



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

Факултет инжењерских наука

Никола В. Мијаиловић

**РАЗВОЈ АКВИЗИЦИОНИХ СИСТЕМА И
АЛГОРИТАМА ЗА РЕГИСТРАЦИЈУ ПРИ
МОДЕЛИРАЊУ ПОМЕРАЊА И
ДЕФОРМАЦИЈА КОНТУРА НА
ДИГИТАЛНОЈ СЛИЦИ**

Докторска дисертација

Крагујевац, 2017.

<i>I. Аутор</i>
Име и презиме: Никола Мијаиловић
Датум и место рођења: 31.07.1986. Крагујевац
Садашње запослење: Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац
<i>II. Докторска дисертација</i>
Наслов: Развој аквизиционих система и алгоритама за регистрацију при моделирању померања и деформација контура на дигиталној слици
Број страница: 174
Број слика: 71
Број библиографских података: 168
Установа и место где је рад израђен: Факултет инжењерских наука, Крагујевац
Научна област (УДК): 004.421(043.3)
Ментор: др Александар Пеулић, ванредни професор
<i>III. Оцена и одбрана</i>
Датум пријаве теме: 09.02.2015.
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације: 01-1/1305-13, 23.04.2015.
Комисија за оцену подобности теме и кандидата: <ol style="list-style-type: none"> 1. др Александар Пеулић, ванр. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Ужа научна области: Рачунарска техника 2. др Ненад Филиповић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Уже научне области: Примењена механика, Примењена информатика и рачунарско инжењерство 3. др Јасна Радуловић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Уже научне области: Аутоматика и мехатроника, Примењена информатика и рачунарско инжењерство 4. др Весна Ранковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Уже научне области: Аутоматика и мехатроника, Примењена информатика и рачунарско инжењерство 5. др Драган Јанковић, ред. проф., Електронски факултет у Нишу, Ужа научна области: Рачунарство и информатика
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: <ol style="list-style-type: none"> 1. др Ненад Филиповић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Уже научне области: Примењена механика, Примењена информатика и рачунарско инжењерство 2. др Јасна Радуловић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Уже научне области: Аутоматика и мехатроника, Примењена информатика и рачунарско инжењерство 3. др Весна Ранковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Уже научне области: Аутоматика и мехатроника, Примењена информатика и рачунарско инжењерство 4. др Гордана Јовичић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Ужа научна области: Примењена механика 5. др Никола Јорговановић, ред. проф., Факултет техничких наука у Новом Саду, Ужа научна области: Аутоматика и управљање системима
Датум одбране дисертације:

Развој аквизиционих система и алгоритама за регистрацију при моделирању померања и деформација контура на дигиталној слици

Мијаиловић Никола

Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

Резиме

Централна тема овог рада је примена система за аквизицију слике у циљу процене и моделовања деформација и померања објеката који су снимљени. Главна метода која је при том коришћена је метода регистрације слика. Сам поступак регистрације подразумева скуп алгоритама и метода којим се врши проналажење трансформације која пресликава простор једне слике у простор друге. Уколико се ради о сликама истог објекта у различитим положајима или конфигурацијама могуће је одредити померања и деформације жељене тачке познавањем ове трансформације. У раду су описани већ постојећи алгоритми, са својим најзначајнијим својствима. На бази ових особина развијен је метод регистрације базиран на решавању Лапласове једначине за електростатичко поље. Овакав приступ је могућ захваљујући чињеници да градијент деформација одговара линијама електростатичког поља, које је добијено решавањем Лапласове једначине и задовољава сва битна својства која треба да има регистрациона трансформација. Ове особине се односе на глаткост поља деформације, постојање инверзне функције и забрану укрштања линија поља. Сам поступак решавања наведене једначине и одређивање тражене трансформације спроведен је применом методе коначних елемената при чему је коришћена формулација минимума енергија система.

Једна од инспирација за рад на методама регистрације слике био је и проблем процене механичких карактеристика ткива аорте са анеуризмом. У раду је описана реализација и начин рада система који је искоришћен за карактеризацију механичких својстава аорте, који као излазне податке даје информацију о померањима скупа тачака ткива као и о вредностима притиска флуида који изазива та померања. Деформације су процењене применом метода сегментације слике и

издвајања ивица након чега је примењен метод регистрације слике којом је одређена деформација тачака ткива у одређеним временским тренуцима. На основу ових вредности применом генетског алгоритма одређена је вредност Јанговог модула ткива при чему је коришћен механички модел деформације ткива.

Анализа хода употребом слика хода је такође један од изазова када је у питању неинвазивна дијагностика и праћење стања дијагностификованих као и здравих субјеката. У овом раду је приказан поступак одређивања механичког напрезања хрскавице применом слика снимљених камером и вредностима силе нормалне реакције подлоге која настаје током хода. За процену деформација хрскавице коришћени су алгоритми регистрације слике између слика добијених са камере и слика добијених компјутеризованом томографијом. Поступком оптимизације процењени су и механички параметри хрскавице (Јангов модул и Поасонов коефицијент).

Кључне речи: Регистрација слике, Аквизиција сигнала и слике, Лапласова једначина, Механичка испитивања ткива, Механика зглоба колена.

Development of acquisition system and algorithms for registration towards modeling displacement and deformation of the contour on the digital image

Mijailović Nikola

Faculty of Engineering, University of Kragujevac

Abstract

The main aim of this thesis is the application of image acquisition system for the purpose of assessing and modeling the deformation and displacement of the objects acquired in digital images. The technique used in the study is method of image registration. The procedure of the registration includes a set of algorithms and methods which performs the assessment of transformation that maps the space of one image to another one. If there are images of the same object in different positions or configurations it is possible to determine the displacement and deformation of the desired point of understanding this transformation. The thesis describes the existing algorithms, along with their most important properties. The novel algorithms for image registration is developed based of solving the Laplace equation for electrostatic field. This approach is possible due to the fact that the transformation which corresponds to the deformation gradient field lines of the electrostatic field, which is obtained by solving the Laplace equation satisfies all essential features that should have the registration transformation. These properties are related to the smoothness of the deformation field, the existence of an inverse function of the prohibition of crossing the line field. The procedure for solving the above equation and determining the required transformation was conducted using finite element method with use of a formulation of minimum energy of the system.

The motivation for this thesis was consideration problem of evaluation mechanical properties of tissues affected aortic aneurysm. The paper describes the implementation and operation of the system that was used to characterize the mechanical properties of the aorta, which as output data provides information about a set of deformation points on the tissue surface as well as the values of applied fluid pressure. Strains at the certain moment of time were estimated using the image segmentation method and edges extraction, and finally image registration is applied. Using strain values in

the mechanical model of tissue, and genetic algorithm as optimization technique, the Young's modulus is assessment.

Gait analysis based on the images data is also one of the challenges in non-invasive diagnosis and monitoring of both diagnosed patients and healthy subjects.. This thesis presents a method for determining the mechanical stress of the cartilage using the camera image, and the values of the normal ground reaction force, which is generated during the walk, for assessment of cartilage deformation algorithms were used image registration of images obtained from the camera and the images obtained by computed tomography. Mechanical parameters of cartilage (Young's modulus and Poisson's ratio) are evaluated in the optimization process.

Keywords: Image registration, Image and signal acquisition, Laplace equation, Mechanical tissue investigation, Knee joint mechanics.

Предговор

Поље техничких наука је код мене увек изазивало посебну пажњу и интересовање с обзиром на чињеницу да техничке науке представљају продужетак природних наука и дају инжењеру могућност да се игра са природом и природним законима. Студије на Електротехничком факултету у Београду су из тог разлога биле логичан избор док ми је у току студија највише пажње привукао смер за Биомедицинско и еколошко инжењерство који се бавио спојем инжењерских дисциплина са једне стране и медицине и биологије са друге. Након завршетка основних студија најбоље место за мој рад је био Центар за биомедицински инжењеринг у оквиру Факултета инжењерских наука у Крагујевцу и група професора Ненада Филиповића.

Израда ове докторске дисертације је и започела са мојим ангажовањем на пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја републике Србије „Примена биоинжењеринга у клиничкој и предклиничкој пракси”. Од првог дана рада на пројекту имао сам прилике да упознам и сарађујем са проф. др Александром Пеулићем чије је искуство и знање било непроцењиво у мом даљем раду. Заједнички смо сарађивали на решавању проблема који су се односили на аквизицију и обраду различитих сигнала из биомедицинских експеримената. Значајан део посла се односио на развој хардвера и софтвера за потребе биомедицинских експеримената. Смисао свих тих експеримената је био да се обезбеде подаци који су неопходни за каснију примену код моделирања у виду граничних услова код појава, како у људском организму тако и код живих система уопште. Од првог момента сам схватио колики је значај улазних података добијених у експериментима за компјутерско моделирање, јер без прецизних експерименталних података није могуће успешно разумевање и моделовање понашања биофизичких система.

Највећи део посла у току рада на овом пројекту је било одређивање деформација и померања различитих ткива и органа са једне стране и мерење величина попут силе притиска, напона са друге стране. Упаривањем ових величина могуће је добити материјалне карактери-

стике посматраног система. Тако је и настао наслов ове докторске дисертације који обједињује две целине којима сам се бавио у току израде овог рада. Поред свог апликативног карактера трудио сам се да у овој докторској тези дам места и базичним областима каква је дисциплина регистрације слике где су поред описаних основних концепата и историјског развоја области приказана и одговарајућа теоријска појашњења и унапређења у односу на постојеће стање у области.

Оно што је битно истаћи овом приликом је огромна захвалност коју дугујем свом ментору проф. др Александру Пеулићу на поверењу који ми је указао на свесрдној и несебичној помоћи и сугестијама у дефинисању и реализацији ове докторске дисертације.

Захваљујем се проф. др Ненаду Филиповићу који ми је омогућио да будем део Центра за биомедицински инжењеринг, да се бавим најактуелнијим темама из ове области, као и корисним саветима које ми је дао током израде ове докторске дисертације.

Захвалност на спровођењу експеримената дугујем Клиници за кардио-васкуларну хирургију Републике Србије у Београду и доктору Игору Кончару без кога ова докторска дисертација не би имала овакав облик. Такође, захваљујем на помоћи и корисним сугестијама током израде ове докторске дисертације својим колегама сарадницима Центра за биомедицински инжењеринг Универзитета у Крагујевцу.

Захваљујем се професорки Јасни Радуловић на корисним саветима и несебичној подршци током израде ове дисертације. Професорки Весни Ранковић такође се захваљујем на подршци коју ми је пружала од тренутка пријаве дисертације. Такође бих се захвалио професорки Гордани Јовичић и професору Николи Јорговановић на учешћу у комисији за оцену и одбрану дисертације.

На крају бих хтео да се захвалим својој ужој породици: родитељима Драгињи и Вукомиру и сестрама Ани и Невени на љубави, подршци, стрпљењу и одрицању.

У Крагујевцу, јануар 2017. год.

Никола В. Мијаиловић

Садржај

1	Уводна разматрања	1
1.1.	Предмет рада	1
1.2.	Научни циљ рада.....	3
1.3.	Методе које су коришћене у истраживању.....	4
1.4.	Преглед садржаја дисертације	6
2	Системи за аквизицију слике	8
2.1.	Увод.....	8
2.2.	Аквизиција слике	10
2.2.1	CCD сензори.....	11
2.2.2	CMOS сензор слике.....	15
2.2.3	Дискретизација слике	16
2.2.4	Квантовање амплитуде и дигитализација слике	20
2.3.	Аквизиција слике заједно са другим врстама сигнала...	21
2.4.	Примена FPGA у аквизицији података.....	23
2.4.1	Реализација аквизиције слике уз помоћ FPGA платформе и VGA камере.....	24
3	Алгоритми за регистрацију слике	30
3.1.	Уводна разматрања	30
3.2.	Мере сличности	31
3.3.	Крута регистрација	33
1.	Транслација	33
3.4.	Деформабилна регистрација и примена у биомедицини	35
3.5.	Модел деформације.....	39

3.6.	Трансформације инспирисане физичким моделима	41
3.6.1	Еластични модели	41
3.6.2	Модели вискозног тока	44
3.6.3	Модели дифузије.....	46
3.6.4	Регистрације криве.....	50
3.6.5	Токови дифеоморфизма.....	51
3.7.	Геометријске трансформације инспирисане теоријом интерполације	53
3.7.1	Радијалне базне функције	53
3.7.2	Сплајнови еластичног тела	57
3.7.3	Слободне деформације.....	58
3.7.4	Основне функције из обраде сигнала.....	60
3.7.5	Триангулација део по део Афиним моделом.....	62
4	Алгоритми за регистрацију слике применом Лапласове једначине за електростатичко поље	65
4.1.	Електростатичко поље и Лапласова једначина.....	65
4.2.	Регистрација слике применом Лапласове једначине.....	70
4.3.	Нумеричко израчунавање електричног потенцијала.....	74
4.4.	Положај тачке у односу на контуру	78
4.5.	Резултати симулације	83
4.5.1	Регистрација упаривањем скупа тачака (Point Matching)..	86
4.5.2	Регистрација контура које се секу	89
5	Процена механичких карактеристика ткива применом система за аквизицију и регистрацију слике.....	91
5.1.	Увод.....	91
5.2.	Систем за испитивање механичких карактеристика ткива аорте.....	93
5.3.	Експериментални део	95
5.4.	Механички модел ткива аорте у експерименту	97

5.5.	Обрада резултата мерења	102
5.6.	Резултати	109
6	Примена алгоритама регистрације слике код анализе хода	119
6.1.	Увод	119
6.2.	Механички модели колена	121
6.3.	Експериментални део	123
6.4.	Примена регистрације слике код одређивања деформације	126
6.5.	Резултати и дискусија.....	127
7	Закључна разматрања.....	133
	Прилог А	137
	Литература.....	153

Списак коришћених скраћеница

- СТ – (енгл. Computerized Tomography) Компјутеризована томографија,
- MRI – (енгл. Magnetic Resonance Imaging) Нуклеарна магнетна резонанца,
- CCD – (енгл. Charge Coupled Device), Уређај са спрегнутим наелектрисањем,
- CMOS – (енгл. Complementary Metal-Oxid Semiconductor) Комплементарни метал-оксидни полупроводник,
- FPGA – (енгл. Field Programmable Gate Array), Поље програмабилних логичких кола,
- VGA – (енгл. Video Graphics Array) Стандард за пренос слике у резолуцији 640x480 пиксела,
- PET – (енгл. Positron Emission Tomography) Позитронска емисиона томографија,
- МКЕ – Метод коначних елемената,
- FFD – (енгл. Free Form Deformation) Слободне деформације,
- TFS – (енгл. Thin Plate Splines) Сплајнови танких плоча,
- RBF – (енгл. Radial Basis Function), Радијалне базне функције,
- LDDMM – (енгл. Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping) Дифеоморфично-метричко мапирање великих деформација
- EBS – (енгл. Elastic Body Spline) Сплајнови еластичног тела,
- FTP – (енгл. File Transfer Protocol) Протокол за размену фајлова,
- ГА – Генетски алгоритам.

1 Уводна разматрања

1.1. Предмет рада

Системи за аквизицију слике базирани на CCD или CMOS сензорима, који могу да раде у видљивом или инфрацрвеном делу спектра, су доживели велику експанзију последњих година. Ово је довело до њихове све веће примене у науци, техници и индустрији. Једна од тих примена се односи на праћење кретања и деформација објеката. Стандардна техника праћења се заснива на коришћењу маркера који се постављају на објекат чије се кретање прати и који могу да се детектују на слици и прате у реалном времену, а затим се одговарајућом трансформацијом координатни систем слике трансформише у 2D или 3D физички простор чиме је извршена реконструкција посматраног објекта. Постоје случајеви где коришћење маркера једноставно није могуће, било из разлога да физички приступ објекту није могућ или би њихово постављање довело до физичке деградације (ткива у *in-vitro* експериментима), било да објекат поседује сложену просторну зависност поља деформација и померања па коришћење коначног броја маркера не би дало довољно егзактно мерење. У том циљу у овом раду ће бити

приказани методи за одређивања и моделирање деформација и померања контура објеката коришћењем технике регистрације слике. Регистрација слике је процес који представља повезивање две или више слика и проналажење заједничких обележја или детаља таквих да постоји обострана кореспонденција међу њима, применом одговарајуће трансформације. Сlike које користимо у процесу регистрације најчешће представљају слике истог објекта који је снимљен системом за аквизицију слике за различите позиције сензора слике. Регистрација слике данас представља једно од најзначајнијих поља у области дигиталне обраде слике. Током времена развијен је велики број метода за различите проблеме. На бази тих метода у овом раду је развијен један нови приступ који подразумева успостављање аналогije између поља деформације објеката на сликама и линија електростатичког поља наелектрираних тела која су заправо контуре добијене применом оператора за издвајање ивица на датим сликама. За добијање расподеле линија електростатичког поља у простору решавана је Лапласова једначина. Развијени алгоритам је искоришћен код анализе механичких карактеристика ткива аорте захваћене анеуризмом које је одстрањено пацијентима током оперативног захвата. Рад на овом проблему захтевао је најпре хардверско-софтверску реализацију уређаја за аквизицију слике заједно са аквизицијом притиска флуида који изазива деформације као и управљање пумпом која генерише притисак. Уређај је омогућио релативно лако руковање од стране лекара са пратећим софтвером као и складиштење и слање измерених података путем интернета за каснију обраду и анализу. У поступку оптимизације коришћен је генетски алгоритам за

одређивање оптималне механичке карактеристике ткива тако да измерене деформације буду у складу са примењеним притиском.

Други проблем на коме су примењени алгоритми регистрације слике је анализа хода. Анализа хода и стање зглоба колена је један од највећих изазова у ортопедији данас. Циљ који се намеће је развити поуздане методе које ће неинвазивно, брзо и поуздано проценити стање хрскавице зглоба колена тј. вредности механичких напона и деформације хрскавице као егзактних показатеља ових стања. Вредности деформације су измерене коришћењем слика добијених помоћу камера и слика добијених компјутерском томографијом, а истовремено је мерена и сила нормалне реакције подлоге током кретања. На бази ових података примењен је поступак оптимизације материјалних параметара хрскавице у циљу одређивања материјалних карактеристика које варирају од субјекта до субјекта као и вредности насталих механичких напона.

1.2. Научни циљ рада

У оквиру ове дисертације решавана су три различита проблема.

Циљеви дисертације су следећи:

1. Развој алгоритама и методе за регистрацију слике коришћењем аналогичне између поља деформације и линија електростатичког поља. Електростатичко поље које се добија као решење Лапласове једначине задовољава све особине које треба да има било која трансформација помоћу које се врши регистрација између слика. За специфичне случајеве регистрације који се јављају у пракси искоришћени су гранични услови добијени на основу Максвелових једначина.

2. Развој система за анализу механичких карактеристика ткива аорте захваћене анеуризмом. Овај систем подразумева развој хардверско-софтверског система за извођење експеримената над ткивима испитаника као и развој метода за анализу и обраду снимљених података. Ове методе подразумевају примену алгоритама за сегментацију слика, издвајање ивица, регистрацију слика код одређивања деформација као и примена поступака оптимизације механичких својстава ткива, применом генетског алгорита и методе градијентног спуштања са измереним вредностима, да би се на крају извршила процена вредности самих материјалних карактеристика ткива.
3. Развој методологије за процену расподеле механичких напона и деформације хрскавице колена током хода на основу података добијених регистрацијом слика добијених помоћу камера, СТ слика колена, као и вредности силе нормалне реакције подлоге која се развија током ходања.

1.3. Методе које су коришћене у истраживању

Алгоритми регистрације слика. За развој метода и алгоритама за регистрацију слика на основу аналогije између поља деформација и линија електростатичког поља коришћена је метода коначних елемената за решавање Лапласове једначине за електрични скалар-потенцијал. Вредност вектора електростатичког поља је добијена као градијент функције потенцијала. Код решавања Лапласове једначине коришћена је формулација минималне електростатичке енергије система.

Одређивање механичких својстава ткива аорте. Код процене механичких својстава ткива аорте захваћене анеуризмом коришћени су подаци добијени током експеримента где је ткиво аорте подвргнуто дејству притиска флуида где се као параметар мерио притисак флуида, а на основу метода за обраду слике мерене су деформације тачака на површини ткива. Успостављањем веза између података везаних за деформацију и примењени притисак процењена су механичка својства ткива. За моделовање деформација узорка ткива коришћен је метод коначних елемената, а за процену механичких својстава генетски алгоритам и метод градијентног спуштања.

Одређивање механичких напона и деформација хрскавице. Процена напрезања којима је изложена хрскавица током хода оставрена је применом механичког модела колена. Колено је моделирано као систем који се састоји од три основна дела фемура, тибије и хрскавице са одговарајућим материјалним карактеристикама. Геометријски модел је добијен поступком сегментације СТ слика. У експерименталном делу истраживања коришћене су камере за бележење кретања, а потом су применом алгоритама регистрације одређене деформације. Применом измерених података на креираном моделу и поступком оптимизације помоћу методе градијентног спуштања процењена су механичка својства хрскавице и израчунати су одговарајући напони. Механички параметри за фемур и тибију су усвојени из литературе.

За имплементацију свих поменутих алгоритама и компјутерских симулација коришћен је програмски пакет MATLAB.

1.4. Преглед садржаја дисертације

Дисертација садржи укупно седам поглавља, као и један прилог и на крају је дат преглед литературе.

Поглавље 2 садржи теоријске основе и преглед постојећих техника и сензора за аквизицију слике попут CCD и CMOS технологија. У овом поглављу је приказана имплементација аквизиције слике применом FPGA платформе.

Поглавље 3 садржи теоријске основе области регистрације слике са приказом релевантних особина као и преглед литературе и постојећег стања у овој области са посебним акцентом на примени у биомедицини.

Поглавље 4 се бави развојем метода регистрације слике применом Лапласове једначине за електростатичко поље. У овом поглављу су најпре дате основне поставке везане за електростатичко поље око наелектрисаних тела и поступак његовог решавања применом методе коначних елемената са одговарајућим граничним условима, а потом је ова методологија примењена код поступка регистрације слика при чему су коришћени једноставни геометријски објекти да би се лакше уочиле особине ове методе.

У поглављу 5 је најпре дат опис система за анализу механичких карактеристика ткива који се састоји из дела за аквизицију података базираном на примени web-камере за мерење деформација и микроконтролера за аквизицију притиска и управљања системом. Други део система се односи на развој метода за анализу слика путем алгоритама за обраду слике и регистрацију. Код алгоритама за регистрацију искоришћена је у потпуности методологија описана у поглављу 4. На бази ових

података направљен је компјутерски модел деформације ткива применом методе коначних елемената и уз примену генетског алгоритма омогућено је израчунавање механичких својстава ткива аорте.

Тема поглавља 6 је процена деформација и механичких напона који се развијају у хрскавици колена неког субјекта, током хода, применом алгоритама за регистрацију слика, добијених са камера које бележе кретање испитаника по подлози, и одговарајућим СТ слика. Као параметар се користи и вредност нормалне реакције подлоге која се јавља при ходу. Поред вредности механичких напона и деформација на бази измерених вредности добијене су и механичке карактеристике хрскавице Јангов модуо и Поасонов коефицијент.

У поглављу 7 су дата закључна разматрања као и будући правци развоја истраживања обухваћеног овом дисертацијом.

2 Системи за аквизицију слике

2.1. Увод

Дигитална обрада слике је област технике која се за бави развојем метода за обраду слике помоћу рачунара. Сам термин слика најчешће асоцира на слику сцене која је добијена помоћу камере у видљивом делу спектра. Међутим слика има много шире значење јер она може бити добијена и из инфрацрвеног спектра код термалних камера, ултраљубичастог (астрономске слике небеских тела), радиолошке слике добијене уз помоћ X-зрака, ултразвучне, радарске слике као и слике добијене помоћу нуклеарне магнетне резонанце. Излазни сигнал из система за дигиталну обраду слике је најчешће нова слика која је конвертована у видљиви део спектра и тако прилагођена перцепцији људског ока. Резултујућа слика може бити приказана на монитору или може бити

одштампана у облику фотографије, филма, или приказана у виду нумеричких података. Прави напредак у техникама преноса и реконструкције слика, дошао је тек са усавршавањем рачуарске технике и почетком истраживања свемира. Дигитални рачунар је први пут употребљен за поправку квалитета слика Месеца добијених са свемирске сонде Ренџер 7 [1]. У првим годинама свог развоја дигитална обрада слике је била резервисана за свемирску технологију и војне примене, али развојем технологије пре свега електронике и рачуарске технике, дигитална обрада слике почела је да се примењује и у многим другим областима науке и технике. Свакако једна од најзначајних примена је у биомедицини, где без примене техника дигиталне обраде слике, дијагностика различитих обољења би практично била незамислива. Технике дигиталне обраде слике су нашле примену и у другим дисциплинама попут филма, телевизије, физике, астрономије, биологије, металургије, геологије, археологије, итд. Још једна револуција када је у питању дигитална обрада слике је развој мобилних уређаја који су донели нове могућности и отвориле ново поље када су у питању технологије за формирање и обраду слике као и бројне нове примене. Тако да су системи за дигиталну обраду слике данас део свакодневнице и широко су доступни свима због своје прихватљиве цене. И поред чињенице да улазни и излазни сигнали из система за обраду слике могу бити веома разноврсни, као и њихове примене, многи алгоритми за обраду слике су потпуно идентични иако се користе у различитим дисциплинама. Због тога се све методе које се користе у дигиталној обради слике могу сврстати у шест области: методе за репрезентацију слике, методе за побољшање слике, методе за

рестаурацију слике, методе за компресију слике, методе за анализу слике и методе за реконструкцију слике из пројекција [2].

2.2. Аквизиција слике

Најчешћи тип сензора који се данас користи код аквизиције слике су сензори базирани на полупроводницима. Разлог за то је пре свега њихова ниска цена и велика густина паковања.

Полупроводнички сензори се производе у виду матрице полупроводничких сензорских елемената који су интегрисани на једном чипу. Један полупроводнички сензорски елемент представља један пиксел слике. Када су у питању врсте полупроводничких сензора у пракси си се срећу: CCD елементи (енгл. *Charge Coupled Device*), CMOS (енгл. *complementary metal oxid-semiconductor*), и фотодиоде. CCD и CMOS елементи се израђују у виду дводимензионалних матрица и користе се код камера. С друге стране фотодиоде се распоређују у једнодимензионалне низове који могу физички да се крећу и као такви се најчешће примењују код скенера.

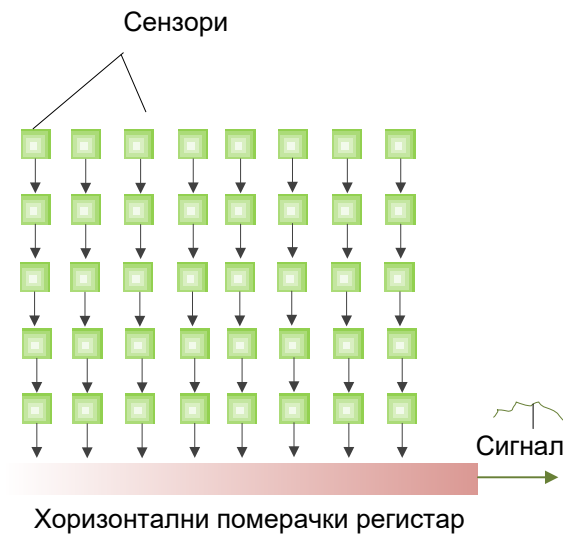
Основни принцип функционисања полупроводничких сензора је базиран на интеракцији фотона са електронима у валентној зони полупроводника. Приликом излагања кристала чистог силицијума електромагнетном зрачењу, електрони у валентној зони апсорбују фотоне светлости и прелазе у више енергетско стање то јест у проводну зону док се у валентној зони ствара упражњено место. Ово представља пар електрон-шупљина. Уколико се на површину силицијума нанесе танак слој метала, на који је доведен позитиван

напон, ствара се потенцијална јаму која скупља и задржава локалне фотоелектроне настале под дејством фотона. Свака потенцијална јама одговара једном пикселу слике у сензорској матрици. Потенцијална јама која се формира може да задржи око 800 фотоелектрона по једном квадратном микрометру, што је приближно једнако једном милиону фотоелектрона по једном пикселу, обзиром да је линеарна димензија просечног пиксела пар десетина микрометара.

2.2.1 CCD сензори

Историјски су се појавили 1969. године, представљају силицијумске полупроводничке сензоре код којих се врши пренос сакупљеног наелектрисања од једног сензорског елемента до другог, све док се не изврши читавања садржаја свих елемента. У пракси се користе три принципа читавања код CCD сензора. CCD сензори са класичним методом читавања, формирају дводимензионалну правоугаону матрицу од сензорских елемената, као на слици 2.1. Када се такав CCD сензор изложи светлости, у сваком сензорском елементу долази до формирања наелектрисања пропорционалног интензитету светлости у његовој околини. Након осветљавања, неопходно је замрачити површину сензора да би се несметано извршио процес читавања. Процес читавања започиње померањем наелектрисања из последње врсте и то из сваког елемента у наредни елемент који се налази десно од њега. Након читавања последње врсте, наелектрисања свих врста матрица се помереју за једну позицију наниже. Овај поступак се понавља док се све врсте матрице не читају односно

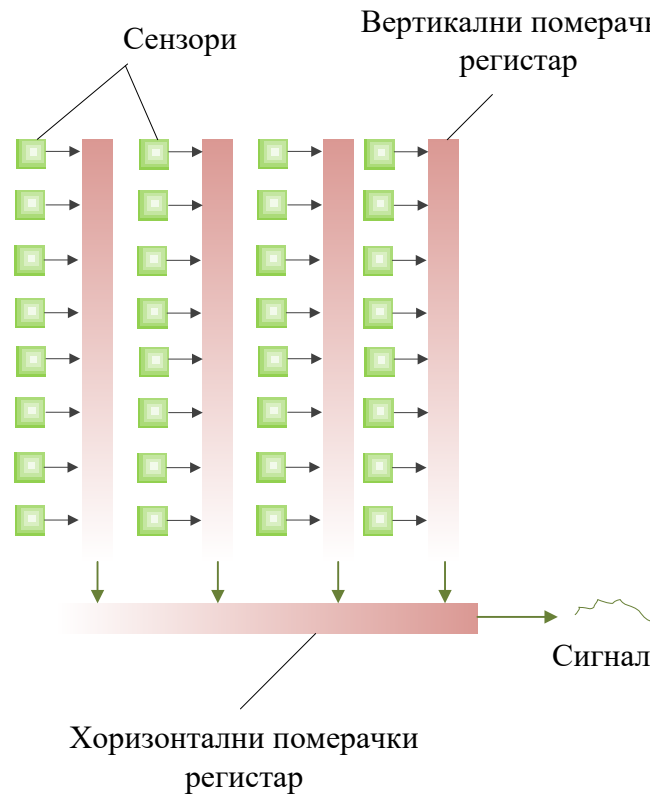
наелектрисања не испразне. Ова врста CCD сензора је прилично компактна што се тиче димензије, јер је неопходно најмање простора за захтевани број пиксела слике. Недостаци овог типа сензора се огледају у томе што померање наелектрисања из једне сензорске ћелије у другу мора бити јако ефикасно и што ниво осветљења мора бити висок.



Слика 2.1 CCD сензор са класичном методом читавања

Други тип CCD сензора који се среће у пракси је сензор са међулинијским трансфером, који је приказан на слици 2.2. Код овог типа сензора матрица елемената се разликује од матрице елемената класичног сензора по томе што је између свака два низа активних сензорских елемената налази низ елемената који су покривени непрозирним филмом. Ове уметнуте неактивне ћелије се користе само током читавања наелектрисања из сензорских елемената. После излагања сензорске површине светлости, врши се пренос оптерећења из сваке активне ћелије у суседну неактивну ћелију. Пошто се сва оптерећења померају истовремено, овај трансфер се веома брзо извршава. Након тога се врши читавање садржаја неактивних ћелија на претходно описан начин. У исто

време, активне ћелије се могу поново изложити светлости, што омогућава рад сензора при нижим нивоима осветљења.

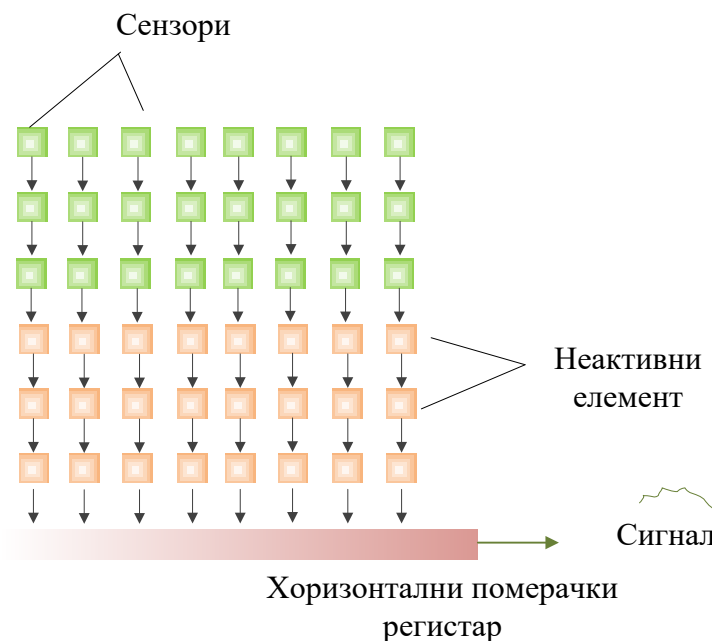


Слика 2.2 CCD сензор са међулинијским трансфером

Главна предност овог типа сензора је већа брзина то јест већи број фрејмова по секунди што је последица чињенице да имамо истовремено читавања и акумулације наелектрисања. Наведене предности ове врст CCD сензора су последица чињенице да је у односу на класичну реализацију неопходна двоструко већа површина сензорског елемента.

CCD сензор са трансфером целе слике, који је приказан на слици 2.3. има на силицијумској површини интегрисане две комплетне матрице сензорских елемената, при чему је доња покривена непровидним филтром а горња је активна. Након осветљавања горње сензорске матрице, комплетно оптерећење се помера, врсту по врсту, у неактивни део сензора, који служи заправо за

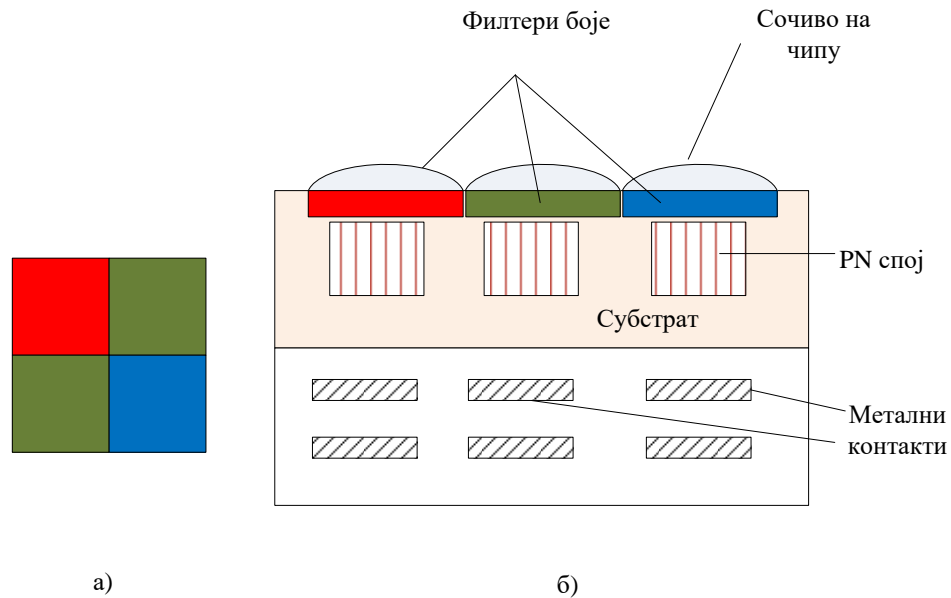
меморисање. Наредни корак је читавање наелектрисања из ћелија за памћење. Док траје процес читавања у исто време могуће је и акумулирање наелектрисања у активном делу које одговара наредној слици. Овај сензор у односу на класични CCD сензор има предности у погледу брзине рада и већу осетљивост при нижим нивоима осветљености. Недостатак ове врсте сензора је то што је и овде потребна два пута већа површина силицијума у односу са класични CCD сензор [2].



