.489	127.271	65.081	36.268
	Ф0 9	-----	1249.724	304.489	127.271	65.081	36.268
	Ф0 10	-----	1249.606	304.482	127.269	65.081	36.268
	Ф0 11	-----	1249.762	304.492	127.271	65.082	36.268
	Ф0 12	-----	1249.619	304.483	127.269	65.081	36.268
Ф0 13	-----	1249.606	304.482	127.269	65.081	36.268	
1	CPT [178]	2207.200	-----	-----	-----	-----	-----
	HSDT [177]	2100.000	-----	-----	-----	-----	-----
	Ф0 1	2106.640	534.814	124.435	47.638	20.700	8.220
	Ф0 2	2106.640	534.814	124.435	47.638	20.700	8.220
	Ф0 3	2106.794	534.824	124.436	47.638	20.700	8.220
	Ф0 4	2109.976	535.033	124.449	47.641	20.700	8.221
	Ф0 5	2106.640	534.814	124.435	47.638	20.700	8.220
	Ф0 6	2107.128	534.848	124.437	47.639	20.700	8.220
	Ф0 7	2107.245	534.853	124.437	47.639	20.700	8.220
	Ф0 8	2107.309	534.857	124.438	47.639	20.700	8.220
	Ф0 9	2107.309	534.857	124.438	47.639	20.700	8.220
	Ф0 10	2106.640	534.814	124.435	47.638	20.700	8.220
	Ф0 11	2107.471	534.871	124.439	47.639	20.700	8.220
	Ф0 12	2106.719	534.819	124.435	47.638	20.700	8.220
Ф0 13	2106.643	534.814	124.435	47.638	20.700	8.220	
5	CPT [178]	1708.300	-----	-----	-----	-----	-----
	HSDT [177]	1590.000	-----	-----	-----	-----	-----
	Ф0 1	1596.414	410.840	95.205	35.852	15.010	5.352
	Ф0 2	1596.414	410.840	95.205	35.852	15.010	5.352
	Ф0 3	1595.559	410.780	95.201	35.851	15.010	5.351
	Ф0 4	1596.022	410.806	95.203	35.851	15.010	5.351
	Ф0 5	1596.444	410.842	95.205	35.852	15.010	5.352
	Ф0 6	1599.136	411.030	95.217	35.854	15.011	5.352
	Ф0 7	1595.092	410.746	95.199	35.850	15.010	5.351
	Ф0 8	1595.068	410.744	95.199	35.850	15.010	5.351
	Ф0 9	1595.068	410.744	95.199	35.850	15.010	5.351
	Ф0 10	1596.509	410.847	95.205	35.852	15.010	5.352
	Ф0 11	1599.849	411.080	95.220	35.855	15.011	5.352

	ФО 12	1595.772	410.795	95.202	35.851	15.010	5.351
	ФО 13	1596.319	410.834	95.205	35.851	15.010	5.352
10	СРТ [178]	1809.200	----	----	----	----	----
	НСДТ [177]	1670.000					
	ФО 1	1677.025	434.426	101.094	38.293	16.232	6.007
	ФО 2	1677.025	434.426	101.094	38.293	16.232	6.007
	ФО 3	1676.658	434.399	101.092	38.293	16.232	6.007
	ФО 4	1679.718	434.606	101.105	38.295	16.233	6.007
	ФО 5	1677.043	434.427	101.094	38.293	16.232	6.007
	ФО 6	1679.110	434.574	101.103	38.295	16.233	6.007
	ФО 7	1676.788	434.406	101.092	38.293	16.232	6.007
	ФО 8	1676.831	434.409	101.092	38.293	16.232	6.007
	ФО 9	1676.831	434.409	101.092	38.293	16.232	6.007
	ФО 10	1677.081	434.430	101.094	38.293	16.232	6.007
	ФО 11	1679.391	434.594	101.104	38.295	16.233	6.007
	ФО 12	1676.721	434.404	101.092	38.293	16.232	6.007
	ФО 13	1676.972	434.422	101.093	38.293	16.232	6.007

Утицај степена нелинеарности s у једначини (5.13), на ΔT_{cr} квадратне плоче дебљине $a/h = 20$ приказан је у табели 7.12. Анализом добијених вредности, може се закључити да са порастом степена нелинеарности закона промене температуре у правцу дебљине плоче, расте ΔT_{cr} . Та разлика је значајна, па тако ако упоредимо вредности за $s = 2$ и $s = 5$, а за било коју вредност индекса p , уочићемо да критична температура извијања порасте за око 100%.

Табела 7.12 Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при **нелинераној** промени температуре за различите вредности индекса p и s ($a/h = 20$, $a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)

p	Теорија	ΔT_{cr}			
		$a/h = 20$ и $a/b = 1$			
		$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
1	ФО 1	534.814	717.631	905.205	1096.204
	ФО 2	534.814	717.631	905.205	1096.204
	ФО 3	534.824	717.643	905.222	1096.224
	ФО 4	535.033	717.925	905.576	1096.653
	ФО 5	534.814	717.631	905.205	1096.204
	ФО 6	534.848	717.676	905.263	1096.274
	ФО 7	534.853	717.683	905.271	1096.284
	ФО 8	534.857	717.689	905.278	1096.293
	ФО 9	534.857	717.689	905.278	1096.293
	ФО 10	534.814	717.631	905.205	1096.204
	ФО 11	534.871	717.707	905.302	1096.321
	ФО 12	534.819	717.637	905.213	1096.214
	ФО 13	534.814	717.631	905.206	1096.205
5	ФО 1	410.840	518.893	626.009	733.474
	ФО 2	410.840	518.893	626.009	733.474
	ФО 3	410.780	518.817	625.917	733.366
	ФО 4	410.806	518.850	625.957	733.413
	ФО 5	410.842	518.896	626.012	733.478

	Ф0 6	411.030	519.133	626.298	733.813
	Ф0 7	410.746	518.774	625.865	733.306
	Ф0 8	410.744	518.772	625.862	733.303
	Ф0 9	410.744	518.772	625.869	733.303
	Ф0 10	410.847	518.901	626.019	733.486
	Ф0 11	411.080	519.195	626.373	733.901
	Ф0 12	410.795	518.836	625.940	733.393
	Ф0 13	410.834	518.885	625.998	733.462
10	Ф0 1	434.426	543.383	646.917	747.373
	Ф0 2	434.426	543.383	646.917	747.373
	Ф0 3	434.399	543.349	646.877	747.326
	Ф0 4	434.606	543.609	647.186	747.683
	Ф0 5	434.427	543.385	646.919	747.375
	Ф0 6	434.574	543.568	647.138	747.627
	Ф0 7	434.406	543.359	646.888	747.339
	Ф0 8	434.409	543.362	646.892	747.344
	Ф0 9	434.409	543.362	646.892	747.344
	Ф0 10	434.430	543.388	646.923	747.380
	Ф0 11	434.594	543.593	647.167	747.661
	Ф0 12	434.404	543.355	646.884	747.334
	Ф0 13	434.422	543.378	646.911	747.366

Како би се добио јаснији и прегледнији увид у значај и разлику претходно представљених резултата, у табели 7.13 је дат упоредни приказ критичних температура извијања за равномерну, линеарну и нелинеарну промену температуре у правцу дебљине плоче.

Табела 7.13 Упоредни приказ критичне температуре извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче при **равномерној** (Р), **линеарној** (Л) и **нелинеарној** (НЛ) промени температуре за различите вредности индекса p и односа a/h ($a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)

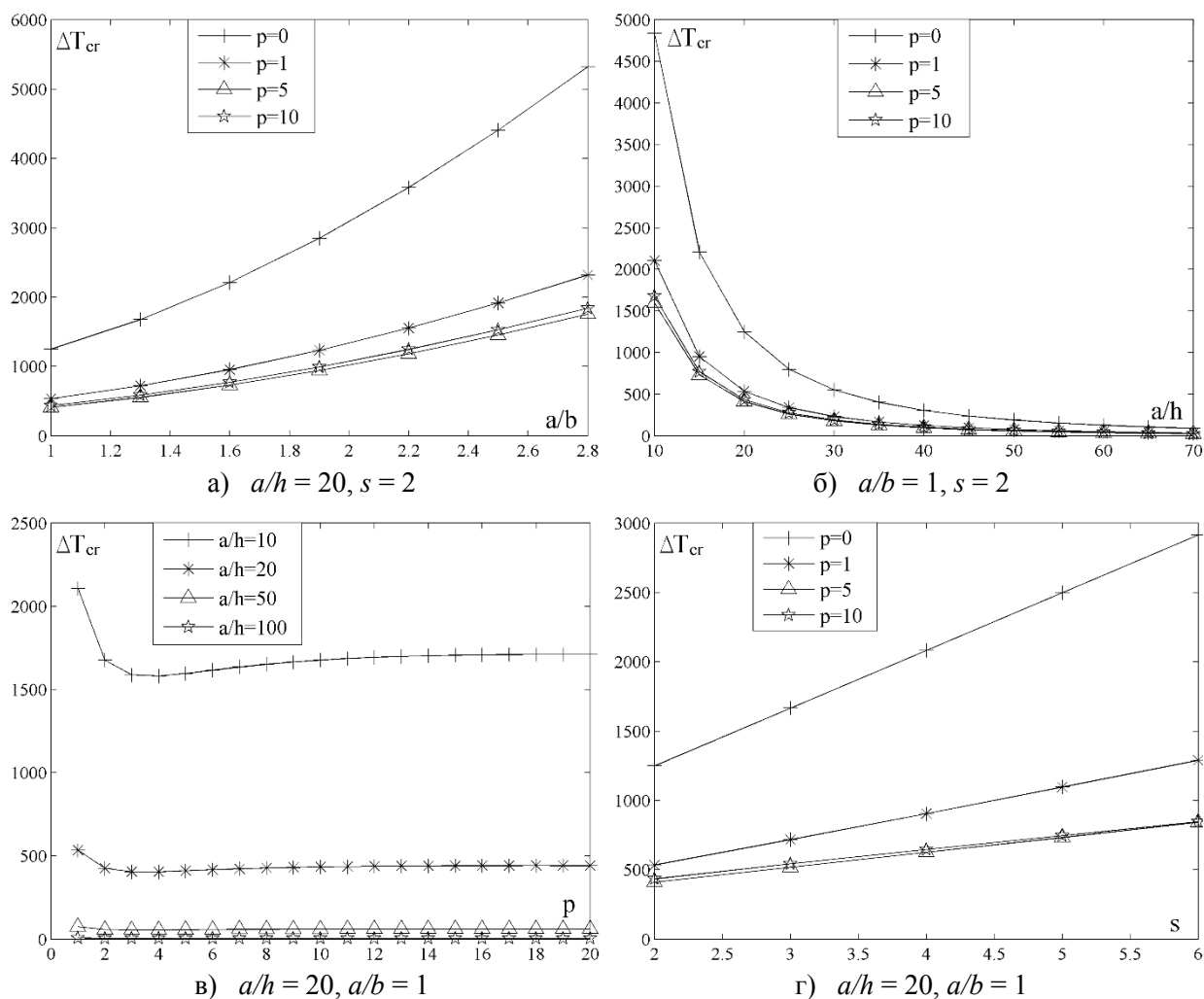
p	Теорија	ΔT_{cr}					
		$a/b = 1$					
		$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
0	Р	-----	421.535	106.494	47.423	26.693	17.049
	Л	-----	833.071	202.988	84.846	43.387	24.178
	НЛ	-----	1249.606	304.482	127.269	65.081	36.268
1	Р	758.395	196.265	49.501	22.037	12.402	7.940
	Л	1412.968	358.711	83.461	31.952	13.884	5.513
	НЛ	2106.640	534.814	124.435	47.639	20.700	8.220
5	Р	679.350	178.538	45.214	20.143	11.340	7.260
	Л	1160.754	298.709	69.220	26.066	10.913	3.891
	НЛ	1596.509	410.847	95.205	35.852	15.010	5.352
10	Р	692.717	183.146	46.455	20.702	11.656	7.463
	Л	1218.680	315.686	73.461	27.826	11.795	4.365
	НЛ	1677.081	434.430	101.094	38.293	16.232	6.007

Анализом приказаних резултата може се закључити да су критичне температуре извијања знатно веће при нелинеарној, него при линеарној и равномерној промени температуре. При

мањим вредностима индекса p ($p < 5$) и дебљим плочама ($a/h \leq 40$), та разлика је у следећем односу:

- ΔT_{cr} је приближно два пута већа при линеарној, него при равномерној промени,
- ΔT_{cr} је око 50% већа при нелинеарној, него при линеарној промени и приближно три пута већа при нелинеарној него при равномерној промени.

При већим вредностима индекса p ($p > 5$) утицај нелинеарне промене на пораст ΔT_{cr} је нешто мањи.



Слика 7.11 Утицај односа a/b и a/h , индекса p и степена нелинеарности s на критичну температуру извијања при **нелинеарној** промени температуре

На слици 7.11 приказани су дијаграми утицај односа a/b , a/h , индекса p и степена нелинеарности s на критичну температуру извијања при нелинеарној промени температуре. Дијаграм 7.11а показује да са порастом односа a/b критична температура расте, при чему крива за вредност $p = 0$ има знатно стрмији раст, него за остале вредности индекса p . Дијаграми 7.11б и 7.11в показују сличну природу као и код равномерно и линеарне промене

температуре, при чему су за идентичне случајеве, критичне температуре знатно веће код нелинеарне расподеле, него у претходно поменути два случаја. На дијаграму 7.11г уочава се да са порастом степена нелинеарности промене температуре у правцу дебљине плоче, расту вредности за ΔT_{cr} . Такође, може се видети да степен нелинеарности има све мањи утицај са порастом индекса p , тј. са порастом удела метала у ФГМ, криве критичне температуре имају све блажи раст. Као и код линеарне расподеле температуре, и у случају нелинеарне, треба истаћи да код плоча од керамике ($p = 0$), при вредностима односа $a/h > 15$ и $a/b > 1.5$, анализа излази из области линеарне еластичности, која је предмет разматрања у овој дисертацији.

7.1.2.2 Извијање услед утицаја температуре на плоче од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу

Утицај еластичне подлоге на критичну температуру извијања плоче од ФГМ за случајеве линеарне и нелинеарне расподеле температуре у правцу дебљине плоче разматрани су у оквиру овог поглавља. Резултати су приказани за различите квадратне и правоугаоне плоче, променљивих удела конституената и различитих комбинација вредности Винклер (k_0) и Пастернак (k_1) коефицијената еластичне подлоге. Вредности за критичну температуру извијања, добијене у овој дисертацији на основу HSDT теорије засноване на различитим функцијама облика, верификоване су са резултатима, доступним у литератури, који су добијени применом других типова HSDT теорија. Резултати дати у [179] добијени се на основу смицајне деформационе теорије вишег реда засноване на Редијевим претпостављеним облицима померања (HSDT^R), док су резултати дати у [92] засновани на смицајној деформационој теорији вишег реда у којој су коришћени претпостављени облици померања полиномног облика n -тог реда (HSDTⁿ). Такође, као и у ранијим примерима, извршено је поређење и са резултатима добијени применом CPT теорије датим у [168].

7.1.2.2.1 Линеарна промена температуре

У табели 7.14 приказани су резултати за критичну температуру извијања квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу при линеарној промени температуре за различите вредности p , k_0 , k_1 и односа a/h . Како би се уочио ефекат еластичне подлоге, најпре су коефицијенти k_0 и k_1 сетовани да буду нула, а затим је уведен коефицијент $k_0 = 10$, а потом и коефицијент $k_1 = 10$. Оно што је јасно уочљиво је да је утицај Винклеровог коефицијента (k_0) на ΔT_{cr} готово незнатан, док увођење Пастернаковог коефицијента (k_1) значајно повећава вредности за ΔT_{cr} . Са повећањем индекса p , што практично значи са повећањем еластичности плоче због већег удела метала у ФГМ, та разлика је све већа, па тако се може закључити да:

- за вредности $p = 0$ увођење Пастернаковог коефицијента (k_1) повећава ΔT_{cr} за око 50%

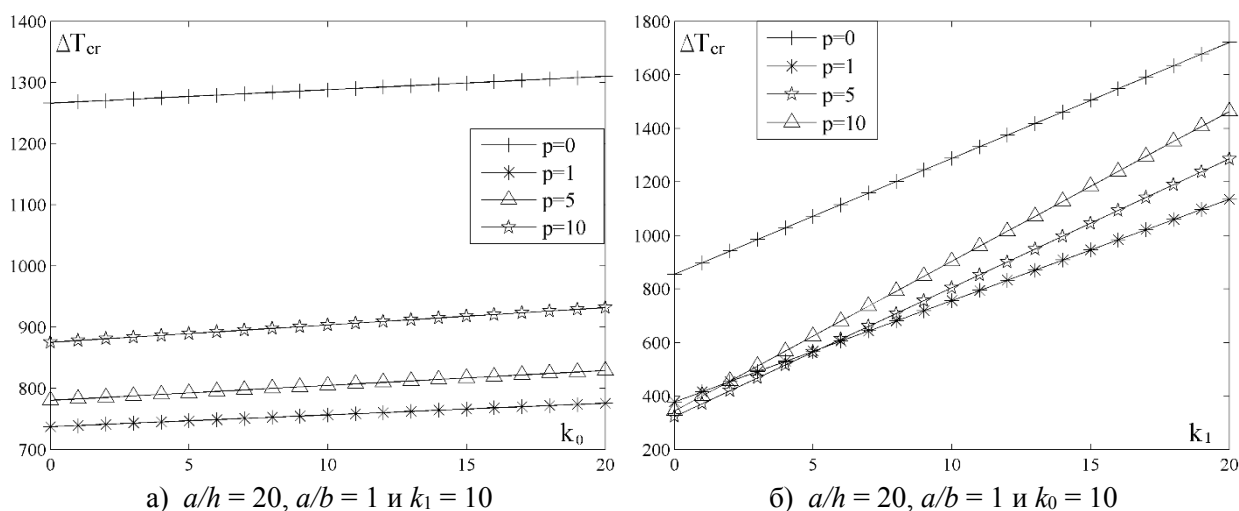
- за вредности $p \geq 1$ утицај је све већи, па тако за $p=10$ коефицијент k_1 повећава ΔT_{cr} приближно три пута.