Слика 2.3 CCD сензор са трансфером целе слике

За аквизицију слика у боји користе се посебне врсте CCD сензора, код којих се сваки пиксел дводимензионалног поља CCD елемената састоји од три елементарне сензорске површине (по једна за сваку боју). С обзиром да је спектрална карактеристика силицијума фиксна и тешко ју је технолошким поступком изменити, раздвајање боја се остварује наношењем оптичких филтера чиме се постиже селективност у детекцији боја. Најчешће су у употреби филтри за црвену, зелену и плаву боју, подједнако

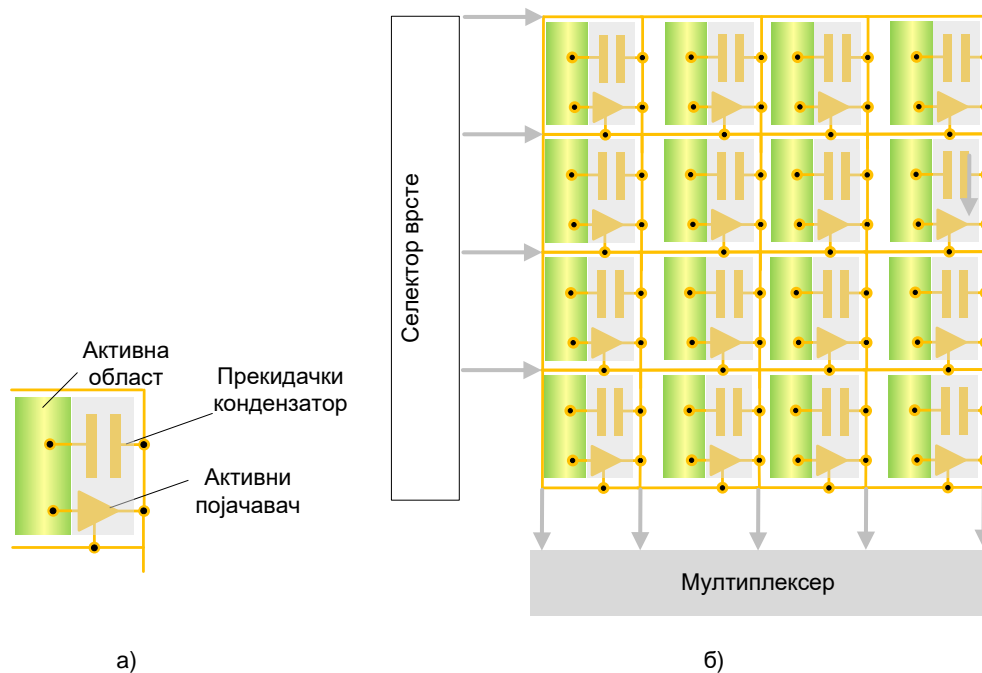
је у употреби комплементаран скуп филтера за цијан, магента и жуту боју.



Слика 2.4 а) Просторна расподела сензора код аквизиције слике у боји б) попречни пресек сензора за снимање слике у боји

2.2.2 CMOS сензор слике

Ово је посебан тип сензора слике који је направљен у CMOS техници. Фундаментална разлика у односу на CCD сензор слике је та што се код овог типа сензора стварање наелектрисања и његова конверзија у напон обављају у оквиру сваке сензорске ћелије, док се код CCD-а сво наелектрисање помера најпре за једну врсту, након чега се пиксел по пиксел пребацује у регистар и након чега тек следи конверзија у напон. На слици 2.5 а) и б) су приказани редом једна CMOS ћелија као и матрица CMOS сензора.



Слика 2.5 а) CMOS елемент б) матрица CMOS сензора

Наелектрисање се скупља у кондензатору након чега се врши конверзија у напон и његово појачање. Овај тип сензора има многе предности које се огледају у већој брзини одзива, могућност да се сваком пикселу приступи независно као и већа густина паковања, док је мана нешто већи шум који са друге стране може да се касније одстрани софтверским путем. Када су у питању сензори слике који се данас широко користе код камера и фотоапарата овај тип сензора је тренутно највише коришћен.

2.2.3 Дискретизација слике

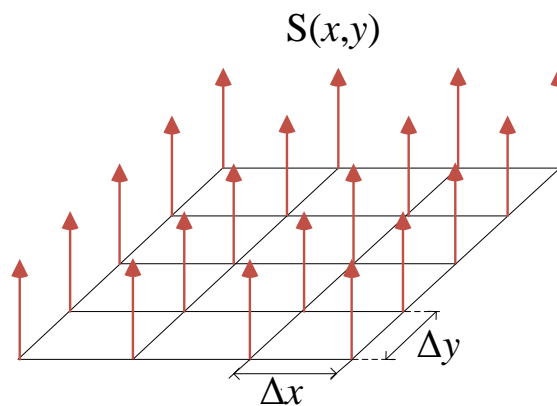
Уколико посматрамо континуалну функцију $F(x, y)$ која може представљати вредност осветљења слике или неке друге жељене физичке величине на слици тада се процес дискретизације слике

може свести на множење ове функције са функцијом просторног одабирања [3]:

$$S(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - i\Delta x, y - k\Delta y) \quad (2.1)$$

која је представља суму 2D Диракових делта функција са просторним растојањем по осама Δx и Δy , приказаним на слици

2.6.



Слика 2.6 Приказ функције одабирања

Дискретизована слика је сада облика:

$$F_D(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(i\Delta x, k\Delta y) \delta(x - i\Delta x, y - k\Delta y) \quad (2.2)$$

док је Фуријеова трансформација слике:

$$\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_D(x, y) \exp(-j(\omega_x x + \omega_y y)) dx dy \quad (2.3)$$

На основу Фуријеове конволуционе теореме, Фуријеова трансформација функције одабране слике је једнака конволуцији функције континуалне слике и Фуријеове трансформације функције одабирања према релацији:

$$\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) * \mathcal{S}(\omega_x, \omega_y) \quad (2.4)$$

Фуријеова трансформација функције одабирања која је сума Диракових делта функција је такође сума Диракових делта функција помножена одговарајућом константом:

$$S(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_x - i\omega_{xs}, \omega_y - k\omega_{ys}) \quad (2.5)$$

где су $\omega_{xs} = 2\pi / \Delta x$ и $\omega_{ys} = 2\pi / \Delta y$ фреквенције одабирања фреквентног домена. Потпуно је оправдано претпоставити да је спектар дискретизоване слике коначан: $\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = 0$ за $|\omega_x| > \omega_{xc}$ и $|\omega_y| > \omega_{yc}$.

Применом конволуције у фреквентном домену у једначини (2.2) добијамо да је;

$$\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega_x - \alpha, \omega_y - \beta) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_x - i\omega_{xs}, \omega_y - k\omega_{ys}) d\alpha d\beta \quad (2.6)$$

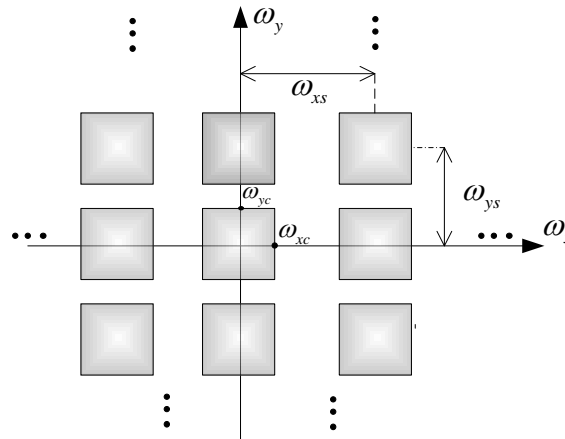
Заменом места операторима за интеграцију и суму добијамо коначно:

$$\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega_x - i\omega_{xs}, \omega_y - k\omega_{ys}) \quad (2.7)$$

Овде је коришћена особина Делта функције:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0) \quad (2.8)$$

Оно што запажамо посматрајући израз је да се спектар састоји од периодичног понављања спектра континуалне функције слике $F(x, y)$ по целој фреквентној равни за период ω_{xs} и ω_{ys} слика 2.7.



Слика 2.7 Спектар дискретизованог сигнала у фреквентној равни

Оно што је битно овде истаћи је да би се слика могла потпуно реконструисати фреквенција одабирања мора бити барем двоструко већа од граничне фреквенције: $\omega_{xs} > 2\omega_{xc}$ и $\omega_{ys} > 2\omega_{yc}$, што заправо представља теорема о одабирању за дводимензионе сигнале. Уколико ово није испуњено доћи ће до преклапања у спектру што води до губитка тог дела спектра приликом реконструкције.

Спектар континуаланог сигнала може се добити применом нископропусног филтра чија је функција преноса дата изразом

$$\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} K & \text{за } |\omega_x| < \omega_{xL}, |\omega_y| < \omega_{yL} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.9)$$

где је K -фактор скалирања. Успешна реконструкција је остварена ако је $\omega_{xL} > \omega_{xc}$ и $\omega_{yL} > \omega_{yc}$.

У просторном домену преносна функција овог филтра ће имати облик:

$$R(x, y) = \frac{K \omega_{xL} \omega_{yL}}{\pi^2} \frac{\sin(\omega_{xL} x)}{\omega_{xL} x} \frac{\sin(\omega_{yL} y)}{\omega_{yL} y} \quad (2.10)$$

$$\hat{F}_D(x, y) = \frac{4K}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(i\Delta x, k\Delta y) \frac{\sin(\omega_{xL}(x - i\Delta x))}{\omega_{xL}(x - i\Delta x)} \frac{\sin(\omega_{yL}(y - k\Delta y))}{\omega_{yL}(y - k\Delta y)} \quad (2.11)$$

Добијена функција $\hat{F}_D(x, y) = F(x, y)$ односно сигнал полазне слике је једнак реконструисаном само уколико горња сума има бесконачно много чланова, у свим осталим случајевима када имамо коначан број вредности сигнала, реконструисана слика је само приближно једнака полазној слици.

2.2.4 Квантовање амплитуде и дигитализација слике

Након просторне дискретизације слике следећи корак је дискретизација амплитуде слике тј. вредности функције $F(x, y)$, односно претварање вредности амплитуде у дигитални облик погодан за рачунарску примену. Овај поступак се назива квантовање амплитуде. Претпоставимо да је амплитуда реалне слике f док је амплитуда квантоване слике \hat{f} и нека је $a_L < f < a_U$ где су a_L и a_U горња и доња граница амплитуде. Функција \hat{f} има коначан број могућих вредности r_0, r_1, \dots, r_{J-1} који се називају нивои реконструкције. Поред нивоа реконструкције постоје и нивои одлучивања d_0, d_1, \dots, d_{J-1} тако да уколико је за вредност функције испуњено да се налази између неке две вредности нивоа одлучивања:

$$d_j < f < d_{j+1} \quad (2.12)$$

тада је вредност одбирка за ту тачку једнака r_j . Уколико претпоставимо да функција f има неку густину расподеле $p(f)$ тада је могуће одредити вредност нивоа одлучивања тако да

грешка између полазне функције f и функције квантоване амплитуде \hat{f} буде минимална. Израз за грешку је дат у облику:

$$\mathcal{E} = \int_{a_L}^{a_U} (f - \hat{f})^2 = \sum_{j=0}^{J-1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} (f - r_j)^2 p(f) df \quad (2.13)$$

Минимизацијом претходног израза добијамо да је: $r_j = (d_j + d_{j+1}) / 2$ тј. нивои реконструкције треба да буду на средини између нивоа одлучивања. У случају униформне расподеле интензитета слике добијамо и да је размак између свака два нивоа одлучивања константан и да износи $q = (a_U - a_L) / J$.

Код монохроматске слике уколико за приказ амплитуде слике користимо B битова, тада је број нивоа за приказ амплитуде једнак 2^B , док је број битова за репрезентацију целе слике једнак $M \times N \times B$. У практичним применама довољно је користити 10 до 15 нивоа сјајности јер је то број које људско око може да разликује, али се из практичних разлога најчешће користи 8 битова што је један бајт.

У случају колор слика, уколико се свака од боја кодује са 8 битова имамо укупно 2^{24} нијанси што је много више него што људско око може да разликује, па се често користи мањи број битова по компоненти, а некада се број битова и разликује.

2.3. Аквизиција слике заједно са другим врстама сигнала

Када је у питању примена камере у биомедицинским експериментима који су обрађени у овој докторској дисертацији оне су углавном коришћене заједно са другим типовима сензора

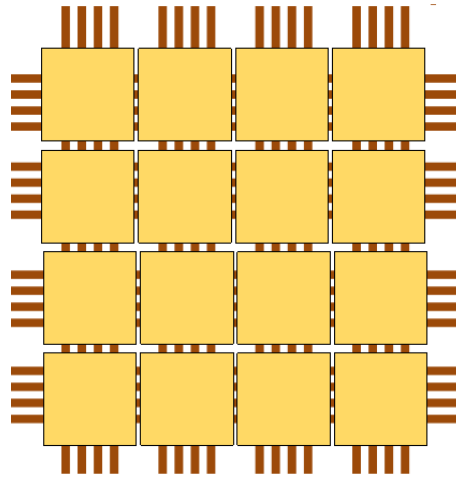
као што су сензори притиска и силе. Камере су служиле да се уз помоћ њих добију информације о померањима и деформацијама објеката, након чега су ове информације упариване са вредностима сила, притиском или механичким напонима што је омогућило да се изведу закључци о механичким карактеристикама ових објеката. Један од главних изазова у пројектовања ових система за биомеханичка испитивања је био синхронизација између сигнала слике и сигнала са других сензора. Пошто је за аквизицију података у експериментима коришћен РС под Windows оперативним системом било је најприкладније да се за аквизицију података користи web-камера, а за аквизицију података са осталих сензора микроконтролери са одговарајућим А/D конверзијом података који су обезбеђивали комуникацију са РС-јом путем USB или RS-232 порта. Временска кашњења између сигнала слике и сензора су могла да износе од пар десетина до пар стотина милесекунди. Оваква поставка експеримента са наведеном опремом је сасвим задовољавајућа код нпр. испитивања ткива где су промене притиска као и деформације споре, али код анализе хода где се појаве одигравају много брже неопходна је боља синхронизација између сензора и камера.

Једно решење је коришћење светлосне диоде која би се побуђивала са микроконтролера рецимо између неколико узастопних одабирака сигнала са сензора што би детектовала и камера. Ово захтева додатно пост-процесирање сигнала слике и истовремено захтева да тај импулс траје довољно дуго док се цео фрејм слике не прочита што опет уноси одговарајућу временску несигурност која је сада доста мања и износи пар десетина милесекунди. Најбоља синхронизација се постиже уколико се синхронизују сигнали

појединачних пиксела са сигналом сензора. У ту сврху ће бити коришћена OV7670 300КР VGA камера заједно са матрицом програмабилних логичких кола FPGA (енгл. *Field Programmable Gate Array*) .

2.4. Примена FPGA у аквизицији података

Развој уређаја са применом у биомедицини има тенденцију ка све већем смањењу димензија (минијатуризацији) са једне стране и повећању перформанси с друге стране са циљем да се практично на једном уређају обједини аквизиција података са различитих сензора, процесирање и архивирање података, уколико се ради о мониторинским студијама и на крају могућност да уређај произведе и одговарајуће управљачке сигнале проследи ка неком актуатору који производи одређену акцију. У том смислу идеално би било имати све ове функционалности смештене на једном чипу. Управо концепт FPGA омогућава кориснику да сам креира и сам организује хардвер који ће обављати одређени задатак. FPGA је скуп интегрисаних електронских кола састављених од регистара, флип-флопова, мултиплексера, меморијских модула, множача и периферија за комуникацију где је задатак корисника да ове елементе међусобно повеже, конфигурише и тако створи потпуно нову интегрисану платформу која ће имати одређену намену, слика 2.8.



Слика 2.8 Приказ FPGA чипа

На овај начин се може постићи да дефинисани хардвер решава дати проблем на најефикаснији начин. За опис функција FPGA углавном се користе језици VHDL и Verilog, оба језика су ниског нивоа апстракције, па захтевају од корисника искуство у пројектовању хардвера што је уједно и главни недостатак FPGA концепта.

2.4.1 Реализација аквизиције слике уз помоћ FPGA платформе и VGA камере

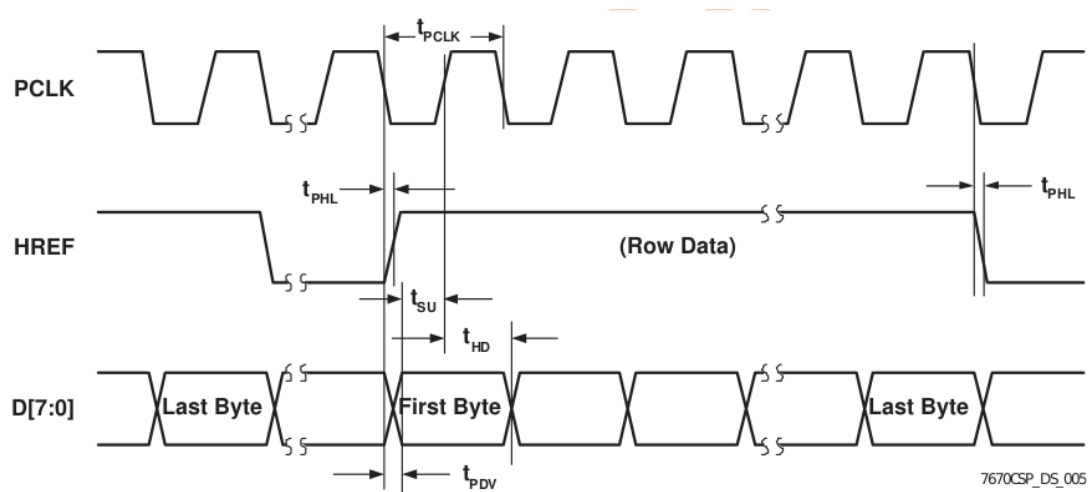
Реализација аквизиције слике биће остварена помоћу Xilinx Spartan 3E фамилије FPGA чипа и OV7670 300KP VGA камере.

OV7670 300KP VGA камера слика 2.9 представља нисконапонски CMOS базирани сензор слике који обједињује сензор заједно са процесирањем сигнала. Процесор обезбеђује добијање слике у више различитих формата и њихово слање путем *Serial Camera Control Bus* (SCCB) интерфејса, а такође постоји и могућност

Табела 2.1 Опис пинова OV7670 300КР VGA камере

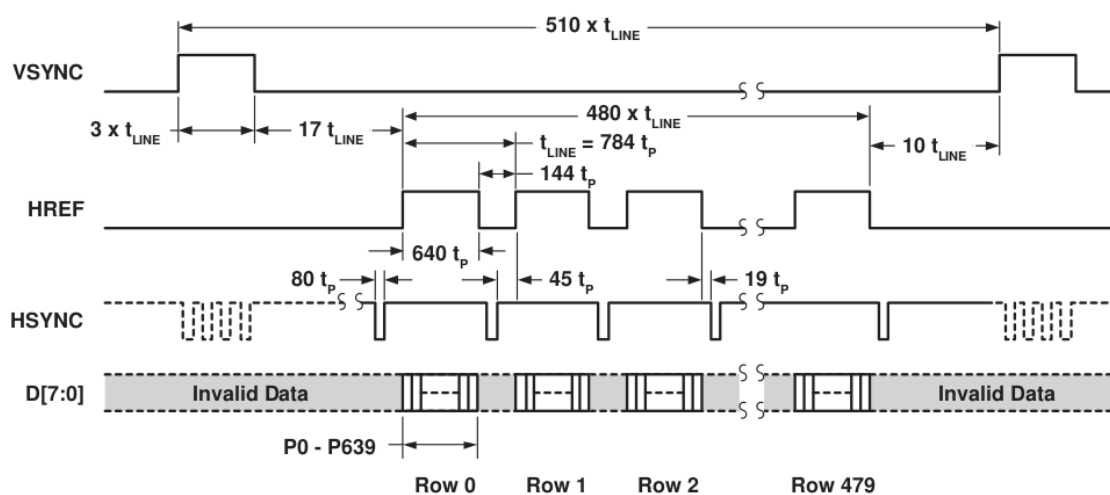
Назив пина	Тип	Опис
VDD**	Напајање	Позитиван напон
GND	Напајање	Маса
SDIOC	Улаз	SCCB клок
SDIOD	Улаз/Излаз	SCCB подаци
VSYNC	Излаз	Вертикална синхронизација
HREF	Излаз	Хоризонтална синхронизација
PCLK	Излаз	Клок за пикселе
XCLK	Улаз	Системски клок
D0-D7	Излаз	Видео паралелни излази
RESET	Улаз	Ресет
PWDN	Улаз	Прекидач за гашење

На слици 2.10 можемо видети временски дијаграм читавања пиксела по врстама са камере.



Слика 2.10 Временски дијаграми сигнала код читавања врста

Да би читавање било могуће неопходно је довести спољашњу побуду на пин PCLK као поворку правоугаоних импулса одговарајуће фреквенције у нашем случају 25 MHz. Када је побуда успостављена, HREF се у току одређеног интервала поставља на висок напонски ниво и у току тог интервала се врши читање врста. На слици 2.11 имамо приказ временског дијаграма читавања целог фрејма.



Слика 2.11 Временски дијаграми сигнала код читавања фрејмова

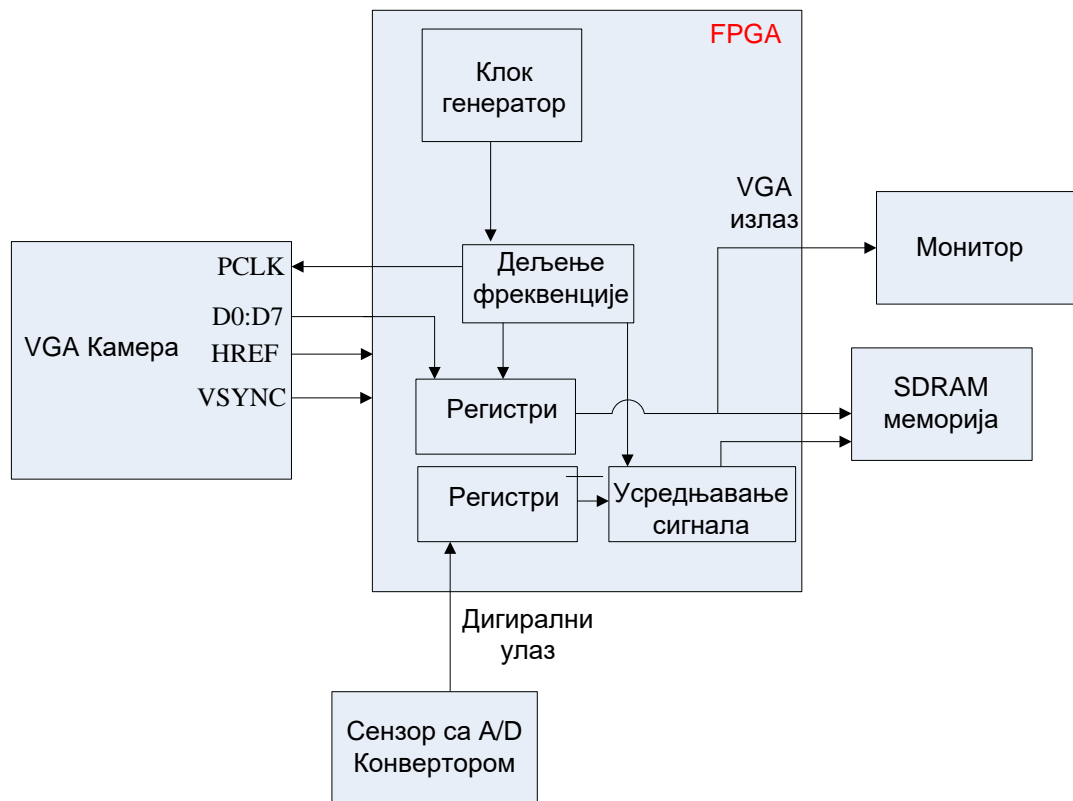
Xilinx Spartan 3E слика 2.12 представља програмабилан чип опште намене који на себи садржи око 320 хиљада логичких кола које је могуће конфигурисати у нашем случају коришћењем Veriloga. Овај чип је интегрисан на Nexys-II [4] развојној плочи која обезбеђује већи број периферијских уређаја заједно са чипом, што омогућава удобно тестирање програмираних функционалности.



Слика 2.12 Nexys-II развојна плоча са интегрисаном FPGA

Фреквенција осцилатора FPGA платформе у нашем случају је 50 MHz док се остале фреквенције неопходне код аквизиције добијају њеним дељењем.

На слици 2.13 је приказана принципијелна шема реализације аквизиције слике помоћу FPGA платформе. Захваљујући системском клок генератору од 50 MHz практично је могуће извршити синхронизацију између аквизиције слике као и аквизиције осталих података тако што се врши дељење фреквенције за потребе аквизиције слике на пола вредности тј. 25 MHz и неке друге фреквенције која је у пракси ред величине kHz за потребе аквизиције података. Битови слике се читају паралелено и смештају у одговарајуће регистре одакле се затим даље могу проследити било SDRAM меморијом или приказати на VGA излазу монитора.



Слика 2.13 Принципијелна шема једновремене аквизиције слике и одговарајућег сензора неке друге физичке величине

Подаци који се прикупљају с других сензора се такође смештају у регистре у овом случају се врши њихово усредњавање током времена сабирањем нове вредности са А/Д конвертора на већ постојећу вредност. На крају је потребно извршити дељење ове вредности са бројем одбирака сигнала који су прикупљени. Корисно је из тог разлога усвојити да број одбирака који се усредњава буде облика 2^n (n је природан број) јер се тада дељење своди на операцију померања битова у регистру за n места улево.

3 Алгоритми за регистрацију слике

3.1. Уводна разматрања

Регистрација слике је процес проналажења просторног преклапања између две слике. У основи регистрација слике је одређивање геометријске трансформације која пресликава тачке приказа једног објекта слике на одговарајуће тачке другог приказа [5]. Код медицинских слика овај појам се дефинише као одређивање пресликавања један на један, између координата два простора, тако да постоји међусобно мапирање између тачака ових простора које одговарају истој анатомској структури [6]. Прикази који треба да буду регистровани могу бити снимљени у различитим временским тренуцима из различитих позиција, коришћењем различитих техника снимања и да се односе на различите субјекте [7].

У поступку регистрације учествују две слике. Једна се назива изворна или покретна слика. То је слика над којом се примењују одговарајуће трансформације током регистрације, док се друга назива циљна или фиксна слика. У математичком запису изворна

слика се означена као: $S: \Omega_S \in R^d \rightarrow R$, док је циљна слика означена са: $T: \Omega_T \in R^d \rightarrow R$, а $d = \{2, 3\}$. Над покретном сликом се примењује трансформација: $T: \Omega_S \rightarrow R^d$.

Циљ регистрације је процена оптималне трансформације. То се најчешће постиже минимизацијом енергетског функционала што се описује следећом релацијом:

$$\arg \min_{\theta} M(T, S \circ T(\theta)) + \mathcal{R}(T(\theta)) \quad (3.1)$$

Видимо да у претходној релацији фигуришу два члана. Први члан у ознаци M , квантификује меру сличности између циљне слике T и изворне слике S под утицајем трансформације T параметризоване помоћу параметра θ . Други члан у ознаци \mathcal{R} се назива члан регуларизације и задатак му је да ограничи скуп могућих решења. Уопштено, трансформација у свакој тачки $x \in \Omega$ (где Ω означава домен слике) је дата као $T(x) = x + \mathbf{u}(x)$ где је $\mathbf{u}(x)$ поље деформације.

3.2. Мере сличности

Мера сличности у поступку регистрације слике има пресудну улогу код одређивања колико је примењена трансформација над сликом прецизно одређена. Постоји већи број мера сличности које се користе код процене регистрације:

Сума разлика квадрата дефинише се као:

$$SSD = \frac{1}{N} \sum_{x \in \Omega_{S,T}} (S(x) - T(x))^2 \quad (3.2)$$

Сума апсолутних разлика:

$$SAD = \frac{1}{N} \sum_{x \in \Omega_{S,T}} |S(x) - T(x)| \quad (3.3)$$

Крос корелација:

$$CC = \frac{\sum_{x \in \Omega_{S,T}} (S(x) - \bar{S})(T(x) - \bar{T})}{\sqrt{\sum_{x \in \Omega_{S,T}} (S(x) - \bar{S}) \sum_{x \in \Omega_{S,T}} (T(x) - \bar{T})}} \quad (3.4)$$

где су \bar{S} и \bar{T} средње вредности пиксела слика S и T редом. Заједничка информација дефинисана на следећи начин:

$$I(S,T) = H(S) + H(T) - H(S,T) \quad (3.5)$$

где су S и T у овом случају случајне променљиве придружене интензитетима пиксела. Ове случајне променљиве су дефинисане на основу хистограма слика при чему су $H(S)$ и $H(T)$ одговарајуће маргиналне ентропије. Ентропија случајне променљиве K је дефинисана на следећи начин:

$$H(K) = - \sum_k p_K(k) \log p_K(k) \quad (3.6)$$

где је $p_K(k)$ маргинална расподела. Придружена ентропија $H(S,T)$ је дефинисана на следећи начин:

$$H(S,T) = - \sum_{s,t} p_{ST}(s,t) \log p_{ST}(s,t) \quad (3.7)$$

при чему је $p_{ST}(s,t)$ придружена функција расподеле.

3.3. Крута регистрација

Крута регистрација слике представља једну од најједноставнијих облика регистрација слике. Овај тип регистрације примењује се у случају када имамо присутне мале деформације објеката на сликама које посматрамо то јест можемо сматрати да се растојања између појединих тачака објекта не мењају, док с друге стране сам објекат може да трпи транслаторна померања као и ротације у координатном систему који је везан за слику. Свакој слици коју посматрамо можемо придружити један координатни систем без умањења општости уколико посматрамо 2D слике, тада изворној и циљној слици можемо придружити координатне системе xOy и $x'O'y'$ редом,

У општем случају можемо написати да су ова два координатна система повезана на следећи начин:

$$(x', y') = T(x, y) \quad (3.8)$$

Најзначајније геометријске трансформације су:

1. Транслација

$$\begin{aligned} x' &= x + b \\ y' &= y + c \end{aligned} \quad (3.9)$$

2. Ротација за угао ϕ око z осе

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos(\phi) + y \cdot \sin(\phi) \\ y' &= -x \cdot \sin(\phi) + y \cdot \cos(\phi) \end{aligned} \quad (3.10)$$

односно матричном облику

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3. Случај када имамо ротацију око све три осе, трансформациона матрица тада има облик:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & -\sin(\phi_z) & 0 \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) & 0 & \sin(\phi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi_y) & 0 & \cos(\phi_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_x) & -\sin(\phi_x) \\ 0 & \sin(\phi_x) & \cos(\phi_x) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

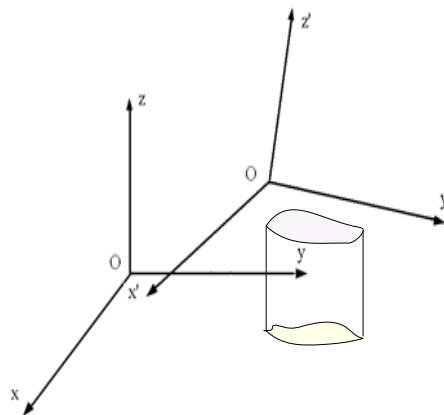
Ова трансформација представља тзв. Афине трансформације које можемо написати у генералном облику као:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + b \\ y' &= a_3x + a_4y + c \end{aligned} \quad (3.14)$$

односно матрично

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b \\ a_3 & a_4 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Ова трансформација пресликава правоугаоник у паралелограм, односно ствара изобличења, али чува паралелност и сличност.



Слика 2.3 Ротација око све три осе координатних система

Претходно описане трансформације називају се глобалним јер важе за цео домен слике или за део који је од интереса. Међутим, оно што је проблем код оваквих типова трансформација је њихова немогућност да опишу локалне промене то јест параметри трансформације немају просторну зависност. Из тог разлога, за неке примене, овај приступ је практично бескористан, па се приступа увођењу деформабилне регистрације.

3.4. Деформабилна регистрација и примена у биомедицини

Под термином деформабилна регистрација слике (на супрот линеарној или глобалној) се подразумева таква регистрација код које су посматране слике повезане путем нелинеарног трансформацијског или просторно променљивог модела деформације. Ова врста регистрације представља један од главних изазова код савремених система за обраду слике, а њен развој био је условљен пре свега због примена у медицини. Током времена усавршаване су методе за овај тип регистрација која је временом постала незаобилазни алат у клиничкој пракси.

Као и већина проблема у обради слике, она је у основи оптимизациони проблем где се оптимално решење добија као минимална вредност посебно изабране такозване функције цене. Регистрација слике је у основи некоректно постављен проблем то јест број параметара који треба да буде одређен је већи од ограничења односно информација добијених помоћу улазних података. Аналитичка процена параметара није могућа што је последица нелинеарности проблема. Неконвексност се често јавља

као проблем односно достизање локалних минимума одговарајуће функције цене коју желимо да минимизујемо у оптимизационом поступку. Приступ који би требало усвојити у процесу регистрације зависи од постављеног проблема то јест од врсте објеката који се налазе на сликама. Различите врсте објеката као што су органи на медицинским сликама, машински елементи снимљени током неког технолошког процеса подвргнути дејству деформација и померања, имају различит степен деформација и померања у току снимања. Различите технике сликања и врсте добијених слика захтевају и различит приступ у процесу регистрације као и начин на који се користе резултати регистрације, односно да ли се ради о *off-line* употреби или је неопходна регистрација слике у реалном времену.

У великом броју случајева, посебно код оних који се односе на органе који трпе велике периодичне деформације (на пример срчано и респираторно кретање) кључни елемент у дијагнози постаје њихово просторно-временско понашање [8], [9]. Регистрација се може употребити како би се проценило ово кретање путем ефикасног успостављања корелације током времена. Просторно-временско понашање које се може добити као резултат овог процеса се може употребити у процедури дијагностике потенцијалних фактора ризика.

Процена напредовања болести као и успех терапеутских процедура представља још једну клиничку примену регистрације. Како би се измерило напредовање физиолошког или патолошког феномена [10] (нпр. напредовање тумора), неопходно је извршити преклапање слика (нпр. оболелог и здравог субјекта) у заједнички домен где поређење има смисла. Регистрација обезбеђује

неопходне информације о стању субјекта како би се одлучило коју врсту и у ком времену треба предузети терапеутско деловање.

Упркос феноменолошком напретку метода снимања, повећању резолуције медицинске слике и развоју нових модалитета, један модалитет често није довољан како би се добила прецизна дијагноза. То је разумљиво пошто се физички принципи на којима се заснивају различити модалитети медицинског сликања разликују по анатомским, ткивним, органским и функционалним информацијама које могу да пруже, па самим тим и дијагноза великог броја болести се заснива на комбиновању слика са већег броја модалитета [11]. Истовремена аквизиција често није могућа и потребна је фузија посредством деформабилне регистрације како би се сакупило довољно информација и поставила дијагноза. Типичан пример су PET-CT скенери који користе оба модалитета снимања и PET и CT, а затим се врши њихова фузија кроз поступак регистрације [12].

Планирање лечења је још једна примена у којој је регистрација од круцијалног значаја. У случају планирања операције, анатомске и функционалне слике високе резолуције се сакупљају и анализирају како би се одредила оптимална хируршка процедура. Ове информације се затим пресликавају на положај пацијента у оперативној сали и служи као визуелна помоћ лекару [13]. Исти концепт се такође примењује током планирања радиотерапије. Подаци CT-а високе резолуције се користе како би се одредио оптимални угао и доза излагања субјекта пре терапије.

Током терапије, клиничко стање пацијента пролази значајне и често нагле промене што може бити последица саме терапије, кретање пацијента и еластичности органа. Из тог разлога је веома

важно преиспитивање клиничке слике узимајући у обзир информације са слика које су добијене током терапије и њиховим поређењем са претходно добијеним подацима. У случају хируршких операција, обезбеђивање непрекидног мапирања у реалном времену између интервентних података и слика које се користе за планирања (СТ или MRI) има велики значај и помаже да се успешно обави операција [14], [15]. У случају радиотерапије, регистрација се може искористити како би пружила информацију о положају и кретању пацијента, омогућавајући неопходна подешавања дозе чиме се максимизује успех саме терапије и неутралишу негативни ефекти [16], [17]. Постојећи системи аквизиције и навигације, који комбинују слике са различитим типовима сензора, не дају задовољавајуће резултате када је у питању кретање ткива и еластичних органа. Унапређењем метода деформабилне регистрације направили би велики клинички искорак како у хирургији тако и код радиотерапије.

Проучавање болести, тестирање лекова и истраживања становништва су области у којима је деформабилна регистрација кључна метода у пред-процесирању података. Централна идеја је да се комбинују анатомске и функционалне слике унутар велике базе података појединаца и да се траже значајне разлике између здравих и болесних субјеката које се могу употребити као индикатор за потенцијалну будућу дијагнозу [18]. У овом случају деформабилна регистрација је неопходна из најмање два разлога: прва је да пронађе референтни координатни систем за све субјекте тако да поређења постају смислена, а друга да успостави кореспонденцију између функционалних и анатомских података. Испитивање неуро-дегенеративних болести представља пример

добре праксе примене деформабилне регистрације. Потпуно исти концепт се примењује и у истраживању нових лекова у којима медицинске слике које се користе у студији морају да буду нормализоване и пресликане у исти простор како би могле да буду протумачене [19].

Претходно наведени примери чине мали подкуп клиничких проблема где је регистрација практично кључна метода, истовремено они показују њен значај у практичној примени као и њену клиничку вредност.

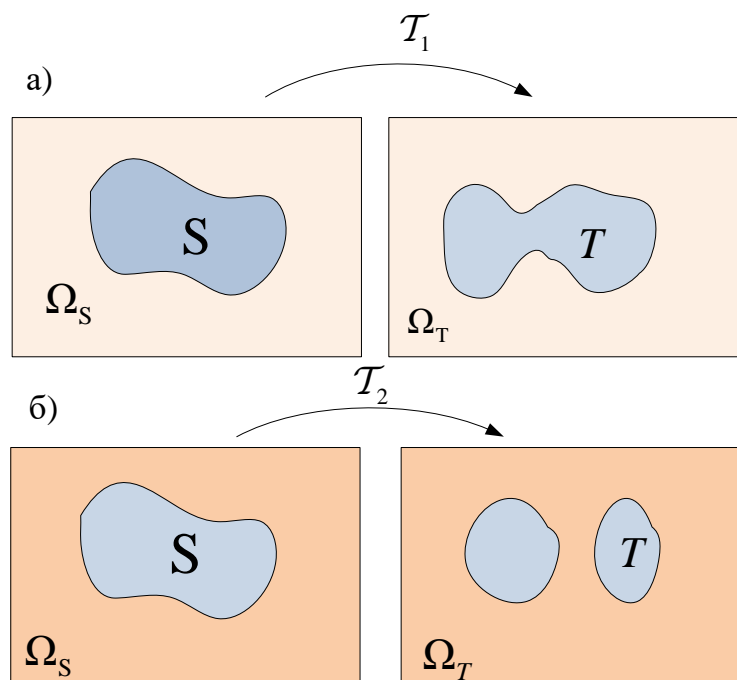
3.5. Модели деформације

Избор модела деформације је од велике важности за процес регистрације јер захтева компромис између рачунарске ефикасности и перформанси саме регистрације. Он такође одражава класу трансформација које су пожељне или прихватљиве и стога у великој мери ограничава решење. Параметри који се процењују регистрацијом путем одговарајуће оптимизације одговарају степенима слободе модела деформације. Њихов број значајно варира, од око десет, у случају глобалних линеарних трансформација, до милиона, када се узму у обзир нелинеарне трансформације. Што је већа димензија простора стања, тиме је „снага“ модела већа уз наравно повећање рачунарске сложености. Избор модела деформације често подразумева претпоставку која се тиче природе деформација које ће бити добијене. Класификација модела деформације је детаљно описана у [20].

Геометријске трансформације се могу класификовати у три главне категорије: 1. Трансформације инспирисане физичким моделима. 2. Трансформације које су инспирисане теоријом интерполације и апроксимације. 3. Трансформације засноване на знању и статистичким моделима.

У биомедицинским применама као и у применама које се односе на реалне физичке процесе трансформација мора да има одређене особине. Једна од најважнијих особина коју мора да поседује трансформација је инверзна коегзистенција. Она подразумева егзистенцију и директне као и инверзне трансформације.

Друга особина је симетрија која је у односу на претходну још строжа јер подразумева и постојање инверзне трансформације као и то да она у композицији са директном трансформацијом производи идентичку трансформацију.



Слика 3.1. а) Трансформација која чува топологију

б) трансформација која не чува топологију

Очување топологије подразумева да се одржава повезаност између пиксела као и релативно растојање између тачака одговарајућих региона на слици Слика 3.1. Дифеоморфичност трансформација подразумева да су претходна својства испуњена као и да је поље деформације глатко што у математичком смислу значи да је Јакобијан трансформације већи од нуле.

3.6. Трансформације инспирисане физичким моделима

Трансформације засноване на физичким моделима на основу [21], могу да буду подељене у пет категорија: I) еластични модели, II) модели вискозног тока флуида, III) модели дифузије, IV) регистрација кривих и V) токови дифеоморфизама.

3.6.1 Еластични модели

У овом случају, слика која се деформише је моделована као еластично тело. Деформација је описана Навијер-Кошијевом једначином:

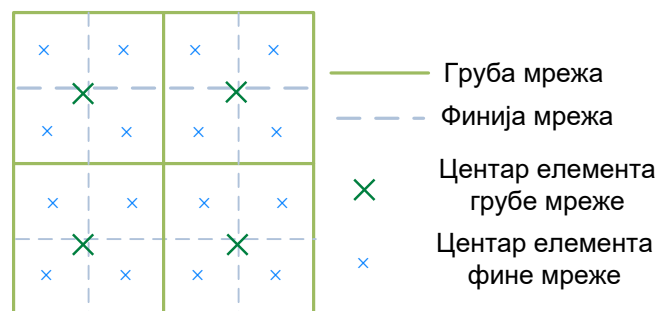
$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F} = 0 \quad (3.16)$$

где је \mathbf{F} -сила која управља регистрацијом на основу критеријума поклапања слика, док су μ и λ Ламеови коефицијенти.

Модел еластичне регистрације је први пут предложен у [22] при чему су пиксели слике моделовани еластичном мембраном која се деформише под утицајем две силе које се мењају све док се не постигне равнотежа. Под утицајем спољашње силе деформишу се

контуре на слици док се не постигне поклапање, а унутрашња сила се јавља као последица еластичних својстава материјала. Крајња једначина је решена итеративно коришћењем методе коначних разлика.

Овај приступ је даље проширен помоћу хијерархијске парадигме [23] тако што се решење најпре одреди на некој нижој резолуцији, а онда се израчунате вредности користе за наредни корак на вишој резолуцији слика 3.2.



Слика 3. 2. Дискретизација мреже у више нивоа

У [24] је еластопластични проблем формулисан уз помоћ варијационе поставке, коришћена је Бајесова парадигма, омогућавајући тако процену грешке решења као и интервала поверења. Померања у чворовима су израчуната методом коначних елемената (МКЕ), док су померања за произвољне тачке простора добијена интерполацијом.

Линеарни еластични модели су такође коришћени при регистрацији слика мозга на основу ретких кореспонденција [25]. У првом кораку се успоставља корелација између кортикалних површина на основу геометријских карактеристика, док је еластична регистрација коришћена у наредном кораку за процену глобалне трансформације, при чему су објекти на слици третирани као нехомогена еластична тела. Параметри еластичности нису

били униформни већ су варирали на слици као функција положаја како би се надоместила чињеница да одређене структуре теже већој деформацији него остале. Додатно, почетно напрезање различито од нуле је узето у обзир како би се неке структуре природно прошириле или компресовале.

Један од основних недостатака регистрације је да када се размене домени референтне и деформишуће слике, добијена трансформација не представља инверзну функцију претходног решења. У [26] је овај проблем превазиђен истовременом проценом и директне и инверзне трансформације, а затим су оне кориговане на основу вредности грешке обе трансформације пенализујући неконзистентност трансформације постављањем ограничења објективној функцији. Ограничење које је постављено се тичало чињенице да се деформације обављају по закону линеарно еластичног тела, а сама трансформација је параметризована помоћу 3D Фуријеових низова.

У [27] је примењен другачији приступ код решавања проблема неконзистенције. Уместо додавања ограничења које пенализују грешку неконзистентности, предложен је недирекциони приступ који упарује директну и инверзну трансформацију. У овом приступу се користи директна трансформација која трансформише референтну слику у циљну истовремено са обрнутом трансформацијом која трансформише с друге стране циљну слику у референтну. Упаривање је обављено моделовањем директне трансформације као инверзне функције обрнуте трансформације. Овакав приступ је такође искоришћен током оптимизације симетричних функционала једноставним праћењем правца градијента директног мапирања.

Важно ограничење линеарно еластичних модела лежи у њиховој неспособности да изађу на крај са великим деформацијама. Један од начина да се овај проблем превазиђе је њихово моделовање композицијом низа малих деформационих трансформација, од којих је свака моделована помоћу линеарно еластичног модела [28].

Теоријски елегантнији приступ за велике деформације је предложен у [29]. Аутори су одустали од линеарне претпоставке моделовањем процеса деформације путем Сен Венанове-Кирхофове енергије еластичности која описује проширење линеарног еластичног модела. Употреба *log*-Еуклидових метрика уместо Еуклидових је резултовало да Риманова еластична енергија буде инверзно конзистентна.

У [30], брза дифеоморфна регистрација слике је предложена на основу линеарно еластичног модела савитљиве мембране. Уведена је претпоставка да је поље брзине константно током времена. Решење се добија интеграцијом у времену и композицијом узастопних решења што је урађено коришћењем парног броја корака помоћу скалирања и квадрирања.

3.6.2 Модели вискозног тока

Модели вискозног тока моделују слику која се деформише као вискозни флуид чије се понављање може описати Навијер-Стоксовом једначином:

$$\mu_f \nabla^2 \mathbf{v} + (\mu_f + \lambda_f) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{F} = 0 \quad (3.17)$$

Овакав модел омогућава моделовање у случајевима великих деформација пошто је базиран на принципу брзина. Први члан Навијер-Стоксове једначине (3.17), уводи ограничења која омогућавају да се суседне тачке слично деформишу захваљујући чињеници да поље брзина мора бити глатко (без наглих промена). Други члан у једначини омогућава структурама да мењају масу током времена, док су μ_f и λ_f коефицијенти вискозности.

У [31], покретна слика је моделована као вискозни флуид омогућавајући нелинеарне деформације. Парцијална диференцијална једначина је решена за мале временске интервале и потпуно решење је добијено поступком интеграције у времену. За сваки временски интервал коришћена је узастопна шема овер-релаксације. Како би се обезбедило очување топологије, праћена је вредност Јакобијана и сваки пут када је она била испод 0,5, мрежа покретне слике је ажурирана. Коначно решење је композиција низа свих узастопних трансформација добијених у сваком кораку ажурирања мреже. У раду [32], представљен је хијерархијски начин добијања трансформације за случај слика из неуролошке праксе. Почетно су обављане глобалне афине трансформације након примене трансформационог модела над објектима слике. Над овим резултатом је затим примењен трансформациони модел флуида коме је претходио корак еластичне регистрације.

Један од основних недостатака овог модела је рачунарска неефикасност што је главни разлог зашто он није добио на популарности као остали модели трансформације. Како би се превазишао овај недостатак, у [31] је предложена паралелна рачунарска имплементација, док је у [33] предложена техника која се заснива на конволуционом филтру у простору скалирања.

Филтар је дизајниран као импулсни одзив линеарног оператор $L = \mu_f \Delta u + (\mu_f + \lambda_f) \nabla(\nabla \cdot v)$ дефинисан у бази сопствене функције. Мултимрежни приступ је предложен у [34] и коришћење анизотропних модела деформације, заједно са мулти-резулационом шемом, која подразумева да се проблем решава на различитим резолуцијама слике. Креће се од неке најниже резолуције ка већим, при чему се добијени резултат из претходног корака користи као иницијална вредност за наредни корак и при томе се коригује.

Инверзна конзистентна варијанта регистрације флуида је предложена у [35] за регистрацију слике дифузног тензора. Инверзна конзистенција је постигнута проценом поклапања и применом регуларизације у оба правца. Модели деформације флуида су такође коришћени код мултимодалне регистрације [36] и у поставци регистрације слика са анатомским атласима [37].

3.6.3 Модели дифузије

У овом случају, деформација је моделована помоћу једначине дифузије:

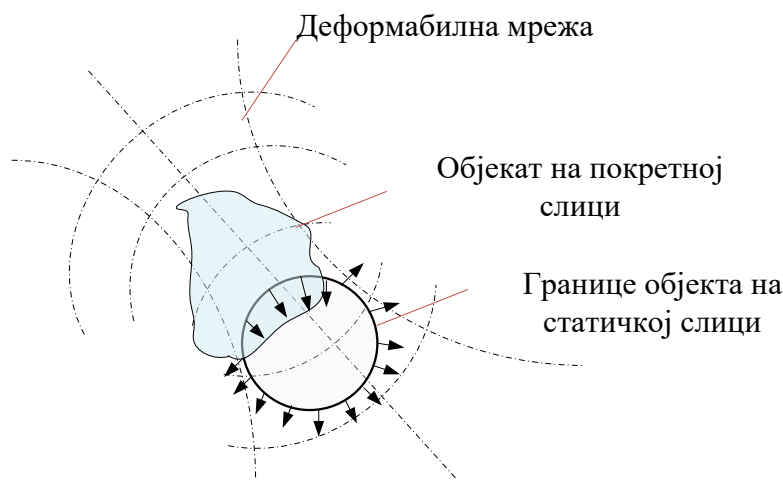
$$\Delta u + \mathbf{F} = 0 \quad (3.18)$$

Алгоритми који се заснивају на овом моделу трансформације користе чињеницу да је Гаусов кернел Гринова функција једначине дифузије (3.18) како би се обезбедио ефикасан корак регуларизације.

Тирон [38], је био први који је увео дифузионе моделе код регистрације слике. У свом раду, слика која се деформише се

посматра као деформабилна мрежа која дифундује кроз границе објеката на статичкој слици који се моделују као мембране слика

3.3. Алгоритам се састоји из два корака: процене померања за сваку тачку и регуларизације. Сила која узрокује деформације је израчуната узимајући у обзир ограничење оптичког протока, које је задовољено за мала померања, док је регуларизација постигнута филтрирањем Гаусовим кернелом.



Слика 3.3. Дифузни модел регистрације слике [38]

Овај алгоритам се показао јако ефикасан и био је у стању да обезбеди густе кореспонденције али му је недостајала теоријска оправданост.

Услед успеха алгоритма, велики број студија је покушао да пружи његово теоријско објашњење. Најуспешнији покушај да се објасни претходни алгоритам је описан у [39]. Регистрација слике је формулисана као проблем минимизације енергије при чему је за оптимизацију коришћена шема градијентног спуштања. Показано је да је Тиронова сила слике, која се заснивала на оптичком протоку, еквивалентна са методом градијентним спуштања другог реда над збиром квадратних разлика, као критеријумом поклапања. Што се тиче регуларизације, показано је да

конволуција глобалне трансформације са Гаусовим кернелом одговара једном кораку градијентног спуштања првог реда функционала, који пенализује разлику трансформације након конволуције са високопропусним филтром. У случају [40] алгоритам је постигао дифеоморфичне карактеристике. Дифеоморфне трансформације су параметризоване употребом стационарних вектора брзине који омогућавају брзо израчунавање експонента путем скалирања и квадрирања.

Како би се још више олакшало коришћење алгоритма у анатомским рачунарским студијама, у [41] је остварено и својство симетрије. У првом делу је показано како се може приказати потпуна просторна трансформација у логаритамском домену, а симетричност је постигнута усредњавањем вредности сила директне и инверзне трансформације које су одвојено израчунате.

У [42] је показано да се регистрација помоћу криве и флуида може формулисати помоћу две упарене једначине дифузије чије стационарно решење се може добити узастопним конволуцијама са Гаусовим кернелом. У раду [43], је показано како се може проширити крива регуларизације да би се узеле у обзир локалне вредности градијента слике. И у овом случају је предложен упарени систем парцијалних диференцијалних једначина чије се стационарно решење може добити узастопним конволуцијама са Гриновом функцијом једначине дифузије.

Адаптивно филтрирање Гаусовим кернелом се може реализовати коришћењем нестационарног дифузног филтра чиме се користи доступно знање које се односи на еластичност материјала у овом случају ткива које је приказано на сликама [44].

У областима где су се очекивале веће деформације, дифузија је пропорционално смањена док унутар објеката где је кохерентност очувана дифузија је пропорционално увећана.

За процену напрезања миокарда [45] на основу регистрације секвенце MRI слика по први пут су уведена физичка ограничења која су подразумевала нестишљивост као и да дивергенција поља брзина буде једнака нули. То је постигнуто решавањем Поасонове једначине са 0-Дирихлеовим граничним условима унутар поддомена слике која приказује миокард.

Главна мана ове групе метода је да се Тиронове силе углавном израчунавају на основу суме разлика квадрата и према томе су прикладне за мономодалну регистрацију слике. Из тог разлога били су бројни покушаји како би се модел дифузије проширио на мултимодалну регистрацију. Једно од решења овог ограничења се састојало у корекцији интензитета [46] или нормализацији заједничке информације [47], [48] упоредо са применом регистрације.

Алгоритми регистрација базирани на дифузији нису својом применом ограничени само на скаларне слике већ су примењиви и на слике дифузног тензора [49], вишеканалне слике [50] као и на различите геометрије [51].

3.6.4 Регистрације криве

У овом случају, деформација је моделована помоћу следеће равнотежне једначине:

$$\Delta^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0 \quad (3.19)$$

док је регуларизациони члан облика:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} (\Delta u^i(\mathbf{x}))^2 dx \quad (3.20)$$

Део под интегралом представља заправо апроксимацију закривљености i -те компоненте померања.

Предност овакве регуларизације је да она не пенализује линеарне Афине трансформације то јест постоје нетривијална решења једначине:

$$\mathcal{R}(C\mathbf{x} + \mathbf{B}) = 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^d \quad (3.21)$$

чиме се губи потреба за додатним кораком линеарне пред-регистрације. Ова ограничења су први пут уведена у [52] и [53]. Како би се решила једначина (3.19), рачунати су Гатови изводи и коришћена је диферентна шема како би се решила крајња парцијална диференцијална једначина. Коришћени су Нојманови гранични услови који обезбеђују високо структурирани матрични проблем који се ефикасно може решити.

Други начин да реши проблем регистрације криве [54] је да се уместо осмишљавања нумеричке шеме за решавање парцијалне диференцијалне једначине која је резултат једначине равнотеже (3.19), користи рекурзивна конволуција са одговарајућом Гриновом функцијом.

3.6.5 Токови дифеоморфизма

Код регистрације слике помоћу токова дифеоморфизма, деформација је моделована узимајући у обзир њену брзину током времена на основу Лагранжове транспортне једначине, [55], [56]. Регуларизациони члан поставља ограничење да поље брзина буде глатко:

$$\mathcal{R} = \int_0^1 \|v_t\|_V dt \quad (3.22)$$

где је $\|\cdot\|_V$ норма над простором V глатких векторских поља брзине, дефинисана као $\|f\|_V = \|Lf\|_{L_2}$ при чему је L диференцијални оператор, а $\|\cdot\|_{L_2}$ је L_2 норма квадрата интеграбилних функција. Одабиром одговарајућег кернела повезаног са V омогућава моделовање различитих нивоа просторне регуларизације. Док се најчешће користи Гаусов кернел, могуће је користити и вишеструка језгра и адаптивно деформације филтрирати нископропусним филтром на различитим нивоима [57], [58]. С обзиром да поље брзине варира током времена могуће је израчунавање великих деформација [59].

Предност ове парадигме, познат као велико деформационо дифеоморфично метричко мапирање (LDDMM), је у томе што омогућава дефинисање растојања између слика или скупова тачака [60], [61]. Растојање је дефинисано као геодетско према метрици и може се искористити за одређивање анатомске варијабилности [62].

LDDMM се показао веома прилагодљивим и проширен је решавањем великог броја проблема, као што је запреминска

регистрација за скаларне, векторске и тензорске слике, [63], [64], код упаривања тачака [60], [65], код упаривања скупова необележених тачака [66], [67], код упаривања облика, [68], мапирања криве [69], [70] и код хибридне регистрације [71] и [72].

Математичка строгост LDDMM, и чињеница да поље брзине мора да се интегрални током времена, резултује високим рачунарским и меморијским захтевима, а шема градијентног спуштања која се углавном користи како би се решио проблем оптимизације код процене геодетске путање, споро конвергира. Ефикасније технике оптимизације за LDDMM су приказане у [73] и [74].

У раду [73] Маршланд и Маклохлан су формулисали проблем решавањем парцијалне диференцијалне једначине и употребили су методу честица како би решење било дифеоморфично. Сличан приступ који обухвата методу мреже честица је представљен у [74]. Гаус-Њутнова имплементација претходног алгоритма је дата у [75]. Ови приступи се заснивају на чињеници да је почетно поље брзине довољно за израчунавање средњих и коначних деформација.

Уместо осмишљавања софистициранијих шема оптимизације за ефикасно израчунавање дифеоморфизама, проблем се може упростити смањењем броја степена слободе и коришћењем стационарних поља брзина [76].

3.7. Геометријске трансформације инспирисане теоријом интерполације

Модели ове класе су изведени на основу теорије интерполације односно апроксимације. Идеја код ове врсте регистрације базира се на чињеници да се познавање померања у неком ограниченом броју тачака на слици може интерполацијом проширити на цео домен слике одговарајућим техникама интерполације уз наравно одговарајућу грешку која се при том јавља. Једна од предности оваквог приступа је мањи број степена слободе, што за последицу има једноставније одређивање неопходних параметара. Међу најважнијим функцијама које се користе у интерполацији код регистрације слика су: I) радијалне базне функције, II) сплајнови еластичног тела, III) слободне деформације (енгл. *Free-Form Defomration*, FFD), IV) функције из обраде сигнала (таласићи, Фуријеови низови и трансформација, косинусна трансформација, итд.) и V) функције које део по део могу да се апроксимирају Афиним моделом.

3.7.1 Радијалне базне функције

Једна од најважнијих група интерполације је заснована на радијалним базним функцијама (енгл. *Radial Basis Function*, RBF), где је вредност у некој тачки интерполације x дата као функција растојања од познатог узорка p , или

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|) \quad (3.23)$$

где је $\phi(\cdot)$ радијална базна функција, а ω_i су тежински коефицијенти.

У регистрацији слике радијалне базне функције су први пут уведене у раду [77]. Детаљнији приказ и анализа пре свега способности очувања топологије је приказана у [78]. Предност RBF-а је у томе што су они у стању да интерполирају поље деформације из неправилно постављених познатих вредности. Њихова главна мана је глобални утицај. Као резултат тога, познавање померања у једној тачки утиче на вредности померања на целом домену слике. Овакво понашање је непожељно када се траже трансформације које просторно варирају.

Једна од првих и најважнијих RBF-а која ће се користити у овој области су сплајнови танких плоча (енгл. *Thin-Plate Splines*, TPS [79], [80]. TPS минимизује енергију савијања уз претпоставку бесконачних граничних услова. TPS представља линерану комбинацију радијалних базних функција датих у облику

$$\phi(r) = -r^2 \ln r \quad (3.24)$$

што је опште решење бихармоничне једначине:

$$\Delta^2 \phi(r) = 0 \quad (3.25)$$

која представља облик криве напрегнуте танке плоче.

Решење је дато у затвореном облику и његова јединственост важи у највећем броју случајева. Ипак, TPS-ови имају и своје недостатке. Трансформација из домена једне слике у другу није инверзно конзистентна, такође природа интерполације је глобална, што не омогућава прецизну предикцију локалног поља деформације. Осим тога, TPS не узима у обзир могуће грешке у

процени померања позиција обележја. Коначно, како се повећава број тачака, интерполација постаје рачунарски захтевнија.

У раду [81] је решаван проблемом инверзне конзистенције. Узета је у обзир минимизација енергије савијања са цикличним граничним условима како би отклонили велику грешку на граници слика.

Проблем са глобалном природом TPS-а је изложен у [82]. TPS су дефинисани на такав начин да имају строго локални карактер. У раду [83] је приказано унапређење које омогућава њихову примену за сваку тачку, узимајући у обзир расподелу тачака у области слике. Ови приступи се заснивају на хеуристикама и скраћивању првобитне основе, како би се ограничио утицај контролних тачака.

У [84] је предложено да се узме у разматрање грешка локализације обележја, при процени густог поља деформације, употребом апроксимирајућих TPS-а. Аутори су предложили, да се смање ограничења интерполације, а трансформација процени минимизацијом функционала, који урачунава грешке положаја обележја, са одговарајућим тежинским коефицијентима, у зависности од тога да ли се ради о изотропном или анизотропном понашању.

Сплајнови стегнутих плоча, приказани у [85] минимизују исту енергију као TPS али користе другачије граничне услове. Пратећи LDDMM радну шему, енергија је минимизована како би крајње густо поље деформације било дифеоморфично и због тога се ова врста сплајнова називају сплајнови геодетске интерполације [86]. Наставак истраживања комбиновањем са паралелним трансформацијама је дат у [87] док су два начина њиховог израчунавања представљена у [88].

Друга фамилија RBF-а која има глобални карактер је мулти квадратна [89]. Она је дефинисана као:

$$\phi(r) = (r^2 + d^2)^{-\mu/2} \quad (3.26)$$

где је d -параметар који контролише глаткост поља деформације и може да варира просторно, док је μ -ненегативна константа. Овај приступ је проширен у случају присуства крутог објекта [90]. Гаусове функције облика

$$\phi(r) = e^{-r^2/\sigma^2} \quad (3.27)$$

су још једна класа RBF-а које могу бити корисне код параметризације деформација, [91]. Предност ове класе функција је то што се њихов просторни утицај може контролисати одабиром вредности варијансе σ . Одабиром мале вредности за σ , њихов утицај се може просторно ограничити и самим тим се може фаворизовати локални карактер трансформације. Овај модел регистрације је коришћен у случају регистрације слике мозга, [92].

У многим практичним применама објекти на сликама ткива, органи и анатомске структуре имају различите карактеристике у смислу еластичности, па је истицање локалних деформација веома пожељно што самим тим претходне методе чини неприкладним. Како би се успешно савладали такви изазови развијане су методе интерполације где контролне тачке имају просторно ограничен утицај.

У раду [93] је предложено коришћење Вендландових функција [94], [95] које показују жељену одлику локалности, за случај еластичне регистрације. Остале радијалне базне функције које

показују одлике локалности обухватају C^2 глатке B_u функције [96] и функције које је предложио Бакман [97]. У [98] су примењене B_u функције за регистрацију слике и изведене су границе за коефицијенте базних функција како би Јакобијан израчунате трансформације увек био позитиван.

Још један приступ је коришћење косинусних функција [99]. Међутим, овај модел није увек позитивно дефинитан [100]. Коначно, Лавиц [101] је увео посебну врсту радијално базних функција у матричном облику које не дивергирају.

У [78], претходно локално ограничене радијално базне функције су поређене коришћењем трансформација на насумичним скуповима тачака, вештачких и медицинских слика. У већини случајева, у присуству локалне и глобалне деформације, установљено је да су локално ограничени TPS-ови и Бакманове функције давале најбоље резултате.

3.7.2 Сплајнови еластичног тела

Сплајнови, премда углавном инспирисани теоријом интерполације и апроксимације, такође могу да буду инспирисани физичким моделима. Такав је случај код сплајнова еластичног тела (енгл. *Elastic Body Spline*, EBS), које је увео Дејвис са групом аутора [102]. Као што и име говори, они су решавали Навијер-Кошијеву равнотежну једначину за хомогено изотропно еластично тело изложено дејству сила. Када су примењене силе полиномске зависности или у облику рационалних функција, једначина се може решити и аналитичким путем.

Претходни рад је проширен у [103] узимајући у обзир Гаусове силе. Овај трансформациони модел је лакше излазио на крај са локалним деформацијама. Варијанса Гаусовог кернела се може мењати како би се параметризовала компактност примене овог модела, а такође и овде је могло да се добије аналитичко решење за равнотежну једначину.

У [104] је приказано проширење Гаусових сплајнова еластичног тела. Уместо одабира тачне интерполације, коришћена је стратегија апроксимације која утиче на грешке у померањима контролних тачака. Парцијална диференцијална једначина је проширена како би биле урачунате Гаусове силе које су биле пондерисане несигурношћу локализације. Несигурности, које зависе од своје изотропне или анизотропне природе, су представљене као скаларне величине односно матрице.

3.7.3 Слободне деформације

Слободне деформације FFD представљају један од најчешћих типова модела трансформације који се среће код медицинском слика. Правоугаона мрежа контролних тачака Φ димензија $K \times L$ је пројектована на слику, димензија $M \times N$ ($K \ll M$ и $L \ll N$), која се деформише под утицајем контролних тачака. Густа деформација је дата као збир тензорских производа униваријантних сплајнова. Овај тип интерполације је најпре нашао своју примену у рачунарској графици, [105], [106] али је касније постао широко прихваћен код регистрације медицинских слика заједно са кубним B-сплајновима [107], [108].

Деформација у 2D је дата као

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L B_k(\mu) B_l(\nu) \Phi_{i+k, j+l} \quad (3.28)$$

где је $k = \lfloor x/K \rfloor - 1$, $l = \lfloor y/L \rfloor - 1$, $\mu = x/K - \lfloor x/K \rfloor$, $\nu = y/L - \lfloor y/L \rfloor$ а $\Phi_{i+k, j+l}$ је скуп контролних тачака док је B_l l -та базна функција В-сплајна:

$$\begin{aligned} B_0(u) &= (1-u^3)/6 \\ B_1(u) &= (3u^3 - 6u^2 + 4)/6 \\ B_2(u) &= (-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)/6 \\ B_3(u) &= u^3/6 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Добре стране модела трансформације леже у његовој једноставности, ефикасности и способности да опише локалне деформације са неколико степени слободе.

Док су трансформације базиране на кубним В-сплајновима глатке, очување топологије није загарантовано. У [109] су уведена већа ограничења за која је доказано у [110] да производе дифеоморфна поља деформације. Потребан услов је да максимално померање не буде веће од четири десетине вредности корака мреже.

У литератури је предложено пуно унапређења FFD-а. На пример у [111] је предложена инверзно конзистентна метода која се заснива на FFD-има којој није потребна инверзија поља деформације. Потребно је нагласити и чињеницу да се градијент и Хесианова матрица могу аналитички израчунати што се може искористити како би се помоћу оптимизатора постигла бржа и прецизнија конвергенција. Док су FFD углавном униформне, тачније све контролне тачке имају једнак допринос на коначну интерполирану вредност, неуниформни В-сплајнови (контролне тачку се множе са

различитим тежинским коефицијентима) дају већу флексибилност у регистрацији медицинске слике [112].

У [113] је представљена симетрична варијанту FFD-а, односно претпостављено је да се обе слике деформишу према заједничком домену под утицајем две изоморфне мреже, које су на једнаком растојању од покретне и референтне слике. Са датом параметарском природом трансформације, то резултује ограничавањем померања одговарајућих чворова у две мреже тако да је њихов збир једнак нули. Како би се израчунало мапирање из једне области слике у другу, процењена трансформација према заједничком домену би требала да буду инвертибилна. Сличан модел је употребљен и у [114] са тим што је проблем регистрације формулисан као дискретан.

FFD могу бити искоришћене и код регистрације већег броја слика где су наметнута строга ограничења како би се дефинисао референтни домен [115], [116] и [117]. Б-сплајновима се такође могу моделирати трансформације просторно-временског домена где се Б-сплајнови користе за временске осе [118], [119] и [120].

3.7.4 Основне функције из обраде сигнала

Инспирисани математичким алатом који су доступни за представљање и анализирање сигнала, многи истраживачи су користили Фуријеову анализу и анализу уз помоћ таласића (енгл. *Wavelet*) како би моделовали трансформације. Важан разлог за њихову примену је чињеница да се са њима може обезбедити мулти-резулациона декомпозиција поља померања. Ово је

неопходна техника за прелаз од грубих ка финим проценама трансформације које се углавном примењују у регистрацији медицинских слика како би се олакшало рачунање нарочито великих деформација.

Конзистентни регистрациони приступ, који су увели Кристенсен и Јохансон [26], је вероватно најпознатији алгоритам регистрације који користи Фуријеову трансформацију. Коришћење Фуријеових низова и трансформације код апроксимације линеарне еластичности поједностављује проблем и омогућава ефикасну нумеричку имплементацију.