Упоредни приказ резултата показује веома добро поклапање за све функције облика, примењене у оквиру ове дисертације, са резултатима добијеним применом претходно описаних HSDT^R и HSDTⁿ теорија.

Табела 7.14 Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу при **линеарној** промени температуре за различите вредности коефицијената k_0 , k_1 , индекса p и односа a/h ($a/b=1$, $m=n=1$ и $T_m = 5^\circ$)

p	Теорија	ΔT_{cr}								
		$a/b = 1$								
		$k_0 = 0, k_1 = 0$			$k_0 = 10, k_1 = 0$			$k_0 = 10, k_1 = 10$		
		$a/h=20$	$a/h=30$	$a/h=40$	$a/h=20$	$a/h=30$	$a/h=40$	$a/h=20$	$a/h=30$	$a/h=40$
0	CPT [179]	844.96	-----	-----	866.90	-----	-----	1300.02	-----	-----
	HSDT ^R [179]	833.07	-----	-----	855.01	-----	-----	1288.14	-----	-----
	HSDT ⁿ [92]	833.07	-----	-----	855.01	-----	-----	1288.14	-----	-----
	Ф0 1	833.07	367.61	202.98	855.01	377.36	208.47	1288.14	569.86	316.75
	Ф0 2	833.07	367.61	202.98	855.01	377.36	208.47	1288.14	569.86	316.75
	Ф0 3	833.08	367.61	202.98	855.03	377.37	208.47	1288.16	569.87	316.75
	Ф0 4	833.47	367.69	203.25	855.41	377.44	208.49	1288.54	569.94	316.78
	Ф0 5	833.07	367.61	202.98	855.01	377.36	208.47	1288.14	569.86	316.75
	Ф0 6	833.13	367.62	202.99	855.07	377.37	208.47	1288.20	569.87	316.75
	Ф0 7	833.14	367.62	202.99	855.08	377.38	208.47	1288.21	569.88	316.76
	Ф0 8	833.14	367.63	202.99	855.09	377.38	208.47	1288.22	569.88	316.76
	Ф0 9	833.14	367.63	202.99	855.09	377.38	208.47	1288.22	569.88	316.76
	Ф0 10	833.07	367.61	202.98	855.01	377.36	208.47	1288.14	569.86	316.75
	Ф0 11	833.17	367.63	202.99	855.11	377.38	208.48	1288.24	569.88	316.76
Ф0 12	833.07	367.61	202.98	855.02	377.36	208.47	1288.15	569.86	316.75	
Ф0 13	833.07	367.61	202.98	855.01	377.36	208.47	1288.14	569.86	316.75	
1	CPT [179]	363.08	-----	-----	382.26	-----	-----	760.82	-----	-----
	HSDT ^R [179]	358.71	-----	-----	377.89	-----	-----	756.45	-----	-----
	HSDT ⁿ [92]	358.71	-----	-----	377.89	-----	-----	756.45	-----	-----
	Ф0 1	358.71	155.29	83.46	377.88	163.81	88.25	756.44	332.06	182.89
	Ф0 2	358.71	155.29	83.46	377.88	163.81	88.25	756.44	332.06	182.89
	Ф0 3	358.71	155.29	83.46	377.89	163.81	88.25	756.45	332.06	182.89
	Ф0 4	358.85	155.32	83.47	378.03	163.84	88.26	756.59	332.09	182.90
	Ф0 5	358.71	155.29	83.46	377.88	163.81	88.25	756.44	332.06	182.89
	Ф0 6	358.73	155.29	83.46	377.91	163.81	88.25	756.47	332.06	182.89
	Ф0 7	358.73	155.29	83.46	377.91	163.81	88.25	756.47	332.06	182.89
	Ф0 8	358.74	155.29	83.46	377.91	163.82	88.25	756.47	332.06	182.89
	Ф0 9	358.74	155.29	83.46	377.91	163.82	88.25	756.47	332.06	182.89
	Ф0 10	358.71	155.29	83.46	377.88	163.81	88.25	756.44	332.06	182.89
	Ф0 11	358.74	155.29	83.46	377.92	163.82	88.25	756.48	332.07	182.89
Ф0 12	358.71	155.29	83.46	377.89	163.81	88.25	756.45	332.06	182.89	
Ф0 13	358.71	155.29	83.46	377.89	163.81	88.25	756.44	332.06	182.89	
5	CPT [179]	304.05	-----	-----	328.45	-----	-----	810.02	-----	-----
	HSDT ^R [179]	298.71	-----	-----	323.10	-----	-----	804.67	-----	-----

	HSDT ⁿ [92]	298.71	-----	-----	323.10	-----	-----	804.67	-----	-----
	ΦО 1	298.70	129.28	69.21	323.10	140.13	75.31	804.66	354.15	195.71
	ΦО 2	298.70	129.28	69.21	323.10	140.13	75.31	804.66	354.15	195.71
	ΦО 3	298.66	129.27	69.21	323.05	140.12	75.31	804.62	354.15	195.70
	ΦО 4	298.68	129.28	69.21	323.07	140.12	75.31	804.64	354.15	195.70
	ΦО 5	298.70	129.28	69.22	323.10	140.13	75.31	804.66	354.15	195.71
	ΦО 6	298.84	129.31	69.22	323.23	140.15	75.32	804.80	354.18	195.71
	ΦО 7	298.63	129.27	69.21	323.03	140.11	75.31	804.59	354.14	195.70
	ΦО 8	298.63	129.27	69.21	323.03	140.11	75.31	804.59	354.14	195.70
	ΦО 9	298.63	129.27	69.21	323.03	140.11	75.31	804.59	354.14	195.70
	ΦО 10	298.70	129.28	69.22	323.10	140.13	75.31	804.67	354.16	195.71
	ΦО 11	298.87	129.32	69.23	323.27	140.16	75.33	804.84	354.19	195.72
	ΦО 12	298.67	129.28	69.21	323.06	140.12	75.31	804.63	354.15	195.70
	ΦО 13	298.70	129.28	69.21	323.09	140.12	75.31	804.66	354.15	195.71
10	CPT [179]	322.04	-----	-----	350.39	-----	-----	909.93	-----	-----
	HSDT ^R [179]	315.68	-----	-----	344.03	-----	-----	903.57	-----	-----
	HSDT ⁿ [92]	315.68	-----	-----	344.03	-----	-----	903.57	-----	-----
	ΦО 1	315.68	136.93	73.46	344.03	149.53	80.54	903.57	398.22	220.43
	ΦО 2	315.68	136.93	73.46	344.03	149.53	80.54	903.57	398.22	220.43
	ΦО 3	315.66	136.93	73.46	344.01	149.53	80.54	903.55	398.21	220.43
	ΦО 4	315.81	136.96	73.47	344.16	149.56	80.55	903.70	398.24	220.44
	ΦО 5	315.68	136.93	73.46	344.03	149.53	80.54	903.57	398.22	220.43
	ΦО 6	315.79	136.95	73.46	344.13	149.55	80.55	903.67	398.24	220.44
	ΦО 7	315.66	136.93	73.46	344.01	149.53	80.54	903.55	398.21	220.43
	ΦО 8	315.67	136.93	73.46	344.01	149.53	80.54	903.55	398.21	220.43
	ΦО 9	315.67	136.93	73.46	344.01	149.53	80.54	903.55	398.21	220.43
	ΦО 10	315.68	136.93	73.46	344.03	149.53	80.54	903.57	398.22	220.43
	ΦО 11	315.80	136.96	73.46	344.15	149.56	80.55	903.69	398.24	220.44
	ΦО 12	315.66	136.93	73.46	344.01	149.53	80.54	903.55	398.21	220.43
	ΦО 13	315.68	136.93	73.46	344.02	149.53	80.54	903.56	398.22	220.43



Слика 7.12 Утицај односа a/b и a/h , индекса p и коефицијената k_0 и k_1 на критичну температуру извијања плоче ослоњене на еластичну подлогу при **линеарној** промени температуре

Како би се добио јасан увид у утицај Винклеровог коефицијента (k_0), односно Пастернаковог коефицијента (k_1) на ΔT_{cr} , на сликама 7.12а и 7.12б су приказани дијаграми за ΔT_{cr} при чему су фиксиране вредности $a/h = 20$ и $a/b = 1$, а вариране су, у једном случају вредности за k_0 , а у другом за k_1 . На дијаграму 7.12а може се видети да, без обзира на повећање коефицијента k_0 , критичне температуре извијања врло мало расту за све вредности индекса p . Насупрот томе, криве приказане на дијаграму 7.12б евидентно имају знатно бржи тренд раста, што показује, претходно поменути, већи утицај коефицијента k_1 на ΔT_{cr} . Такође, код овог дијаграма, поређењем кривих за различите вредности индекса p , може се запазити да за вредности $p > 5$ криве имају бржи тренд раста од криве за $p = 1$. То доводи до тога да за вредност $k_1 \approx 5$ критична температура извијања је иста за $p = 1$ и $p = 5$, односно криве се пресецају.

7.1.2.2.2 Нелинеарна промена температуре

У табели 7.15 приказане су вредности за критичну температуру извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу при нелинеарној промени ($s = 3$) температуре за различите вредности p , k_0 , k_1 и односа a/h . Као и код линеарне расподеле температуре, и у овом случају ефекат Пастернаковог смицајног коефицијента еластичне подлоге (k_1) на ΔT_{cr} је неупоредиво већи од утицаја Винклеровог коефицијента (k_0). Поређењем резултата са табелом 7.14 може се видети да су критичне температуре извијања, за исте случајеве плоча, око 50% веће при нелинеарној, него при линеарној расподели температуре у правцу дебљине плоче.

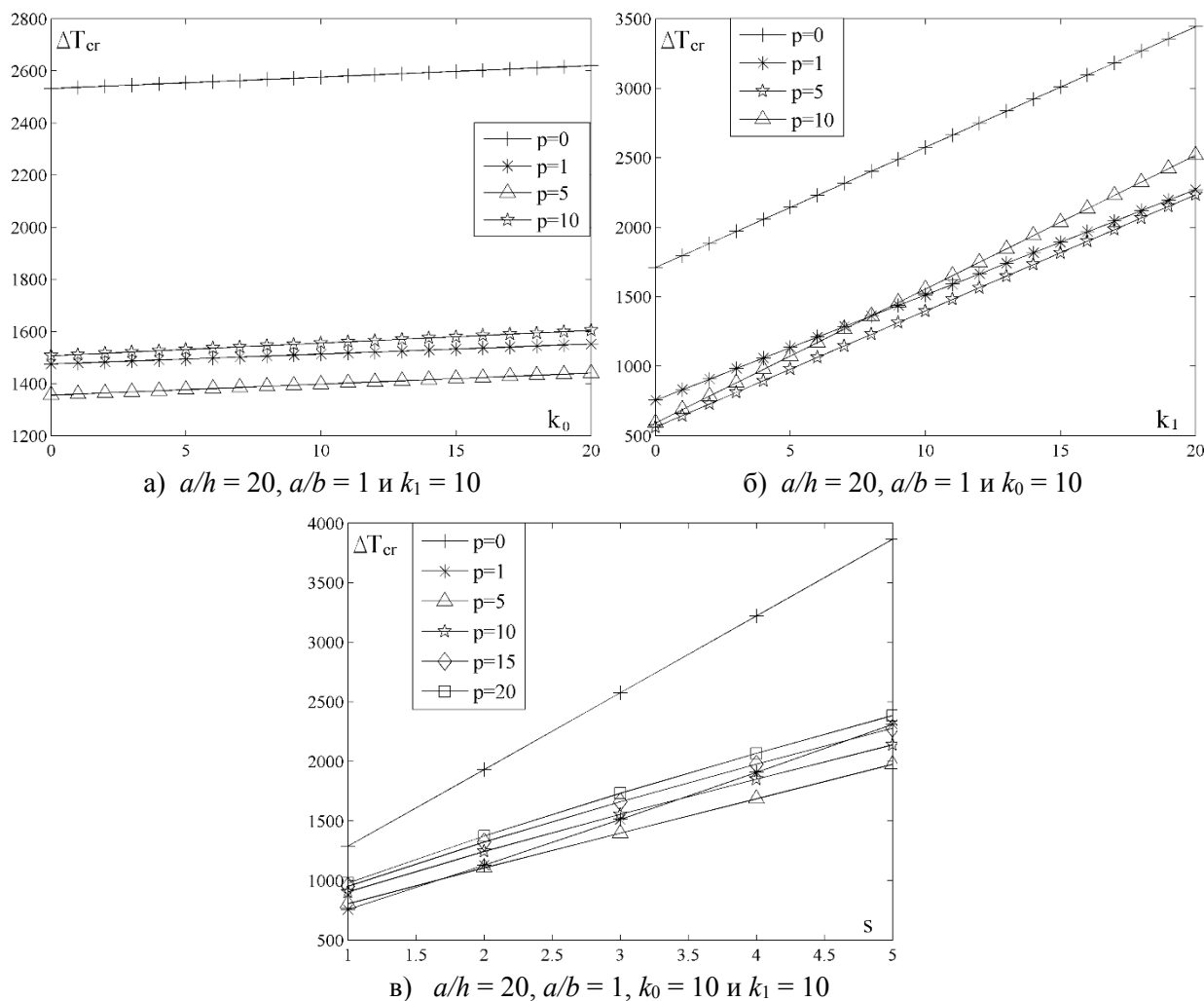
Табела 7.15 Критична температура извијања (ΔT_{cr}) квадратне плоче ослоњене на еластичну подлогу при **нелинеарној** промени ($s=3$) температуре за различите вредности коефицијената, k_0 , k_1 , индекса p и односа a/h ($a/b = 1$, $m = n = 1$ и $T_m = 5^\circ$)

p	Теорија	ΔT_{cr}								
		$a/b = 1$								
		$k_0 = 0, k_1 = 0$			$k_0 = 10, k_1 = 0$			$k_0 = 10, k_1 = 10$		
		$a/h=20$	$a/h=30$	$a/h=40$	$a/h=20$	$a/h=30$	$a/h=40$	$a/h=20$	$a/h=30$	$a/h=40$
0	CPT [179]	1689.91	-----	-----	1733.80	-----	-----	-----	-----	-----
	HSDT ^R [179]	1666.14	-----	-----	1710.03	-----	-----	-----	-----	-----
	ФО 1	1666.14	735.22	405.97	1710.03	754.73	416.94	-----	1139.73	633.51
	ФО 2	1666.14	735.22	405.97	1710.03	754.73	416.94	-----	1139.73	633.51
	ФО 3	1666.17	735.23	405.97	1710.06	754.73	416.95	-----	1139.74	633.51
	ФО 4	1666.93	735.38	406.02	1710.82	754.89	416.99	-----	1139.89	633.56
	ФО 5	1666.14	735.22	405.97	1710.03	754.73	416.94	-----	1139.73	633.51
	ФО 6	1666.26	735.25	405.98	1710.15	754.75	416.95	-----	1139.76	633.51
	ФО 7	1666.28	735.25	405.98	1710.17	754.76	416.95	-----	1139.76	633.51
	ФО 8	1666.29	735.25	405.98	1710.18	754.76	416.95	-----	1139.76	633.52
	ФО 9	1666.29	735.25	405.98	1710.18	754.76	416.95	-----	1139.76	633.52
	ФО 10	1666.14	735.22	405.97	1710.03	754.73	416.94	-----	1139.73	633.51