Фуријеова трансформација је добро локализована у домену фреквенције, али уопште није локализована у просторном домену. Из тог разлога коришћење таласића, које су локализоване у оба домена, има важну предност, а то је чињеница да они могу ефикасно да моделују локалне деформације. Ву и остали, [121] су користили модел деформације описане уз помоћ таласића. Таласићи су коришћени како би се створио мулти-резулциони опис у Собеловом простору обезбеђујући глатке деформације. На основу овог модела, могуће је истовремено оперисање над глобалним и локалним информацијама такозвани (енгл. *coarse-to-fine*) приступ. У [122] је поље деформације моделовано помоћу коначног, полуортогоналног таласића код проблема регистрације слика мозга пацова. Како би се олакшала оптимизација, аутори су искористили природну мулти-резулционо и мулти-групно разлагање коефицијената таласића. Параметри трансформације су били прво изведени за ниске нивое резолуције, одвојено за сваку подгрупу настављајући ка финијим нивоима резолуције.

У [123] је представљен мулти-резулциони приступ очувања топологије применом неортогоналне базе полиномних сплајнова, која се одликује компактношћу. Топологија је очувана контролисањем Јакобијана путем строгих линеарних ограничења. Овај приступ је проширен на 3D домен у [124] и верификован је у [125]. У 3D случају, примењена је иста мулти-резулциона шема, мада се у овом случају топологија није могла очувати коришћењем само линеарних ограничења. То је било омогућено решавањем проблема ограничене оптимизације где је Јакобијан био ограничен између две границе задате од стране корисника. У [126] је коришћена L_1 пенализација над коефицијентима таласића за регуларизацију регистрационог проблема. Ова врста регуларизације користи ретку репрезентацију коефицијената трансформације чиме је смањен простор за њихово чување у меморији рачунара.

3.7.5 Триангулација део по део Афиним моделом

Један од најједноставнијих начина моделовања деформације слике је коришћење део по део линеарног модела. Слика се састоји од мозаика троуглова или тетраедара унутар којих се обављају Афине интерполације.

Рачунарска ефикасност и инвертибилност су главне предности ове методе, док је недостатак то што добијено поље деформације није увек глатке.

У раду [127] је приказан мулти-резулциони и мулти-мрежни приступ. Слика се адаптивно дели на квадрате и унутар сваког се

примењују афине трансформација. Услов регуларизације енергије је да се суседни парови на сличан начин деформишу. Тензорска регистрација, [128] која узима у обзир реоријентацију тензора, базирана је на раздвајању слика у суседне блокове, и израчунавање афиних трансформација за сваки од њих.

3D слике [128] могу бити реконструисане коришћењем модела триангулације. Слике су раздвојене у независне компоненте путем хијерархијског груписања. У следећем кораку, обављена је паралелна регистрација за сваки пар области. Коначна трансформација је процењена израчунавањем паралелне трансформације за сваку област и применом нелинеарне интерполације између региона. Сличан приступ је представљен у [129] са разликом у томе што после корака регуларизације неопходно још побољшати глаткоћу интерполираних области. Коначна трансформација је састављена на такав начин да је била обезбеђена инвертибилност.

У раду [130] су коришћене триангуларне трансформације које могу веома лако да се инвертују. Буергер и остали [131] су предложили хијерархијски радни оквир како би адаптивно раздвојиле слике у регионе. Раздвајање је формулисано као проблем минимизације енергије и коришћена су три критеријума. Први критеријум је покушао да групише регије са богатим структурним информацијама. Други критеријум је третирао регије са значајном резидуалном грешком, у великим блоковима, док је последњи критеријум подржавао да се регије са сличним кретањима заједно разматрају. Установљено је да се најбоље показао други критеријум.

Већина приступа која користи триангулиране линеарне стратегије независно посматра паралелне трансформације. Као резултат тога, могу се јавити сингуларности и трансформације које нису глобално инвертибилне. Како би се отклонио овај недостатак, предложене су различите методе. Модел трансформације који је паралелан са центром регије и који се смањује на истоветност како се повећава растојање од центра је приказан у [132]. Овај нови модел трансформације има затворен облик и може се ефикасно израчунати. Штавише, ограничења су дата у облику граница трансформације како би се обезбедила инвертибилност.

4 Алгоритми за регистрацију слике применом Лапласове једначине за електростатичко поље

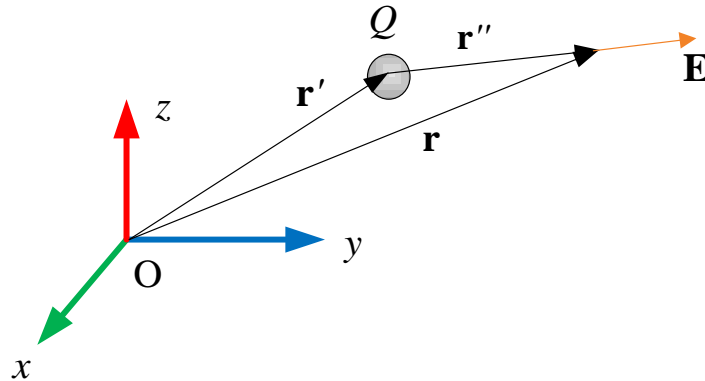
4.1. Електростатичко поље и Лапласова једначина

Електростатичко поље је посебно стање простора око наелектрисаног тела које се одликује појавом механичких сила које делују на неко пробно наелектрисује које се унесе у то поље. Електростатичко поље је векторско поље које се може окарактерисати једнозначном векторском функцијом $\mathbf{E}(x, y, z)$. Електростатичко поље усамљеног тачкастог наелектрисуња одређено је изразом

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.1)$$

при чему је Q -наелектрисуња \mathbf{r}' и \mathbf{r} су вектори положаја наелектрисуња и тачке у простору у којој се израчунава

електростатичко поље, а $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$ је диелектрична константа вакуума.



Слика 4.1 Вектор јачине електричног поља од стране тачкастог наелектрисиња

Вектор електричног поља као и уосталом сва векторска поља се могу представити помоћу линија сила тј линија поља. Линије сила су просторне криве чије се тангенте у свакој тачки поклапају са правцем поља у тој тачки. Уколико су E_x , E_y и E_z пројекције вектора поља на одговарајуће осе, а dl_x , dl_y и dl_z пројекције елемента линије сила $d\mathbf{l}$, тада важи релација [133]:

$$\frac{dl_x}{E_x} = \frac{dl_y}{E_y} = \frac{dl_z}{E_z} \quad (4.2)$$

Број линија по јединици површине у некој тачки тј. њихова густина даје информацију о јачини поља у тој тачки.

Две основне теореме које важе за електростатичко поље су Гаусова теорема која успоставља везу и теорема о конзервативном карактеру вектора електростатичког поља.

Гаусова теорема успоставља везу између флукса електростатичког поља кроз затворену површ S , као и укупног наелектрисања које је обухваћено том површи на следећи начин:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_V dV \quad (4.3)$$

при чему је ρ_V запреминска густина наелектрисања домена V обухваћеног са површи S .

Теорема о конзервативном карактеру електростатичког поља тврди да је циркулација вектора електростатичког поља по некој затвореној контури C увек једнака нули што је описано релацијом:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.4)$$

Оно што морамо истаћи у овом тренутку је да облик претходних једначина важе само у случају слободних наелектрисања која се налазе у вакууму тј. због сврсисходности нећемо разматрати случај диелектричних материјала, а таква је већина материјала у природи већ ћемо се ограничити само на вакуум јер нам је због примене код регистрације слика овде пре свега битан математички апарат који се користи за анализу ових проблема.

За решавање проблема у електростатици поред вектора јачине електричног поља за неке практичне примене је много zgodније користити скаларне величине, па из тог разлога уводимо електрични потенцијал V чији негативни градијент представља електрично поље то јест

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (4.5)$$

Диференцијални облик једначине (4.3) написане помоћу електричног потенцијала има облик:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \quad (4.6)$$

што представља такозвану Поасонову једначину, док у случају када је $\rho_V = 0$ добијамо Лапласову једначину:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (4.7)$$

Лапласове једначина се најчешће користи да се одреди расподела електричног поља и потенцијала у простору уз задате граничне услове на проводницима. У општем случају Лапласова једначина има бесконачно много решења али само једно решење задовољава дате граничне услове. Ово тврђење представља познату теорему о јединствености решења Лапласове једначине. Да бисмо га доказали претпоставимо да постоје два решења V_1 и V_2 која су међусобно различита таква да оба задовољавају исте граничне услове тј. на границама проводника важи $V_1^\Gamma = V_2^\Gamma = V'$.

Уведимо функцију $V_0 = V_1 - V_2$ која представља разлику ова два решења очигледно да мора да важи

$$\nabla^2 V_0 = 0 \quad (4.8)$$

док гранични услови за површину проводника сада постају $V_0^\Gamma = 0$.

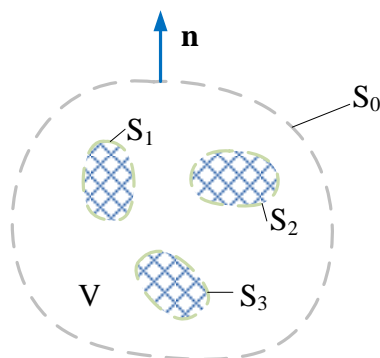
Да бисмо одредили скаларно поље V_0 које задовољава Лапласову једначину и истовремено има вредност нула на свим проводницима, кренимо од првог Гриновог става који важи за две произвољне скаларне функције ψ и φ :

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dv = \oiint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.9)$$

Уколико усвојимо да је $\psi = \varphi = V_0$ и искористимо (4.9) коначно добијамо:

$$\int_V (\nabla V_0)^2 dv = \oiint_S V_0 \frac{\partial V_0}{\partial n} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.10)$$

Домен на коме решава Лапласову једначину ограничен је спољном површином S_0 као и унутрашњим површинама S_1, S_2, \dots, S_n слика 4.2, при чему је $\Gamma = S_1 \cup S_2 \dots \cup S_n$.



Слика 4.2 Домен на коме се решава Лапласова једначина са граничним површинама

Интеграл на десној страни може да се декомпоује на следећи начин:

$$\oiint_S V_0 \frac{\partial V_0}{\partial n} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_0} V_0 \frac{\partial V_0}{\partial n} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} V_0 \frac{\partial V_0}{\partial n} \cdot d\mathbf{S} + \dots + \iint_{S_n} V_0 \frac{\partial V_0}{\partial n} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.11)$$

Уколико бисмо површину S_0 пустили да се шири бесконачно, посматрано са становишта ове површине сва наелектрисања која се налазе унутра на проводницима су заправо тачкаста наелектрисања. Потенцијал ових наелектрисања као и његов градијент зависе од растојања као $1/r$ и $1/r^2$ редом, док је површина S_n у релацији са растојањем као r^2 тако да коначно први интеграл са десне стране једнакости у (4.11) тежи нули. Остали интегрални ће такође бити једнаки нули због задатог граничног услова да је $V_0^\Gamma = 0$, тако да сада једначина (4.11) постаје

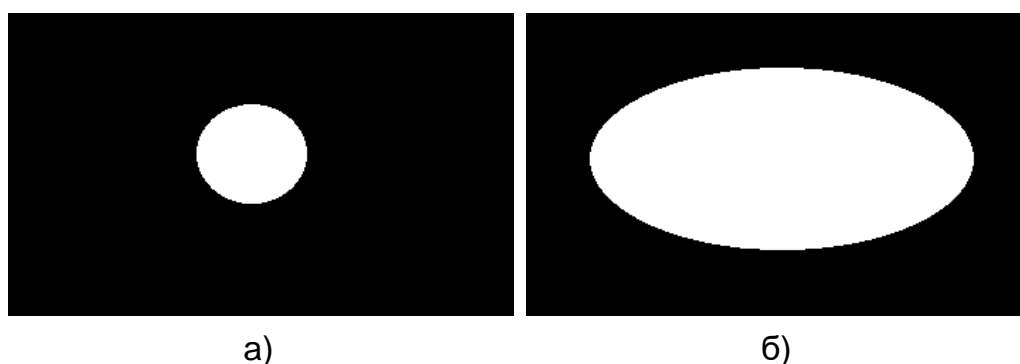
$$\int_V (\nabla V_0)^2 dv = 0 \quad (4.12)$$

Обзиром да је подинтегрална функција увек позитивна, мора да важи $\nabla V_0 = 0$, $V_0 = const$.

Пошто је на границама проводника $V_0 = 0$, следи да она то мора бити и на целом домену, па је коначно $V_1 = V_2$, чиме смо доказали да Лапласова једначина има јединствено решење за задате граничне услове. Ово је веома битна особина коју ћемо касније применити код поступка регистрације слике.

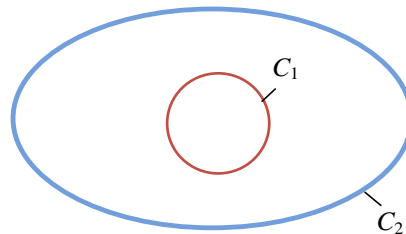
4.2. Регистрација слике применом Лапласове једначине

У овом раду искоришћен је један нови приступ за процес регистрације две контуре које су издвојене са дигиталних слика. На слици 4.3. је приказан хипотетички објекат у облику круга који се деформише тако што се претвара у елипсу у неком тренутку. Циљ је одредити померања свих тачака које се налазе на ободу круга.



Слика 4.3 Слика објекта а) пре б) након деформације

У том циљу најпре је неопходно погодним поступком, који најчешће подразумева детекцију ивица коришћењем диференцијалног оператора, издвојити те контуре са слике. На слици 4.4 су приказане издвојене контуре над којима сада треба да извршимо процес регистрације.



Слика 4.4 Контуре са ознакама 1 и 2 издвојене са дигиталних слика

Стандардни алгоритми регистрације се заснивају на примени поступка минимизације енергије коју би имале хипотетичке честице које би се кретале од површине једне контуре до површине друге контуре. При томе могу бити коришћени модели којима се описује еластичност, кретање флуида, дифузија и сл. За просторну расподелу потенцијала у простору задовољена је Лапласова једначина:

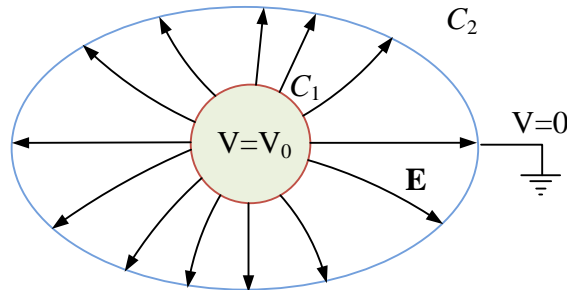
$$\nabla^2 V(x, y) = 0 \quad (4.13)$$

док су гранични услови у овом случају: $V(x, y)_{x, y \in C_1} = V_0$ и $V(x, y)_{x, y \in C_2} = 0$

Решавањем ове једначине добијамо функцију потенцијала $V(x, y)$ у зависности од просторних координата. Вектор јачине електричног поља је дат релацијом:

$$\mathbf{E} = -\nabla V(x, y) = E_x(x, y)\mathbf{i}_x + E_y(x, y)\mathbf{i}_y \quad (4.14)$$

На слици 4.5. је приказана просторна расподела линија поља за задати случај.



Слика 4.5 Расподела линија јачине електростатичког поља у равни између две контуре са задатим потенцијалима

Свака честица која је позитивно наелектрисана и која би се хипотетички кретала од површине контуре C_1 до контуре C_2 би се кретала дуж линија поља и на њу би деловала Кулонова сила која је једнака:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (4.15)$$

при чему је q -наелектрисање, m -маса, а \mathbf{r} -вектор положаја честице.

Позиција честице у сваком тренутку је једнака:

$$\mathbf{r}_{t+1} = \mathbf{r}_t + \dot{\mathbf{r}}_t \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_t \Delta t^2 \quad (4.16)$$

при чему је

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{t+1} &= \dot{\mathbf{r}}_t + \ddot{\mathbf{r}}_t \Delta t \\ \dot{\mathbf{r}}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

а Δt -је временски корак.

Један проблем који се јавља код оваквог приступа проблему регистрације је што пресликавање $\phi(\mathbf{r}, t): C_1 \times t \rightarrow C_2$ није инверзно за исту просторну расподелу потенцијала $V(x, y)$. Ако претпоставимо да честица која се креће из неке тачке контуре, C_1 када досегне

контуру C_2 , хипотетички промени знак наелектрисања тако да сада бива привучена контуром C_1 , у том случају она не би могла да се врати у почетну тачку на контуру C_1 јер је просторна расподела потенцијала сада са становишта честице различита.

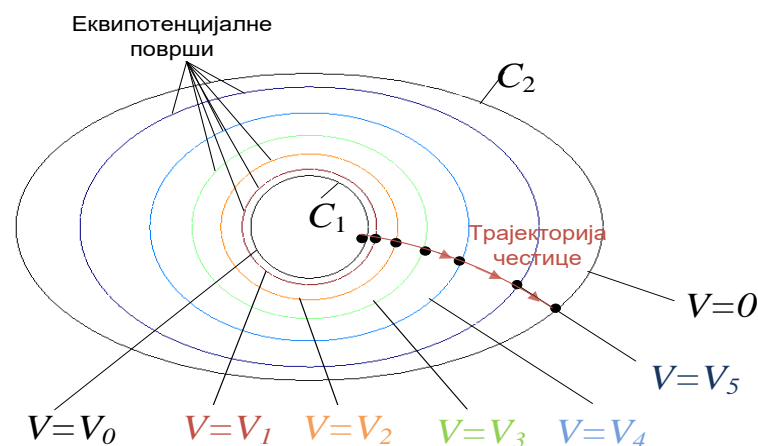
У том смислу решење за овај проблем је у томе да се промена позиције честице напише на следећи начин

$$\mathbf{r}_{t+1} = \mathbf{r}_t + K \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_t) \quad (4.18)$$

где је K - константа пропорционалности.

У овом случају имамо кретање честице дуж линија поља и кретање је реверзибилно то јест функција која пресликава $\phi(\mathbf{r}, t): C_1 \times t \rightarrow C_2$ има инверзну функцију $\phi(\mathbf{r}, t): C_2 \times t \rightarrow C_1$.

Кретање честице би могло да се представи као сукцесивно померање под дејством линија поља из једне еквипотенцијалне површине на суседну, при чему се брзина при сваком преласку из једне на другу еквипотенцијалну површ постави на нулу и врши се пресликавање на следећу еквипотенцијалну површину, слика 4.6.



Слика 4.6 Трајекторија честице и еквипотенцијалне површи са одговарајућим вредностима потенцијала

Функција пресликавања може да се прикаже као композиција

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi'_n(\mathbf{r}, t) \circ \phi'_{n-1}(\mathbf{r}, t) \circ \dots \circ \phi'_1(\mathbf{r}, t) \quad (4.19)$$

где су $\phi'_1(\mathbf{r}, t), \phi'_2(\mathbf{r}, t), \dots, \phi'_n(\mathbf{r}, t)$ функције које пресликавају једну екипотенцијалну површину у наредну при чему је $n+1$ број ових површина. У овом случају почетна екипотенцијална површина је контура C_1 , а последња у низу је C_2 .

4.3. Нумеричко израчунавање електричног потенцијала

Да бисмо добили померање тачака контуре и извршили регистрацију са спољашњом контуром, први корак је израчунавање функције потенцијала. У ту сврху ћемо користити методу коначних елемената МКЕ.

Основна идеја методе коначних елемената је да се домен над којим се израчунава потенцијал подели на елементе у овом случају троугаоне. Енергетски [134] функционал који одговара Лапласовој једначини има облик:

$$W(E) = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon |\mathbf{E}|^2 dS = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon |\nabla V|^2 dS \quad (4.20)$$

где је ε -релативна диелектрична константа. Уколико цео домен поделимо на троугаоне елементе као на слици 4.7 тада ће вредност потенцијала унутар сваког елемента бити једнака:

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) V_i \quad (4.21)$$

где је:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2\Delta} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_3 - y_2) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y] \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2\Delta} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_1 - y_3) \cdot x + (x_1 - x_3) \cdot y] \\
\alpha_3 &= \frac{1}{2\Delta} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_2 - y_1) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Δ - је површина троугаоног елемента:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{4.23}$$

V_i -представљају вредности потенцијала у чворовима троугаоног елемента, а x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 и y_3 координате чворова. На основу једначине (4.21) можемо писати

$$\nabla V(x, y) = \sum_{i=1}^3 V_i \nabla \alpha_i(x, y) \tag{4.24}$$

па је функционал енергије коначно

$$W(E) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon V_i \left[\int_S \nabla \alpha_i(x, y) \cdot \nabla \alpha_j(x, y) dS \right] V_j \tag{4.25}$$

У матричном облику:

$$W(E) = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{V}_e^T \mathbf{K}^e \mathbf{V}_e \tag{4.26}$$

где се \mathbf{K}^e -назива матрица крутости чији је матрични елемент једнак:

$$K_{i,j}^e = \int_S \nabla \alpha_i(x, y) \cdot \nabla \alpha_j(x, y) dS \tag{4.27}$$

док је $\mathbf{V}_e^T = [V_1 \ V_2 \ V_3]$. У релацији (4.27) користимо индекс e да направимо разлику међу елементима на домену на ком решавамо

Лапласову једначину. За цео домен уколико имамо укупно N елемената са M чворова

$$W_u(E) = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \tag{4.28}$$

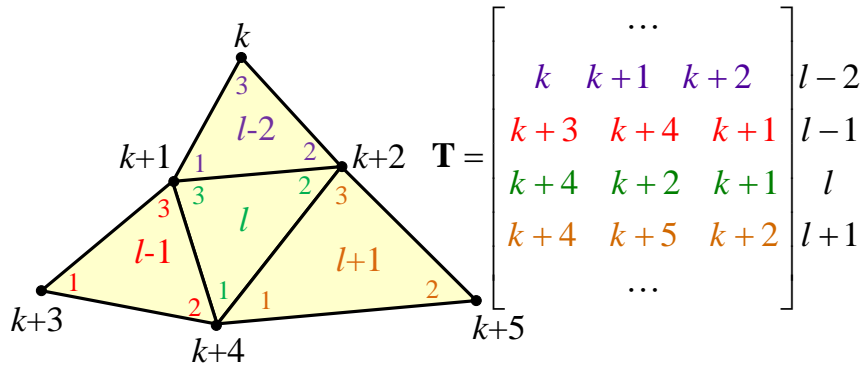
где је:

$$\mathbf{V}^T = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_M] \tag{4.29}$$

при чему је \mathbf{C} глобална матрица крутости димензија $M \times M$ чији су елементи једнаки

$$C_{T_{i,j}, T_{i,k}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 C_{T_{i,j}, T_{i,k}} + K_{j,k}^i \tag{4.30}$$

где је \mathbf{T} такозвана тополошка матрица која је димензија $N \times 3$ и чија l -та врста представља бројеве чворова за l -ти елемент. На слици 4.7 је приказан начин локалне и глобалне нумерације чворова елемената.



Слика 4.7 Глобална и локална нумерација чворова коначних елемената и начин попуњавања тополошке матрице

Као и већина система у природи који теже да заузму стање минималне енергије, исто важи и за систем потенцијала у чворовима, па се на основу тога решења за потенцијал на основу функционала једначина (4.27) добијају као резултат минимизације енергије то јест важи релација:

$$\frac{\partial W_u(E)}{\partial V_i} = 0 \quad i = 1 \dots M \quad (4.31)$$

На основу услова (4.31) добијамо систем једначина

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1M-1} & C_{1M} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ C_{M1} & C_{M2} & \dots & C_{MM-1} & C_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_M \end{bmatrix} = 0 \quad (4.32)$$

На основу система је сада јасно да мора важити да је $|C| = 0$ да би систем имао нетривијална решења. Овај систем можемо решити итеративном методом, имајући у виду да су потенцијали у појединим чворовима већ познати на основу граничних услова, у нашем случају то су потенцијали на контурама:

$$V_k = -\frac{1}{C_{kk}} \sum_{j=1, j \neq k}^n C_{jk} V_j \quad (4.33)$$

при чему се у првој итерацији, свим потенцијалима, чије се вредност израчунавају, додели нека почетна вредност на пример нула или средња вредност познатих потенцијала. Израчунати потенцијали улазе у суму на десној страни израза (4.33). У сваком наредном кораку у дату суму улазе потенцијали израчунати у претходном кораку. Поступак се понавља док разлика потенцијала у неком чвору у два узастопна корака не буде мања од унапред задате грешке израчунавања.

Уколико са f означимо скуп индекса чворова чији потенцијал није познат, а са p скуп индекса чворова чији је потенцијал одређен на основу граничних услова тада се систем (4.33) може написати на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} = 0 \quad (4.34)$$

Након множења матрица коначно су тражене вредности потенцијала у чворовима у којима нису познати:

$$[V_f] = -[C_{ff}]^{-1} [C_{fp}] [V_p] \quad (4.35)$$

Описани поступак подразумева израчунавање инверзне матрице и зато се у литератури означава као директан метод за решавање система линеарних једначина у овом случају мора да буде испуњен услов да је $|C_{ff}| \neq 0$.

4.4. Положај тачке у односу на контуру

Испитивање позиције тачке у односу на контуру је добро познат проблем из компјутерске графике. У случају регистрације две контуре испитивање позиције тачака једне контуре у односу на другу је веома важан део нумеричке симулације јер служи са једне стране да се испита када је регистрација завршена то јест када су се контуре поклопиле, као и за задавање граничних услова, имајући у виду да смо установили да се тачкама унутрашње контуре задаје потенцијал који је једнак јединици, а тачкама спољашње контуре задаје потенцијал нула.

У овом одељку ће бити приказан један приступ за одређивање припадности тачке контури који се у теоријском смислу заснива на комплексној анализи и биће дата његова рачунарска имплементација која је нешто измењена у односу на полазну теорију, да би се умањила комплексност израчунавања.

На основу теорије остатака из комплексне анализе интеграл аналитичке функције на затвореној контури једнак је суми резидума функције у половима који се налазе унутар контуре:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f(z_k)) \quad (4.36)$$

Уколико је функција $f(z)$ облика:

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \quad (4.37)$$

док је вредност резидума $\operatorname{Res}(f(z_k)) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 1$. На основу ових резултата можемо закључити да је интеграл функције $f(z)$ око било ког полигона (полигон представља једну затворену контуру) једнак $2\pi i$ уколико се тачка $z_0 = x_0 + iy_0$ налази унутар тог полигона, у супротном је једнак нули. Ову особину можемо искористити да проверимо да ли се нека тачка налази унутар задатог полигона на следећи начин: ако су тачке полигона $z_1, z_2, \dots, z_n = z_1$ и тачка z_0 за коју треба да извршимо испитивање тада испитујемо вредност интеграла

$$wn = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz \quad (4.38)$$

Вредност 1 указује да се тачка налази унутар полигона, док вредност 0 означава да тачка не припада полигону. Претходни интеграл је једнак:

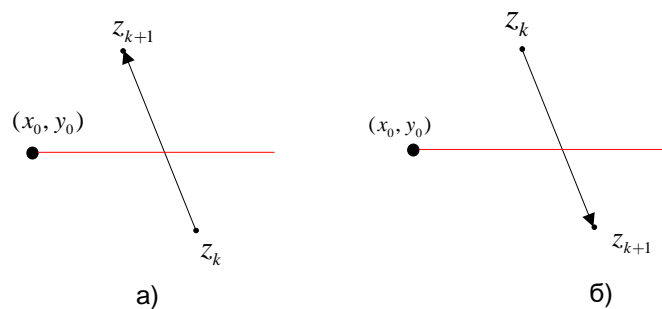
$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \ln \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right) + \ln \left(\frac{z_3 - z_0}{z_2 - z_0} \right) + \dots + \ln \left(\frac{z_1 - z_0}{z_{n-1} - z_0} \right) \quad (4.39)$$

Због особине комплексне функције $\ln(z) = \ln(z) + 2\pi i$ сваки сабирак се мора срачунати посебно, а збир се рачуна на крају, то јест примена правила збира $\ln(\cdot)$ функције не би довела до коректног

резултата. С обзиром да нас занима само имагинарна вредност интеграла (4.38) јер је у случају да се тачка налази унутар полигона заправо различит од нуле, долазимо до коначне формуле за претходну суму.

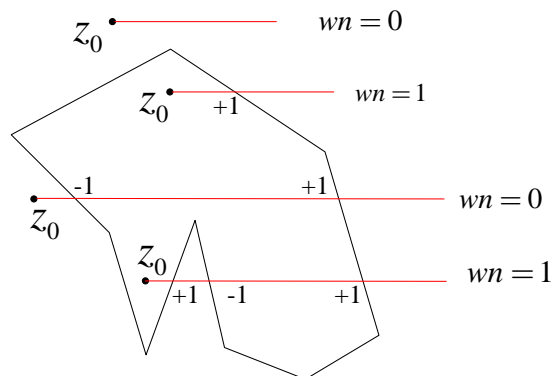
$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = i \left[\arg \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right) + \arg \left(\frac{z_3 - z_0}{z_2 - z_0} \right) + \dots + \arg \left(\frac{z_1 - z_0}{z_{n-1} - z_0} \right) \right] \quad (4.40)$$

Описани начин испитивања да ли се задата тачка налази унутар полигона иако теоријски врло елегантан, рачунарски је веома захтеван јер захтева да се за n тачака укупно n пута израчунава функција $\arg(\cdot)$ што је заправо еквивалентно функцији $\arctan(\cdot)$ која сама по себи захтева доста рачунарских ресурса. Најједноставнији приступ који се користи да се претходни принцип поједностави за рачунарску имплементацију је да се посматра пресек полуправе $y = y_0, x \geq x_0$ са страницама полигона $\overline{z_k z_{k+1}}$, $k = 1 \dots n - 1$. На почетку израчунавања $w_n = 0$. Уколико постоји тачно један пресек ове полуправе и једне од страница полигона такав да тачка z_0 остаје са леве стране, а вектор $\overrightarrow{z_k z_{k+1}}$ је усмерен на горе слика 4.8 а) тада се тачка налази унутар полигона, и важи да је $w_n = w_n + 1$. У случају да постоји пресек са старницом $\overrightarrow{z_k z_{k+1}}$ усмерен на доле слика 4.8 б) $w_n = w_n - 1$.



Слика 4.8 Положај тачке у односу на вектор странице полигона

На крају само уколико је $w_n = 1$ тачка се налази унутар полигона, у свим осталим случајевима тачкан је изван њега, [135] слика 4.9.

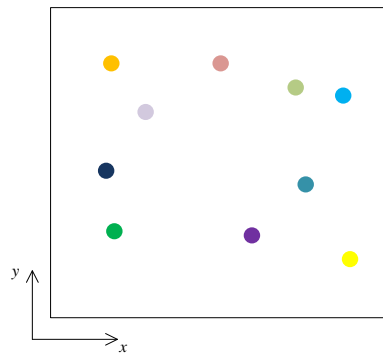


Слика 4.9 Вредност параметра w_n за различите позиције тачке у односу на полигон

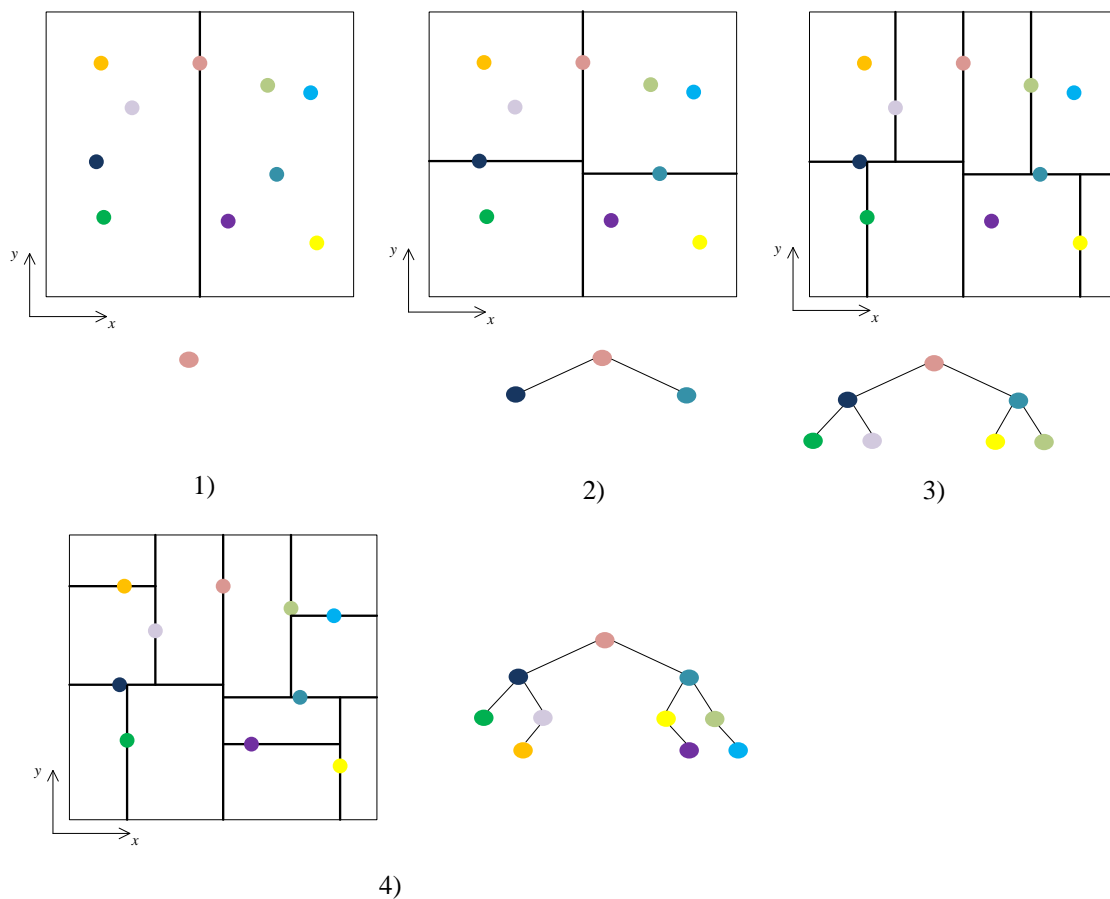
Описани алгоритам је сложености $O(n)$ јер је претходни услов неопходно проверити тачно n пута. Поступак провере позиције тачке у односу на полигон је могуће учинити још ефикаснијим уколико се полигон оивичи са максималним и минималним координатама темена по обе осе, и у том случају могуће је већ у једном кораку испитати да ли је тачка сигурно изван полигона, уколико се налази изван овог опсега. У нашем случају ово неће бити тако чест случај јер ће тачка коју испитујемо у највећем броју случајева бити или унутар или јако близу ивицама полигона то јест контуре.

Један начин да се смањи сложеност алгоритма је формирање 2-d стабла од координата полигона. Идеја је да формирамо структуру података која ће садржати координате тачака и која ће указивати на лево односно десно подстабло. На слици 4.10 су приказане тачке са x, y координатама које желимо да распоредимо у 2-d стабло. У првом кораку одредимо средњу вредност свих тачака по x координати и претраживањем пронађемо тачку која је најближа овој вредности. Ову тачку сместимо у почетак стабла или корен.

Стабло ће бити формирано на начин да се ова тачка налази у корену стабла, а све тачке које су по x вредности мање од ње ће



Слика 4.10 Скуп тачака од којих се формира 2-d стабло



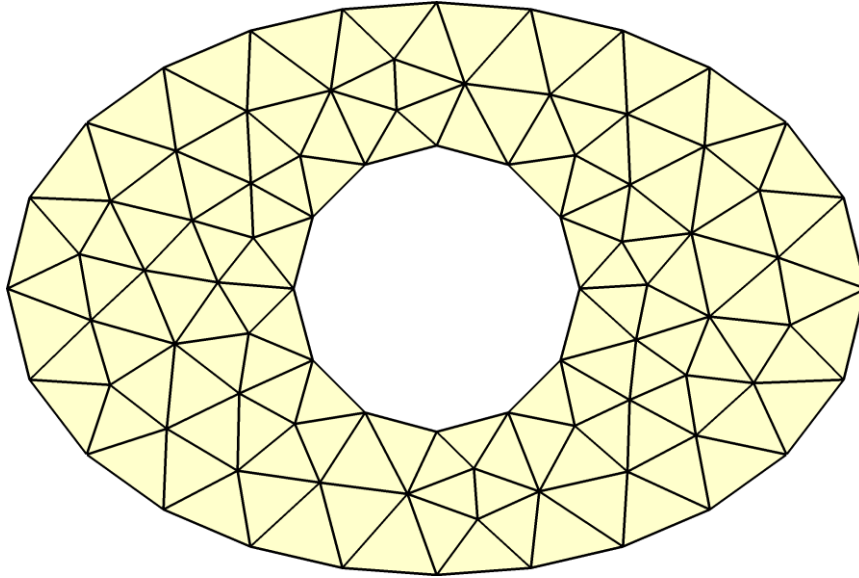
Слика 4.11 Поступак формирања 2-d стабла

бити смештене у лево подстабло то јест у чворовима који су лево од корена, док с друге стране све оне тачке које имају већу вредност по x координати од ове вредности ће бити у десном под-

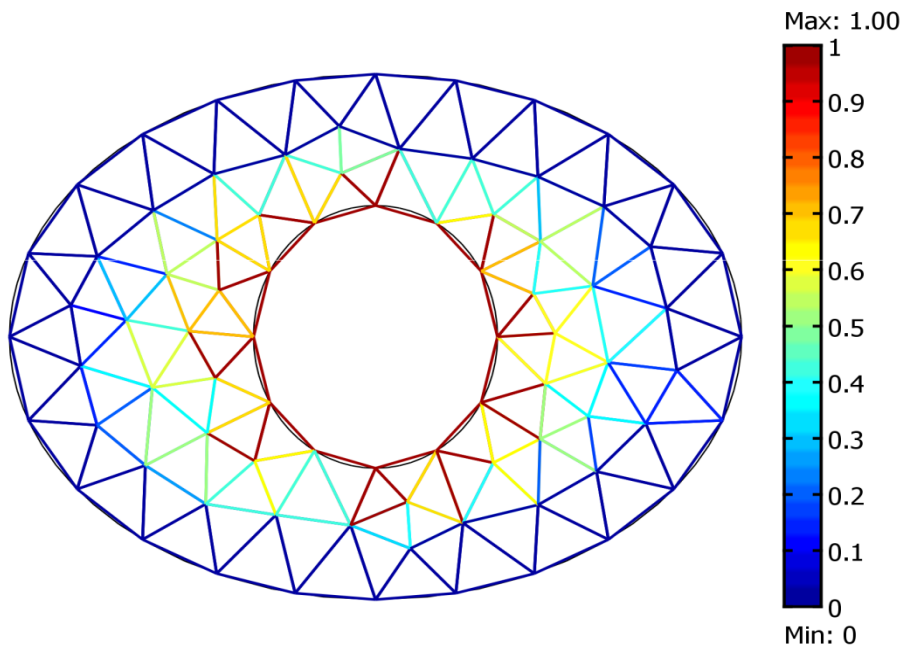
стаблу то јест десно од корена. Следећи корак је да над левим и десним скупом тачака рекурзивно применимо исти поступак с тим што сада све што је важило за x координату сада важи за y координату. За оба скупа тачака одредимо тачке најближе средњој вредности по y оси и оне су сада леви и десни чвор редом, који су повезани са кореном стабла. У трећем кораку понављамо овај поступак при чему опет користимо вредност по x оси и сада имамо четири скупа над којим примењујемо поступак одређивања тачке која је најближа средњој вредности и добијене тачке поставио у чворове тако да мања вредност иде лево, а већа десно од одговарајућег чвора. Овај поступак спроводимо све док постоје непразни скупови тачака. На крају као резултат добијамо стабло, при чему је комплексност алгоритма за његово формирање једнака $O(n \cdot \log n)$, док је сложеност алгоритма за претраживање $O(\log n)$, што је значајна уштеда у односу на $O(n)$.

4.5. Резултати симулације

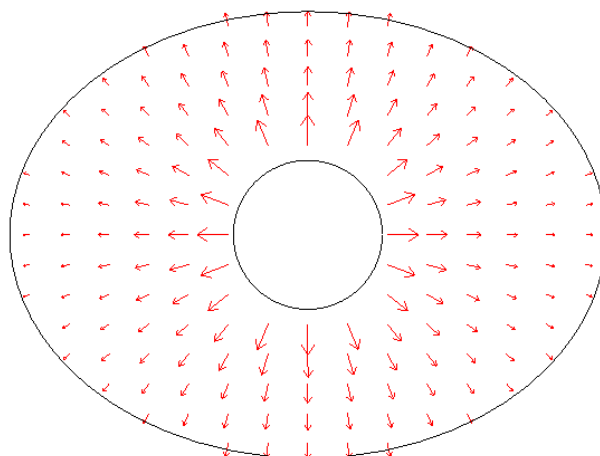
На слици 4.12 приказана је мрежа коначних елемената за дати проблем регистрације контура. Применом методе коначних елемената добијена је најпре расподела потенцијала у простору, а затим применом обрасца (4.5) и расподела поља то јест убрзања честица у простору.



Слика 4.12 Мрежа коначних елемената

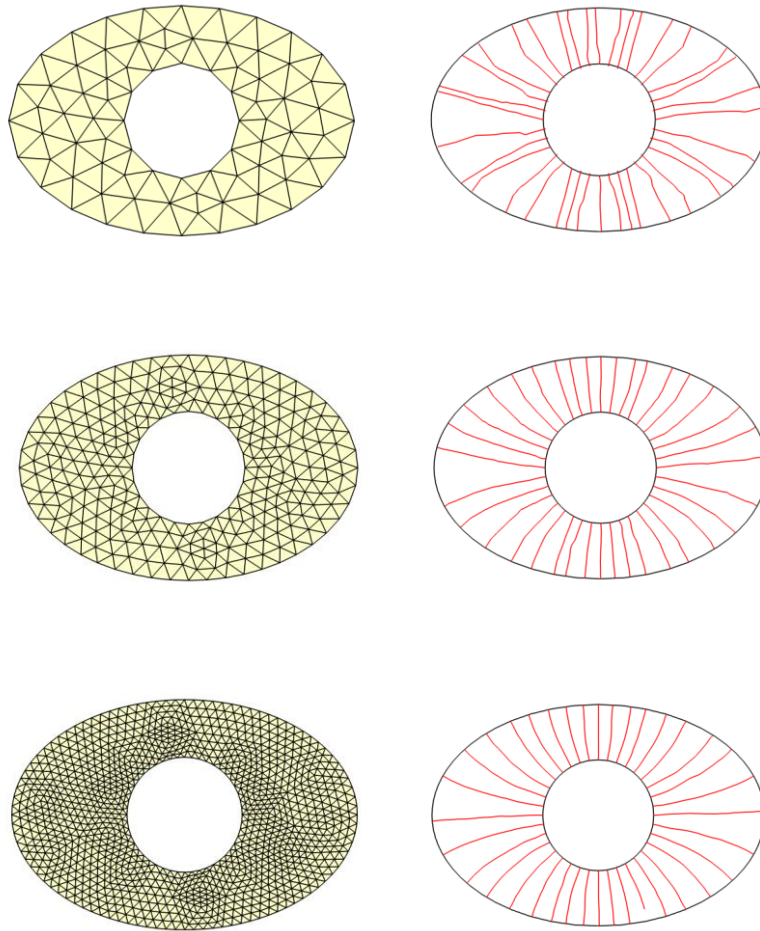


Слика 4.13 Расподела потенцијала добијена применом МКЕ



Слика 4.14 Просторна расподела брзина честица око контура

Када имамо расподелу електричног поља у простору између контура наредни корак је израчунавање померања тачака на контури. У том циљу искористићемо релацију (4.18) за одређивање путање померања тачака на контури. Константу K бирамо да бисмо постигли одговарајућу тачност јер мања вредност даје финију трајекторију, али истовремено успорава конвергенцију. Након сваког корака ажурира се вредност положаја тачке на унутрашњој контури и проверава се да ли нова позиција припада полигону кога представља спољашња контура. Поступак се спроводи све док је ово испуњено и када коначно тачка напусти границу спољашње контуре процес регистрације за дату тачку је завршен и коначно можемо одредити померање за дату тачку.



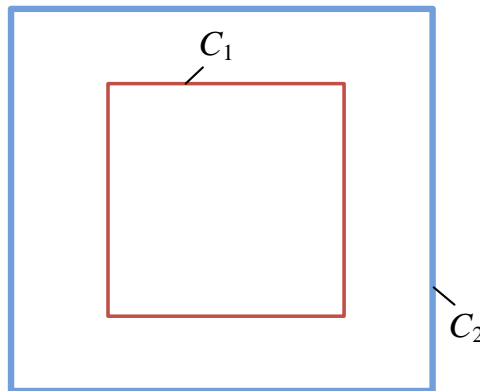
Слика 4.15 Путање померања тачака на контури која се деформише у зависности од густине мреже

На слици 4.15 приказане су трајекторије тачака приликом деформисања унутрашње контуре за различите густине мреже коначних елемената.

4.5.1 Регистрација упаривањем скупа тачака (Point Matching)

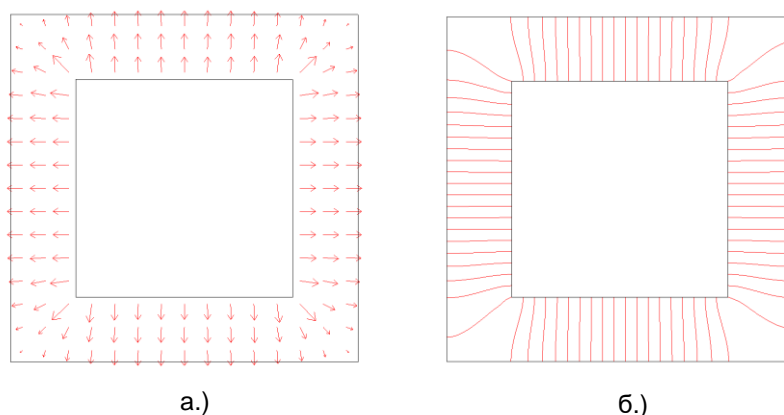
Веома чест случај код регистрације слике је постављање ограничења при коме је задат коначан скуп тачака на сликама које учествују у регистрацији и између којих постоји пресликавање што је познато као (*Point Matching*) регистрација.

На слици 4.16 а) приказане су контуре над којима треба да се изврши регистрација.

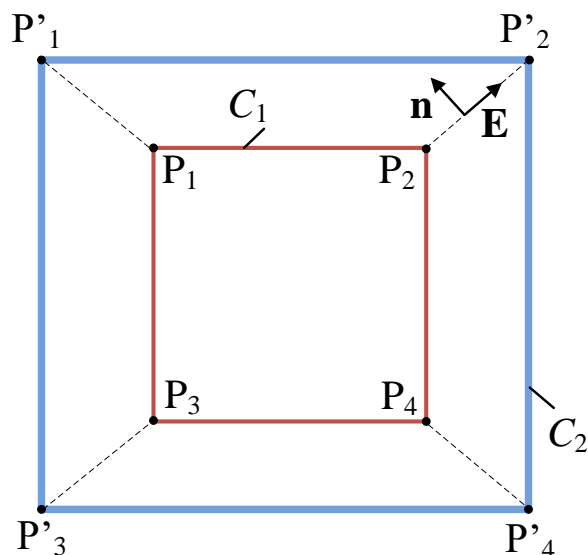


Слика 4.16 Контуре са ознакама 1 и 2 издвојене са дигиталних слика

Уколико бисмо за одређивање деформација контуре искористили претходно описани поступак примене електростатичког поља као резултат бисмо добили расподелу електричног поља, то јест брзине док поступком интеграције брзине добијамо деформације тачака на контури, слика 4.17. Оно што је очекивано је да се тачке темена правоугаоника једне контуре пресликавају у темена друге контуре. Међутим, у нашем случају то очекивање није испуњено (слика 4.17 б). Ово је последица грешке у заокруживању као и коначног броја елемената. Један начин да разрешимо овај проблем је примена регистрације између парова тачака (*Point Matching registration*). На слици 4.18 приказана је контура C_1 са тачкама P_1 , P_2 , P_3 и P_4 као и контура C_2 са тачкама P_1' , P_2' , P_3' и P_4' . У овом случају постављамо ограничење да се тачке P_i , пресликавају у тачке P_i' при чему је $i=1,\dots,4$. Случај можемо проширити на произвољан број тачака.



Слика 4.17. а) Просторна расподела поља деформације тачака на контури б) просторна расподела линија поља деформације



Слика 4.18 Контуре са ознакама 1 и 2 издвојене са дигиталних слика са тачкама на контурама између којих постоји пресликавање

Приказано пресликавање тачака представља додатно ограничење у процесу регистрације, које се задаје као гранични услов код методе коначних елемената, код израчунавања електростатичког поља. Уколико са $\overrightarrow{P_i P'_i}$ (при чему је $i=1, \dots, 4$) означимо векторе који повезују одговарајуће скупове тачака на контурама и са \mathbf{n}_i одговарајуће векторе нормала тада мора бити задовољен услов $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_i = 0$ при чему је \mathbf{E}_i вектор електростатичког поља на сегменту

$P_i P'_i$. Претходни услов се своди заправо на чињеницу да је градијент потенцијала поља дуж нормале на сегмент $\overrightarrow{P_i P'_i}$ у околини самог сегмента један нули:

$$\frac{\partial V_{P_i P'_i}}{\partial n_i} = 0 \quad (4.41)$$

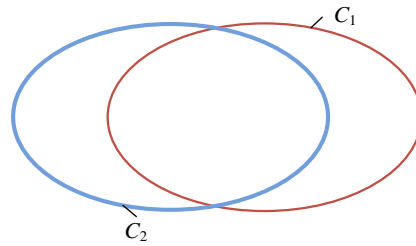
Питање које се поставља у овом тренутку је: на који начин имплементирати овај гранични услов. Један начин је да се у чворовима лево и десно од сегмента $\overrightarrow{P_i P'_i}$ вредности потенцијала буду једнаке при чему је дуж између чворова нормална на сегмент који посматрамо. Овај поступак може да у великој мери повећа сложеност израчунавања и да повећа сложеност алгоритма за генерисање мреже. Други далеко елегантнији приступ је да се овај гранични услов примени тек у поступку израчунавања поља деформација, тако што се израчуна поље потенцијала на сегменту, а затим се дуж нормала лево и десно од сегмента за неки мали просторни инкремент усвоје те исте израчунате вредности за поље чиме се заправо остварује задати гранични услов да је градијент поља сваког сегмента дуж нормале један нули.

4.5.2 Регистрација контура које се секу

Још један специјалан случај код регистрације контура је случај када се оне секу, слика 4.19.

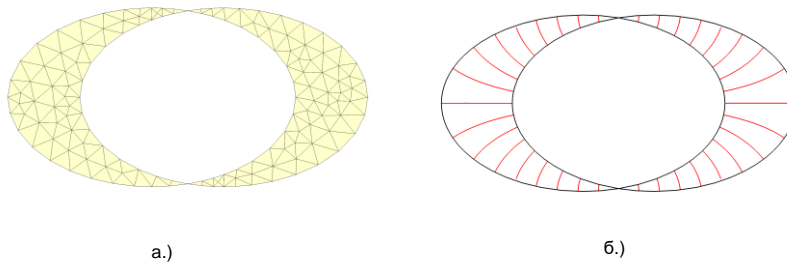
Разлика у односу на претходне случајеве је та што сада не постоји унутрашња и спољашња контура, односно оне нису унапред задате, већ морају да се одреде алгоритамски. У овом случају биће примењен поступак испитивања положаја тачке у односу на

контуру и то на следећи начин: испитајмо најпре положаје тачака прве контуре у односу на другу.



Слика 4.19 Контуре које се секу

Све оне тачке које ово задовоље сада чине скуп тачака C_1' . Исти поступак применимо сада и на другу контуру, а као резултат добијамо скуп тачака. Унутрашња контура је сада $C_1' \cup C_2'$, док је спољашња $(C_1 \setminus C_1') \cup (C_2 \setminus C_2')$.



Слика 4.20 а) Мрежа коначних елемената, б) поље деформација тачака контуре

5 Процена механичких карактеристика ткива применом система за аквизицију и регистрацију слике

5.1. Увод

Анеуризма абдоменалне аорте је обољење које се испољава као локализовано проширење једног дела највећег артеријског крвног суда, [136]. Ово проширење настаје услед постепеног смањивања чврстине и еластичности зида абдоменалне аорте и обично укључује слабост у средњем слоју аорте што доводи до истезања спољашњег слоја. Крв коју срце под притиском пумпа кроз аорту, постепено растеже ослабљени зид и најчешће ствара анеуризматско проширење у облику „балона“ сличног кокошјем јајету. Анеуризма на свом зиду може имати депозите холестерола, калцијума, или малих крвних угрушака, [137].

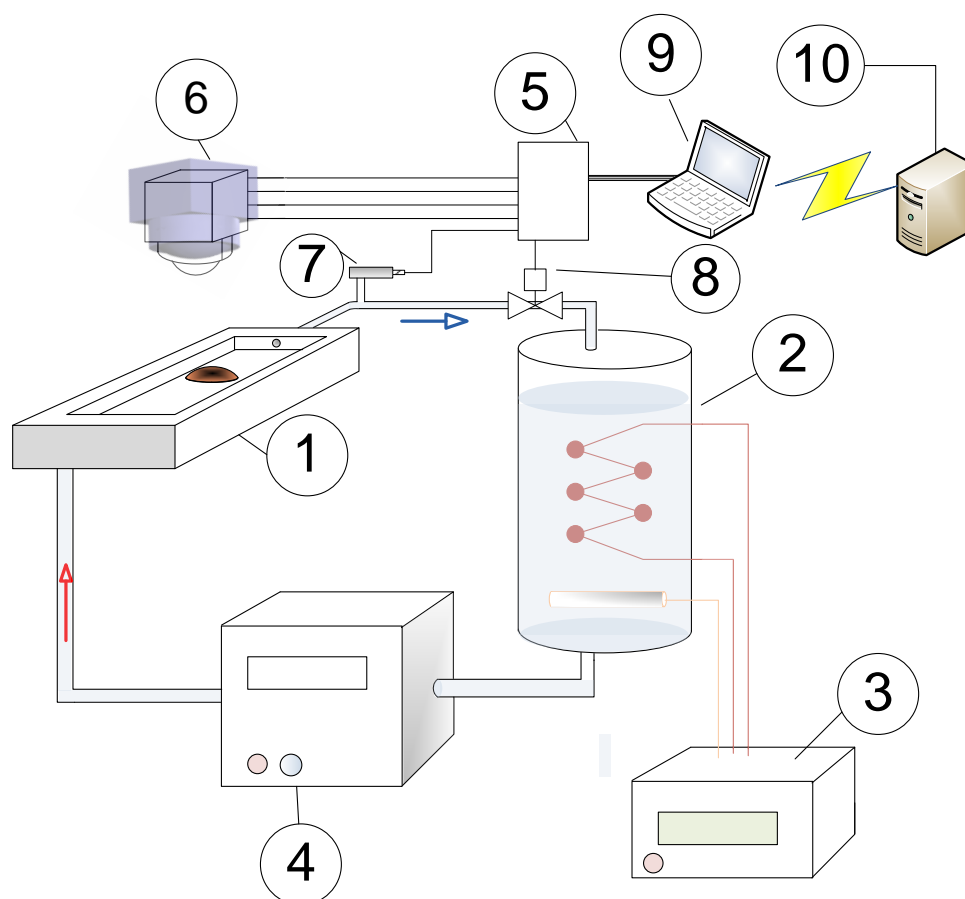
Веома је корисно после операције пацијената одстрањени део крвног суда подвргнути *in vitro*, мерењу механичких параметара као што су моду еластичности, сила пуцања при једноосном или двоосном напрезању и тако даље. Ови подаци унети у историју болести заједно са другим подацима могу послужити у будућности у научно-истраживачке сврхе. Најкобнија компликација овог обољења је пуцање, руптура, анеуризме. То је смртоносно обољење које уколико се одмах не лечи хитном операцијом осуђује болесника на сигурну смрт. Чак 50% пацијената никад и не стигне до лекара који може да му помогне, а од оних који стигну преживи само 50-70%, што је јако велика стопа смртности. Због тога је јако важно предвидети моменат пуцања овог крвног суда како би се пре него се то деси могла урадити планирана операција која има учинак од преко 95%. Снага зида анеуризме, односно њена отпорност на притисак крви је до сада недефинисана вредност, а могла би бити од користи приликом процене ризика од пуцања. Због тога је вредност приказаног експеримента од велике практичне важности.

Постоји низ метода за одређивање механичких параметара ткива који подразумевају истезање ткива крвног суда дуж једног правца и бележење сила и деформација, [138], или у два правца такозвано биаксијално истезање ткива, [139] као и надувавање ткива, [140].

У овом раду биће описан један систем који је реализован за одређивање карактеристика ткива аорте захваћене анеуризмом уз помоћ такозване *Bubble inflated* методе.

5.2. Систем за испитивање механичких карактеристика ткива аорте

Принципијелна шема система за испитивање механичких параметара ткива је приказана на слици 5.1. Систем се састоји од коморе за ткиво, измењивача топлоте, грејача са контролном јединицом, пумпе, система за аквизицију и контролу са камером, сензора притиска, електроventила, рачунара са софтвером за аквизицију и контролу и FTP сервера који служи за архивирање снимљених података.



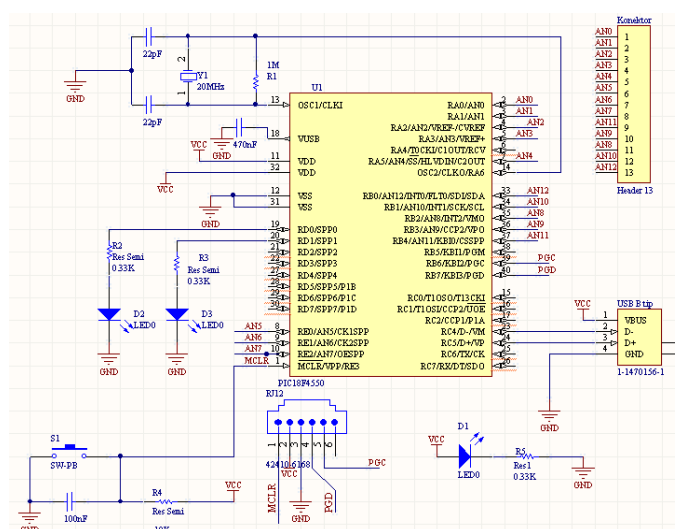
Слика 5.1 Принципијелна шема система за испитивање механичких карактеристика ткива: 1. комора за ткиво, 2. измењивач топлоте, 3. грејач са контролном јединицом, 4. пумпа, 5. јединица за аквизицију и контролу, 6. камера, 7. сензор притиска, 8. електроventил, 9. рачунар са софтвером за аквизицију и контролу, 10. FTP сервер

У експерименту је за процес напрезања (надувавања) узорка ткива као радни флуид коришћен физиолошки раствор. Грејач заједно са измењивачем топлоте има задатак да обезбеди константну температуру раствора од 37°C. Пумпа омогућава транспорт флуида у систему уз константан проток у јединици времена. У измењивачу топлоте се врши складиштење раствора који се ту загрева уз помоћ грејача, а помоћу РТС сензора се врши контрола његове температуре. Радни флуид (раствор) се транспортује кроз систем уз помоћ силиконских црева и цеви због њихове резистивности на хемијске промене и добрих механичких особина. Излаз из контејнера где се налази узорак ткива је контролисан уз помоћ електровентила. Задатак електровентила је да обезбеди промену притиска у току времена и да се на тај начин формира жељена временска функција притиска. У нашем случају коришћена је успонска функција притиска у току времена. Излаз из контејнера је повезан за измењивачем топлоте тако да они заједно за пумпом и силиконским цевима чине један затворени систем. Систем за аквизицију се састоји од камере, сензора притиска, и контролно аквизиционе јединице која обезбеђује комуникацију између РС рачунара и сензора и актуатора.

Камера има задатак да са брзином од 30 фрејмова у секунди бележи положај ткива у простору то јест његове деформације у времену у току пораста притиска флуида који делује на узорак. Резолуција камере је 640x480 пиксела са 96 тачака по инчу. Сензор притиска бележи вредност притиска. Овај податак се чува и користи при каснијим прорачунима механичких параметара ткива али истовремено он служи и за контролу притиска у реалном времену уз помоћ електровентила. Након завршеног

експеримента сви подаци се шаљу на FTP сервер ради безбедног чувања и даље обраде.

Јединица за управљање и аквизицију је део система чији је задатак да све елементе система повеже у једну целину и омогући њихову синхронизацију. Електрична шема ове јединице је приказана на слици 5.2.

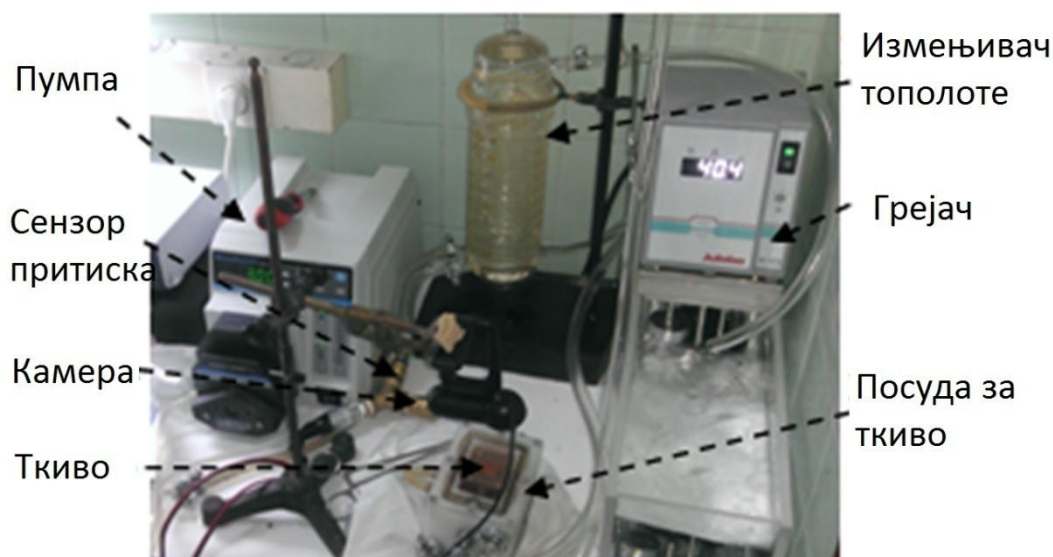


Слика 5.2 Електрична шема управљачко-аквизиционе јединице
 Централни део овог дела система је *Microchip*-ов микроконтролер PIC18F4550. Овај микроконтролер има задатак да обезбеди комуникацију између рачунара и сензора и актуатора путем USB комуникације и да врши дигитално-аналогну конверзију сигнала са сензора притиска који се затим прослеђује апликацији за аквизицију података на рачунару.

5.3. Експериментални део

Извођење експеримента захтева да се цео систем доведе у почетно стање. Први корак је свакако постављање узорка ткива у

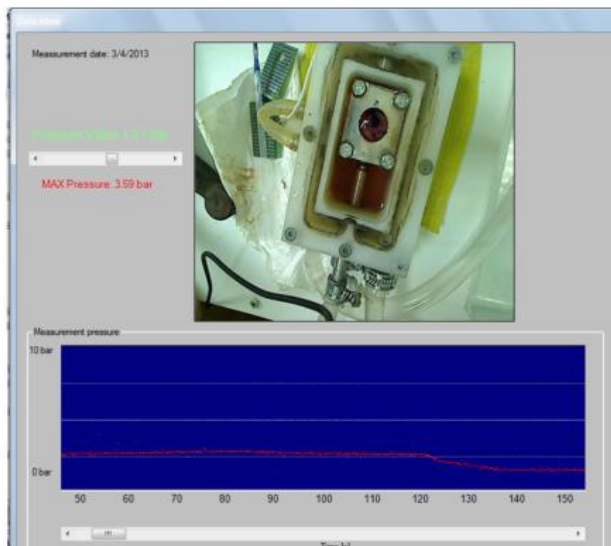
контејнер преко кружног отвора. Ткиво мора бити добро причвршћено за ивице кружног отвора да не би дошло до цурења физиолошког раствора из коморе контејнера. Затим је неопходно избацивање ваздуха из система и загревање 0,9% физиолошког раствора на температуру од 37°C. На слици 5.3 је приказан изглед читавог система пројектованог за овај експеримент.



Слика 5.3 Систем за испитивање механичких карактеристика ткива

Када су испуњени сви почетни услови започиње се са експериментом уз помоћ одговарајуће апликације која помоћу USB интерфејса комуницира са управљачко-аквизиционом јединицом, а она даље са осталим деловима система. Управљачка јединица тригерује покретање пумпе заједно са камером и бележењем вредности притиска у одговарајући фајл на рачунару. У овом експерименту је коришћена функција притиска као линеарно растућа функција времена, при чему је почетна вредност притиска једнака нули. Услед пораста притиска долази до

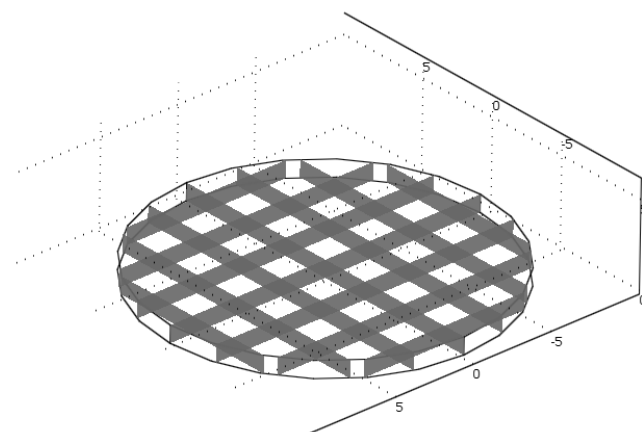
деформација ткива што се бележи камером, а рачуарска апликација омогућава праћење деформација и вредности притиска у реалном времену. На слици 5.4 можемо видети прозор програма за аквизицију слике и притиска.



Слика 5.4 Изглед прозора апликације за аквизицију података у експерименту.

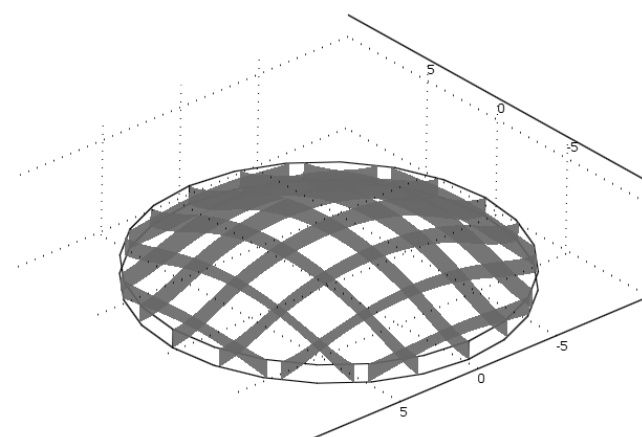
5.4. Механички модел ткива аорте у експерименту

Проблем одређивања механичких параметара ткива аорте је заправо успостављање везе између измерених вредности притиска и деформације ткива. За време експеримента померања и деформације ткива настају као последица деловања притиска флуида на њега. На слици 5.5 су приказани попречни пресеци недеформисаног ткива у већем броју вертикалних равни.



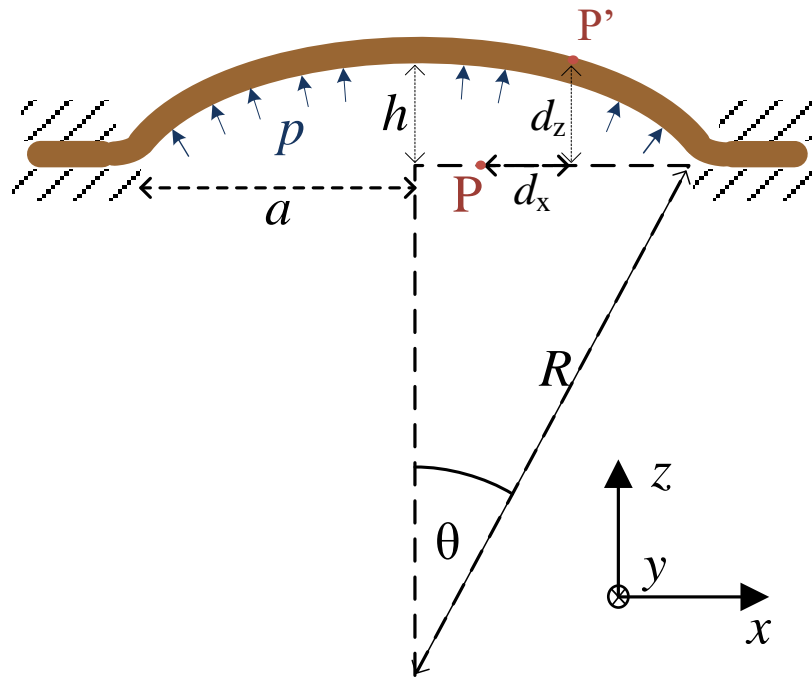
Слика 5.5 Мрежа попречних пресека недеформисаног узорка ткива

Када се на ткиво примени притисак флуида са доње стране долази до деформације мреже што је приказано на слици 5.6.



Слика 5.6 Деформисана мрежа узорка ткива након примене притиска

На слици 5.7 је приказан попречни пресек деформисаног ткива у једној вертикалној равни.



Слика 5.7 Облик попречног пресека деформисаног ткива

Уколико са h означимо максимално померање централне тачке ткива, а са R полупречник кривине настале деформацијом тада је задовољена једнакост:

$$h = R(1 - \cos \theta) \quad (5.1)$$

где је ϑ угао кружног исечка.

Вредности површина деформисаног и недеформисаног дела су редом:

$$S = R^2 \pi \sin^2 \theta \quad (5.2)$$

$$S' = 2R\pi \cdot h = 2R\pi \cdot R(1 - \cos \theta) = 4R^2 \pi \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (5.3)$$

Деформација узорка је дата релацијом:

$$\varepsilon = \frac{R\theta - R \sin \theta}{R \sin \theta} \quad (5.5)$$

док је веза између напона и деформације дата изразом:

$$\sigma = \frac{E}{1 - \nu} \varepsilon \quad (5.6)$$

при чему је E -Јангов модул еластичности, а ν је Поасонов коефицијент.