	ФО 11	1666.34	735.27	405.99	1710.23	754.77	416.96	-----	1139.77	633.52
	ФО 12	1666.15	735.23	405.97	1710.04	754.73	416.94	-----	1139.74	633.51
	ФО 13	1666.14	735.22	405.97	1710.03	754.73	416.94	-----	1139.73	633.51
1	CPT [179]	726.37	-----	-----	764.74	-----	-----	1522.07	-----	-----
	HSDT ^R [179]	717.63	-----	-----	756.00	-----	-----	1513.33	-----	-----
	ФО 1	717.63	310.67	166.97	755.99	327.72	176.56	1513.33	664.31	365.89
	ФО 2	717.63	310.67	166.97	755.99	327.72	176.56	1513.33	664.31	365.89
	ФО 3	717.64	310.67	166.97	756.01	327.72	176.56	1513.35	664.32	365.89
	ФО 4	717.92	310.73	166.99	756.29	327.78	176.58	1513.63	664.37	365.91
	ФО 5	717.63	310.67	166.97	755.99	327.72	176.56	1513.33	664.31	365.89
	ФО 6	717.67	310.68	166.97	756.04	327.73	176.56	1513.38	664.32	365.90
	ФО 7	717.68	310.68	166.97	756.05	327.73	176.56	1513.39	664.32	365.90
	ФО 8	717.68	310.68	166.97	756.05	327.73	176.56	1513.39	664.32	365.90
	ФО 9	717.68	310.68	166.97	756.05	327.73	176.56	1513.39	664.32	365.90
	ФО 10	717.63	310.67	166.97	755.99	327.72	176.56	1513.33	664.31	365.89
	ФО 11	717.70	310.68	166.97	756.07	327.73	176.56	1513.41	664.33	365.90
	ФО 12	717.63	310.67	166.97	756.00	327.72	176.56	1513.34	664.31	365.89
	ФО 13	717.63	310.67	166.97	755.99	327.72	176.56	1513.33	664.31	365.89
5	CPT [179]	528.19	-----	-----	570.57	-----	-----	1407.11	-----	-----
	HSDT ^R [179]	518.89	-----	-----	561.27	-----	-----	1387.82	-----	-----
	ФО 1	518.89	224.59	120.24	561.27	243.42	130.84	1397.82	615.22	339.97
	ФО 2	518.89	224.59	120.24	561.27	243.42	130.84	1397.82	615.22	339.97
	ФО 3	518.81	224.57	120.24	561.19	243.41	130.83	1397.75	615.20	339.97
	ФО 4	518.85	224.58	120.24	561.23	243.41	130.83	1397.78	615.21	339.97
	ФО 5	518.89	224.59	120.24	561.27	243.42	130.84	1397.83	615.22	339.97
	ФО 6	519.13	224.63	120.26	561.51	243.47	130.85	1398.06	615.27	339.99
	ФО 7	518.77	224.56	120.23	561.15	243.40	130.83	1397.70	615.20	339.96
	ФО 8	518.77	224.56	120.23	561.15	243.40	130.83	1397.70	615.20	339.96
	ФО 9	518.77	224.56	120.23	561.15	243.40	130.83	1397.70	615.20	339.96
	ФО 10	518.90	224.59	120.24	561.28	243.42	130.84	1397.83	615.22	339.97
	ФО 11	519.19	224.65	120.26	561.57	243.48	130.85	1398.12	615.28	339.99
	ФО 12	518.83	224.57	120.24	561.21	243.41	130.83	1397.77	615.21	339.97
	ФО 13	518.88	224.58	120.24	561.26	243.42	130.83	1397.81	615.22	339.97
10	CPT [179]	554.33	-----	-----	603.12	-----	-----	1566.25	-----	-----
	HSDT ^R [179]	543.38	-----	-----	592.18	-----	-----	1555.31	-----	-----
	ФО 1	543.38	235.70	126.44	592.17	257.39	138.64	1555.31	685.45	379.43
	ФО 2	543.38	235.70	126.44	592.17	257.39	138.64	1555.31	685.45	379.43
	ФО 3	543.34	235.70	126.44	592.14	257.44	138.64	1555.27	685.44	379.42
	ФО 4	543.60	235.75	126.46	592.40	257.53	138.66	1555.53	685.49	379.44
	ФО 5	543.38	235.70	126.44	592.17	257.39	138.64	1555.31	685.45	379.79
	ФО 6	543.56	235.74	126.46	592.36	257.43	138.65	1555.49	685.49	379.43
	ФО 7	543.35	235.70	126.44	592.15	257.39	138.64	1555.28	685.44	379.44
	ФО 8	543.36	235.70	126.44	592.15	257.39	138.64	1555.29	685.44	379.42
	ФО 9	543.36	235.70	126.44	592.15	257.39	138.64	1555.29	685.44	379.42
	ФО 10	543.38	235.70	126.46	592.18	257.39	138.85	1555.31	685.45	379.43
	ФО 11	543.59	235.75	126.44	592.38	257.43	138.66	1555.52	685.49	379.44
	ФО 12	543.35	235.70	126.65	592.14	257.38	138.64	1555.28	685.44	379.42
	ФО 13	543.37	235.70	126.44	592.17	257.39	138.64	1555.3	685.45	379.43

Као и код линеарне расподеле температуре, и у случају нелинеарне расподеле, на основу природе раста кривих на дијаграмима 7.13а и 7.13а може се уочити знатно већи утицај коефицијента k_1 у односу на коефицијент k_0 на ΔT_{cr} . Како је ово случај нелинеарне

расподеле температуре у правцу дебљине плоче, утицај степена нелинеарности s на ΔT_{cr} показан је на дијаграму 7.13в. Са порастом вредности за s расту вредности за ΔT_{cr} , што практично значи да повећање степена нелинеарности расподеле температуре у правцу дебљине плоче, повећава термичку отпорност плоче. Такође, може се уочити да криве за $p > 1$ имају исти тренд раста и да су међусобно паралелне, док крива за $p = 1$, са порастом вредности параметра s , има стрмији успон и пресеца остале криве. За посматране односе a/h , a/b и вредности коефицијената k_0 и k_1 , у случају плоча од керамике ($p = 0$), анализа излази из области линеарне еластичности.



Слика 7.13 Утицај односа a/b и a/h , индекса p и s и коефицијената k_0 и k_1 на критичну температуру извијања плоче ослоњене на еластичну подлогу при **нелинеарној** промени температуре

7.2 Динамичка анализа

За правилну процену понашања плоча од ФГМ, поред анализе резултата статичких утицаја, неопходна је и анализа понашања плоча у динамичком окружењу. У оквиру овог поглавља приказани су резултати до којих се дошло у току израде дисертације за случајеве линеарне динамичке анализе слободних непригушених осцилација плоча од ФГМ и плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу. Као и код претходно описаних резултата статичке анализе, најпре је кроз табеларни приказ добијених резултата, поређењем са резултатима из литературе, извршена верификација развијених и имплементираних теоријских резултата. Тако верификован поступак, искоришћен је за добијање и других резултата за плоче различите градијентне структуре. Како се резултати до којих се дошло током израде дисертације заснивају на HSDT теорији која укључују функције облика, и у оквиру динамичке анализе дат је упоредни приказ резултата за 13 различитих функција облика приказаних у табели 4.1. На основу приказаних резултата динамичке анализе, дата су одговарајућа тумачења и коментари и донети су одређени закључци.

7.2.1 Линеарна анализа

7.2.1.1 Слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ

У оквиру овог поглавља приказани су добијени резултати за кружне учестаности (фреквенције) слободних непригушених осцилација умерено дебелих и дебелих плоча од ФГМ. Како су за понашање конструкција од највећег значаја најниже сопствене фреквенције, биће приказане само вредности које се односе на прва три мода осциловања. Имајући у виду да су, као и у статичкој анализи, и у динамичкој анализи резултати добијени применом HSDT теорије засноване на функцијама облика, верификација резултата је урађена поређењем са резултатима из литературе добијеним коришћењем друге врсте HSDT теорије, са једне стране, односно, са резултатима добијеним 3D теоријом еластичности континуума, са друге стране.

За приказ бројних вредности сопствених фреквенција, код правоугаоних и квадратних плоча од ФГМ, неопходно је нормализовати добијене вредности према:

$$\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \quad \tilde{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \quad (7.4)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}},$$

На тај начин добијају се нормализоване вредности сопствених фреквенција, које за $m=1$ и $n=1$, одговарају првом моду осциловања, за $m=1$ и $n=2$ дргом моду, за $m=2$ и $n=2$ трећем моду осциловања и тако даље.

У табели 7.16 приказане су нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ за први мод осциловања плоча различитих односа a/b , a/h и индекса p . Поређење резултата, добијених у овој дисертацији, извршено је са 3D теоријом еластичности датој у [99]. На основу упоредне анализе, може се закључити да се резултати добијени у оквиру ове дисертације добро поклапају са резултатима добијеним поменутом 3D теоријом еластичности. Такође, може се уочити да свих 13 предложених функција облика дају веома сличне резултате, осим у случају ФО 12, где постоје мања одступања.

Табела 7.16 Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ плоче за различите вредности односа a/b и a/h и индекса p ($m=1$, $n=1$)

a/b	a/h	Теорија	$\tilde{\omega}$			
			$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=5$
1	10	3D [99]	0.1135	0.0870	0.0789	0.0741
		ФО 1	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
		ФО 2	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
		ФО 3	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
		ФО 4	0.1134	0.0868	0.0788	0.0740
		ФО 5	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
		ФО 6	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
		ФО 7	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
		ФО 8	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
		ФО 9	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
		ФО 10	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
		ФО 11	0.1133	0.0868	0.0787	0.0741
		ФО 12	0.1136	0.0870	0.0790	0.0745
		ФО 13	0.1133	0.0868	0.0787	0.0740
	5	3D [99]	0.4169	0.3222	0.2905	0.2676
		ФО 1	0.4150	0.3204	0.2892	0.2667
		ФО 2	0.4150	0.3204	0.2892	0.2667
		ФО 3	0.4151	0.3205	0.2892	0.2665
		ФО 4	0.4163	0.3213	0.2898	0.2667
		ФО 5	0.4150	0.3204	0.2892	0.2667
		ФО 6	0.4151	0.3205	0.2894	0.2673
		ФО 7	0.4152	0.3206	0.2893	0.2664
		ФО 8	0.4153	0.3206	0.2893	0.2664
		ФО 9	0.4153	0.3206	0.2893	0.2664
		ФО 10	0.4150	0.3204	0.2892	0.2667
		ФО 11	0.4153	0.3206	0.2895	0.2675
		ФО 12	0.4187	0.3229	0.2924	0.2726
		ФО 13	0.4150	0.3204	0.2892	0.2666
0.5	10	3D [99]	0.0719	0.0550	0.0499	0.0471
		ФО 1	0.0717	0.0548	0.0498	0.0469
		ФО 2	0.0717	0.0548	0.0498	0.0469
		ФО 3	0.0717	0.0548	0.0498	0.0469
		ФО 4	0.0717	0.0549	0.0498	0.0469
		ФО 5	0.0717	0.0548	0.0498	0.0469
		ФО 6	0.0717	0.05489	0.0498	0.0470
		ФО 7	0.0717	0.0548	0.0498	0.0469
		ФО 8	0.0717	0.0548	0.0498	0.0469

	ФО 9	0.0717	0.0548	0.0498	0.0469
	ФО 10	0.0717	0.0548	0.0498	0.0469
	ФО 11	0.0717	0.0548	0.0498	0.0470
	ФО 12	0.0718	0.0549	0.0499	0.0472
	ФО 13	0.0717	0.0548	0.0498	0.0469
5	3D [99]	0.2713	0.2088	0.1888	0.1754
	ФО 1	0.2704	0.2080	0.1882	0.1750
	ФО 2	0.2704	0.2080	0.1882	0.1750
	ФО 3	0.2704	0.2080	0.1882	0.1749
	ФО 4	0.2710	0.2084	0.1884	0.1750
	ФО 5	0.2704	0.2080	0.1882	0.1750
	ФО 6	0.2705	0.2081	0.1883	0.1753
	ФО 7	0.2705	0.2081	0.1882	0.1748
	ФО 8	0.2705	0.2081	0.1882	0.1748
	ФО 9	0.2705	0.2081	0.1882	0.1748
	ФО 10	0.2704	0.2080	0.1882	0.1750
	ФО 11	0.2705	0.2081	0.1883	0.1754
	ФО 12	0.2721	0.2091	0.1896	0.1777
	ФО 13	0.2704	0.2080	0.1882	0.1750

Верификација резултата динамичке анализе, извршена је и са резултатима добијеним у [180], применом TSDT теорије која се заснива на Редијевим претпостављеним облицима померања. У табелама 7.17 и 7.18 приказани су резултати сопствених фреквенција $\hat{\omega}$ за квадратну плочу, односа $a/h = 5$ и $a/h = 10$, а за различите вредности индекса p . Анализом резултата може се уочити одлично поклапање резултата добијених у овој дисертацији, са резултатима из литературе [180]. Такође, може се уочити да свих 13 предложених функција облика дају веома добре резултате, осим у случају ФО 12, где постоје мања одступања, нарочито код другог и трећег мода осциловања.

Табела 7.17 Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\hat{\omega}$ квадратне плоче односа $a/h = 5$ и различитих вредности индекса p

a/h	мод (m,n)	Теорија	$\hat{\omega}$				
			a/b = 1				
			$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$
5	1(1,1)	TSDT [180]	0.2113	0.1807	0.1631	-----	0.1301
		ФО 1	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300
		ФО 2	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300
		ФО 3	0.2112	0.1807	0.1631	0.1356	0.1300
		ФО 4	0.2119	0.1812	0.1635	0.1357	0.1304
		ФО 5	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300
		ФО 6	0.2113	0.1807	0.1631	0.1360	0.1302
		ФО 7	0.2113	0.1808	0.1632	0.1356	0.1300
		ФО 8	0.2113	0.1808	0.1632	0.1356	0.1300
		ФО 9	0.2113	0.1808	0.1632	0.1356	0.1300
		ФО 10	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300
		ФО 11	0.2113	0.1808	0.1632	0.1361	0.1303
		ФО 12	0.2131	0.1820	0.1643	0.1387	0.1331
		ФО 13	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300

2(1,2)	TSDT [180]	0.4623	0.3989	0.3607	-----	0.2771
	Ф0 1	0.4622	0.3988	0.3606	0.2917	0.2770
	Ф0 2	0.4622	0.3988	0.3606	0.2917	0.2770
	Ф0 3	0.4624	0.3990	0.3608	0.2914	0.2770
	Ф0 4	0.4652	0.4011	0.3627	0.2922	0.2788
	Ф0 5	0.4622	0.3988	0.3606	0.2917	0.2770
	Ф0 6	0.4624	0.3990	0.3608	0.2929	0.2777
	Ф0 7	0.4628	0.3993	0.3611	0.2913	0.2772
	Ф0 8	0.4629	0.3993	0.3611	0.2913	0.2772
	Ф0 9	0.4629	0.3993	0.3611	0.2913	0.2772
	Ф0 10	0.4622	0.3988	0.3606	0.2918	0.2770
	Ф0 11	0.4627	0.3992	0.3609	0.2932	0.2778
	Ф0 12	0.4698	0.4043	0.3657	0.3032	0.2888
	Ф0 13	0.4622	0.3988	0.3606	0.2917	0.2770
3(2,2)	TSDT [180]	0.6688	0.5803	0.5254	-----	0.3948
	Ф0 1	0.6688	0.5802	0.5254	0.4180	0.3948
	Ф0 2	0.6688	0.5802	0.5254	0.4180	0.3948
	Ф0 3	0.6693	0.5806	0.5257	0.4176	0.3948
	Ф0 4	0.6750	0.5849	0.5296	0.4194	0.3985
	Ф0 5	0.6688	0.5802	0.5254	0.4180	0.3948
	Ф0 6	0.6690	0.5804	0.5255	0.4198	0.3958
	Ф0 7	0.6702	0.5813	0.5263	0.4175	0.3952
	Ф0 8	0.6703	0.5814	0.5264	0.4175	0.3953
	Ф0 9	0.6703	0.5814	0.5264	0.4175	0.3953
	Ф0 10	0.6688	0.5802	0.5254	0.4180	0.3948
	Ф0 11	0.6694	0.5807	0.5258	0.4204	0.3960
	Ф0 12	0.6827	0.5903	0.5348	0.4385	0.4157
	Ф0 13	0.6688	0.5802	0.5254	0.4179	0.3947

Како би се увидео утицај промене односа дужина/дебљина плоче на вредности сопствених фреквенција осциловања, у табели 7.18 приказане су вредности сопствених фреквенција $\hat{\omega}$ за прва три мода осциловања квадратне плоче, односа $a/h = 10$, а за различите вредности индекса p . Упоредном анализом резултата из табеле 7.18 и табеле 7.17, за исте вредности индекса p , може се уочити велика разлика у вредностима сопствених фреквенција $\hat{\omega}$, што говори о утицају смицајног ефекта код дебелих плоча.