Уколико са a означимо вредност полупречника недеформисаног узорка ткива тада је угао добијеног кружног исечка након деформације дат релацијом:

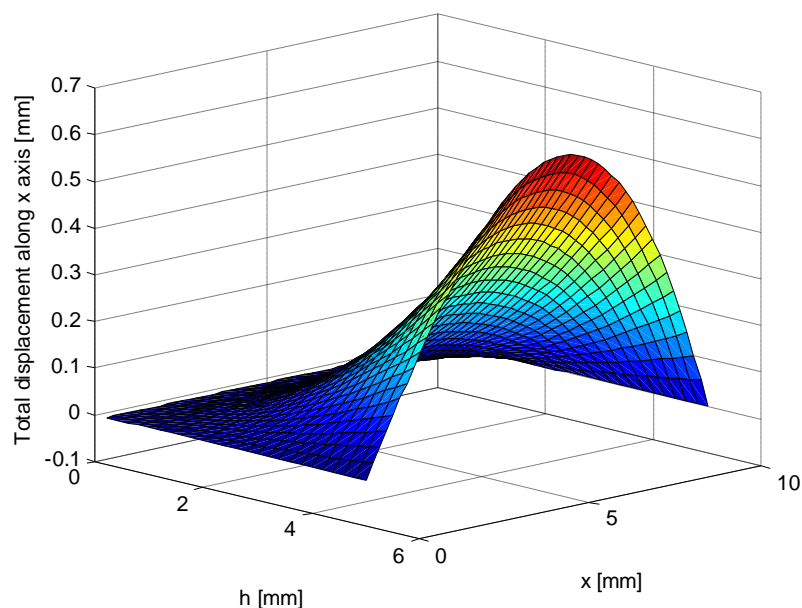
$$\theta = \pi - 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{a}{h} \quad (5.7)$$

Сада можемо да израчунамо вертикално и хоризонтално померање сваке тачке дуж радијалног правца. Уколико претпоставимо да је радијална симетрија и изотропија задовољена за произвољну тачку која је удаљена за растојање x од центра узорка на основу (5.2) и (5.3) укупна померања су:

$$d_x = \frac{h}{1 - \cos \theta} \cdot \sin \left(\theta \cdot \frac{x}{a} \right) - x \quad (5.8)$$

$$d_z = \frac{h}{1 - \cos \theta} \cdot \left[\cos \left(\theta \cdot \frac{x}{a} \right) - \cos \theta \right] \quad (5.9)$$

На слици 5.8 приказано је хоризонтално померање дуж радијалног правца. Као што је приказано у једначини (5.8), ова вредност представља функцију растојања тачке од центра ткива и максималног померања центра које смо претходно обележили са h .



Слика 5.8 Укупно померање дуж радијалног правца као функција координате x и максималног померања центра h

У поступку мерења померања тачака на кружном узорку можемо добити померања појединих означених тачака дуж x - осе која смо означили са d_x . Тако се поступак одређивања деформација целог узорка своди на успостављању везе померања неке произвољне тачке на узорку d_x са одговарајућим полупречником кривина деформисаног узорка и одговарајућим углом θ .

С обзиром да не постоји аналитичка релација која успоставља ову везу, проблем је најбоље решити применом одговарајућих нумеричких метода (у овом случају смо се одлучили за примену методе коначних елемената).

Као улазне величине задајемо притисак p и материјалне карактеристике узорка ткива: Јангов модул еластичности и Поасонов коефицијент, док посматрамо вредности померања дуж радијалног правца.

5.5. Обрада резултата мерења

Један од основних задатака процене механичких особина ткива је упаривање измерених података притиска са измереним вредностима померања. Процена деформација се остварује на основу контролних тачака на површини узорка ткива, односно њиховог померања у радијалном правцу. Код бележења померања једном камером идеална позиција камере је када је раван у коме се налази сензор слике практично потпуно паралелан равни у којој се налази узорак ткива. У реалном експерименту ово је јако тешко остварљиво. Из тог разлога се приступа поступку корекције слике. Корекција се састоји у примени одговарајуће трансформације која елиминише ефекте непрецизног позиционирања камере. За трансформацију се користи пројектовна матрица A која сваки пискел некориговане слике са координатама u, v трансформише у нове координате u', v' помоћу следеће релације:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Елементи матрице A се добијају када се изврши упаривање слика добијених камером у реалном експерименту и слика које би се добиле када би камера била идеално постављена. На слици 5.10 можемо видети изглед слика експеримента добијених пре и након примене одговарајуће трансформације. Након примене трансформације узорак ткива се трансформише у правилан круг што у стварности он и јесте, док пре примене трансформације нисмо имали круг већ елипсу што је последица пројекције узорка на сензор слике.

Ако са \mathbb{I} означимо почетну слику, са \mathbb{J} слику коју желимо да добијемо након примене трансформације, тада параметре трансформације добијамо у поступку минимизације разлике квадрата:

$$\sum_i (\mathbb{I}(\mathbf{Ax}_i) - \mathbb{J}(\mathbf{x}_i))^2 \quad (5.11)$$

при чему \mathbf{x} представља скуп пиксела који чине круг који ограничава област коју заузима ткиво, слика 5.10.

Елементи матрице трансформације се одређују у итеративном поступку на основу релације:

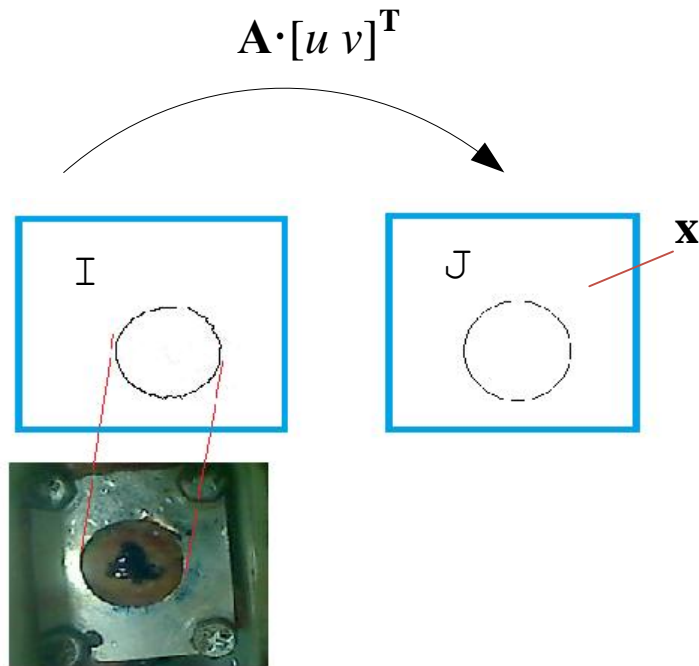
$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n - (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{b} \quad (5.12)$$

где је \mathbf{a} матрица колоне елемената пројективне трансформације

$\mathbf{a} = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}, \dots, a_{33}]^T$, док су \mathbf{b} и \mathbf{T} матрице дате релацијама:

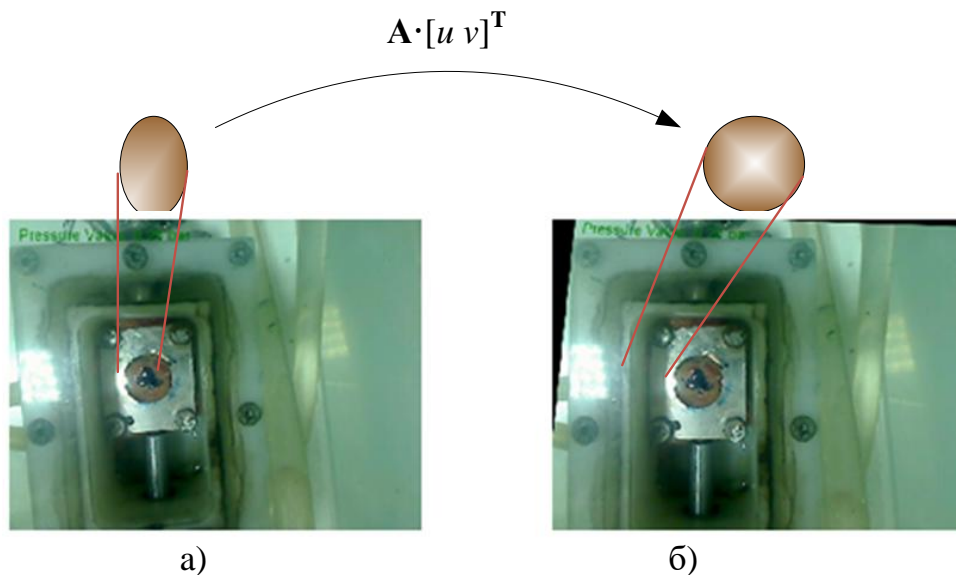
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}(\mathbf{Ax}_1) - \mathbb{J}(\mathbf{x}_1) \\ \mathbb{I}(\mathbf{Ax}_1) - \mathbb{J}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbb{I}(\mathbf{Ax}_1)}{\partial a_{11}} & \frac{\partial \mathbb{I}(\mathbf{Ax}_1)}{\partial a_{12}} & \dots & \frac{\partial \mathbb{I}(\mathbf{Ax}_1)}{\partial a_{33}} \\ \frac{\partial \mathbb{I}(\mathbf{Ax}_1)}{\partial a_{11}} & \frac{\partial \mathbb{I}(\mathbf{Ax}_1)}{\partial a_{12}} & \dots & \frac{\partial \mathbb{I}(\mathbf{Ax}_1)}{\partial a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (5.14)$$



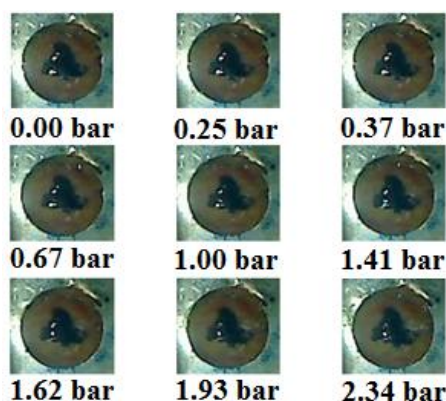
Слика 5.9 Издвојен изобличен регион и корекција уз помоћ правилног круга

Након добијања тражених параметара могуће је применити добијену трансформацију на почетну слику, слика 5.11.



Слика 5.10 Слика узорка ткива а) пре и б) након примене корекционе трансформације

Када је извршена корекција над сликом, следећи корак обраде је издвајање региона слике на месту где се налази ткиво. На слици 5.12 можемо видети девет различитих слика које представљају изглед узорка у неким тренуцима експеримента са одговарајућим измереним вредностима притиска за те временске тренутке.



Слика 5.11 Узорак ткива са одговарајућим вредностима притиска

За праћење померања обојеног дела ткива у току времена коришћен је најпре алгоритам за сегментацију слике, [142]. За ову примену најпогоднијим се показао алгоритам заснован на расту региона (енгл. *Region growth algorithm*). Алгоритам се састоји у спајању суседних пиксела са сличном бојом у већу целину при чему се креће од неког почетног пиксела који се у овом случају налази у центру узорка. Све тачке обојеног дела се крећу у радијалном правцу од центра круга, док једино за тачке на ободу овог дела можемо да одредимо померања. Описани алгоритам се може математички приказати у следећој форми:

$$R = \{I_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\}$$

$$g = \{n/2, m/2\}$$

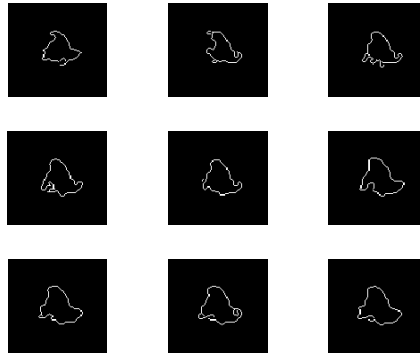
$$\begin{aligned}
 R = R \cup \{R_{i,j} = I_{i,j}\}, g = g \cup \{i,j\} \setminus \{p,k\} \leftarrow (\exists p,k) (|I_{i,j} - R_{p,k}| < \epsilon) \\
 |g| > 0 \\
 (p,k) \in g \\
 |i - p| \leq 1 \\
 |j - k| \leq 1 \\
 i, j, p, k \in N
 \end{aligned}$$

при чему I означава слику димензија $n \times m$, R је скуп пиксела који сачињавају регион који треба издвојити, ϵ је праг детекције док је g скуп пиксела који чине границу региона, док је $|g|$ број елемената овог скупа. На почетку се овом скупу додели средишњи пиксел слике, а затим се у свакој новој итерацији брише по један пиксел, а додају његови суседни пиксели. Поступак сегментације је завршен када g постане празан скуп. Као резултат овог поступка добијамо бинарну слику са издвојеним регионом од интереса, слика 5.12.



Слика 5.12 Издвојени регион поступком сегментације слике

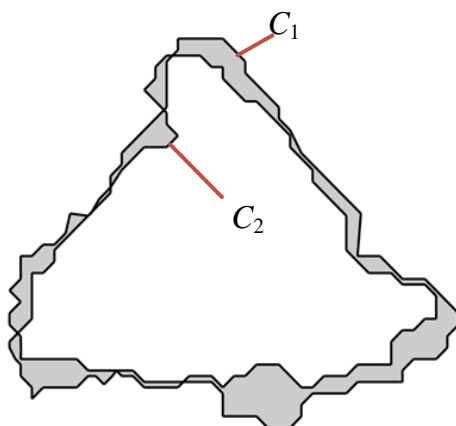
После примене сегментације наредни корак је издвајање контуре обојеног дела слике применом алгоритама детекције ивица. За овај пример коришћен је Кенијев оператор за детекцију ивица, слика 5.13.



Слика 5.13 Границе обојеног дела слике добијене након примене оператора за детекцију ивица

Када су одређене границе контура, неопходно је одредити пресликавање, односно трансформацију која повезује тачке између две контуре у неким различитим временским тренуцима. Крајњи циљ је да се налажењем овог пресликавања одреди поље деформације то јест тачно померање за сваку тачку контуре. У општем случају овде се ради о некоректно постављеном проблему, односно ово је класичан пример регистрације слике. Овај проблем има велики број решења и наравно постоји велики број техника које су предложене за његово решавање што је већ приказано у ранијим поглављима. Оно што ограничава број решења је то да трансформација која описује овај проблем мора да задовољи неколико основних захтева, а то су пре свега да буде инверзна, да буде један на један односно бијекција и да чува топологију слике.

Регистрација контуре се може обавити применом Лапласове једначине (4.13), при чему важе гранични услови $V(x, y)_{x, y \in C_1} = V_0$ и $V(x, y)_{x, y \in C_2} = 0$ где су C_1 и C_2 контуре које учествују у регистрацији, слика 5.14.



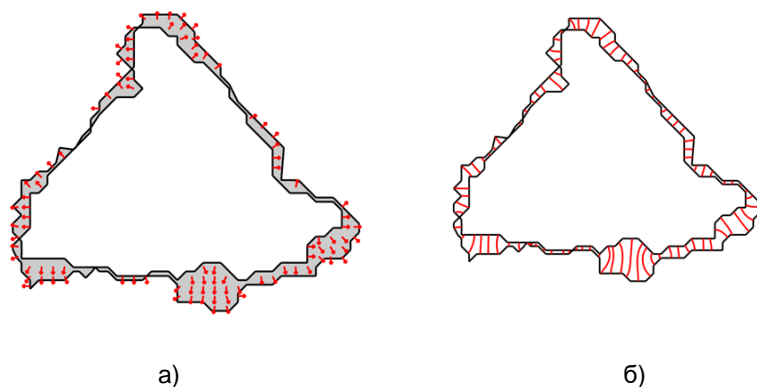
Слика 5.14 Контуре које учествују у регистрацији посматране као еквипотенцијалне површи

Контуре су посматране као еквипотенцијалне површине, а веза између тачака на контурама је успостављена помоћу линија електростатичког поља које је дато релацијом (4.14).

Овај приступ обезбеђује да је пресликавање између тачака на контури један на један, постојање инверзне конзистентности, као и очување топологије.

Лапласова једанчина је решена коришћењем методе коначних елемената минимизацијом енергетског функционала датог релацијом (4.20).

На слици 5.16 је приказано поље померања као поље брзина за тачке контуре применом претходно описане процедуре.



Слика 5.15 Приказ добијених померања за тачке контуре а) вектор поља деформација, б) линије поља деформација

5.6. Резултати

Коришћење померања добијених у поступку регистрације слике омогућава нам да извршимо процену Јанговог модула еластичности ткива аорте.

У овом случају претпостављено је да се Јангов модул мења по две просторне осе x и y . Дебљина узорка је доста мања од остале две димензије, па се може претпоставити да је Јангов модул константан дуж ове осе.

Просторна зависност Јанговог модула је апроксимирана помоћу модификованог Фуријеовог реда:

$$E_v(x, y) = E_0 \left| A_0 + \sum_{k=1}^9 A_k \sin \left(2\pi k \frac{x}{d} + \varphi_k \right) + \sum_{k=1}^9 B_k \sin \left(2\pi k \frac{y}{d} + \psi_k \right) \right| \quad (5.15)$$

где E_0 узима вредност од 1 МПа (средња вредност Јанговог модула на основу [141]), а A_i , B_i , φ_i и ψ_i су амплитудски и фазни коефицијенти редом који би требали да се одреде у поступку оптимизације. Коришћењем методе више параметарског

градијентног спуштања ови коефицијенти су одређени у итеративном поступку:

$$D_i^{k+1} = D_i^k - \gamma \frac{\partial \|\hat{\mathbf{x}}_c - \mathbf{x}_c\|}{\partial D_i} \quad (5.16)$$

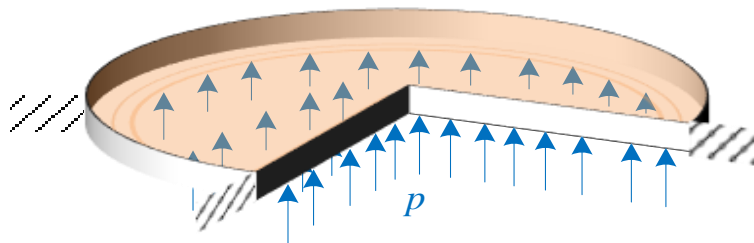
где D_i^k - представљају вредности непознатих коефицијената у k -тој итерацији, док $\|\hat{\mathbf{x}}_c - \mathbf{x}_c\|$ представља суму разлика квадрата између измерених померања и померања добијених у симулацији, док је λ релаксациони параметар. Узорак ткива је моделован као цилиндар пречника 10 mm и одговарајуће дебљине са граничним условима приказаним на слици 5.16. Поступак градијентног спуштања код вишепараметарског рачунања материјалних карактеристика ткива, премда најлогичнији, избор није погодан јер захтева честу ручну асистенцију због дивергенције или достизање локалних минимума. Из тог разлога један од поступака оптимизације код кога су ови недостаци превазиђени у највећој мери је генетски алгоритам ГА.

Принципијелна шема поступка оптимизације дата је на слици 5.17. У првом кораку се генеришу почетни елементи популације. Сваки члан популације је један вектор који се састоји од материјалних параметара ткива (Јангов модул, Поасонов коефицијент или интерполациони коефицијенти који ће да опишу просторну зависност параметара). За сваки члан популације примени се МКЕ и одреди се одговарајућа грешка померања тачака. Наредни корак је примена ГА, при чему се над елементима популације врши селекција, укршатање и мутација чиме се креирају нови елементи, за које се поново примени МКЕ. Они елементи који показују боље особине у смислу мање грешке код одређивања померања се задржавају у популацији и даље се користе за њено ажурирање у

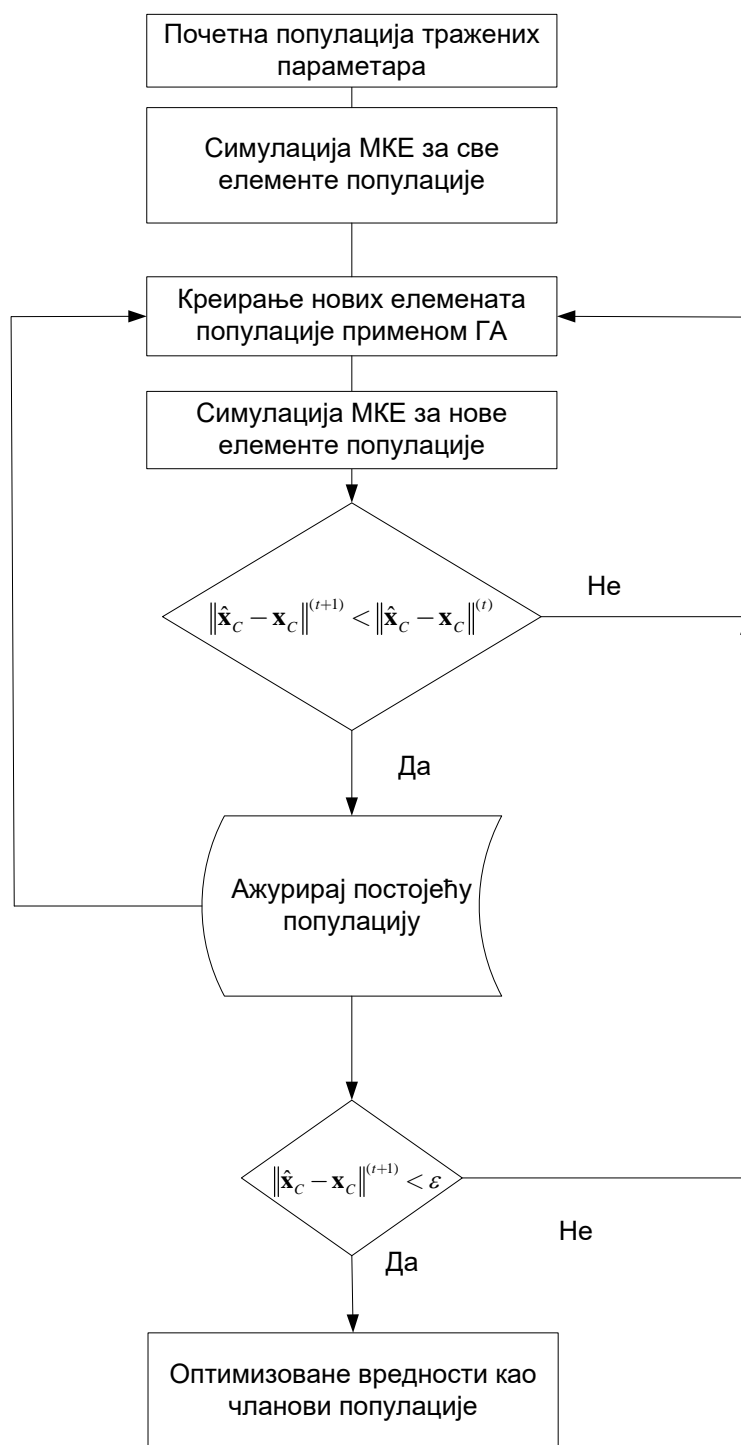
следећим корацима, док се елементи популације који праве највећу грешку бришу. Поступак се понавља све док грешка не буде испод неког задатог прага.

Када су у питању појединачни сегменти ГА први корак у примени овог алгоритма је селекција где се од постојеће популације елемената бирају чланови са најбољим својствима,

то јест са најмањом вредношћу грешке $\|\hat{x}_c - x_c\|$. Процес укрштања се састоји у томе да се за сваки параметар засебно између чланова популације врши размена секвенце битова, тако што се битови у једном елементу популације замене са битовима другог елемента почевши од неке случајно изабране позиције у бинарном запису. На крају процес мутације се састоји у томе да се на случајном месту у бинарном запису промени неки бит. Поступак се понавља у сваком наредном кораку, док се не добије елемент који има најбоље особине, што је у нашем случају најмање одступање измерене и израчунате вредности померања скупа тачака.

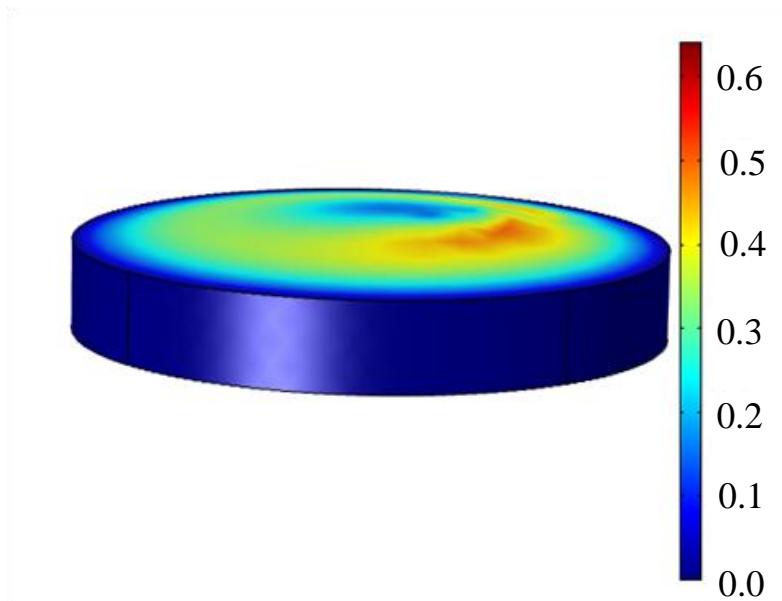


Слика 5.16 Модел ткива са граничним условима



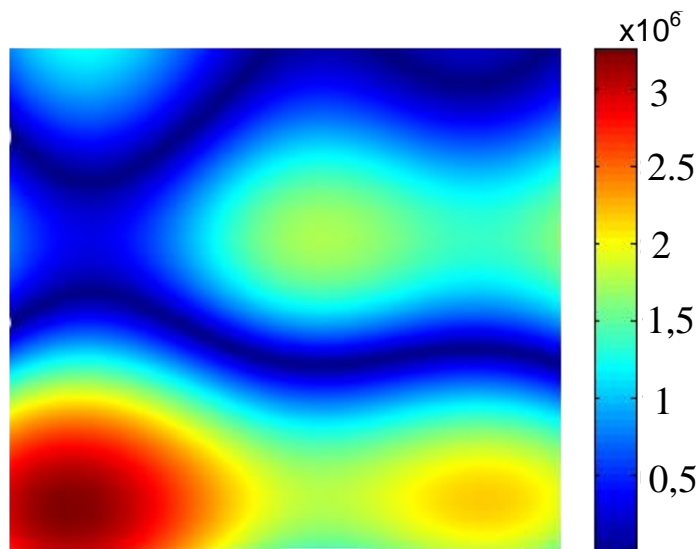
Слика 5.17 Принципијелна шема оптимизације материјалних карактеристика применом ГА

На слици 5.18 приказане су вредности за укупно померање узорка ткива добијених МКЕ на крају поступка оптимизације.



Слика 5.18 Укупно померање израчунато у симулацији у [mm].

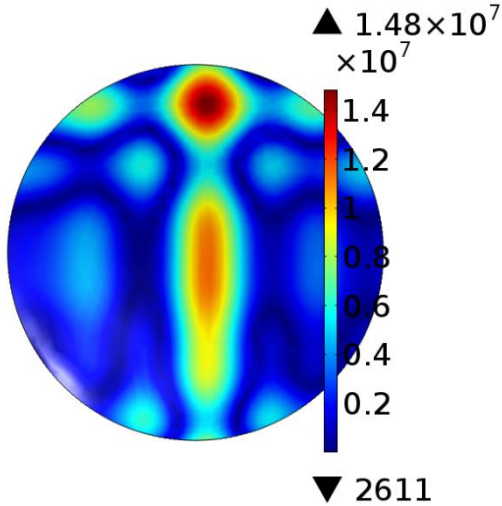
На слици 5.19 су приказане вредности Јанговог модула еластичности као функције просторне координате за узорак ткива димензија 10x10 mm при чему је за вредност Поасоновог коефицијента узета вредност 0.45.

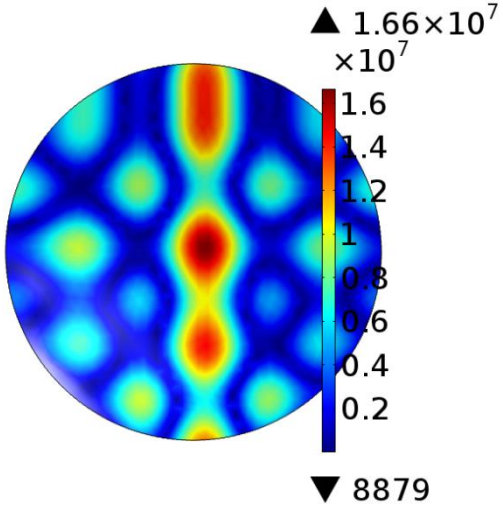
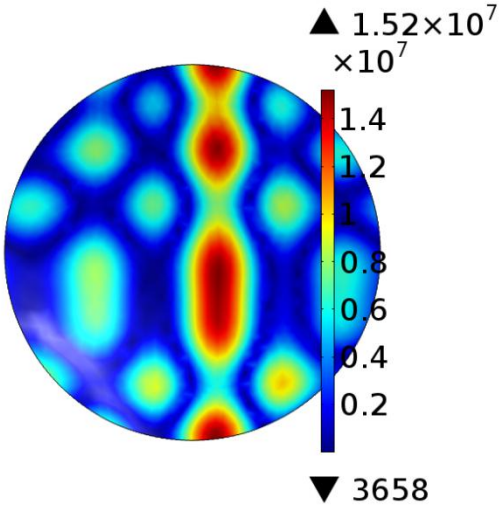
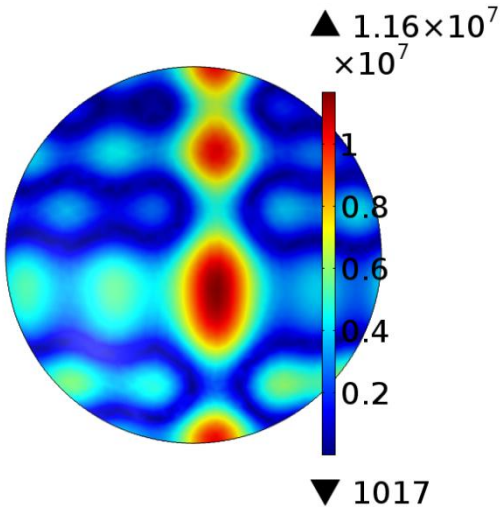


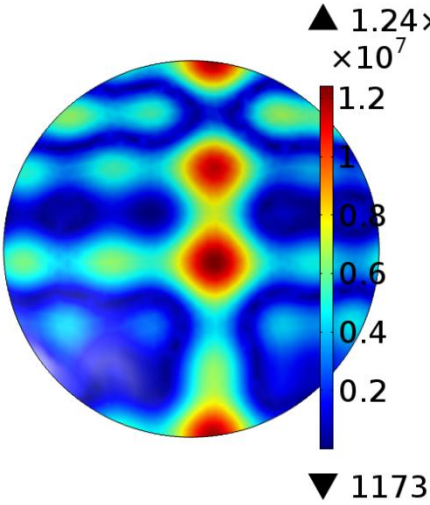
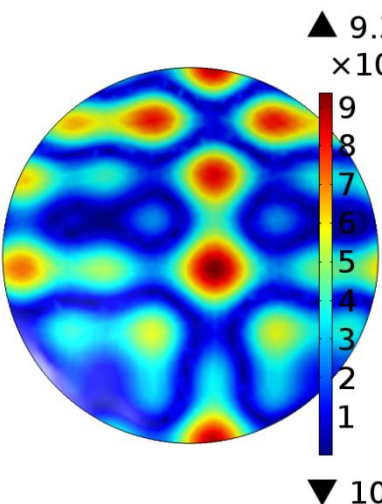
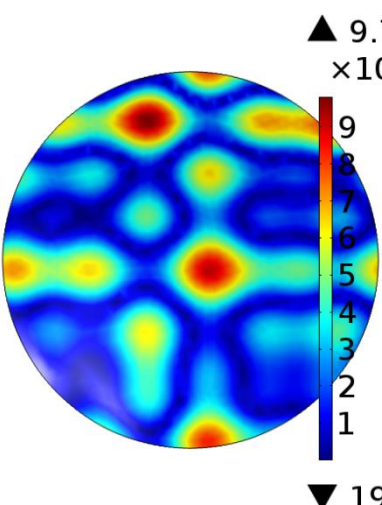
Слика 5.19 Просторна расподела Јанговог модула еластичности на узорку ткива у [Pa]

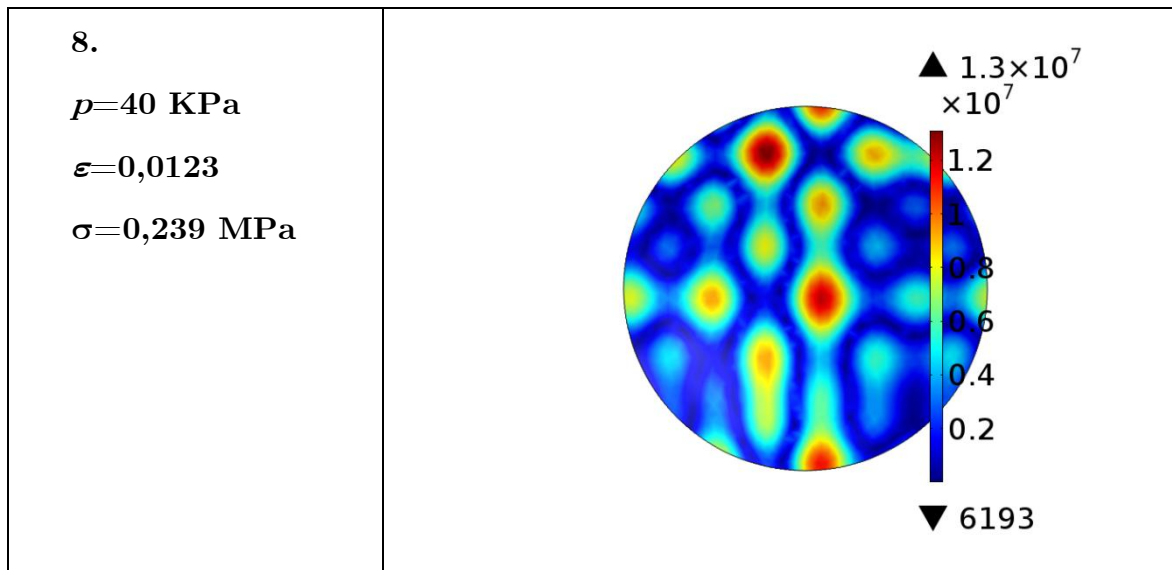
Описани поступак смо сада спровели на другом узорку ткива при чему смо посматрали вредности померања и Јангових модула за више временских тренутака. У табели 5.1 приказана је просторна расподела Јанговог модула у различитим временски тренуцима заједно са вредностима примењеног притиска, нормалне деформације и напона у равни y , конкретно у тачки која се налази у центру узорка на његовој површни. Раван је узета према слици 5.7.

Табела 5.1 Просторна расподела Јангових модула узорка ткива у различитим временским тренуцима током експеримента: p -притисак, ε -деформација тачке у центру дуж вертикалне осе, σ -напон дуж хоризонталне осе

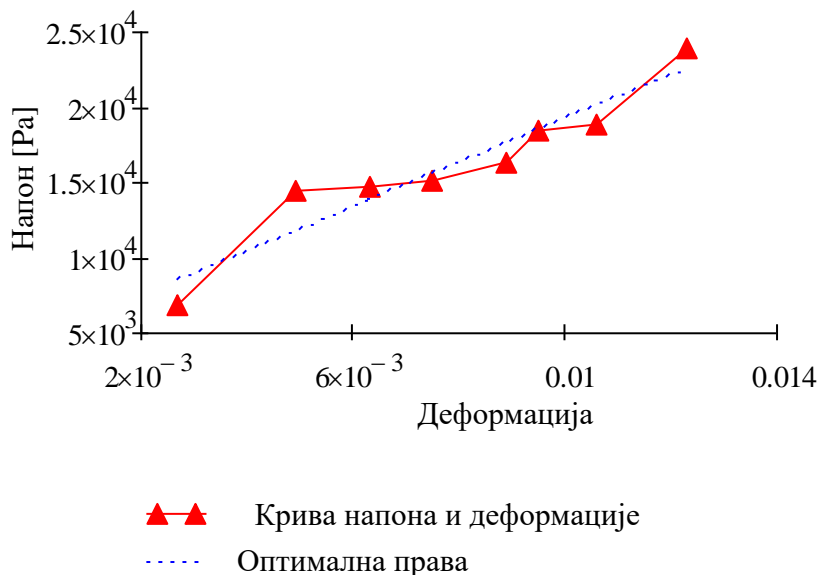
Временски тренутак са одговарајућим параметрима	Просторна расподела Јанговог модула [Pa]
1. $p=3$ КПа $\varepsilon=0,0027$ $\sigma=0,069$ МПа	 <p style="text-align: right;">▲ 1.48×10^7 $\times 10^7$</p> <p style="text-align: right;">1.4 1.2 1 0.8 0.6 0.4 0.2</p> <p style="text-align: right;">▼ 2611</p>

<p>2.</p> <p>$p=8$ КПа</p> <p>$\varepsilon=0,0049$</p> <p>$\sigma=0,145$ МПа</p>	 <p>▲ 1.66×10^7 $\times 10^7$</p> <p>1.6 1.4 1.2 1 0.8 0.6 0.4 0.2</p> <p>▼ 8879</p>
<p>3.</p> <p>$p=13$ КПа</p> <p>$\varepsilon=0,0063$</p> <p>$\sigma=0,148$ МПа</p>	 <p>▲ 1.52×10^7 $\times 10^7$</p> <p>1.4 1.2 1 0.8 0.6 0.4 0.2</p> <p>▼ 3658</p>
<p>4.</p> <p>$p=20$ КПа</p> <p>$\varepsilon=0,0075$</p> <p>$\sigma=0,152$ МПа</p>	 <p>▲ 1.16×10^7 $\times 10^7$</p> <p>1 0.8 0.6 0.4 0.2</p> <p>▼ 1017</p>

<p>5.</p> <p>$p=25$ КПа</p> <p>$\varepsilon=0,0089$</p> <p>$\sigma=0,163$ МПа</p>	 <p>▲ 1.24×10^7 $\times 10^7$</p> <p>1.2 1 0.8 0.6 0.4 0.2</p> <p>▼ 1173</p>
<p>6.</p> <p>$p=31$ КПа</p> <p>$\varepsilon=0,0095$</p> <p>$\sigma=0,185$ МПа</p>	 <p>▲ 9.33×10^6 $\times 10^6$</p> <p>9 8 7 6 5 4 3 2 1</p> <p>▼ 1096</p>
<p>7.</p> <p>$p=37$ КПа</p> <p>$\varepsilon=0,0106$</p> <p>$\sigma=0,189$ МПа</p>	 <p>▲ 9.78×10^6 $\times 10^6$</p> <p>9 8 7 6 5 4 3 2 1</p> <p>▼ 197</p>



На основу израчуантних вредности за Јангов модул као и примењеног притиска можемо добити напон и деформацију било које тачке помоћу симулације. На основу ових вредности можемо да нацртамо криву зависности напона од деформације која је приказана на слици 5.20.



Слика 5.20 Крива зависности напона и деформације и оптимална права

Кроз тачке на кривој напон-деформација можемо да нацртамо оптимлану праву на основу разлике најмањих квадрата чији коефицијент правца одражава линеарну везу између напона и деформације и који је једнак $E/(1-\nu)$, на основу чега долазимо до линеарног Јанговог модула еластичности за ткиво који за дати случај износи 2.66 МПа. Добијени резултат је у складу са подацима из литературе [143] и [144] јер се Јангов модул уобичајено креће у границам од 0,5 МПа до 10 МПа.

6 Примена алгоритама регистрације слике код анализе хода

6.1. Увод

Спортске активности као и свакодневне рутине као што су ходање, стајање, трчање и скокови изазивају релативно велике деформације и оптерећење у зглобу колена. Све ове активности у дужем временском периоду могу да изазову повреде као и деградације зглобова, хрскавице, менискуса и костију.

Познавање параметара као што су деформације, померања и напони (нормалних и смичућих) у зглобу колена је од пресудног значаја код биомеханичких студија јер нам даје бољи увид у механизам деградације зглоба колена и истовремено нам даје потпунију информацију о могућем начину лечења и третмана. Унутрашња напрезања која се јављају у зглобу колена зависе од великог броја параметара од којих су најзначајнији: спољашње напрезање које се са стопала преноси на зглоб колена што је у

корелацији са телесном масом, силом затезања која се развије у лигаментима као и силом коју развијају мишићи.

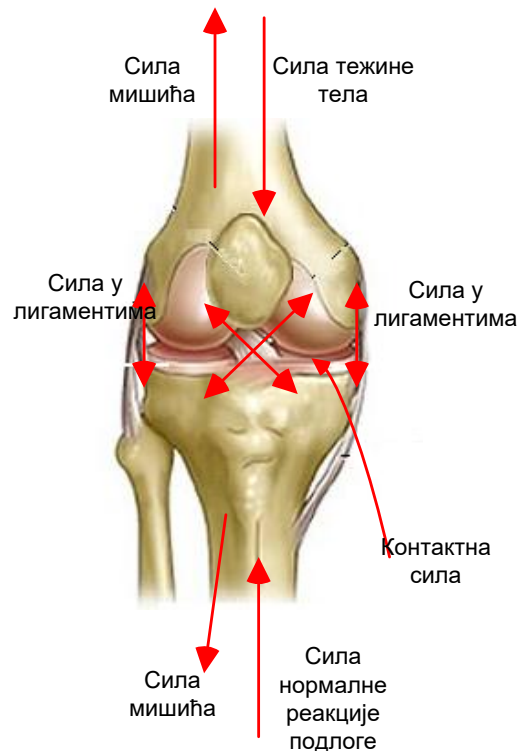
У раду [145] је описан начин за одређивање напрезања у зглобу колена уградњом имплантата. Ова метода, иако веома поуздана, истовремено је и веома инвазивна и практично није примењива код великих студија. С обзиром да директно мерење напрезања захтева уградњу имплантата, највећи број метода за анализу оптерећења у колону се заснива на примени одговарајућег биомеханичког модела. У [146] је коришћена регистрација између флуороскопских слика и компјутерског модела колена. Најпопуларније методе се заснивају на коришћењу СТ и MRI слика у комбинацији са *force plate* платформом и инфрацрвеним рефлектујућим маркерима [147], [148]. Развој различитих врста сензора попут акцелерометара [149] омогућио је њихову све већу примену у анализи покрета. Примена акцелерометара омогућава одређивање углова између сегмената доњих екстремитета. Овај приступ захтева додатну обраду сигнала при чему је грешка и до шест степени. Побољшање уз наравно повећање сложености обраде сигнала може се постићи комбинацијом акцелерометра и жироскопа и гониометра [150], [151] и [152].

У раду [153] је приказана метода за одређивање напона у колону у току стајања и клечања. Као улазни подаци коришћене су MRI слике на основу којих је направљен геометријски модел уз помоћ комерцијалног софтверског пакета MIMICS. У овој студији су установљене разлике у регионима високих напрезања код стајања и клечања. Закључак овог истраживања је да је Вон Мизесов напон и контактни притисак на хрскавицу већи код клечања него код стајања. У студији [154] су коришћени СТ слике колена за

време статичког оптерећења за одређивање деформација хрскавице и померање менискуса колена у току различитих временских тренутака у току стајања и њихово поређење са 3D моделом коначних елемената за специфичног пацијента. Резултати ових експеримената су показали да се хрскавица до 80% своје максималне деформације деформише брзо, а након тога наставља да се деформише споро. У раду [155] је коришћена MRI слика десног колена двадесетседмогодишњег мушкарца за одређивање накнадних промена у херметизацији флуида колена помоћу компјутерског модела. Резултати ових истраживања указују на прерасподелу напона унутар ткива и премештање оптерећења које ствара притисак течности на матрицу ткива.

6.2. Механички модели колена

Кретање зглоба колена представља сложено кретање које се састоји из translације и ротације. Основни делови колена који учествују у кретању су фемур, тибија и патела. Доминантне силе које делују у зглобу колена су сила тежине тела и нормална реакција подлоге које делују у супротним смеровима, слика 6.1.



Слика 6.1 Силе у зглобу колена

У модел су укључене и силе мишића као и контактна сила између фемура и тибие. Једначине равнотеже за силе и моменте су дате релацијама:

$$\mathbf{F}_r + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_{p1} \cdot \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{p2} \cdot \mathbf{N}_2 + \sum_{i=1}^7 \mathbf{F}_i = 0 \quad (6.1)$$

$$\mathbf{M}_r + \mathbf{F}_r \times \mathbf{P}_r + \mathbf{F}_b \times \mathbf{P}_b + \mathbf{F}_{p1} \cdot \mathbf{N}_1 \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{F}_{p2} \cdot \mathbf{N}_2 \times \mathbf{P}_2 + \sum_{i=1}^7 \mathbf{F}_i \times \mathbf{V}_i = 0 \quad (6.2)$$

где је \mathbf{F}_r сила нормалне реакције подлоге, \mathbf{F}_b је сила тежине тела, \mathbf{F}_{p1} и \mathbf{F}_{p2} су две силе контаката док су \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 одговарајуће нормале, \mathbf{F}_i ($i=1, \dots, 7$) су силе лигамената и капсуле док је \mathbf{M}_r момент у колелу око z -осе, док су: $\mathbf{P}_r, \mathbf{P}_b, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ и \mathbf{V}_i ($i=1, \dots, 7$) одговарајући вектори положаја [157]. Код механичког моделирања колена, фемур и тибиа могу бити представљени као крута тела због чињенице да су њихове деформације занемарљиве у односу

на релативно велике деформације хрскавице и лигамената. Такође, поред наведених елемената у колену постоји и течност синовија чији је задатак да смањи трење између површине хрскавице и менискуса.

Када је у питању модел саме хрскавице она може бити посматрана као чврсто тело са линеарном зависношћу између напона и деформација.

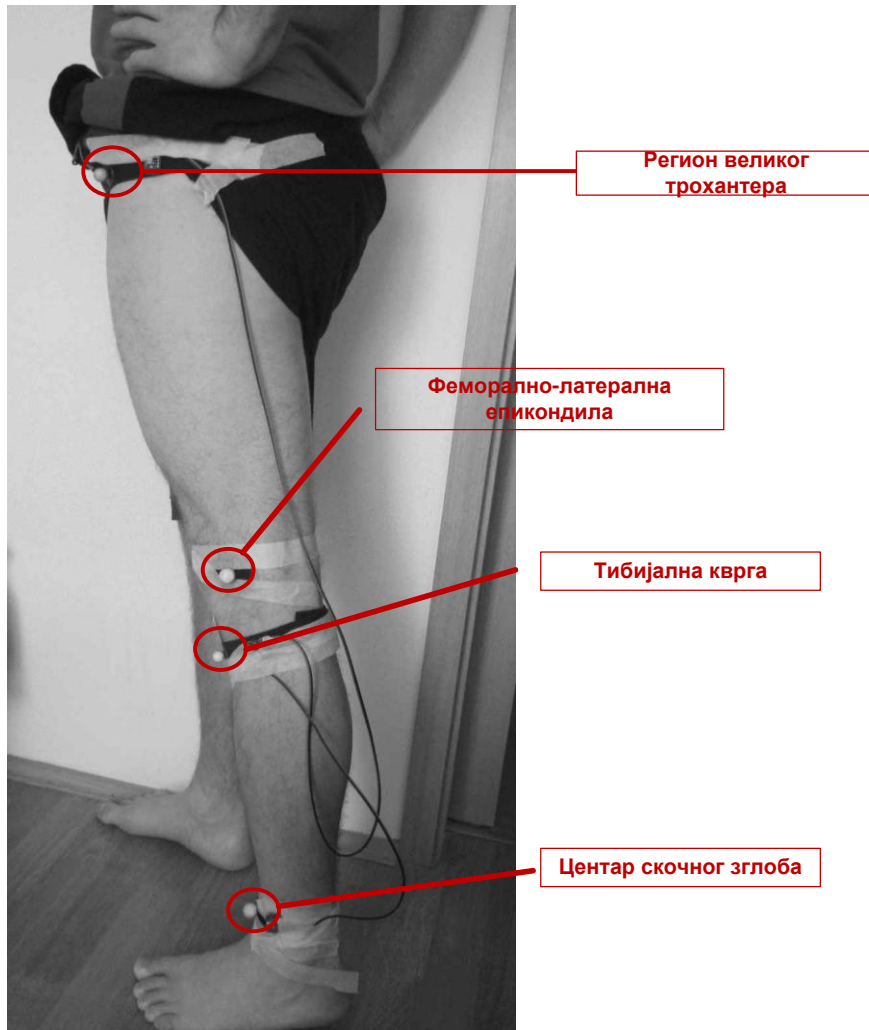
У овом раду смо за моделовање хрскавице користили једначину равнотеже за солид.

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_V = 0 \quad (6.3)$$

где је $\boldsymbol{\sigma}$ -тензор напона, \mathbf{F}_V је вектор запреминских сила, док је оператор \mathbf{L} -дефинисан једначином (А.13). Претходна једначина решавана је методом коначних елемената, статичком анализом, чије је детаљно извођење приказано у прилогу А.3. Претпостављено је да су материјали линеарни и изотропни. За граничне услове су искоришћене измерене вредности сила и померања у експерименту.

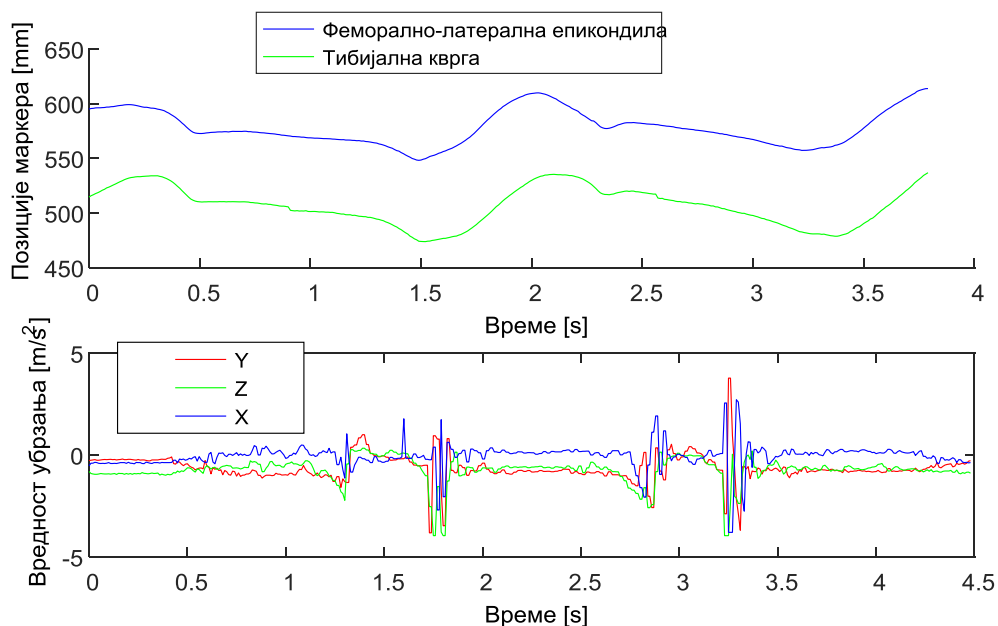
6.3. Експериментални део

У овом истраживању је коришћен комерцијални систем OpticTrack који се састоји од две инфрацрвене камере и четири флуоресцентна маркера. Маркери су 0,5 cm у пречнику и постављени су на унапред утврђене анатомске тачке на нози испитаника. Ове позиције су регион великог трохантера феморалано-латерална епикондила, тибидјална кврга као и центар скочног зглоба.



Слика 6.2. Распоред маркера на испитанику

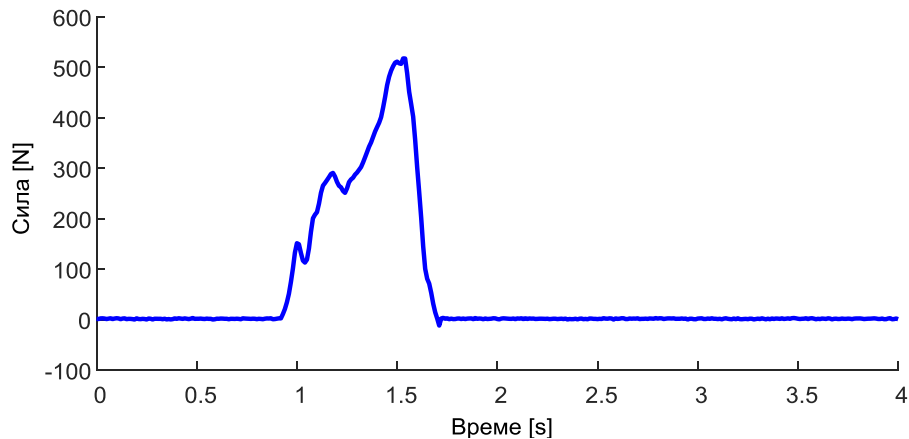
Систем са камерама и рачунаром бележи прецизно кретање маркера и реконструише трајекторију, док испитаник пролази преко платформе за мерење силе. Као резултат на крају добијамо 3D координате за сваки маркер. Паралелно са камерама коришћени су и тро-осни акцелерометри за мерење убрзања у току кретања.



Слика 6.3. Положај маркера и убрзање у току хода

Испитаник се кретао дуж дистанце од 2,5 m дужине са својом уобичајеном брзином. На основу [159]-[161] измерене вредности за позиције маркера у себи садрже и шум као последицу кретања коже. Вредност несигурности позиције маркера досеже вредност и до ± 2 mm. Платформа за мерење силе је позиционирана у првој половини путање дуж које се кретао испитаник. За време експеримента испитаник се кретао дуж правца на ком је била постављена платформа силе која бележи нормалну реакцију подлоге.

Сила је на почетку једнака нули и када испитаник петом дотакне платформу, сила почне да расте постепено и након што достигне максималну вредност, када је стопало хоризонтално са подлогом почиње његово одвајање од подлоге, све док се потпуно не одвоји и сила не постане једнака нули.



Слика 6.4 Вредност силе нормалне реакције подлоге у току времена

6.4. Примена регистрације слике код одређивања деформације

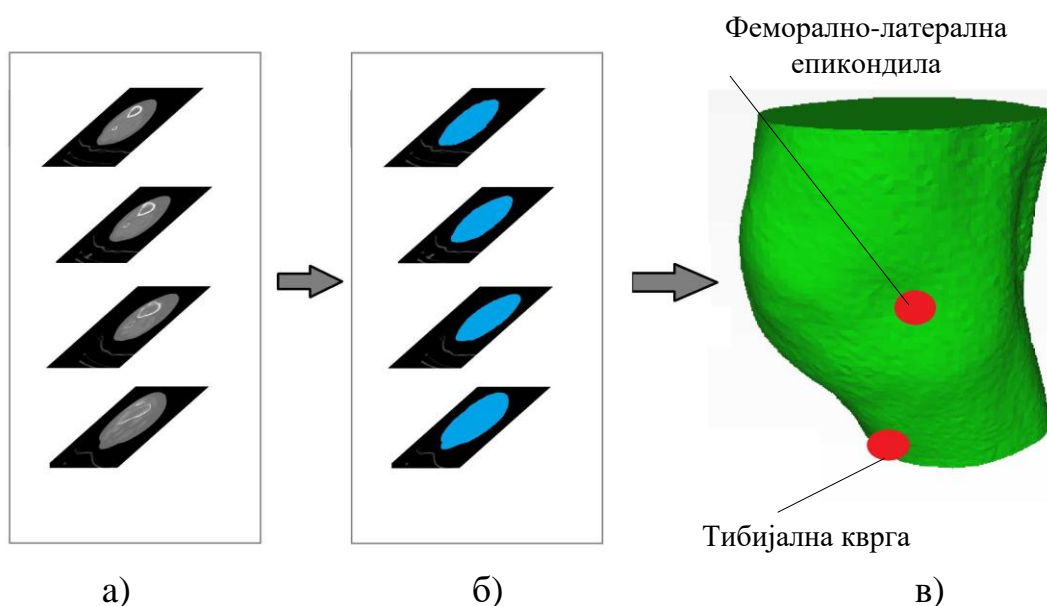
Један од главних задатака код припреме података за симулацију методом коначних елемената је налажење везе између координата анатомских тачака које су добијене помоћу инфра-црвених камера и тачака на СТ сликама када је хрскавица недеформисана. За ово је искоришћен алгоритам за регистрацију слике. Најпре је коришћен алгоритам за круту регистрацију, док су позиције маркера добијене поступком интерполације. Као што је иначе случај код регистрације слике и овде је циљ одредити параметре који описују трансформацију која пресликава сваки пиксел слике на којој је хрскавица деформисана у слику када то није случај.

Измерене разлике у позицији маркера у случајевима између деформисане и недеформисане хрскавице износе $1,78 \pm 0,6$ mm. Мерна несигурност у овом случају од 0,6 mm је последица коначне димензије пиксела слике. У вредност грешке нису урачунате

несигурности које су последица: дисторзије сочива камере, кретања коже и грешке регистрације.

6.5. Резултати и дискусија

Упоредо са поступком регистрације направљен је и геометријски 3D модел колена на основу слика са СТ снимка ноге испитаника. Над сликама СТ снимка је извршена сегментација коришћењем прага и његовим поређењем са вредностима пиксела у скали сивог. За издвајање контура искоришћени су оператори за детекцију ивица. На крају спајањем добијених контура за сваки слој коначно је добијен 3D модел, слика 6.5.



Слика 6.5 3D модел колена а) Слојеви СТ снимка б) СТ слике након сегментације в) реконструисани 3D модел колена са положајем маркера

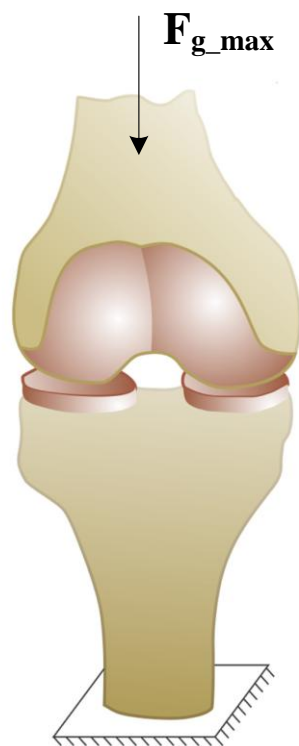
Модел укључује фемур, тибију, хрскавицу, околно ткиво као и кожу. Анатомске тачке тибијална кврга и феморално-латерална епикондила могу бити релативно лако детектоване на моделу што

су заправо почетне позиције маркера пре деформисања хрскавице. На основу измерених вредности за позиције маркера и позиције анатомских тачака на 3D моделу можемо добити вертикалну деформацију хрскавице на основу разлике ових позиција.

Измерена вредност деформације износи $2,30 \pm 0,01$ mm, што одговара тренутку од 1,49 секунди од почетка кретања, када је вредност силе максимална, слике 6.5. Мерна несигурност од 0,01 mm представља границу резолуције целог система укључујући ту резолуцију камера као и резолуцију СТ снимка.

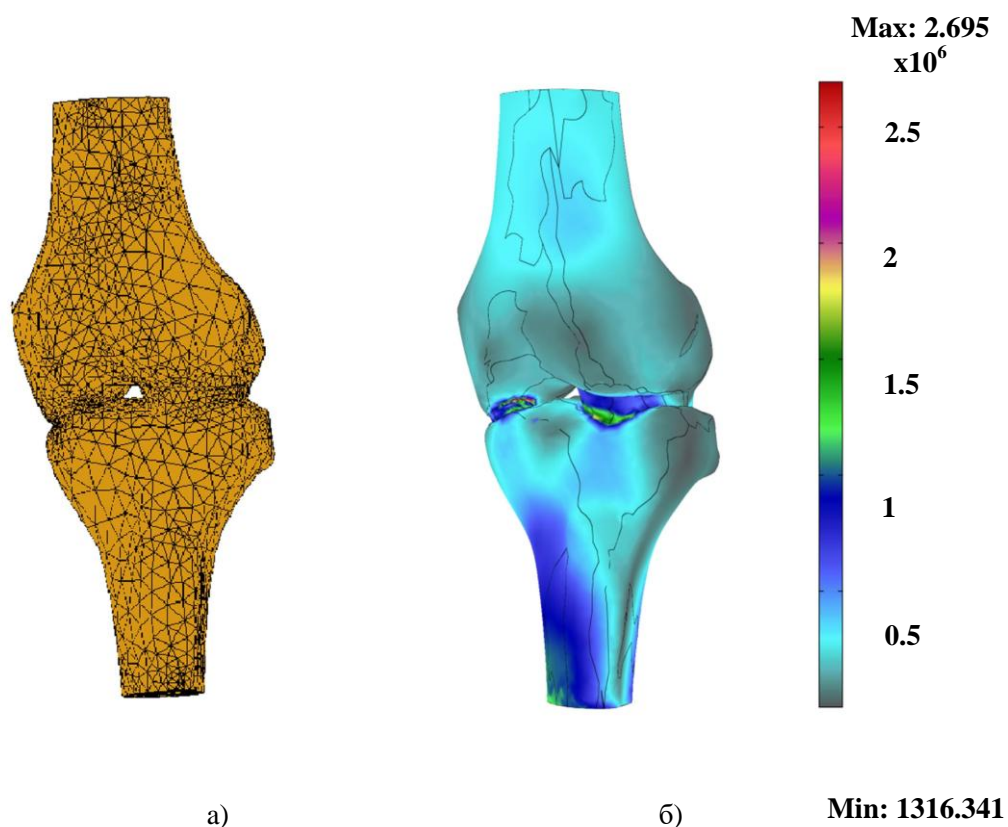
Овај начин за одређивање деформације хрскавице је прецизнији од метода базираног на регистрацији слике, али је истовремено и захтевнији по питању компјутерског времена и меморије.

Коришћењем исте процедуре креиран је и модел колена који се састоји само од тибиије, фемура и хрскавице.



Слика 6.6 Гранични услови модела колена

Измерене вредности за померање као и силе су искоришћени за одређивање материјалних параметара хрскавице у овом случају Јанговог модула и Поасновог коефицијента. За дати модел задати су гранични услови на тај начин што је површина дисталног дела тибиде фиксирана док је фемур аксијално оптерећен силом која је једнака максималној измереној сили за време хода $F_{g_max} = 511\text{N}$.



Слика 6.7 а) Мрежа коначних елемената модела, б) Расподела Вон Мизесовог напона у [Pa]

За моделовање деформације хрскавице примењен је метод коначних елемената при чему су одређене све деформације у чворовима. На слици 6.7 а) је приказана мрежа коначних елемената коришћена у компјутерској симулацији. Модел је имао укупно 20537 елемената и 4963 чворова док је за решавање једначина коначних елемената коришћен софтверски пакет РАК

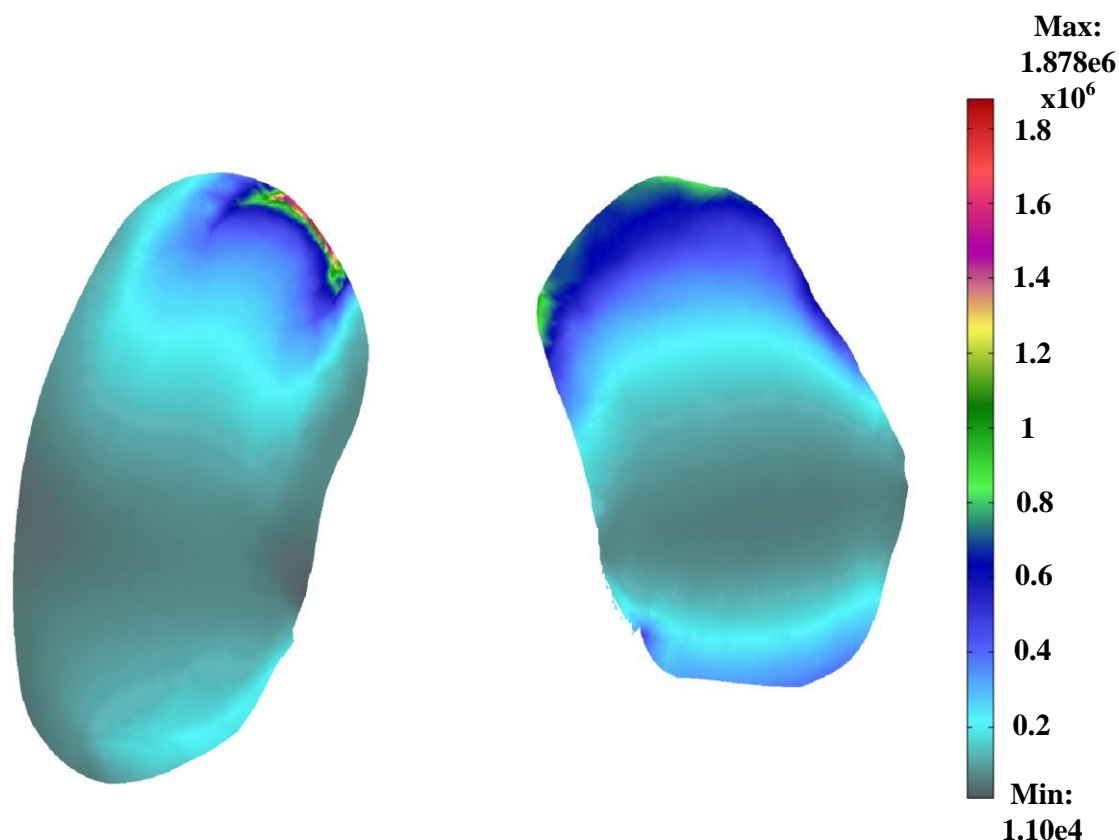
[162]. Укупно време за симулацију износило је 30 минута на рачунару са i7 процесором и 12 GB радне меморије.

За иницијалне вредности Јанговог модула и Поасоновог коефицијента за фемур и тибију усвојене су вредности од 18 GPa и 0,3 респективно. За хрскавицу Јангов модул је постављен на $E=10$ MPa, а Поасонов коефицијент $\mu=0,45$. Ове вредности су усвојене из литературе, [163]. У сваком кораку, након примене симулације, израчунаване су вредности деформације хрскавице и на основу тих вредности рачунати су Јангов модул и Поасонов коефицијент методом градијентног спуштања према формули:

$$\begin{aligned} E_i^{k+1} &= E_i^k - \gamma \frac{\partial |\delta_M - \delta_C|}{\partial E} \\ \mu_i^{k+1} &= \mu_i^k - \gamma \frac{\partial |\delta_M - \delta_C|}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (6.4)$$

E_i^k и μ_i^k су Јангов модул и Поасонов коефицијент у k -тој итерацији $\partial E = 0,01$ MPa, $\partial \mu = 0,01$, а δ_M и δ_C су измерене и израчунате вредности деформације редом, а $\gamma = 0,2$ релаксациони параметар.

Коначно је као вредност Јанговог модула добијена вредност од 5,62 MPa, а вредност Поасоновог коефицијента 0,43 из [164]. На слици је приказана расподела Вон Мизесовог напона на хрскавици за израчунате материјалне параметре хрскавице. У овом поглављу је приказана процедура за процену деформација и расподеле напона хрскавице колена коришћењем података добијених на основу камера и сензора силе. За симулирање деформације коришћена је метода коначних елемената.



Слика 6.8 Расподела Вон Мизесовог напона на хрскавици

Добијене вредности уз помоћ описане процедуре отварају једно ново поље у области разумевања и квантификовања хода како код здравих особа тако и код пацијената у клиничким студијама. Познавање параметара као што су деформација хрскавице и расподела механичких напона може много помоћи лекарима код доношења одлука при рехабилитацији и планирању оперативних захвата за конкретног субјекта.

Оно што треба истаћи је да овакав модел има и својих ограничења. Занемарена су кретања коже која уносе шум у сигнал позиције делова доњих екстремитета, као и непознавање шта се дешава у мишићима, што свакако уноси грешку код овог модела. Такође и геометријски модел није комплетан и не обухвата све анатомске структуре које су од интереса код анализе кретања углова колена. У овом истраживању су коришћени акцелерометри

као сензори али није разматрана њихова употреба код овог модела што ће бити предмет будућих истраживања.

7 Закључна разматрања

У овом раду приказани су резултати који се односе на развој алгоритама базираних на поступку регистрације слике, а који могу да се примењују код моделовања деформација и померања којима су подвргнути објекти. Оно што је новина у научном смислу је успостављена аналогија између поља градијента деформације и вектора електростатичког поља. Овај приступ захтева решавање Лапласове једначине што су користили и други аутори у развоју алгоритама за регистрацију слике, али је новина та што су сада за специфичне случајеве регистрација контура на сликама искоришћени гранични услови који проистичу из Максвелових једначина. У том смислу метод се показао као робустан у смислу да омогућава успешну регистрацију слика за различите положаје контура. Најједноставнији случај је када се једна контура скоро потпуно налази у другој. У овом случају примењен гранични услов се огледа у томе да се потенцијали свих тачака на унутрашњој контури поставе на неке вредности које су међусобно једнаке, а исти поступак се спроведе и за тачке спољашње контуре стим што се ова два потенцијала међусобно разликују. Израчунат вектор електричног поља еквивалентан је пољу градијента

деформације. У случају када се контуре секу поступак задавања граничних услова је идентичан, али је неопходно испитати тачке на контури тј. да ли се задата тачка налази унутар или изван контуре. У случају када постоји ограничење такво да су за неке тачке на контури унапред задате одговарајуће тачке на другој контури у које се пресликавају, гранични услов који овде треба применити је да је вектор електричног поља нормалан на правац који чине тачке између којих постоји кореспонденција буде једнак нули. Када су у питању правци будућег рада, посебна пажња биће посвећена рачунарској ефикасности алгоритма за израчунавање вектора електричног поља. Побољшање рачунарске ефикасности се огледа у томе да се комплетна мрежа коначних елемената не прави за сваки модел од почетка, већ да се на постојећу мрежу “наслоне” тачке контуре и најближи чворови мреже пресликају у тачке контуре. На овај начин се смањује време неопходно за генерисање мреже као и матрице ктурости. Недостатак овог приступа је што мрежа која се генерише мора да буде довољно велика да покрије све контуре над којима се врши обрада, што захтева већу заузетост радне меморије на рачун брзине. Поред методе коначних елемената за решавање овог проблема могу послужити и друге нумеричке методе попут коначних разлика, метода момената, итд.