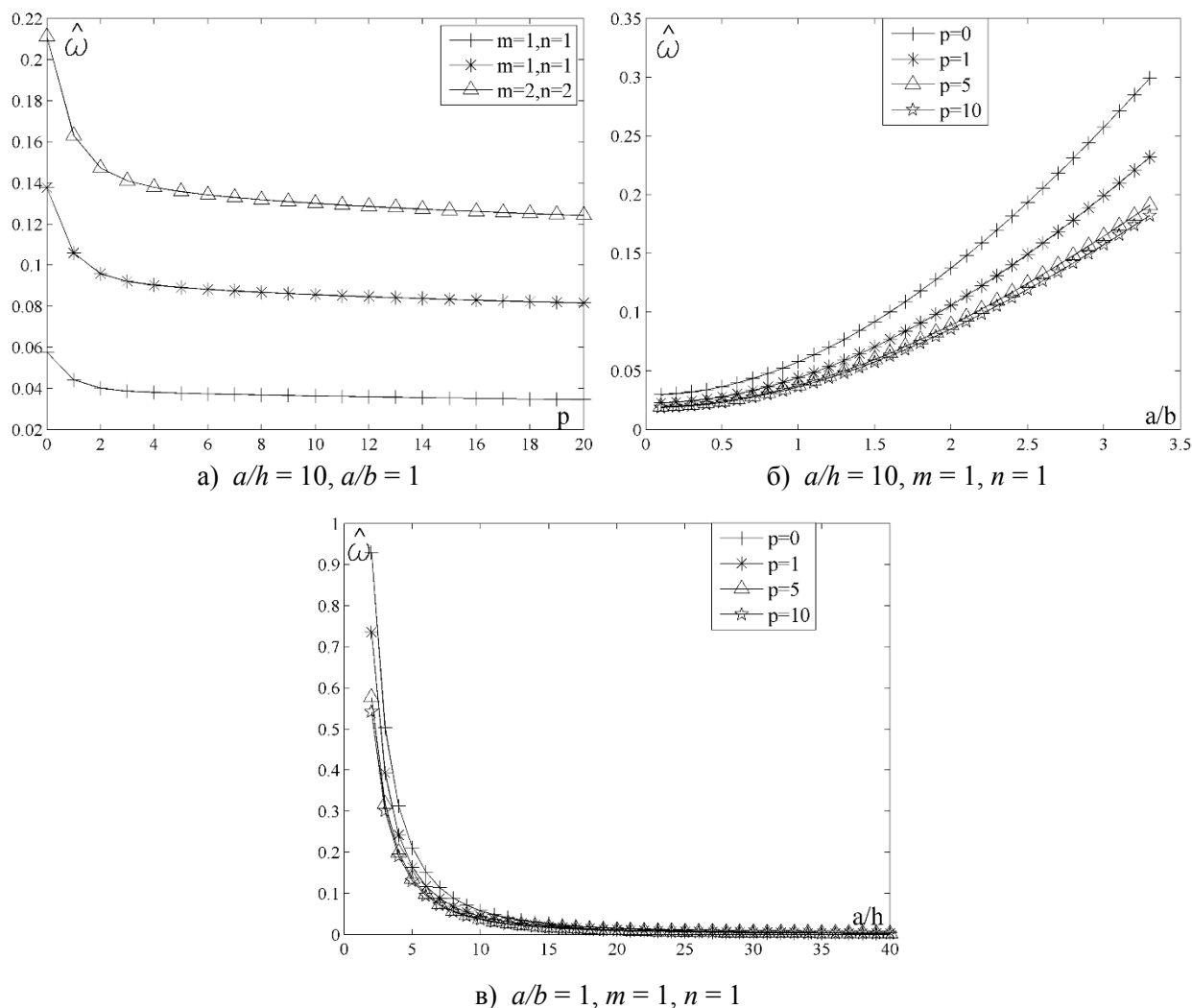
Табела 7.18 Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\hat{\omega}$ квадратне плоче односа $a/h = 10$ и различитих вредности индекса p

a/h	мод (m,n)	Теорија	$\hat{\omega}$				
			a/b = 1				
			$p = 0$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$
10	1(1,1)	TSDT [180]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Ф0 1	0.0576	0.0490	0.0441	0.0376	0.0363
		Ф0 2	0.0576	0.0490	0.0441	0.0376	0.0363
		Ф0 3	0.0576	0.0490	0.0441	0.0376	0.0363
		Ф0 4	0.0577	0.0490	0.0442	0.0376	0.0363
		Ф0 5	0.0576	0.0490	0.0441	0.0376	0.0363
		Ф0 6	0.0577	0.0490	0.0441	0.0377	0.0363
		Ф0 7	0.0577	0.0490	0.0441	0.0376	0.0363

	ФО 8	0.0577	0.0490	0.0441	0.0376	0.0363
	ФО 9	0.0577	0.0490	0.0441	0.0376	0.0363
	ФО 10	0.0576	0.0490	0.0441	0.0376	0.0363
	ФО 11	0.0577	0.0490	0.0442	0.0377	0.0363
	ФО 12	0.0578	0.0491	0.0442	0.0379	0.0366
	ФО 13	0.0576	0.0490	0.0441	0.0376	0.0363
2(1,2)	TSDT [180]	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
	ФО 1	0.1376	0.1173	0.1059	0.0890	0.0856
	ФО 2	0.1376	0.1173	0.1059	0.0890	0.0856
	ФО 3	0.1376	0.1173	0.1059	0.0890	0.0856
	ФО 4	0.1379	0.1176	0.1060	0.0890	0.0857
	ФО 5	0.1376	0.1173	0.1059	0.0890	0.0856
	ФО 6	0.1376	0.1174	0.1059	0.0892	0.0857
	ФО 7	0.1377	0.1174	0.1059	0.0890	0.0856
	ФО 8	0.1377	0.1174	0.1059	0.0890	0.0856
	ФО 9	0.1377	0.1174	0.1059	0.0890	0.0856
	ФО 10	0.1376	0.1173	0.1059	0.0890	0.0856
	ФО 11	0.1377	0.1174	0.1059	0.0892	0.0857
	ФО 12	0.1385	0.1179	0.1064	0.0904	0.0870
	ФО 13	0.1376	0.1173	0.1059	0.0890	0.0856
3(2,2)	TSDT [180]	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
	ФО 1	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300
	ФО 2	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300
	ФО 3	0.2112	0.1807	0.1631	0.1356	0.1300
	ФО 4	0.2119	0.1812	0.1635	0.1357	0.1304
	ФО 5	0.2177	0.1853	0.1673	0.1431	0.1380
	ФО 6	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300
	ФО 7	0.2113	0.1807	0.1631	0.1360	0.1302
	ФО 8	0.2113	0.1808	0.1632	0.1356	0.1300
	ФО 9	0.2113	0.1808	0.1632	0.1356	0.1300
	ФО 10	0.2113	0.1808	0.1632	0.1356	0.1300
	ФО 11	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300
	ФО 12	0.2113	0.1808	0.1632	0.1361	0.1303
	ФО 13	0.2112	0.1807	0.1631	0.1357	0.1300

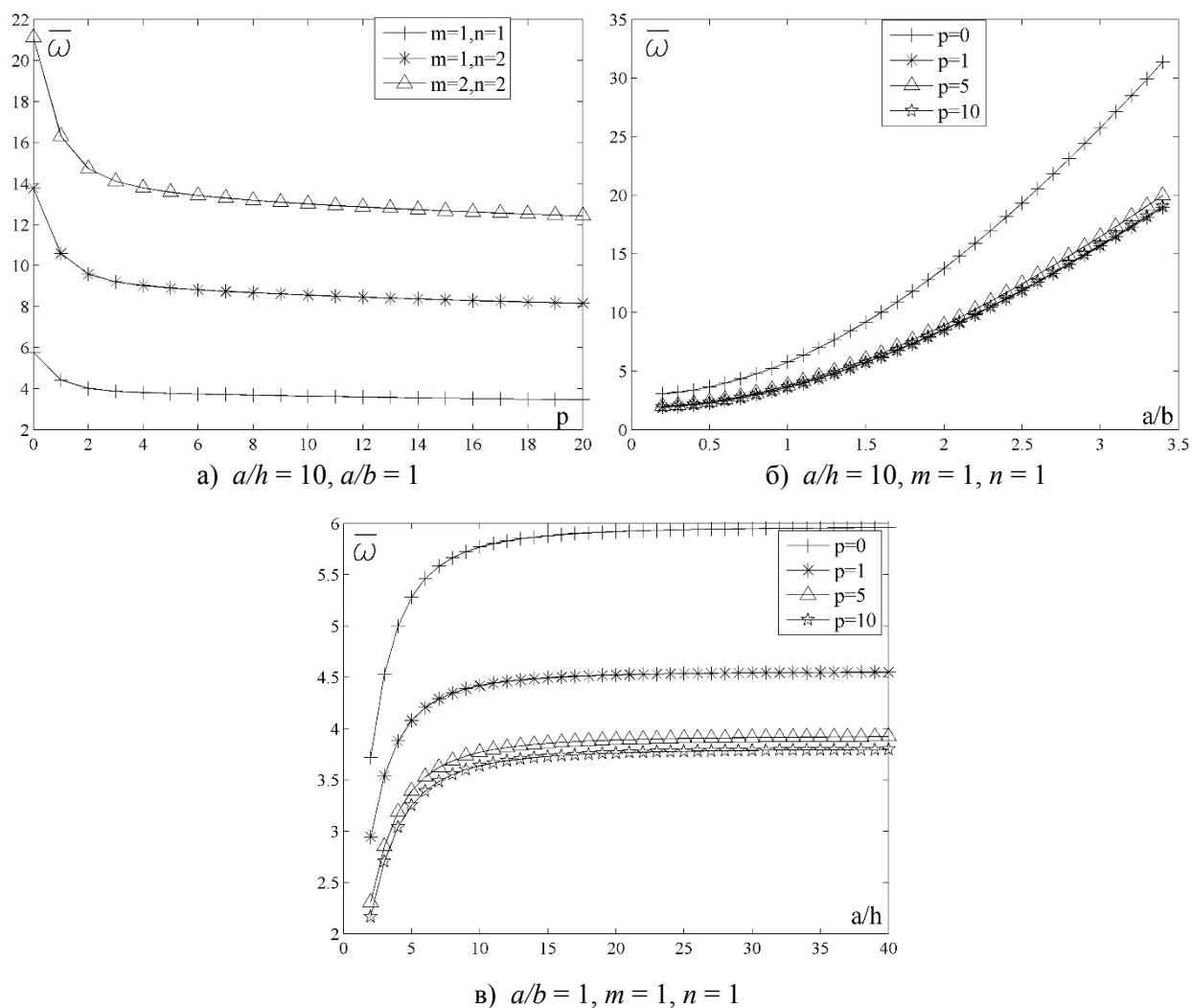
На слици 7.14 приказани су дијаграми зависности утицаја односа a/h , a/b и индекса p на вредности сопствених фреквенција $\hat{\omega}$ за прва три мода осциловања плоче. На основу дијаграма 7.14а уочава се да са порастом запремиског удела метала у ФГМ (пораст вредности индекса p) опадају вредности сопствених фреквенција за сва три мода осциловања. Такође, уочава се да највеће промене вредности $\hat{\omega}$ су до $p = 4$, док даље повећавање вредности индекса p има мањи утицај. Утицај промене геометрије плоче, односно пораст односа a/b (слика 7.14б), када се ради о првом моду осциловања, показује уједно и пораст вредности $\hat{\omega}$. При томе, може се уочити да са порастом односа a/b криве се постепено удаљавају, тј. при мањим односима a/b разлике у вредностима фреквенција за различите вредности индекса p су веома мале, док са порастом односа a/b те разлике постају све веће. Утицај односа a/h на вредности сопствених фреквенција, показан је на слици 7.14в. При вредностима односа $a/h < 15$, свако повећавање дебљине плоче доводи до значајаних

промена код вредности $\hat{\omega}$, док на другој страни, повећавање односа $a/h > 15$ доводи до мањих промена код вредности $\hat{\omega}$.

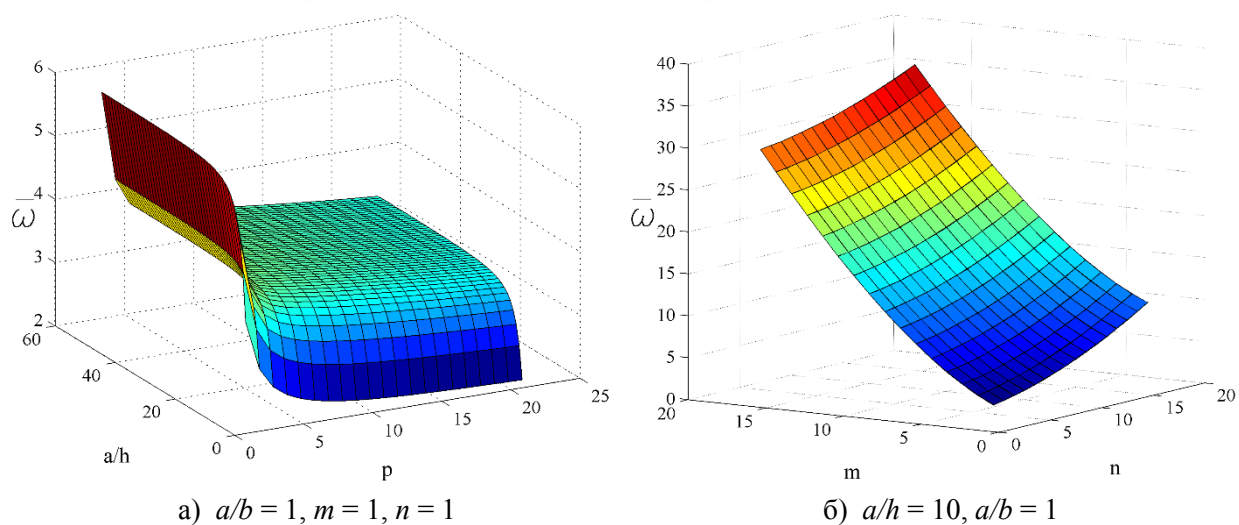


Слика 7.14 Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\hat{\omega}$ плоча за различите вредности односа a/h и a/b и индекса p

Утицај различитих односа a/h , a/b и вредности индекса p на нормализоване вредности сопствених фреквенција $\bar{\omega}$ за прва три мода осциловања правоугаоних и квадратних плоча приказан је на дијаграмима 7.15. На слици 7.15а може се уочити да промена индекса p има већи ефекат код друга два мода осциловања, него код првог мода. Код првог мода, већ при вредности $p = 5$ сопствене фреквенције достижу вредност, која се, даљим повећавањем вредности индекса p , готово не мења. Код друга два мода, са порастом вредности индекса p и након $p = 5$, вредности сопствених фреквенција континуално опадају. На дијаграму 7.15б може се уочити да промена односа a/b , доводи до највеће промене вредности сопствених фреквенција $\bar{\omega}$ код плоча од керамике ($p = 0$). Утицај односа a/h , односно дебљине плоче (ако је фиксирана вредност дужине плоче), приказан је на дијаграму 7.15в.



Слика 7.15 Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\bar{\omega}$ плоча за различите вредности односа a/h и a/b и вредности индекса p



Слика 7.16 3D дијаграми нормализованих вредности сопствених фреквенција $\bar{\omega}$ плоча за различите вредности m и n , односа a/h и индекса p

У циљу боље визуелизације, на слици 7.16а су приказани 3D дијаграми утицаја различитих односа a/h и променљивих вредности индекса p на вредности сопствених фреквенција $\bar{\omega}$ првог мода осциловања квадратне плоче. Са друге стране, вредности сопствених фреквенција $\bar{\omega}$ за различите модове осциловања квадратне плоче дебљине $a/h = 10$ приказани су на дијаграму 7.16б.

7.2.1.2 Слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу

Утицај еластичне подлоге, описане Винклер-Пастернаковим математичким моделом, на слободне непригушене осцилације плоче од ФГМ разматран је у оквиру овог поглавља. У табелама 7.19 и 7.2 приказане су нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ правоугаоне ($a/b = 0.5$) и квадратне ($a/b = 1$) плоче ослоњене на еластичну подлогу, а за различите вредности Винклеровог коефицијента (k_0), Пастернаковог коефицијента (k_1) и индекса p . Да би се уочио утицај еластичне подлоге, најпре су узете вредности $k_0 = 0$ и $k_1 = 0$, а затим је уведен прво један коефицијент, па други, како би се утврдило који од поменути два коефицијента има већи утицај. Анализом резултата, може се уочити да увођењем и Винклеровог коефицијента (k_0) и Пастернаковог коефицијента (k_1) вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ расту. Међутим, евидентно је да је утицај коефицијента k_1 на вредности $\tilde{\omega}$ далеко већи од утицаја коефицијента k_0 .

Табела 7.19 Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ правоугаоне плоче, односа $a/h = 5$, ослоњене на еластичну подлогу, за различите вредности коефицијената k_0 , и k_1 и индекса p ($m = 1, n = 1$)

a/b	k_0	k_1	Теорија	$\tilde{\omega}$			
				a/h = 5			
				$p = 0$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$
0.5	0	0	ФО 1	6.7609	5.2015	4.3757	4.2058
			ФО 2	6.7609	5.2015	4.3757	4.2058
			ФО 3	6.7616	5.2020	4.3733	4.2050
			ФО 4	6.7750	5.2108	4.3753	4.2136
			ФО 5	6.7609	5.2015	4.3757	4.2058
			ФО 6	6.7628	5.2027	4.3832	4.2110
			ФО 7	6.7636	5.2033	4.3722	4.2055
			ФО 8	6.7638	5.2034	4.3721	4.2056
			ФО 9	6.7638	5.2034	4.3721	4.2056
			ФО 10	6.7609	5.2015	4.3759	4.2059
			ФО 11	6.7642	5.2036	4.3852	4.2117
			ФО 12	6.8031	5.2291	4.4434	4.2771
			ФО 13	6.7609	5.2015	4.3754	4.2056
100	0	ФО 1	7.2125	5.8653	5.2354	5.1211	
		ФО 2	7.2125	5.8653	5.2354	5.1211	
		ФО 3	7.2132	5.8657	5.2336	5.1205	
		ФО 4	7.2256	5.8734	5.2353	5.1274	
		ФО 5	7.2125	5.8653	5.2355	5.1212	

		Ф0 6	7.2142	5.8664	5.2415	5.1252
		Ф0 7	7.2150	5.8668	5.2327	5.1209
		Ф0 8	7.2152	5.8670	5.2326	5.1210
		Ф0 9	7.2152	5.8670	5.2326	5.1210
		Ф0 10	7.2125	5.8653	5.2357	5.1212
		Ф0 11	7.2155	5.8672	5.2431	5.1258
		Ф0 12	7.2517	5.8893	5.2902	5.1777
		Ф0 13	7.2125	5.8653	5.2352	5.1210
0	100	Ф0 1	11.1150	10.8450	10.9919	11.0793
		Ф0 2	11.1150	10.8450	10.9919	11.0793
		Ф0 3	11.1154	10.8452	10.9914	11.0791
		Ф0 4	11.1226	10.8484	10.9922	11.0814
		Ф0 5	11.1150	10.8450	10.9919	11.0793
		Ф0 6	11.1160	10.8455	10.9936	11.0803
		Ф0 7	11.1164	10.8457	10.9912	11.0793
		Ф0 8	11.1166	10.8457	10.9912	11.0794
		Ф0 9	11.1166	10.8457	10.9912	11.0794
		Ф0 10	11.1150	10.8450	10.9920	11.0793
		Ф0 11	11.1168	10.8458	10.9940	11.0804
		Ф0 12	11.1380	10.8552	11.0077	11.0949
		Ф0 13	11.1150	10.8450	10.9918	11.0792
100	100	Ф0 1	11.3952	11.1780	11.3593	11.4558
		Ф0 2	11.3952	11.1780	11.3593	11.4558
		Ф0 3	11.3956	11.1782	11.3588	11.4557
		Ф0 4	11.4026	11.1812	11.3596	11.4578
		Ф0 5	11.3952	11.1780	11.3593	11.4558
		Ф0 6	11.3962	11.1784	11.3608	11.4567
		Ф0 7	11.3966	11.1786	11.3587	11.4559
		Ф0 8	11.3967	11.1787	11.3587	11.4559
		Ф0 9	11.3967	11.1787	11.3587	11.4559
		Ф0 10	11.3952	11.1780	11.3593	11.4558
		Ф0 11	11.3969	11.1787	11.3612	11.4568
		Ф0 12	11.4174	11.1876	11.3737	11.4700
		Ф0 13	11.3952	11.1780	11.3592	11.4557

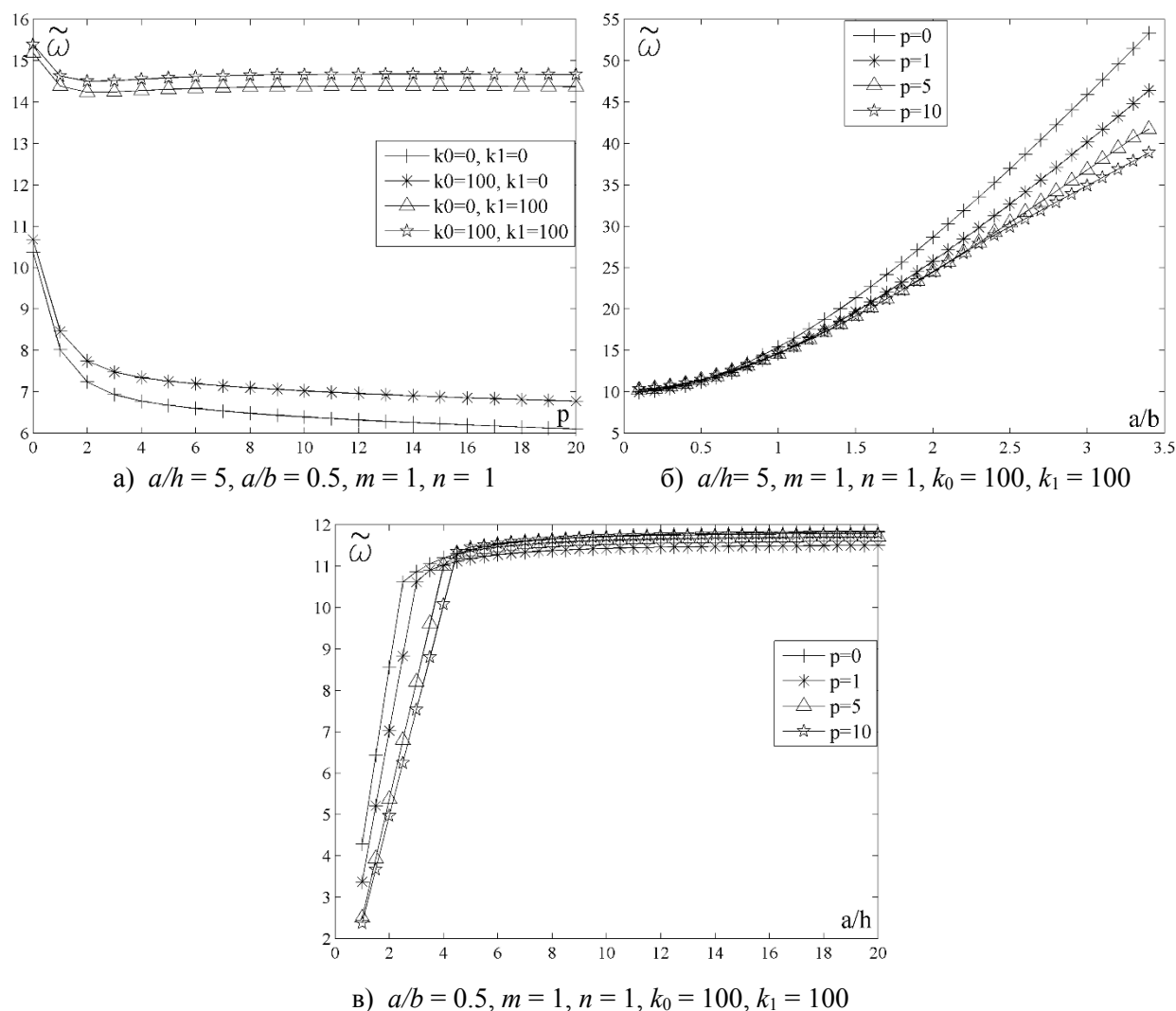
Табела 7.20 Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ квадратне плоче, односа $a/h = 5$, ослоњене на еластичну подлогу, за различите вредности коефицијената k_0 и k_1 и индекса p

a/b	k_0	k_1	Теорија	$\tilde{\omega}$			
				a/h = 5			
				$p = 0$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$
1	0	0	Ф0 1	10.3761	8.0121	6.6677	6.3879
			Ф0 2	10.3761	8.0121	6.6677	6.3879
			Ф0 3	10.3779	8.0133	6.6630	6.3864
			Ф0 4	10.4086	8.0336	6.6684	6.4062
			Ф0 5	10.3761	8.0121	6.6679	6.3879
			Ф0 6	10.3800	8.0147	6.6838	6.3987
			Ф0 7	10.3824	8.0163	6.6607	6.3877
			Ф0 8	10.3831	8.0167	6.6606	6.3880
			Ф0 9	10.3831	8.0167	6.6606	6.3880

		Ф0 10	10.3761	8.0121	6.6683	6.3881
		Ф0 11	10.3830	8.0166	6.6881	6.4001
		Ф0 12	10.4698	8.0739	6.8155	6.5423
		Ф0 13	0.37620	8.0122	6.6672	6.3876
100	0	Ф0 1	10.6723	8.4517	7.2534	7.0175
		Ф0 2	10.6723	8.4517	7.2534	7.0175
		Ф0 3	10.6740	8.4528	7.2491	7.0162
		Ф0 4	10.7037	8.4718	7.2541	7.0339
		Ф0 5	10.6722	8.4517	7.2535	7.0176
		Ф0 6	10.6760	8.4541	7.2678	7.0271
		Ф0 7	10.6783	8.4556	7.2471	7.0174
		Ф0 8	10.6790	8.4560	7.2470	7.0177
		Ф0 9	10.6790	8.4560	7.2470	7.0177
		Ф0 10	10.6722	8.4517	7.2539	7.0177
		Ф0 11	10.6789	8.4559	7.2717	7.0284
		Ф0 12	10.7629	8.5096	7.3865	7.1553
		Ф0 13	10.6723	8.4517	7.2529	7.0173
0	100	Ф0 1	15.1867	14.3818	14.3052	14.3759
		Ф0 2	15.1867	14.3818	14.3052	14.3759
		Ф0 3	15.1878	14.3823	14.3040	14.3757
		Ф0 4	15.2066	14.3910	14.3064	14.3818
		Ф0 5	15.1867	14.3818	14.3052	14.3760
		Ф0 6	15.1891	14.3829	14.3094	14.3785
		Ф0 7	15.1906	14.3836	14.3036	14.3763
		Ф0 8	15.1910	14.3838	14.3036	14.3764
		Ф0 9	15.1910	14.3838	14.3036	14.3764
		Ф0 10	15.1867	14.3818	14.3053	14.3760
		Ф0 11	15.1910	14.3838	14.3105	14.3788
		Ф0 12	15.2444	14.4086	14.3463	14.4167
		Ф0 13	15.1868	14.3818	14.3050	14.3759
100	100	Ф0 1	15.3904	14.6305	14.5843	14.6636
		Ф0 2	15.3904	14.6305	14.5843	14.6636
		Ф0 3	15.3914	14.6309	14.5833	14.6634
		Ф0 4	15.4099	14.6394	14.5856	14.6692
		Ф0 5	15.3904	14.6305	14.5844	14.6636
		Ф0 6	15.3927	14.6315	14.5883	14.6660
		Ф0 7	15.3941	14.6322	14.5829	14.6639
		Ф0 8	15.3945	14.6323	14.5829	14.6640
		Ф0 9	15.3945	14.6323	14.5829	14.6640
		Ф0 10	15.3904	14.6305	14.5845	14.6636
		Ф0 11	15.3945	14.6324	14.5894	14.6663
		Ф0 12	15.4470	14.6564	14.6233	14.7021
		Ф0 13	15.3904	14.6305	14.5842	14.6635

На слици 7.17 приказани су дијаграми нормализованих вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ плоча ослоњених на еластичну подлогу за различите односе a/h , a/b и вредности коефицијената k_0 , k_1 и индекса p . На дијаграму 7.17а приказан је утицај Винклеровог коефицијента (k_0) и Патернаковог коефицијента (k_1) на вредности сопствених фреквенција првог мода осциловања. Јасно се може уочити да увођење само коефицијента k_0 доводи до врло малих промена у вредностима за $\tilde{\omega}$ у односу на случај одсуства еластичне подлоге ($k_0 = 0$ и $k_1 = 0$). Са друге стране, када се уведе само коефицијент k_1 јавља се евидентна

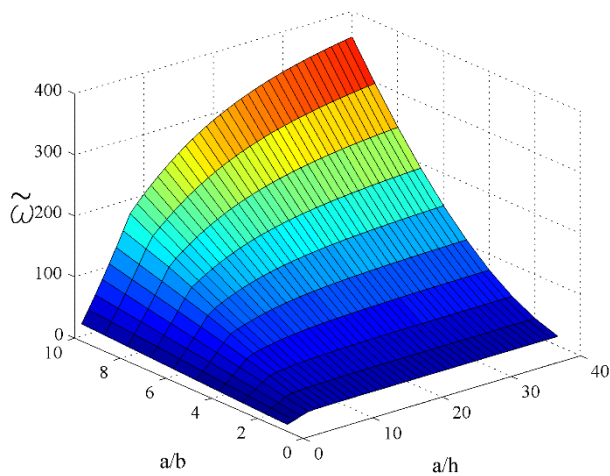
промена вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$. Утицај промене геометрије плоче (односа a/b) и индекса p приказана је на дијаграму 7.17б. Са порастом односа a/b криве се удаљавају, тј. најбржа промена вредности $\tilde{\omega}$ се дешава код плоче од керамике, најспорија код металне плоче, а код ФГМ брзина промене зависи од удела конституената. На дијаграму 7.17в приказан је утицај различитих односа a/h на вредности $\tilde{\omega}$. За мање вредности односа a/h промене вредности $\tilde{\omega}$ су израженије, док при вредностима односа $a/h > 5$, све је мањи утицај на $\tilde{\omega}$.



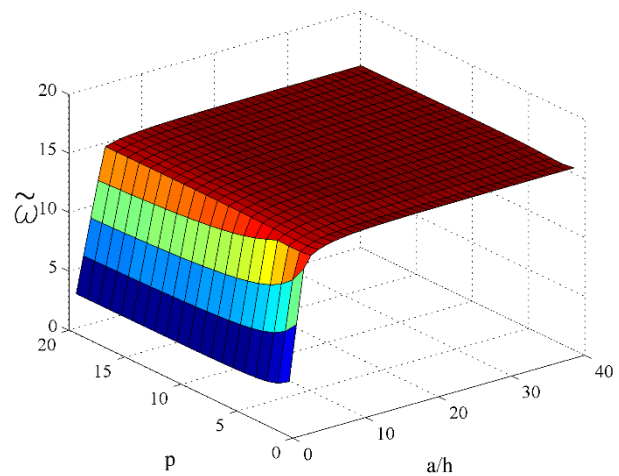
Слика 7.17 Нормализоване вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ плоча ослоњених на еластичну подлогу за различите вредности односа a/h и a/b , коефицијената k_0 и k_1 и индекса p

На слици 7.18 приказани су 3D дијаграми нормализованих вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ плоча ослоњених на еластичну подлогу за различите односе a/h , a/b , вредности k_0 , k_1 и индекса p . Оваквом визуелизацијом пружа се прегледнији увид у претходно описане утицаје појединих параметара на вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ и донете закључке. Тако на пример, на дијаграму 7.18в јасно се може уочити да је утицај

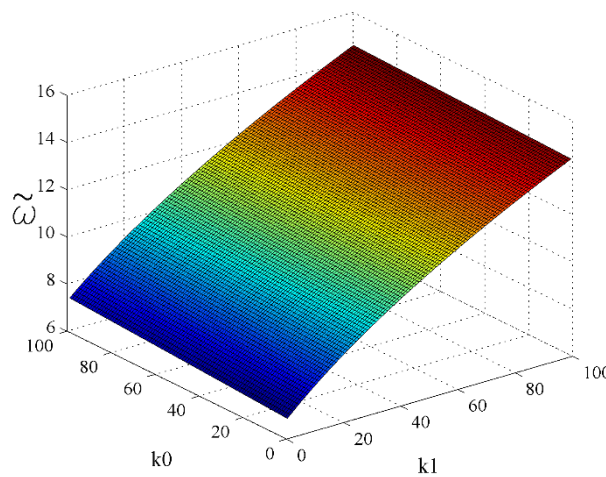
коэффициента k_1 на вредности сопствених фреквенција далеко већи од утицаја коэффициента k_0 .



а) $p = 5, m = 1, n = 1, k_0 = 100, k_1 = 100$



б) $a/b = 1, m = 1, n = 1, k_0 = 100, k_1 = 100$



в) $a/b = 1, a/h = 5, m = 1, n = 1$

Слика 7.18 3D дијаграми нормализованих вредности сопствених фреквенција $\tilde{\omega}$ плоча ослоњених на еластичну подлогу за различите вредности односа a/h и a/b , вредности коэффицијената k_0 и k_1 и индекса p

8 ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Као полазна основа за израду дисертације, добијање одређених резултата и доношење одговарајућих закључака, дефинисани су, у оквиру првог поглавља, проблеми који су решавани и постављени су циљеви који су реализовани током израде ове дисертације. Указано је на значај и актуелност истраживања савремених композитних материјала, са посебним освртом на функционално градијентно распоређене материјале (ФГМ). Извршена је детаљна и свеобухватна систематизација и преглед литературе према врсти проблема коју су аутори решавали када су у питању анализе плоча од ФГМ и плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу. Посебна пажња и акценат су стављени на различите деформационе теорије које су аутори користили у својим анализама. Тако урађен систематизован преглед теоријских поставки и актуелног стања у области истраживања плоча од ФГМ, умногоме је помогао у добијању теоријских резултата у наредним поглављима дисертације.

Како се у дисертацији анализирају плоче од функционално градијентно распоређених материјала, у другом поглављу описане су основне карактеристике поменутих материјала. Детаљно су објашњене основне предности ФГМ у односу на конвенционалне ламинатне композитне материјале. Приказана је основна класификација ФГМ у односу на различите критеријуме, описане су различите технике производње које омогућавају како контролу састава, тако и контролу структуре и указано је на широки спектар инжењерских области и индустријских грана где ФГМ налазе своју примену. С обзиром на градијентну структуру коју ФГМ имају у правцу дебљине плоче, посебна пажња је посвећена успостављању и дефинисању математичких функција, које на адекватан начин могу да опишу поменуту градијентну структуру. Дат је преглед степене функције, сигма функције, експоненцијалне функције и Мори-Танака шеме за опис градијентне промене материјалних карактеристика код ФГМ. Описане функције послужиле су као основа за развијање математичког модела ФГМ за напонско-деформациону анализу плоча која је урађена у оквиру ове дисертације.

Основне поставке и законитости механике непрекидних средина (континуума) описане су у трећем поглављу и представљају теоријску основу за математички модел плоче од ФГМ, који је развијен у дисертацији. Иако су ФГМ веома хетерогени, приликом статичке и динамичке анализе понашања плоча, извршена је њихова апроксимација, тако да се плоча посматра као континуум чија се механичка својства равномерно мењају у правцу одређене координате. Како је предмет ове дисертације нелинеарна статичка и линеарна динамичка анализа плоча од ФГМ, дефинисани су појмови напона и деформације, као и кинематичке линеарне и нелинеарне везе померања и деформације, са посебним освртом на Вон Карманов нелинеарни тензор деформације. С обзиром да је, поред плоча од ФГМ, предмет истраживања у овој дисертацији и интеракција плоча од ФГМ са еластичном подлогом, у оквиру овог поглавља су показане и основне релације које дефинишу поменуту интеракцију. Описани су Винклеров и Винклер-Пастернаков математички модел који се користе за математички опис поменуте интеракције.

У оквиру четвртог поглавља извршена је систематизација теорија плоча које се користе у анализи конвенционалних ламинатних композитних материјала. Дата је анализа предности и недостатака класичне теорије плоча, смицајне деформационе теорије првог реда и на крају су описане смицајне деформационе теорије вишег реда (HSDT) засноване на различитим облицима претпостављених облика померања. Сходно томе, извршена је подела HSDT теорија, са једне стране, у зависности од степена полинома у претпостављеним облицима померања, на смицајне деформационе теорије другог, односно трећег реда (TSDT) и са друге стране, на HSDT теорије засноване на функцијама облика. Дат је преглед 13 различитих функција облика, које су првенствено развијене од стране различитих аутора за анализу композитних ламината, а које су у овој дисертацији прилагођене и имплементиране у одговарајућим релацијама за анализу плоча од ФГМ, као напредних композитних материјала. На основу добијених резултата статичке и динамичке анализе умерено дебелих и дебелих плоча, донети су закључци о могућности примене функција облика у анализи плоча од ФГМ.

Тако дефинисани претпостављени облици померања засновани на HSDT теорији, која укључује утицај 13 различитих функција облика, искоришћени су у петом поглављу за дефинисање нелинеарних кинематичких релација померања и деформације у складу са вон Кармановим тензором деформације. Због градијентне структуре ФГМ, материјалне карактеристике (модул еластичности, коефицијент термичког ширења и густина) конституената усвојено је да се мењају у складу са степеном функцијом, при чему степен функције p , директно дефинише удео појединих компоненти у ФГМ. То практично значи да, за вредности $p \neq 0$ постоји бесконачно много равни паралелних са равни $z = 0$ које имају различите материјалне карактеристике. За тако дефинисане материјалне карактеристике, успостављене су конститутивне релације еластичности и термоеластичности. Применом принципа минималне укупне потенцијалне енергије, изведене су једначине равнотеже за плочу од ФГМ изложену савијању, као и извијању услед утицаја температуре. Изведене једначине равнотеже и једначине стабилности, за случај утицаја температуре, аналитички су решене применом Навијеових претпостављених облика померања.

Поред анализе понашања плоча од ФГМ у статичким условима, у шестом поглављу су разматрани динамички проблеми, са посебним освртом на проблеме слободних непригушених осцилација. На основу HSDT теорије која укључује утицај 13 различитих функција облика, а под претпоставком малих померања, успостављена је линеарна кинематичка веза померања и деформације. На основу дефинисане енергије деформације, потенцијалне и кинетичке енергије за случај плоче од ФГМ и случај плоче ослоњене на еластичну подлогу, применом Хамилтоновог принципа изведене су једначине кретања. Применом Навијеових претпостављених облика померања, развијен је поступак аналитичког решавања постављених једначина кретања.

Претходно описани теоријски резултати, употребљени су за развијање кода у оквиру MATLAB софтвера за добијање резултата и предвиђање понашања плоча од ФГМ у

статичком и динамичком окружењу. Извршена је анализа умерено дебелих и дебелих плоча од ФГМ које чине два конституента – метал (Алуминијум - Al) и керамика (Алумина - Al₂O₃) и уочене су одређене зависности које су приказане у табелама и на дијаграмима. Вршене су статичке и динамичке анализе, при чему су у оквиру статичке анализе приказани резултати који се односе на проблеме савијања и извијања услед утицаја температуре на плоче од ФГМ, као и плоче од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу. Код динамичке анализе, приказани су резултати за проблеме слободних непригушених осцилација плоча од ФГМ, као и плоча од ФГМ у интеракцији са еластичном подлогом. Верификација добијених резултата извршена је поређењем са резултатима доступним у литератури.

Анлизом добијених резултата, када је у питању статичка анализа савијања плоча од ФГМ и плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу, дошло се до следећих закључака:

- Вредности вертикалног померања \bar{w} (угиба) и одговарајућих напона, добијених у овој дисертацији применом HSDT теорије засноване на 13 различитих функција облика, се веома добро поклапају са резултатима истих величина у истраженој литератури, које су добијене применом TSDT теорије [173] и квази 3Д теорије еластичности [172]. Насупрот томе, уочена су велика одступања добијених резултата за вертикална померања, а нарочито за напоне $\bar{\sigma}_{xx}$ у односу на резултате из литературе добијене СРТ теорије [174]. То указује да СРТ не даје задовољавајуће резултате код анализе умерено дебелих и дебелих плоча од ФГМ, које су обрађене у овој дисертацији, већ да је потребно применити неку од деформационих теорија вишег реда.
- Разлика у понашању између хомогене плоче, керамичке или металне, и плоче од ФГМ, види се код дијаграма расподеле трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче. Јасно се уочава основна карактеристика ФГМ, а то је асиметричност расподеле ових напона у односу на средњу раван плоче ($z = 0$). Максималне вредности напона, у зависности од удела појединих конституената су померене у односу на раван $z = 0$, која представља неутралну раван код хомогених плоча.
- Највећа померања \bar{w} добијена су за плочу од метала, најмања за плочу од керамике, а за плочу од ФГМ вредности су између и завесе од удела конституената. На основу тога, закључено је да се, варирањем удела метала или керамике, може постићи жељена савојна крутост плоче.
- Упоредном анализом промене трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ по дебљини плоче уочено је да се, за разлику од напона $\bar{\tau}_{xy}$, њихове вредности не поклапају за све функције облика. Највеће одступање уочава се код резултата за функције облика ФО 6 и ФО 8. За функцију ФО 09 приметно је благо одступање, са максималном вредношћу напона у равни на висини $z/h = 0.25$, док су резултати за

ФО 10, ФО 12 и ФО 13 готово идентичне, са достизањем максималне вредности напона на висини $z/h = 0.3$ од средње равни плоче.

- Анализиран је и утицај еластичне подлоге на померања и напоне плоча, применом Винклер - Пастернаковог модела еластичне подлоге. Винклеров коефицијент (k_0) и Пастернаков коефицијент (k_1) утичу на смањивање вредности померања и напона, што практично одговара плочи веће савојне крутости. Упоредном анализом резултата при увођењу, најпре једног, па затим и другог коефицијента, дошло се до закључка да Пастернаков коефицијент (k_1) има далеко већи утицај у односу на Винклеров коефицијент (k_0). Такође, видимо да повећавање вредности параметра k_0 има знатно мањи утицај на вредности напона $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\tau}_{xy}$, док код трансверзалних смицајних напона $\bar{\tau}_{xz}$ и $\bar{\tau}_{yz}$ тај утицај је уочљивији.

Имајући у виду да ФГМ своју примарну примену налазе у конструкцијама које су изложене високој температурној разлици на спољашњем и унутрашњем зиду, у оквиру дисертације су разматрани и проблеми плоча од ФГМ услед утицаја температуре. Урађена је нелинерна анализа критичне температуре извијања (ΔT_{cr}) плоча од ФГМ и плоча од ФМГ ослоњених на еластичну подлогу и добијени су одговарајући резултати. На основу анализе резултата за критичну температуру извијања, добијених за равномерну, односно градијентну линеарну и нелинеарну расподелу температуре по дебљини плоче, дошло се до следећих закључака:

- Аналитичким поступком добијене су вредности критичне температуре извијања коришћењем HSDT теорије засноване на 13 различитих функција облика и упоређене су са вредностима критичне температуре извијања добијене применом CPT [175]. Закључено је да, код танких плоча ($a/h \geq 40$), HSDT и CPL дају готово идентичне резултате, док код умерено дебелих ($a/h = 20$) и дебелих ($a/h = 10$) плоча, разлика постаје све већа са смањивањем односа a/h . Тако на пример, код $a/h = 20$ та разлика је око 1,5 - 2 %, док је код $a/h = 10$ разлика 5 - 8% у зависности од удела метала, односно керамике (p индекса). Са даљим повећавањем дебљине плоче, та разлика је све већа, што јасно указује да код умерено дебелих и дебелих плоча CPL не даје задовољавајуће резултате за ΔT_{cr} . Са друге стране, резултати за ΔT_{cr} добијени у оквиру ове дисертације, применом HSDT теорије засноване на функцијама облика, показују одлично слагање са резултатима из литературе, добијеним деформационом теоријом вишег реда (HSDT^R) која се заснива на Редијевим претпостављеним облицима померања [78].
- Упоредним приказом резултата за свих 13 функција облика, које су предмет разматрања у дисертацији, закључено је да све функције дају добре резултате за ΔT_{cr} .
- Повећавање запреминског удела метала и смањивање удела керамике у ФГМ (пораств вредности p индекса) смањује вредност критичне температуре извијања за сва три поменута случаја расподеле температуре по дебљини плоче.

- Анализом утицаја геометрије плоче на ΔT_{cr} , може се закључити да са порастом односа a/b расте ΔT_{cr} , односно да су правоугаоне плоче ($a/b > 1$) отпорније на термичко извијање од квадратних плоча ($a/b = 1$).
- Упоредном анализом резултата за равномерну, линеарну и нелинеарну расподелу температуре по дебљини плоче, а за фиксиране остале параметре плоче, закључено је да се највеће критичне температуре извијања добијају при нелинеарној расподели. При већем уделу керамике у ФГМ ($p < 5$) и дебљим плочама ($a/h \leq 40$), ΔT_{cr} при нелинеарној промени је око 50% већа од ΔT_{cr} при линеарној промени температуре по дебљини плоче. Затим, при нелинеарној промени, вредности ΔT_{cr} су приближно три пута веће него при равномерној промени температуре по дебљини плоче. Такође, ΔT_{cr} при линеарној промени је приближно два пута већа у односу ΔT_{cr} при равномерној промени температуре по дебљини плоче. Са повећањем удела метала у ФГМ ($p > 5$) утицај нелинеарне промене на пораст ΔT_{cr} је нешто мањи.
- Увођењем параметара еластичне подлоге, уочено је да Пастернаков коефицијент (k_1) има далеко већи утицај на критичну температуру извијања у односу на Винклеров коефицијент (k_0). Код хомогене керамичке плоче ($p = 0$), при линеарној расподели температуре по дебљини, увођењем Пастернаковог коефицијента, ΔT_{cr} се повећава за око 50%. За плоче од ФГМ ($p \geq 1$) утицај је све већи, па тако за $p = 10$, коефицијент k_1 повећава ΔT_{cr} приближно три пута.

Како би се добила комплетна слика о понашању плоча од ФГМ и плоча од ФГМ ослоњених на еластичну подлогу, поред статичке анализе, извршена је и динамичка анализа. Анализирани су резултати за слободне непригушене осцилације плоча од ФГМ, на основу којих су донети следећи закључци:

- Резултати динамичке анализе, добијени у оквиру ове дисертације, применом HSDT теорије засноване на функцијама облика, добро се поклапају са резултатима из литературе добијени TSDT теоријом [180] и 3D теоријом еластичности [99].
- Свих 13 предложених функција облика дају веома сличне резултате, осим у случају ФО 12, где постоје мања одступања, нарочито код другог и трећег мода осциловања. Такође, закључено је да промена запреминског удела конституената у ФГМ има већи утицај на промену вредности друга два мода осциловања, него на први, фундаментални мод.
- На основу анализе утицаја параметара Винклер-Пастернаковог модела еластичне подлоге, слично као и у статичкој анализи, дошло се до закључка да Пастернаков коефицијент (k_1) има далеко већи утицај на сопствене фреквенције осциловања у односу на Винклеров коефицијент (k_0).

Претходно изложени резултати и закључци, до којих се дошло током израде ове дисертације, представљају основу за даља истраживања у области ФГМ. Поред проучених статичких проблема савијања, као и извијања услед утицаја температуре на плоче од ФГМ, истраживање се може проширити и на друге врсте статичких проблема, као и проблеме термомеханичког спрезања. Када је реч о динамичкој анализи, поред обрађених проблема слободних непригушених осцилација, интересантну област проучавања представљају и друге врсте динамичких проблема, као што су: слободне пригушене осцилације, принудне осцилације, принудне пригушене осцилације, ударна оптерећења и друго. Као један од врло занимљивих праваца даљег истраживања, када су у питању ФГМ, намеће се проблем оптимизације, односно развијање теоријске процедуре и програмског кода, који би за задате критеријуме (нпр. дозвољени угиб, дозвољени напон, критична температура извијања и слично), као излаз давао најоптималнији ФГМ са тачно дефинисаним процентуалним уделом конституената. Поред статичке и динамичке анализе плоча од ФГМ, проучавање се може проширити и на проблеме сложеније геометрије, применом методе коначних елемената.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, no. 1, pp. 31-38, 1951.
- [2] E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, no. 2, pp. 69-72, 1945.
- [3] E. Reissner, "On bending of elastic plates," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 55-68, 1947.
- [4] R. M. Mahamood, E. T. Akinlabi, M. Shukla, S. Pityana, "Functionally Graded Material: An Overview," in *Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol III WCE 2012*, London, U.K., July 4 - 6, 2012.
- [5] D.K. Jha, T. Kant, R.K. Singh, "A critical review of recent research on functionally graded plates," *Composite Structures*, vol. 96, pp. 833-849, 2013.
- [6] G. Udupa, S. R. Shrikantha, K. V. Gangadharan, "Functionally graded composite materials: An overview," *Procedia Materials Science*, vol. 5, pp. 1291-1299, 2014.
- [7] M. S. EL-Wazery, A. R. EL-Desouky, "A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials," *Journal of Materials and Environmental Science*, vol. 6, no. 5, pp. 1369-1376, 2015.
- [8] H. T. Thai, S. E. Kim, "A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells," *Composite Structures*, vol. 128, pp. 70-86, 2015.
- [9] K. Swaminathan, D. M. Sangeetha, "Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods," *Composite Structures*, vol. 160, pp. 43-60, 2017.
- [10] S. Brischetto, "Classical and mixed multilayered plate/shell models for multifield problems analysis," Phd dissertation, Politecnico Di Torino, Torino, 2009.
- [11] J. R. Zuiker, "Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variation," *Composites Engineering*, vol. 5, no. 7, pp. 807-19, 1995.
- [12] T. Reiter, G. J. Dvorak, V. Tvergaard, "Micromechanical models for graded composite materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 45, no. 8, pp. 1281-302, 1997.
- [13] J.H. Kim, G. H. Paulino, "An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, no. 10, pp. 1457-1497, 2003.
- [14] M. M. Gasik, "Micromechanical modelling of functionally graded materials," *Computational Materials Science*, vol. 13, no. 1-3, pp. 42-55, 1998.

-
- [15] V. Birman, L. W. Byrd, "Modeling and analysis of functionally graded materials and structures," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 60, no. 5, pp. 195-216, 2007.
- [16] A. H. Akbarzadeh, A. Abedini, Z. T. Chen, "Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates," *Composite Structures*, vol. 119, pp. 598-609, 2015.
- [17] V. G. Kirchhoff, "Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 1850, no. 40, pp. 51-88, 1850.
- [18] E. Feldman, J. Aboudi, "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading," *Composite Structures*, vol. 38, no. 1, pp. 29-36, 1997.
- [19] A. M. Zenkour, "An exact solution for the bending of thin rectangular plates with uniform, linear, and quadratic thickness variations," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 45, no. 2, pp. 295-315, 2003.
- [20] M. Mahdavian, "Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading," *Journal of Solid Mechanics*, vol. 1, no. 3, pp. 213-25, 2009.
- [21] M. Mohammadi, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh, "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates," *Applied Composite Materials*, vol. 17, no. 2, pp. 81-93, 2010.
- [22] D. Hashempour, M. H. Shojaeifard, R. Talebitooti, "Analytical modeling of functionally graded plates under general transversal loads," *Proceedings of the Romanian academy, Series A*, vol. 14, no. 4, pp. 309-316, 2013.
- [23] M. Bhandari, K. Purohit, "Static Response of Functionally Graded Material Plate under Transverse Load for Varying Aspect Ratio," *International Journal of Metals*, vol. 2014, p. 11str., 2014.
- [24] S. R. Li, X. Wang, R. C. Batra, "Correspondence Relations Between Deflection, Buckling Load, and Frequencies of Thin Functionally Graded Material Plates and Those of Corresponding Homogeneous Plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 82, no. 11, pp. 111006-1-8, 2015.
- [25] J. Yang, H. S. Shen, "Non-linear analysis of FGM plates under transverse and inplane loads," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 38, no. 4, pp. 467-482, 2003.
- [26] M. M. Alinia, S. A. M. Ghannadpour, "Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates," *Composite Structures*, vol. 88, no. 3, pp. 354-359, 2009.
- [27] D. Y. Liu, C. Y. Wang, W. Q. Chen, "Free vibration of FGM plates with in-plane material inhomogeneity," *Composite Structures*, vol. 92, no. 5, pp. 1047-1051, 2010.
- [28] J. Yang, H. S. Shen, "Dynamic response of functionally graded rectangular thin plates," *Composite Structures*, vol. 54, no. 4, pp. 497-508, 2001.
- [29] M. Ruan, Z. M. Wang, "Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material," *Journal of Vibration and Control*, vol. 22, no. 16, pp. 3504-3517, 2016.
-

-
- [30] J. Yang, H. S. Shen, "Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments," *Journal of Sound and Vibrations*, vol. 255, no. 3, pp. 579-602, 2002.
- [31] J. Woo, S. A. Meguid, L. S. Ong, "Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 289, no. 3, pp. 595-611, 2006.
- [32] Y. Hu, X. Zhang, "Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 39, no. 3, pp. 367-377, 2011.
- [33] C. S. Chen, "Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate," *Composite Structures*, vol. 68, no. 3, pp. 295-302, 2005.
- [34] S. Chakraverty, K. K. Pradhan, "Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method," *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 6, no. 4, pp. 1450043-37str., 2014.
- [35] M. Bodaghi, A. R. Saidi, "Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 81, no. 6, pp. 765-80, 2011.
- [36] D. D. Nguyen, T. T. Pham, "Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic–metal–ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression," *Composite Structures*, vol. 110, pp. 200-206, 2014.
- [37] D. D. Nguyen, Q. Q. Tran, "Nonlinear postbuckling of imperfect eccentrically stiffened P-FGM double curved thin shallow shells on elastic foundations in thermal environments," *Composite Structures*, vol. 106, pp. 590-600, 2013.
- [38] D. D. Nguyen, "Nonlinear dynamic response of imperfect eccentrically stiffened FGM double curved shallow shells on elastic foundation," *Composite Structures*, vol. 99, pp. 88-96, 2013.
- [39] K. D. Kim, G. R. Lomboy, S. C. Han, "Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (FGM) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element," *Journal of Composite Materials*, vol. 42, no. 5, pp. 485-511, 2008.
- [40] J. E. Jam, S. Maleki, A. Andakhshideh, "Non-Linear Bending Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Plates Using Generalized Differential Quadrature Method," *International Journal of Aerospace Sciences*, vol. 1, no. 3, pp. 49-56, 2012.
- [41] T. L. Wu, K.K. Shukla, J. H. Huang, "Nonlinear static and dynamic analysis of functionally graded plates," *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 11, no. 3, pp. 679-698, 2006.
- [42] H. S. Hashemi, R. D. Taher, H. Akhavan, M. Omid, "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, no. 5, pp. 1276-1291, 2010.
-

-
- [43] H. S. Hashemi, M. Fadaee, S. R. Atashipour, "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, no. 1, pp. 11-22, 2011.
- [44] M. K. Khorramabadi, M. M. Najafizadeh, A. J. Shahraki, P. Khazaeinejad, "Effect of shear theories on free vibration of functionally graded plates," *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 2, no. 12, pp. 216-221, 2008.
- [45] M. Taczala, R. Buczkowski, M. Kleiber, "Nonlinear free vibration of pre-and post-buckled FGM plates on two-parameter foundation in the thermal environment," *Composite Structures*, vol. 137, pp. 85-92, 2016.
- [46] A. Fallah, M. M. Aghdam, M. H. Kargarnovin, "Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 83, no. 2, pp. 177-191, 2013.
- [47] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, no. 4, pp. 745-752, 1984.
- [48] N. D. Phan, J. N. Reddy, "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, no. 12, pp. 2201-2219, 1985.
- [49] J. N. Reddy, "Analysis of functionally graded plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, no. 1-3, pp. 663-684, 2000.
- [50] H. S. Shen, "Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, no. 3, pp. 561-584, 2002.
- [51] J. Yang, H. S. Shen, "Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions," *Composites Part B*, vol. 34, no. 2, pp. 103-115, 2003.
- [52] J. Yang, K. M. Liew, S. Kitipornchai, "Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory," *Computational Mechanics*, vol. 33, no. 4, pp. 305-315, 2004.
- [53] A. H. Akbarzadeh, S. H. Zad, M. R. Eslami, M. Sadighi, "Mechanical behaviour of functionally graded plates under static and dynamic loading," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 225, no. 2, pp. 326-33, 2011.
- [54] D. G. Zhang, "Nonlinear bending analysis of FGM rectangular plates with various supported boundaries resting on two-parameter elastic foundations," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 84, no. 1, pp. 1-20, 2014.
- [55] Y. W. Kim, "Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 284, no. 3-5, pp. 531-549, 2005.
-

-
- [56] W. Zhang, J. Yang, Y. Hao, "Chaotic vibrations of an orthotropic FGM rectangular plate based on third-order shear deformation theory," *Nonlinear Dynamics*, vol. 59, no. 4, pp. 619-660, 2010.
- [57] Y. X. Hao, W. Zhang, J. Yang, "Nonlinear oscillation of a cantilever FGM rectangular plate based on third-order plate theory and asymptotic perturbation method," *Composites Part B: Engineering*, vol. 42, no. 3, pp. 402-413, 2011.
- [58] K. H. Lo, R. M. Christensen, E. M. Wu, "A high-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, no. 4, pp. 663-668, 1977.
- [59] K. H. Lo, R. M. Christensen, E.M. Wu, "A high-order theory of plate deformation part 2: laminated plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, no. 4, pp. 669-676, 1977.
- [60] T. Kant, K. Swaminathan, "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory," *Composite Structures*, vol. 53, no. 1, pp. 73-85, 2001.
- [61] T. Kant, K. Swaminathan, "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory," *Composite Structures*, vol. 56, no. 4, pp. 329-344, 2002.
- [62] S. Xiang, G. Kang, B. Xing, "A nth-order shear deformation theory for the free vibration analysis on the isotropic plates," *Meccanica*, vol. 47, no. 8, pp. 1913-1921, 2012.
- [63] X. Song, G. Kang, "A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates," *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 37, pp. 336-343, 2013.
- [64] X. Song, G. Kang, Y. Liu, "A nth-order shear deformation theory for natural frequency of the functionally graded plates on elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 11, pp. 224-231, 2014.
- [65] K. Soldatos, "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates," *Acta Mechanica*, vol. 94, no. 3, pp. 195-220, 1992.
- [66] M. Aydogdu, "A new shear deformation theory for laminated composite plates," *Composite Structures*, vol. 89, no. 1, pp. 94-101, 2009.
- [67] J. L. Mantari, A. S. Oktem, S. G. Soares, "A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, no. 1, pp. 43-53, 2012.
- [68] J. L. Mantari, E. M. Bonilla, C. G Soares, "A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates," *Composites Part B: Engineering*, vol. 60, pp. 319-28, 2014.
- [69] N. El Meichea, A. Tounsia, N. Ziane, I. Mechaba, A. B. El Abbes, "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, no. 4, pp. 237-247, 2011.
-

-
- [70] B. Mechab, I. Mechab, S. Benaissa, "Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory by the new function under thermo-mechanical loading," *Composites: Part B*, vol. 43, no. 3, pp. 1453-1458, 2012.
- [71] N. Grover, D. K. Maiti, B. N. Singh, "Flexural behavior of general laminated composite and sandwich plates using a secant function based shear deformation theory," *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 11, no. 7, pp. 1275-1297, 2014.
- [72] E. Viola, F. Tornabene, N. Fantuzzi, "General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels," *Composite structures*, vol. 95, pp. 639-666, 2013.
- [73] S. S. Akavci, "Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 46, no. 2, pp. 215-26, 2010.
- [74] W. Lanhe, "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate," *Composite Structures*, vol. 64, no. 2, pp. 211-218, 2004.
- [75] A. Alibeigloo, "Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates," *Composite Structures*, vol. 92, no. 1, pp. 113-21, 2010.
- [76] A. H. Akbarzadeh, M. Abbasi, M. R. Eslami, "Coupled thermoelasticity of functionally graded plates based on the third-order shear deformation theory," *Thin-Walled Structures*, vol. 53, pp. 141-55, 2012.
- [77] X. Zhao, Y. Y. Lee, K. M. Liew, "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates," *Composite Structures*, vol. 90, no. 2, pp. 161-171, 2009.
- [78] M. Bodaghi, A. R. Saidi, "Thermoelastic buckling behavior of thick functionally graded rectangular plates," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 18, no. 11, pp. 1555-1572, 2011.
- [79] M. Bouazza, A. Tounsi, E. A. Adda-Bedia, A. Megueni, "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach," *Computational Materials Science*, vol. 49, no. 4, pp. 865-870, 2010.
- [80] Y. Y. Lee, X. Zhao, J. N. Reddy, "Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 25-28, pp. 1645-1653, 2010.
- [81] H. Jari, H. R. Atri, S. Shojaee, "Nonlinear thermal analysis of functionally graded material plates using a NURBS based isogeometric approach," *Composite Structures*, vol. 119, pp. 333-345, 2015.
- [82] P. Khazaeinejad, A. S. Usmani, O. Laghrouche, "Temperature-dependent nonlinear behaviour of thin rectangular plates exposed to through-depth thermal gradients," *Composite Structures*, vol. 132, pp. 652-664, 2015.
- [83] Q. Li, V. P. Iu, K. P. Kou, "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 324, no. 3-5, pp. 733-750, 2009.
-

-
- [84] S. S. Akavci, A. H. Tanrikulu, "Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories," *Composites Part B: Engineering*, vol. 83, pp. 203-215, 2015.
- [85] M. Talha, B. N. Singh, "Thermo-mechanical induced vibration characteristics of shear deformable functionally graded ceramic-metal plates using finite element method," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 225, no. 1, pp. 50-60, 2011.
- [86] Y. W. Kim, "Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 284, no. 3-5, pp. 531-549, 2005.
- [87] Alijani F, Bakhtiari-Nejad F, Amabili M., "Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments," *Nonlinear Dynamics*, vol. 66, no. 3, p. 251-70, 2011.
- [88] Xiao-Lin Huang, Hui-Shen Shen, "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, p. 2403-2427, 2004.
- [89] Z. Y. Huang, C. F. Lu, W. Q. Chen, "Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 85, no. 98, p. 104, 2008.
- [90] H. S. Shen, Z. X. Wang, "Nonlinear bending of FGM plates subjected to combined loading and resting on elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 92, no. 10, pp. 2517-24, 2010.
- [91] A. M. Zenkour, "Hygro-thermo-mechanical effects on FGM plates resting on elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 93, no. 1, pp. 234-238, 2010.
- [92] H. Yaghoobi, A. Fereidoon, "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory," *Composites: Part B*, vol. 62, pp. 54-64, 2014.
- [93] D. G. Zhang, H. M. Zhou, "Mechanical and thermal post-buckling analysis of FGM rectangular plates with various supported boundaries resting on nonlinear elastic foundations," *Thin-Walled Structures*, vol. 89, pp. 142-151, 2015.
- [94] X. Yepeng, D. Zhou, "Three-dimensional elasticity solution of functionally graded rectangular plates with variable thickness," *Composite Structures*, vol. 91, no. 1, pp. 56-65, 2009.
- [95] P. Malekzadeh, "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 89, no. 3, pp. 367-373, 2009.
- [96] Z. Zhong, E. Shang, "Closed-form solutions of three-dimensional functionally graded plates," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 15, no. 5, pp. 355-363, 2008.
- [97] B. Uymaz, M. Aydogdu, "Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 26, no. 18, pp. 1847-1863, 2007.
-

-
- [98] B. Woodward, M. Kashtalyan, "Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates," *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 30, no. 5, pp. 705-718, 2011.
- [99] J. Guoyong, S. Zhu, S. Shuangxia, Y. Tiangui, G. Siyang, "Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions," *Composite Structures*, vol. 108, pp. 565-577, 2014.
- [100] P. Malekzadeh, "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 89, no. 3, pp. 367-373, 2009.
- [101] P. H. Wen, J. Sladek, V. Sladek, "Three-dimensional analysis of functionally graded plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 87, no. 10, pp. 923-942, 2011.
- [102] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber, K. Schulte, "Functionally graded materials for biomedical applications," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, no. 1-2, pp. 40-60, 2003.
- [103] F. Watari, A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, M. Uoa, T. Kawasaki, "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for biomedical application.," *Composites Science and Technology*, vol. 64, no. 6, pp. 893-908, 2004.
- [104] Y. Li, . Yang, H. Zhao, S. Qu, X. Li, Y. Li, "New developments of Ti-based alloys for biomedical applications," *Materials*, vol. 7, no. 3, pp. 1709-1800, 2014.
- [105] S. Matsuo, F. Watari, N. Ohata, "Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root," *Dental Materials Journal*, vol. 20, no. 4, pp. 257-274, 2001.
- [106] F. Watari, A. Yokoyama, F. Saso, M. Uo, T. Kawasaki, "Fabrication and properties of functionally graded dental implant," *Composite Part B: Engineering*, vol. 28, no. 1-2, pp. 5-11, 1997.
- [107] E. Müller, C. Drašar, J. Schilz, W.A. Kaysser, "Functionally graded materials for sensor and energy applications," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, no. 1-2, pp. 17-30, 2003.
- [108] M. Niino, K. Kisara, M. Mori, "Feasibility study of FGM technology in space solar power systems (SPSS)," *Materials Science Forum*, vol. 492, pp. 163-168, 2005.
- [109] M. Malinina, T. Sammi, M. Gasik, "Corrosion resistance of homogeneous and FGM coatings," *Materials Science Forum*, Vols. 492-493, pp. 305-310, 2005.
- [110] L. Lu, M. Chekroun, O. Abraham, V. Maupin, G. Villain, "Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer," *NDT & E International*, vol. 44, no. 2, pp. 169-177, 2011.
- [111] I. Bharti, N. Gupta, K. M. Gupta, "Novel applications of functionally graded nano optoelectronic and thermoelectric materials," *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, vol. 1, no. 3, pp. 221-224, 2013.
-

- [112] C. P. Wu, Y. C. Liu, "A review of semi-analytical numerical methods for laminated composite and multilayered functionally graded elastic/piezoelectric plates and shells," *Composite Structures*, vol. 147, pp. 1-15, 2016.
- [113] S. Marković, "Sinteza i karakterizacija BaTi1-xSnxO3 prahova i višeslojnih keramičkih materijala," Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Fakultet za fizicku hemiju, Beograd, 2008.
- [114] G. S. Kohli, T. Singh, "Review of functionally graded materials," *Journal of Production Engineering*, vol. 18, no. 2, pp. 1-4, 2015.
- [115] S. H. Chi, Y. L. Chung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: analysis," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, no. 13, pp. 3657-74, 2006.
- [116] S. H. Chi, Y. L. Chung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part II: numerical results," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, no. 13, pp. 3675-3691, 2006.
- [117] P. T. Thang, T. T. Nguyen, J. Lee, "Closed-form expression for nonlinear analysis of imperfect sigmoid-FGM plates with variable thickness resting on elastic medium," *Composite Structures*, Vols. 143-150, p. 143, 2016.
- [118] C. Y. Lee, J. H. Kim, "Evaluation of homogenized effective properties for FGM panels in aero-thermal environments," *Composite Structures*, vol. 120, pp. 442-50, 2015.
- [119] M. Bhandari, K. Purohit, "Response of functionally graded material plate under thermomechanical load subjected to various boundary conditions," *International Journal of Metals*, vol. 2015, p. 16 str., 2015.
- [120] Y. Ootao, Y. Tanigawa Y., "Three-dimensional solution for transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to nonuniform heat supply," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 47, no. 11, pp. 1769-1788, 2005.
- [121] K. S. K. Reddy, T. Kant, "Three dimensional elasticity solution for free vibrations of exponentially graded plates.," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 140, no. 7, pp. 1-9, 2014.
- [122] Y. P. Xu, D. Zhou, "Three-dimensional elasticity solution of simply supported functionally graded rectangular plates with internal elastic line supports," *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 44, no. 4, pp. 249-261, 2009.
- [123] F. Chu, J. He, L. Wang, Z. Zhong, "Buckling analysis of functionally graded thin plate with in-plane material inhomogeneity," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 65, pp. 112-125, 2016.
- [124] Z. Belabed, M. S. A. Houari, A. Tounsi, S. R. Mahmoud, B. O. Anwar, "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates," *Composite Part B: Engineering*, vol. 60, pp. 274-283, 2014.

- [125] M. Kashtalyan, M. Menshykova, "Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core," *Composite Structures*, vol. 87, no. 1, pp. 36-43, 2009.
- [126] A. Alibeigloo, "Thermo elasticity solution of sandwich circular plate with functionally graded core using generalized differential quadrature method," *Composite Structures*, vol. 136, pp. 229-240, 2016.
- [127] K. Tanaka, Y. Tanaka, H. Watanabe, V. F. Poterasu, Y. Sugano, "An improved solution to thermoelastic material design in functionally gradient materials: scheme to reduce thermal stresses," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 109, no. 3-4, pp. 377-89, 1993.
- [128] K. Tanaka, Y. Tanaka, K. Enomoto, V. F. Poterasu, Y. Sugano, "Design of thermoelastic materials using direct sensitivity and optimization methods. Reduction of thermal stresses in functionally gradient materials," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 106, no. 1-2, pp. 271-284, 1993.
- [129] T. Mori, K. Tanaka, "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions," *Acta Metallurgica*, vol. 21, no. 5, pp. 1-4, 1973.
- [130] Y. Benveniste, "A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials," *Mechanics of Materials*, vol. 6, no. 2, pp. 147-157, 1987.
- [131] U. Gururaja, S. R. Shrikantha, K. V. Gangadharan, "Functionally graded composite materials: An overview," in *International Conference on Advances in Manufacturing and Materials Engineering, AMME 2014, Procedia Materials Science 5*, Mangalore, India, 2014.
- [132] K. Pietrzak, D. Kaliński, M. Chmielewski, "Interlayer of Al₂O₃-Cr functionally graded material for reduction of thermal stresses in alumina-heat resisting steel joints," *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 27, no. 2-3, pp. 1281-1286, 2007.
- [133] I. Bharti, N. Gupta, K. M. Gupta, "Novel Applications of Functionally Graded Nano, Optoelectronic and Thermoelectric Materials," *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, vol. 1, no. 3, pp. 221-224, 2013.
- [134] Y. Watanabe, H. Sato, "Review Fabrication of Functionally Graded Materials under a Centrifugal Force," in *Nanocomposites with Unique Properties and Applications in Medicine and Industry, Dr. John Cuppoletti (Ed.), ISBN: 978-953-307-351-4*, China, InTech, 2011, pp. 133-150.
- [135] B. Kieback, A. Neubrand, H. Riedel, "Processing techniques for functionally graded materials," *Materials Science and Engineering A*, vol. 362, no. 1-2, pp. 81-105, 2003.
- [136] A. Saiyathibrahim, M. S. S. Nazirudeen, P. Dhanapal, "Processing Techniques of Functionally Graded Materials – A Review," in *International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology 2015 [ICSSCCET 2015] ISBN:978-81-929866-1-6*, Coimbatore, India, 2015.
- [137] Y. Watanabe, E. M. Fujiwara, H. Sato, "Fabrication of functionally graded materials by centrifugal slurry-pouring method and centrifugal mixed-powder method," *Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, vol. 57, no. 5, pp. 321-326, 2009.

- [138] S. N. S. Jamaludin, F. Mustapha, D. M. Nuruzzaman, S. N. Basri, "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites," *Scientific Research and Essays*, vol. 8, no. 21, pp. 828-840, 2013.
- [139] M. Koizumi, "FGM activities in Japan," *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, no. 1-2, pp. 1-4, 1997.
- [140] F. Wataria, A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, M. Uo, T. Kawasaki, "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application," *Composites Science and Technology*, vol. 64, no. 6, pp. 893-908, 2004.
- [141] J. Jarić, *Mehanika kontinuuma*, Beograd: Građevinska knjiga, 1988.
- [142] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković, N. Grujović, *Metod konačnih elemenata I - Linearna analiza*, Kragujevac: Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet, 1998.
- [143] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- [144] G. Bogdanović, "Dinamičko ponašanje kompozitnih laminata," doktorska disertacija, Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet u Kragujevcu, Kragujevac, 2011.
- [145] N. P. Michael, "An in-depth tutorial on constitutive equations for elastic anisotropic materials," Langley Research Center, Hampton, Virginia, 2011.
- [146] A. J. M. Spencer, "Constitutive Theory for Strongly Anisotropic Solids," in *Continuum Theory of the Mechanics of Fibre - Reinforced Composites*, Wien, Springer-Verlag, 1984, pp. 1-32.
- [147] A. J. M. Spencer, *Deformations of Fibre Reinforced Materials*, Oxford: Clar. Press, 1972.
- [148] D. I. Milosavljević, "Prostiranje talasa u elastičnim pločama ojačanim sa dve familije vlakana," Univerzitet u Beogradu, Prirodno-matematički fakultet, Institut za mehaniku, Beograd, 1986.
- [149] A. Radaković, G. Bogdanović, D. Milosavljević, Lj. Veljović, D. Čukanović, "Using high-order shear deformation theory in the analysis of Lamb's waves propagation in materials reinforced with two families of fibers," *Acta Mechanica*, vol. 228, no. 1, pp. 187-200, 2017.
- [150] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, New York, United State of America: CRC Press LLC, 2004.
- [151] V. Z. Vlasov, U. N. Leont'ev, *Beams, plates and shells on elastic foundations*, Jerusalem: S. Monson, Trnaslated from Russian, 1966.
- [152] S. T. William, *Analysis of plate on elastic foundations*, Texas, USA: Texas Tech University, Phd thesis, 1990.
- [153] Y. H. Wang, L. G. Tham and Y. K. Cheung, "Beams and plates on elastic foundations: a review," *Progress in Structural Engineering and Materials*, vol. 7, no. 4, pp. 174-182, 2005.

- [154] S. H. Crandall, N. C. Dahl, T. J. Lardner, Introduction to the Mechanics of Solids, USA: McGraw-Hill College, 1972.
- [155] D. Dobromir, "Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions," *Engineering Mechanics*, vol. 19, no. 6, pp. 381-392, 2012.
- [156] Y. X. Zhanga, C. H. Yangb, "Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates," *Composite Structure*, vol. 88, no. 1, pp. 147-157, 2009.
- [157] J. N. Reddy, J. D. H. Robbins, "Theories and computational models for composite laminates," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 47, no. 6, pp. 147-169, 1994.
- [158] D. S. Liu, X. Y. Li, "An overall view of laminate theories based on displacement hypothesis," *Journal of Composite Materials*, vol. 30, no. 14, pp. 1539-1561, 1996.
- [159] A. K. Noor, W. S. Burton, "Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 42, no. 1, pp. 1-13, 1989.
- [160] J. N. Reddy, R. A. Arciniega, "Shear deformation plate and shell theories: from Stavsky to present," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 11, no. 6, pp. 535-582, 2004.
- [161] A. Radaković, "Primena smicajnih deformacionih teorija viseg reda u makromehanickoj analizi kompozitnih laminata," doktorska disertacija, Univerzitet u Kragujevcu, Fakultet inženjerskih nauka, Kragujevac, 2015.
- [162] A. S. Ambartsumyan, "On the Theory of Anisotropic Shells and Plates," in *Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity Symposium*, Ed. by Olszak W., Warsaw, 1958.
- [163] E. Reissner, Y. Stavsky, "Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Anisotropic Elastic Plates," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 28, no. 3, pp. 402-408, 1961.
- [164] M. Stein, "Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing," *AIAA Journals*, vol. 24, no. 9, pp. 1537-44, 1986.
- [165] J. L. Mantar, A. S. Oktem, G. C. Soares, "Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higherorder shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 43, no. 8, pp. 3348-3360, 2012.
- [166] M. Karama, K. S. Afaq, S. Mistou, "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 6, pp. 1525-46, 2003.
- [167] J. N. Reddy, D. H. Robbins, "Theories and computational models for composite laminates," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 47, no. 6, pp. 147-170, 1994.
- [168] D. O. Brush, B. O. Almroth, Buckling of Bars, Plates and Shells, New York: McGraw-Hill, 1975.

- [169] J. L. Mantari, A. S. Oktem, C. G. Guedes, "Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory," *Composite Structures*, vol. 94, no. 2, p. 714–23, 2012.
- [170] J. S. Kuma, B. S. Reddy, C. E. Reddy, K. V. K. Reddy, "Geometrically non linear analysis of functionally graded material plates using higher order theory," *International Journal of Engineering, Science and Technology*, vol. 3, no. 1, pp. 279-288, 2011.
- [171] L. Popović-Maneski, I. Hut, B. Jeftić, I. Jovanov, Uvod u MATLAB i LabView sa primerima iz biomedicinskog inženjerstva, Beograd: Univerzitet u Beogradu - Masinski fakultet, Akademska misao, 2015.
- [172] C. P. Wu, K. H. Chiu, Y. M. Wang, "RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D analysis of multilayered composite and FGM plates," *Composite Structures*, vol. 93, no. 2, pp. 923-943, 2011.
- [173] C. P. Wu, H. Y. Li, "An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates," *Composite Structures*, vol. 92, no. 10, pp. 2591-2605, 2010.
- [174] E. Carrera, S. Brischetto, A. Robaldo, "Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates," *AIAA Journal*, vol. 46, no. 1, pp. 194-203, 2008.
- [175] R. Javaheri, M. R. Eslami, "Thermal buckling of functionally graded plates," *AIAA Journal*, vol. 40, no. 1, pp. 162-169, 2002.
- [176] D. V. Čukanović, G. M. Bogdanović, A. B. Radaković, D. I. Milosavljević, Lj. V. Veljović, I. M. Balać, , "Comparative thermal buckling analysis of functionally graded plate," *Thermal Science*, DOI: 10.2298/TSCI160614182C, 2016.
- [177] M. B. Bouiadjra, M. S. A. Houari, A. Tounsi, "Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 35, no. 8, pp. 677-694, 2012.
- [178] A. M. Zenkour, D. S. Mashat, "Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates," *Natural Science*, vol. 2, no. 9, pp. 968-978, 2010.
- [179] A. M. Zenkour, M. Shoby, "Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 34, no. 11, pp. 1119-1138, 2011.
- [180] S. H. Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour, "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure," *Composite Structures*, vol. 93, no. 2, pp. 722-735, 2011.

ДОДАТАК

```

Savijanje.m
clear all
clc
%=====
% Unos karakteristika materijala
%=====
EM=70*10^9;
EC=380*10^9;
Norm=(10*h*h*h*EC)/(q0*a*a*a*a)%deo koji se koristi za
normalizaciju
x0=[0;0;0;0;0]
Resenje= NjutnR(x0,'f5C','jacob5x5')
Konacno=Resenje(3)*Norm
%=====

function [x,RbIter] = NjutnR(x0,f,J)
%=====
% Newton-Raphson metod primenjen na sistem nelinearnih
% algebarskih jednačina
% J = d(f1,f2,...,fn)/d(x1,x2,...,xn)
% x = [x1;x2;...;xn], f = [f1;f2;...;fn]
% x0 su početni uslovi
%=====
BrIter = 200; % definiše broj iteracija
tolerancija = 1e-15; % definiše toleranciju
maksimalna = 10^2; % definiše vrednost za divergenciju
xx = x0;
while (BrIter>0)N
JJ = feval(J,xx);
if abs(det(JJ))<tolerancija
error('Jacobian je singularan - unesite novo x0');
abort;
end;
xn = xx - inv(JJ)*feval(f,xx);
if abs(feval(f,xn))<tolerancija
x=xn;
RbIter = 200-BrIter;
return;
end;
if abs(feval(f,xx))>maksimalna
RbIter = 200-BrIter;
disp(['iteracije = ',num2str(RbIter)]);
error('Resenje divergira');
abort;
end;

```

```

BrIter = BrIter - 1;
xx = xn;
end;
error('Nema konvergencije nakon 200 iteracija.');
```

```

abort;
%=====

function [J] = jacob5x5(x)
%=====
% Izračunava Jakobijan transformacije sistema nelinearnih
% algebarskih jednačina
%=====
syms Umn Vmn Wmn Txmn Tymn
xp=[Umn; Vmn; Wmn; Txmn; Tymn];
x=[x(1);x(2);x(3);x(4);x(5)];
f5p=f5C(xp);
J1=vpa(jacobian(f5p,xp));
J=subs(J1,xp,x);
end
%=====

function [f] = f5C(x)
syms Umn Vmn Wmn Txmn Tymn
Pomocna=vpa(FunFGW(Brfun,abodnos,ahodnos,p));
xp=[Umn; Vmn;Wmn; Txmn; Tymn];
x=[x(1);x(2);x(3);x(4);x(5)];
f1 = simplify(pomocna);
f=vpa(subs(f1,xp,x))
end
%=====

function SistemNLJ =FunFGW(Brfun,abodnos,ahodnos,p,m,n,q0)
n=1;
syms z h DeltaTCR
%=====
% Zakon raspodele u materijalu
%=====
Nu=0.3;
EPC=vpa(EM+(EC-EM)*(1/2+z/h)^p);
%=====
% FUNKCIJE OBLIKA
%=====
% 1.Ambartsumain
%=====
AMB=vpa((z/2)*((h*h)/4-(z*z)/3));
Ffp(1)=AMB;
%=====
% 2.Kaczkowski , Panc i Reissner
```

```

%=====
KPR=vpa((5*z)/4*(1-(4/3)*(z*z)/(h*h)));
Ffp(2)=KPR;
%=====
% 3.Levy, Stein, Touratier, Ferreira'Levy, Stein, Touratier,
Ferreira
%=====
LSTF = vpa((h/pi)*sin((pi/h)*z));
Ffp(3)=LSTF;
%=====
% 4.Mantari1
%=====
M1=vpa((h/pi)*(sin((pi/h)*z)*exp((1/2)*cos((pi/h)*z))+((pi*z)/(2
*h))));
Ffp(4)=M1;
%=====
% 5.Viola
%=====
V=vpa(((2*h)/pi)*tan((pi/(2*h))*z));
Ffp(5)=V;
%=====
% 6.Mantari2
%=====
m1=(1/(5*h));
M21=vpa(tan(m1*z)-z*m1*sec((m1*h)/2)*sec((m1*h)/2));
Ffp(6)=M21;
m2=(pi/(2*h));
M22=vpa(tan(m2*z)-z*m2*sec((m2*h)/2)*sec((m2*h)/2));
Ffp(7)=M22;
%=====
% 8.Karama2
%=====
K2=vpa(z*exp(-2*(z/h)*(z/h)));
Ffp(8)=K2;
%=====
% 9.Mantari3
%=====
M3=vpa(z*2.85^(-2*(z/h)*(z/h))+0.028*z);
Ffp(9)=M3;
%=====
% 10.Elmeiche
%=====
ksi=1/(cosh(pi/2)-1);
ME=vpa(ksi*((h/pi)*sin((pi/h)*z)-z));
Ffp(10)=M3;
%=====
% 11.Soldatos
%=====
SO=vpa(h*sinh(z/h)-z*cosh(1/2));

```

```

Ffp(11)=SO;
=====
% 12.Mantari4
=====
m4=-7;
M4=vpa(sin(z/h)*exp(m4*cosh(z/h)) -
(z/h)*(cosh(1/2)+m4*sinh(1/2)*sinh(1/2))*exp(cosh(1/2)));
Ffp(12)=M4;
=====
% 13.Akavci i Tankrikulu 1
=====
AT1=vpa(z*sech((pi*z*z)/(h*h))-z*sech(pi/4)*(1-
(pi/2)*tanh(pi/4)));
Ffp(13)=AT1;
=====
% 14.Akavci i Tankrikulu 2
=====
AT2=vpa((3*pi)/2)*(h*tanh(z/h))-
((3*pi)/2)*z*sech(1/2)*sech(1/2);
Ffp(14)=AT2;
=====
% 15.Grover
=====
rgr=0.1;
GR=vpa(z*sec(rgr*z/h)-z*((sec(1/2))/(1+(rgr/2)*tan(rgr/2))));
Ffp(15)=GR;
=====
% 16.Mechaib
=====
MEC=vpa((z*cos(1/2)-h*sin(z/h))/(1-cos(1/2)));
Ffp(16)=MEC;

=====
% Kordinate debljine
=====
ZbirH=h;
H=h;
Ff=Ffp(Brfun);
IzvodFf=diff(Ffp,1,z);
l(1)=-ZbirH/2;
brojac=-1;
dodatak=0;
for i=2:n+1
    brojac=brojac+1;
    dodatak=dodatak+H(n-brojac);
    l(i)=-ZbirH/2+dodatak;
end
podela=l;

```

```

for i=1:n
    z1=l(i);
    z2=l(i+1);
    deltaH=((z2-z1));

%=====
% Konstitutivna matrica
%=====
    Qbar1=ReducedStiffnessDM(EPC,Nu);

%=====
% Pomoćne matrice
%=====
    AP=Amatrix(Qbar1,z1,z2);
    ZbirnaA=AP;
    BP=Bmatrix(Qbar1,z1,z2);
    ZbirnaB=BP;
    CP=Cmatrix(Qbar1,Ff,z1,z2);
    ZbirnaC=CP;
    DP=Dmatrix(Qbar1,z1,z2);
    ZbirnaD=DP;
    EP=Ematrix(Qbar1,Ff,z1,z2);
    ZbirnaE=EP;
    GP=Gmatrix(Qbar1,Ff,z1,z2);
    ZbirnaG=GP;
    FP45=F45matrix(Qbar1,Ff,z1,z2);
    ZbirnaF45=FP45;
end

%=====
% Matrica koja objedinjuje matrice A B D...
%=====
    S=[ZbirnaA ZbirnaB ZbirnaC;
        ZbirnaB ZbirnaD ZbirnaE;
        ZbirnaC ZbirnaE ZbirnaG];
    SS=ZbirnaF45;

%=====
% Deo koda koji povezuje simboličke promenljive sa brojnim
%vrednostima
%=====

syms A11 A12 A16 A22 A23 A26 A66
syms B11 B12 B16 B22 B23 B26 B66
syms D11 D12 D16 D22 D23 D26 D66
syms F11 F12 F16 F22 F23 F26 F66
syms G11 G12 G16 G22 G23 G26 G66
syms C11 C12 C16 C22 C23 C26 C66
syms E11 E12 E16 E22 E23 E26 E66
syms Umn Vmn Wmn Txmn Tymn KvOmega
syms alfa betaU x y

```

```

A=[A11 A12 0;
   A12 A22 0;
   0 0 A66];
B=[B11 B12 0;
   B12 B22 0;
   0 0 B66];
C=[C11 C12 0;
   C12 C22 0;
   0 0 C66];
D=[D11 D12 0;
   D12 D22 0;
   0 0 D66];
E=[E11 E12 0;
   E12 E22 0;
   0 0 E66];
G=[G11 G12 0;
   G12 G22 0;
   0 0 G66];
F=[F44 0;
   0 F55];

a=ahodnos*h;
b=a*abodnos;
u=Umn*cos(alfa*x)*sin(betaU*y);
v=Vmn*sin(alfa*x)*cos(betaU*y);
w=Wmn1*sin(alfa*x)*sin(betaU*y);
teta_x=Txmn*cos(alfa*x)*sin(betaU*y);
teta_y=Tymn*sin(alfa*x)*cos(betaU*y);
pz=q0*sin(alfa*x)*sin(betaU*y);
%=====
% Deformacije
%=====
DEFL=FunkcijaDefL(u,v,w);
DEFL=FunkcijaDefS(teta_x,teta_y);
%=====
% Pomoćne matrice
%=====
MAT=[A B C;
     B D E;
     C E G];
MATS=F;
%=====
% Jedinična opterećenja
%=====
OpterRL=FunkcijaOpterećenjaL(MAT,DEFL);
OpteSL=FunkcijaOpterećenjaL(MATS,DEFS);
%=====
% Jednačine ravnoteže

```

```
=====
Jednacine=FunkcijaJednacina (OpterRL,OpteSL);
Matrica_jednacina=Jednacine;
=====
% Zamena simboličkih vrednosti brojnim vrednostima
=====
alfap=(m*pi)/a;
betaUp=(n*pi)/b;
xpp=a/2;
ypp=b/2;
Matrica_jednacina=subs (Matrica_jednacina,MAT,S);
Matrica_jednacina=subs (Matrica_jednacina,MATS,SS);
Matrica_jednacina=subs (Matrica_jednacina,alfa,alfap);
Matrica_jednacina=subs (Matrica_jednacina,betaU,betaUp);
Matrica_jednacina=subs (Matrica_jednacina,x,xpp);
Matrica_jednacina=vpa (subs (Matrica_jednacina,y,ypp))
SistemNL=vpa (Matrica_jednacina);
SistemNLJ =SistemNL;
end
=====
```