Применом метода регистрације слике омогућено је одређивање деформација узорка ткива аорте захваћене анеуризмом. У петом поглављу ове дисертације разматран је проблем одређивања механичких карактеристика ткива аорте које је захваћено анеуризмом. Експеримент је реализован уз помћ web камере, којом су бележене деформације ткива и сезора притиска. Направљен је механички модел ткива који је коришћен код поступка оптимизације применом генетског алгоритма за одређивање механичких карактеристика ткива. Претпостављена је просторна зависност Јанговог модула само по ширини и дужини узорка која је апроксимирана фуријеовим редом. Применом ове

процедуре је показано да је могуће добити просторну расподелу Јанговог модула за било који узорак ткива уколико знамо померања тачака на површини узорка. Оно што нам ово истраживање не даје као одговор је да ли ће увек постојати конвергенција код одређивања Јанговог модула. Такође инжењерски допринос који је проистекао из овог проблема је комплетан развој хардвера и софтвера за извођења овог експеримента применом микроконтролера, сензора и web камере, док је у другом поглављу описана реализација практично истог система применом FPGA платформе. Када су у питању правци дањег истраживања, она се односе пре свега на побољшање и квалитет реализације експеримената применом поступка суперрезолюције у циљу повећања резолуције камера. Други правац истраживања се односи на прављење базе пацијената где би се повезала историја болести пацијената са израчунатим материјалним карактеристикама ткива аорте што може бити корисно у дијагностици и бољем разумевању везе болести са другим физиолошким карактеристикама као и навикама и животним стилевима пацијента. Оно што је такође обећавајуће је успостављање везе између параметара измерених овом методом и мерењима добијеним ултразвуком што би омогућило да се ове информације добију само рутинским ултразвучним пргледом што би била велика предност.

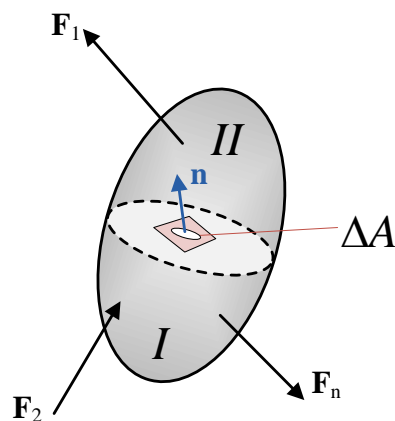
У шестом поглављу ове тезе разматран је проблем одређивања напона у хрскавици испитаника током хода применом информација добијених помоћу слика са камера као и вредности силе нормалне реакције подлоге која се ствара за време хода. Поступак обухвата регистрацију слике снимљене камером и слике снимљене помоћу СТ скенера у циљу одређивања деформације хрскавице. Упоредо са овим је креиран и механички модел хрскавице заједно са тибидом и фемуром што је уз примену измерених вредности силе као граничних услова и поређењем измерене деформације са вредношћу која је добијена у

компјутерској симулацији могуће одредити механичка својства хрскавице као и механичке напоне које се развијају. При томе је могуће за специфичног пацијента одредити ризичне тачке као регионе високих вредности напона. Добијене вредности уз помоћ описане процедуре отварају једно ново поље у области разумевања и квантификовања хода како код здравих особа, тако и код пацијената у клиничким студијама. Познавање параметара као што су деформација хрскавице и расподела механичких напона, може пуно помоћи лекарима код доношења одлука при рехабилитацији и планирању оперативних захвата за конкретног субјекта. Оно што треба истаћи је да овакав модел има и својих ограничења. Занемарена су кретања коже која уносе шум у сигнал позиције делова доњих екстремитета као и непознавање шта се дешава у мишићима што свакако уноси грешку у постављени модел. У будућим истраживањима већа пажња ће се посветити креирању комплекснијег геометријског модела као и испитивање варијабилности геометрија различитих испитаника што може бити од користи и донети уштеду рачунарског времена у креирању геометрије проблема. Такође правац у коме ће ићи истраживање је и употреба акцелерометара, који су данас јако јефтине и доступни сензори у циљу обезбеђивања улазних података за компјутерску симулацију.

Прилог А

А.1 Напон

Посматрајмо произвољно тело напрегнуто спољним силама, F_1, \dots, F_n , слика А.1. Нека се тело налази у равнотежи. Под дејством спољних сила, у његовој унутрашњости, настаће унутрашње силе између појединих тачака [165]. Да бисмо дефинисали те силе у ма којој тачки тела O , замислимо да је тело подељено помоћу неког попречног пресека кроз тачку O на два дела I и II .



Слика А.1 Стање напрегнутог тела

Посматрајући било који од ова два дела, на пример I , закључујемо да ће део II бити у равнотежи под дејством одговарајућих спољних сила и унутрашњих сила распоређених по попречном

пресеку. Ове унутрашње силе представљају утицај горњег на доњи део. Уочимо малу површину, са нормалом, \mathbf{n} око тачке O и обележимо са ΔF резултанту унутрашњих сила по површини ΔA . Однос $\Delta F / \Delta A$ називамо укупним напоном у тачки O за раван са нормалом \mathbf{n} , односно написано преко граничне вредности:

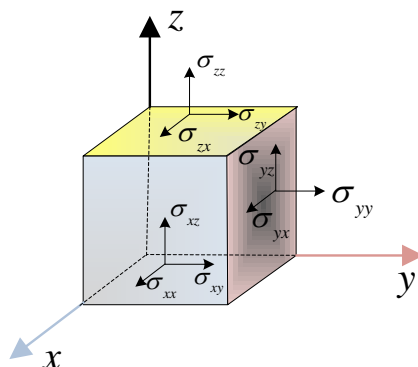
$$\mathbf{f}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (\text{A.1})$$

Поред величине, правца и смера који одређују векторску величину, за потпуно одређивање напона треба назначити површину на коју се напон односи, тачније речено орт нормале на ту површину. Зато се напон обележава са два индекса, где се први индекс односи на нормалу површине на коју напон делује, а други на правац његовог деловања. Пројекцију укупног напона \mathbf{f}_n на нормалу \mathbf{n} назива се нормалним напоном у тачки O за раван са нормалом \mathbf{n} , а пројекција напона на саму раван назива се напоном смицања (или тангенцијалним напоном) у тачки O за посматрану раван то јест важи релација:

$$\mathbf{f}_n = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\tau}_n \quad (\text{A.2})$$

при чему је $\boldsymbol{\sigma}_n = (\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{n} = 0$.

Пошто је хипотетички могуће поставити бесконачно много нормала у некој тачки, то значи да постоји и бесконачно много вредности за напон \mathbf{f}_n . Проблем неједнозначности се решава увођењем Декартовог координатног система кога чине три међусобно управне равни са укупно девет компоненти напона, слика А.2.



Слика А.2 Компонентни напони у три произвољне, међусобно управне равни у произвољној тачки тела

Ове компоненте напона могу да се прикажу помоћу тензора напона чији је матрични облик:

$$\sigma_e = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Елементи на главној дијагонали су нормални напони док остали елементи представљају смичуће напоне. Матрица тензора напона је симетрична, па се из тог разлога компоненте напона могу написати помоћу вектора који има шест компоненти:

$$\sigma^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}] \quad (\text{A.4})$$

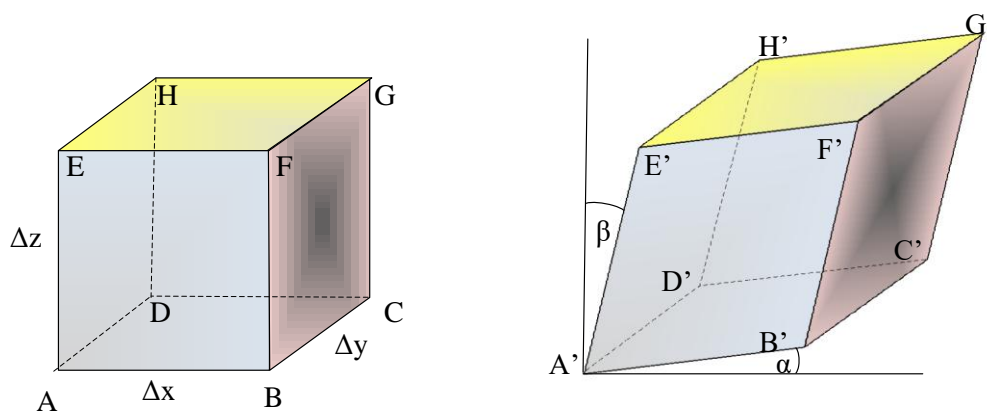
Једначина равнотеже за тело на које делују запреминске силе, чије су компоненте ω_x , ω_y и ω_z има облик:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \omega_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \omega_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \omega_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Добијене диференцијалне једначине равнотеже познате су под називом Навијеове једначине.

А.2 Мале деформације

Посматрамо сада паралелопипед $ABCDEFGH$ који се деформише у нови паралелопипед $A'B'C'D'E'F'G'H'$ слика А.3.



Слика А.3 Мале деформације правоуглог паралелопипеда

Ако су координате произвољне тачке у телу пре деформације биле x, y, z , после деформисања тела њене ће координате постати $x+u$, $y+v$ и $z+w$, где су u, v, w померања тачке у правцима x, y и z . Очигледно је да су померања u, v, w функције просторне координате $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$. Деформацију неког сегмента дефинишемо као однос прираштаја дужине тог сегмента и његове почетне дужине. Ово су такозване нормалне деформације које можемо да дефинишемо дуж све три осе односно за сваку страну паралелопипеда.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

Поред нормалних постоје и смичуће деформације које представљају промену угла између два почетно управна линијска елемента. У нашем случају оне ће имати облик:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A.7})$$

У оба случаја ради се о малим деформацијама које покривају велики број случајева који се срећу у пракси. У математичком смислу вредности за мале деформације се изводе када се функције померања $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ развију у Тајлоров ред, до чланова са првим изводом, док се виши чланови занемарују. Као и у случају напона, и за деформацију можемо да дефинишемо одговарајући тензор:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

или у векторском облику:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}] \quad (\text{A.9})$$

Следећих шест диференцијалних једначина (које су познате и под именом Сен-Венанови услови) представљају такозване једначине компатибилности деформација [166]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Ове једначине морају бити задовољене да би постојале једнозначне континуалне функције u , v и w .

Везу између деформације и померања можемо успоставити и у матричном облику. Напишимо најпре вектор померања \mathbf{U} на следећи начин:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Вектор деформације се може написати на следећи начин:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (\text{A.12})$$

где је оператор \mathbf{L} једнак:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Веза између напона и деформације дата је следећом једначином:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{21} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Коефицијенти c_{ij} називају се коефицијенти еластичности, док се матрица ових елемената назива матрица флексибилности, и означава се са \mathbf{C}^{-1} . У случају линеарне теорије еластичности коефицијенти еластичности не зависе од напона и деформација у тачки, већ само од карактеристике материјала. Коефицијенти c_{ij} су симетрични и уколико су различити ради се о анизотропним

материјалима. Код изотропних материјала релација (А.14) има облик:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

при чему је E -Јангов модул, ν -је Поасонов коефицијент, док је $G = E/2(1+\nu)$ модул смицања. Веза између напона и деформације се може написати и на следећи начин:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.16})$$

при чему је \mathbf{C} -конститутивна матрица и једнака је [167]:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

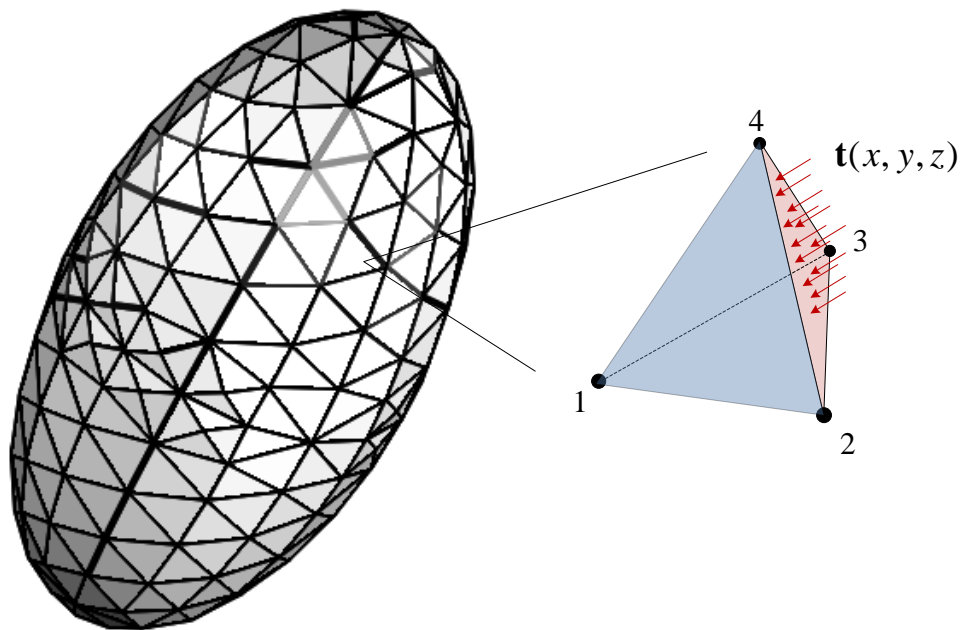
А.3 Метода коначних елемената

Суштина методе коначних елемената је да израчунавање неке физичке величине на жељеном домену спроведемо тако што тај домен поделимо на мање домене (елементе), при чему су ти елементи тетраедри, паралелопипеди и слично, затим

израчунавамо тражене величине у чворовима свих елементима, а потом извршимо израчунавање задате величине у произвољној тачки методом интерполације.

На слици А.4 приказано је тело подељено на тетраедалне елементе (сваки елемент има четири чвора који су означени редом 1,2,3 и 4).

Нека је $\Phi(x, y, z)$ функција коју желимо да одредимо у свакој тачки домена елемента, док су вредности ове функције у чворовима елемента Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_4 .



Слика А.4 Дискретизација тела помоћу тетраедалних елемената

У примерима у овом раду смо користили случај линеарне интерполације када је функција интерполације облика $\Phi(x, y, z) = ax + by + cz + d$. Уколико су координате чворова редом $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4$ и z_4 тада можемо написати матричну релацију:

$$\begin{bmatrix} \underline{\Phi}_1 \\ \underline{\Phi}_2 \\ \underline{\Phi}_3 \\ \underline{\Phi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Непознате константе можемо одредити налажењем инверзне матрице док је коначна вредност интерполационе функције $\Phi(x, y, z)$ једнака:

$$\Phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_1 \\ \underline{\Phi}_2 \\ \underline{\Phi}_3 \\ \underline{\Phi}_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Матрицу која множи колону вредности функције у чворовима називамо интерполационом матрицом. Једнакост (A.19) може се написати и на следећи начин:

$$\Phi(x, y, z) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]^T \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_1 \\ \underline{\Phi}_2 \\ \underline{\Phi}_3 \\ \underline{\Phi}_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

где су N_1, \dots, N_4 одговарајуће врсте матрице интерполације. Када имамо вредности за интерполациону матрицу, можемо израчунати било коју физичку величину. Да би смо израчунали померање у произвољној тачки елемента уведемо најпре вектор \underline{U} који се састоји из померања у свим чворовима тетраедалног елемента на следећи начин:

$$\underline{U}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3] \quad (\text{A.21})$$

Интерполациона матрица која повезује вредности померања у чворовима и померања у произвољној тачки елемента има облик:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

У том случају важи матрична релација $\mathbf{U} = \mathbf{N} \cdot \underline{\mathbf{U}}$, при чему је \mathbf{U} -вектор тражених померања. У овом излагању о методи коначних елемената биће само разматран случај статичке анализе, то јест анализе где немамо кретање система. У овом случају постоји само потенцијална енергија деформације, док је кинетичка енергија система једнака нули. Укупна потенцијална енергија деформисаног тела на слици А.1 једнака је разлици енергије деформације и рада који изврше спољашње силе [168]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dv - W \quad (\text{A.23})$$

односно

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} dv - \iint_A \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{t}(x, y, z) dA - \sum_i \mathbf{U}_i^T \cdot \mathbf{f}_i \quad (\text{A.24})$$

У релацији (А.24) $\mathbf{t}(x, y, z)$ представља силу која делује по површини пресека тела, а \mathbf{f}_i и \mathbf{U}_i су силе и померања у некој i -тој тачки тела. Померања у произвољној тачки могу да се изразе преко померања у чворовима $\underline{\mathbf{U}}_i$ и одговарајуће интерполационе матрице \mathbf{N} .

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{N}(x, y, z) \cdot \underline{\mathbf{U}}_i \quad (\text{A.25})$$

Укупна енергија целог тела једнака је суми потенцијалних енергија појединих елемената.

$$\Pi = \sum_e \Pi^{(e)} \quad (\text{A.26})$$

Израз за потенцијалну енергију елемента сада постаје:

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_{V^{(e)}} \underline{\mathbf{U}}_e^T \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \underline{\mathbf{U}}_e dv^{(e)} - \iint_A \underline{\mathbf{U}}_e^T \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t}(x, y, z) dA - \underline{\mathbf{U}}_e^T \cdot \mathbf{f}_e \quad (\text{A.27})$$

Следећи корак је одређивање померања за која ће бити испуњено да је енергија система минимална. Услов минимума енергије целог система ће бити испуњен ако је испуњен услов минимума енергије сваког елемента појединачно:

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \underline{U}_e} = 0 \quad (\text{A.28})$$

чиме долазимо до релације:

$$0 = \iiint_{v^{(e)}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \underline{U}_e dv^{(e)} - \iint_A \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t}(x, y, z) dA - \mathbf{f}_e \quad (\text{A.29})$$

или компактније записано:

$$0 = \mathbf{K}^e \underline{U}_e - \iint_A \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t}(x, y, z) dA - \mathbf{f}_e \quad (\text{A.30})$$

где је \mathbf{K}^e такозвана матрица крутости:

$$\mathbf{K}^e = \iiint_{v^{(e)}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} dv^{(e)} \quad (\text{A.31})$$

Матрица \mathbf{K}^e је симетрична и има димензије 12x12. Када се одреде матрице крутости за сваки елемент, можемо одредити и глобалну матрицу крутости \mathbf{K} чији су елементи:

$$K_{T_i, j, T_i, k} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=0}^2 K_{T_i, j, T_i, k} + K_{j+4l, k+4l}^{(i)} \quad (\text{A.32})$$

где је T -тополошка матрица о којој је било речи у четвртом поглављу. Овде треба само напоменути да је ова матрица димензија $N \times 4$ где је N -укупан број елемената док се i -та врста састоји из индекса чворова из којих се састоји i -ти елемент.

Површински интеграл у једначини (A.30) је једнак нули на свим елементима који се налазе унутар домена, једино је различит од нуле на елементима који се налазе на површини домена. Овај интеграл може да се сведе на одговарајуће силе, тачније површинска сила на страницу тетраедра може да се замени са три

силе које делују у теменима те стране f_k , што на крају даје суму сила $f'_e = f_e + f_k$. Једначина коначних елемената добија облик:

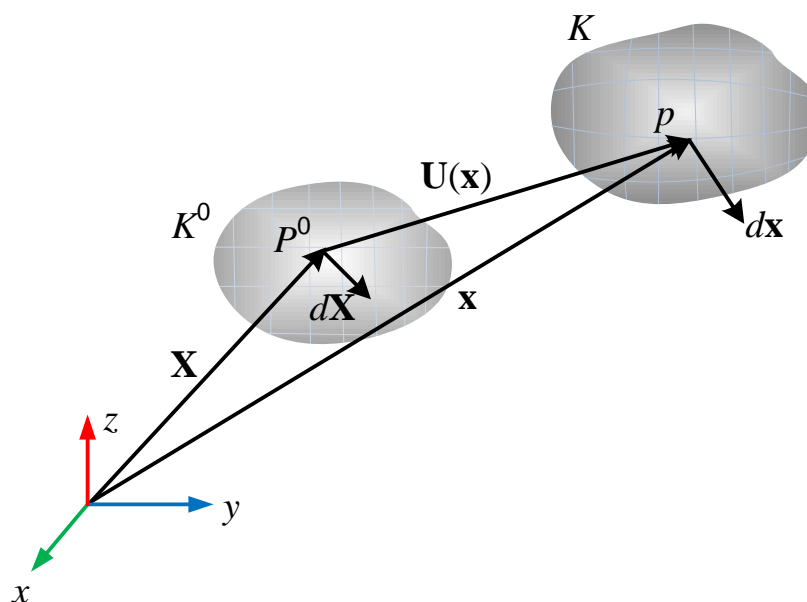
$$\mathbf{K}\underline{U}_e = \mathbf{f}'_e \quad (\text{A.33})$$

Непознате вредности померања у чворовима одређујемо налажењем инверзне матрице глобалне матрице крутости \mathbf{K} .

А.4 Велике деформације

У великом броју случајева мале деформације нису довољно добар модел да опишу деформисање. Ово је чест случај у примерима из класичне механике, а среће се и у случајевима код регистрације слике.

Стање неког система пре деформације назива се почетна конфигурација, слика А.5 и означено је са K^0 , док је конфигурација која настаје након деформације означена са K .



Слика А.5 Почетна и конфигурација након деформације

Веза између тачке деформисане и недеформисане конфигурације је дата релацијом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.34})$$

Елементарни сегмент $d\mathbf{X}$ се пресликава у сегмент $d\mathbf{x}$ на следећи начин:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (\text{A.35})$$

где је \mathbf{F} градијент деформације дефинисан на следећи начин:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Матрица \mathbf{F} је позитивно дефинитна што произилази из чињенице да систем не може толико да се деформише да ишчезне. Однос између запремина тренутне и почетне конфигурације, односно обрнут однос њихових густина дат је релацијом:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = \det(\mathbf{F}) = J \quad (\text{A.37})$$

Уколико је $J=1$ реч је о нестишљивим материјалима. Помоћу градијетна деформације можемо да дефинишемо и десни Коши-Гринов тензор:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{A.38})$$

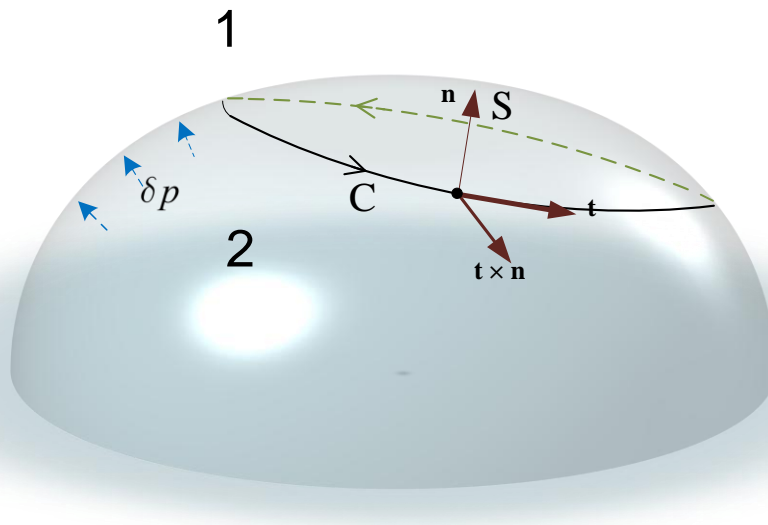
У случају великих деформација можемо дефинисати тензор деформације:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (\text{A.39})$$

Овај тензор се назива Грин-Лагранжов тензор деформације.

А.5 Јанг-Лапласова једначина

Посматрајмо раздвојну површину два флуида која се налазе у равнотежи, слика А.6. Нека S представља део раздвојне површине између флуида са јединичним вектором нормале \mathbf{n} (усмереним од средине 2 ка средини 1), а C је затворена крива која ограничава ову површину и чији је јединични вектор тангенте означен са \mathbf{t} .



Слика А.6 Раздвојна површина између два флуида

Уколико претпоставимо да између флуида 1 и 2 влада разлика притисака δp , а са σ_γ означимо напон који делује на ову површину у свим тачкама контуре, тада је укупна сила која делује на ову површину дата релацијом:

$$\mathbf{f} = \int_S \delta p \mathbf{n} dS + \sigma_\gamma \oint_C \mathbf{t} \times \mathbf{n} dr \quad (\text{A.40})$$

при чему је $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ елементарна површина и $d\mathbf{r} = \mathbf{t} dr$ елементарни део криве. У равнотежном стању сума сила једнака је нули то јест важи:

$$\int_S \delta p \mathbf{n} dS = -\sigma_\gamma \oint_C \mathbf{t} \times \mathbf{n} dr \quad (\text{A.41})$$

На основу Стоксове теореме за неко векторско поље над контуром C у општем случају важи релација:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.42})$$

Уколико претпоставимо да векторско поље \mathbf{F} можемо да напишемо у облику $\mathbf{F} = \mathbf{n} \times \mathbf{B}$, где је \mathbf{B} -константни вектор тада је:

$$\oint_C (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.43})$$

На основу познатих идентитета за векторе $\nabla \times \mathbf{n} \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{n} - (\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{B}$ и $(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n})$ из А.43 добијамо да је:

$$\mathbf{B} \cdot \oint_C (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) d\mathbf{r} = \mathbf{B} \cdot \int_S [(\nabla \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - (\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] d\mathbf{S} \quad (\text{A.44})$$

односно како је \mathbf{B} произвољан вектор важи ће и релација:

$$\oint_C (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) d\mathbf{r} = \int_S [(\nabla \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - (\nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] d\mathbf{S} \quad (\text{A.45})$$

Коришћењем познате векторске релације: $\nabla(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 2(\nabla \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0$ јер је \mathbf{n} јединични вектор па добијамо:

$$\oint_C (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) d\mathbf{r} = - \int_S (\nabla \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} d\mathbf{S} \quad (\text{A.46})$$

Комбиновањем (А.46) са једначином (А.43) добијамо

$$\int_S [\delta p - \sigma_\gamma (\nabla \cdot \mathbf{n})] \mathbf{n} d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{A.47})$$

што коначно даје релацију за Јанг-Лапласов закон:

$$\delta p = \sigma_\gamma \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.48})$$

У специјалном случају, када се ради о сфери полупречника R , док је вектор нормале \mathbf{n} , усмерен од сфере ка спољашњости, релација која повезује површински напон и разлику притиска унутар и изван сфере има облик:

$$\delta p = \sigma_\gamma \nabla \cdot \mathbf{n} = \sigma_\gamma \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{2\sigma_\gamma}{R} \quad (\text{A.49})$$

Литература

- [1] Gonzalez, R. C., Woods, R. E., Digital image processing, Pearson Education North Asia Limited, (2002)
- [2] Popovic, M., Digitalna obrada slike, Akademska misao Beograd (2006)
- [3] Pratt, W. K., Introduction to digital image processing. CRC Press, (2013)
- [4] Haskell, R. E., Hanna, D. M., Digital Design Using Digilent FPGA Boards: Verilog/Active-HDL Ed.; Verilog Examples, NEXYS 3, NEXYS 2, BASYS 2]. LBE Books, (2012).
- [5] Fitzpatrick, J. M., West, J. B., Maurer, C. R., Predicting error in rigid-body point-based registration. Medical Imaging, IEEE Transactions on, 17(5), (1998), 694–702

-
- [6] Maurer, C. R., Fitzpatrick, J. M., A review of medical image registration, *Interactive image-guided neurosurgery*, 17, (1993)
- [7] Zitova, B., Flusser, J., Image registration methods: a survey. *Image and Vision Computing*, 21(11), (2003), 977–1000
- [8] Frangi, A. F., Niessen, W. J., Viergever, M. A., Three-dimensional modeling for functional analysis of cardiac images: a review. *IEEE transactions on medical imaging*, 20(1), (2001) 2-5
- [9] Makela, T., Clarysse, P., Sipila, O., Pauna, N., Pham, Q.C., Katila, T., Magnin, I.E., A review of cardiac image registration methods. *IEEE transactions on medical imaging*, 21(9), (2002) 1011-1021
- [10] Eisenhauer, E., Therasse, P., Bogaerts, J., Schwartz, L., Sargent, D., Ford, R., Dancey, J., Arbuck, S., Gwyther, S., Mooney, M., Rubinstein, L., Shankar, L., Dodd, L., Kaplan, R., Lacombe, D., Verweij, J., New response evaluation criteria in solid tumours: Revised recist guideline (version 1.1), *European Journal of Cancer*, 45(2), (2009) 228-247
- [11] Judenhofer, M. S., Wehrl, H. F., Newport, D. F., Catana, C., Siegel, S. B., Becker, M., Thielscher, A., Kneilling, M., Lichy, M. P., Eichner, M., Klingel, K., Reischl, G., Widmaier, S., Rocken, M., Nutt, R. E., Machulla, H. J., Uludag, K., Cherry, S. R., Claussen, C. D., Pichler, B. J., Simultaneous pet-mri: a new approach for functional and morphological imaging, *Nature Medicine*, 14(4), (2008) 459-495
- [12] Mijailović, N., Radulović, J., Trajanović, M., Filipović, N., Peulić, A., Multimodal Imaging for PET Attenuation Correction, 5th International Conference on Information Society and Technology (ICIST 2015), Kopaonik, (2015) 464-467

- [13] Grimson, W. E. L., Ettinger, G. J., White, S. J., Lozano-Perez, T., Wells, W. M., Kikinis, R., An automatic registration method for frameless stereotaxy, image guided surgery, and enhanced reality visualization, *IEEE Transactions on medical imaging*, 15(2), (1996) 129-140
- [14] Vannier, M., Marsh, J., Three-dimensional imaging, surgical planning, and image-guided therapy, *Radiologic clinics of North America*, 34(3), (1996) 545-563
- [15] Peters, T. M., Image-guidance for surgical procedures, *Physics in Medicine and Biology*, 51(14), (2006) R505
- [16] Jaffray, D. A., Siewerdsen, J. H., Wong, J. W., Martinez, A. A., Flat-panel cone-beam computed tomography for image-guided radiation therapy, *International Journal of Radiation Oncology * Biology * Physics*, 53(3), (2002) 1337-1349
- [17] Dawson, L.A., Jaffray, D.A.. Advances in image-guided radiation therapy, *Journal of Clinical Oncology*, 25(8), (2007) 938-946
- [18] Mueller, S. G., Weiner, M. W., Thal, L. J., Petersen, R. C., Jack, C. R., Jagust, W., Beckett, L, Ways toward an early diagnosis in alzheimer disease: The alzheimer disease neuroimaging initiative (adni), *Alzheimer's and Dementia* 1 (2005) 55-66
- [19] Rudin, M., Weissleder, R., Molecular imaging in drug discovery and development, *Nature Reviews Drug Discovery*, 2(2), (2003) 123-131
- [20] Holden, M., A review of geometric transformations for nonrigid body registration, *IEEE transactions on medical imaging*, 27(1), (2008) 111-128

-
- [21] Modersitzki, J., Numerical Methods for Image Registration. Oxford University Press Series: Numerical Mathematics and Scientific Computation (2004)
- [22] Broit, C., Optimal Registration of Deformed Images. PhD thesis, University of Pennsylvania (1981)
- [23] Bajscy, R., Kovacic, S., Multiresolution Elastic Matching. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 46(1), (1989) 1-21
- [24] Gee, J. C., Bajscy, R., Elastic Matching: Continuum Mechanical and Probabilistic Analysis, Brain Warping 2, (1999) 183-197
- [25] Davatzikos, C., Spatial transformation and registration of brain images using elastically deformable models, Computer Vision and Image Understanding, 66(2), (1997) 207-222
- [26] Christensen, G. E., Johnson, H. J., Consistent image registration, IEEE transactions on medical imaging, 20(7), (2001) 568-582
- [27] Leow, A., Huang, S. C., Geng, A., Becker, J., Davis, S., Toga, A., Thompson, P., Inverse consistent mapping in 3D deformable image registration: its construction and statistical properties, Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging, Springer Berlin Heidelberg, (2005) 493-503
- [28] He, J., Christensen, G. E., Large deformation inverse consistent elastic image registration, Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging, Springer Berlin Heidelberg, (2003) 438-449
- [29] Pennec, X., Stefanescu, R., Arsigny, V., Fillard, P., Ayache, N., Riemannian elasticity: a statistical regularization framework for

- non-linear registration, In, Medical Image Computing and Computer- Assisted Intervention, 2, (2005) 943-950
- [30] Ashburner, J., A fast diffeomorphic image registration algorithm, *NeuroImage*, 38(1), (2007) 95-113
- [31] Christensen, G. E., Rabbitt, R. D., Miller, M. I., Deformable templates using large deformation kinematics, *IEEE transactions on image processing*, 5(10), (1996) 1435-1447
- [32] Christensen, G. E., Joshi, S. C., Miller, M. I., Volumetric transformation of brain anatomy, *IEEE transactions on medical imaging*, 16(6), (1997) 864-877
- [33] Bro-Nielsen, M., Gramkow, C., Fast fluid registration of medical images, In *Visualization in Biomedical Computing*, Springer, (1996) 265-276
- [34] Crum, W. R., Tanner, C., Hawkes, D. J., Anisotropic multi-scale fluid registration: evaluation in magnetic resonance breast imaging, *Physics in medicine and biology*, 50(21), (2005) 5153
- [35] Chiang, M. C., Leow, A. D., Klunder, A. D., Dutton, R. A., Barysheva, M., Rose, S. E., McMahon, K. L., De Zubicaray, G. I., Toga, A. W., Thompson, P. M., Fluid registration of diffusion tensor images using information theory, *IEEE transactions on medical imaging*, 27(4), (2008) 442-456
- [36] D'Agostino, E., Maes, F., Vandermeulen, D., Suetens, P., A viscous fluid model for multimodal non-rigid image registration using mutual information, *Medical image analysis*, 7(4), (2003) 565-575
- [37] Wang, Y., Staib, L. H., Physical model-based non-rigid registration incorporating statistical shape information, *Medical image analysis*, 4(1), (2000) 7-20

- [38] Thirion, J. P., Image matching as a diffusion process: an analogy with Maxwell's demons, *Medical Image Analysis*, 2(3), (1998) 243-260
- [39] Pennec, X., Cachier, P., Ayache, N., Understanding the "Demon's Algorithm": 3D Non-Rigid registration by Gradient Descent, In, *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, (1999) 597-606
- [40] Vercauteren, T., Pennec, X., Perchant, A., Ayache, N., Non-parametric diffeomorphic image registration with the demons algorithm, *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Springer Berlin Heidelberg, (2007) 319-326
- [41] Vercauteren, T., Pennec, X., Perchant, A., Ayache, N., Symmetric log-domain diffeomorphic Registration: a demons-based approach, *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Springer Berlin Heidelberg, (2008) 754-761
- [42] Cahill, N. D., Noble, J. A., Hawkes, D. J., Demons Algorithms for Fluid and Curvature Registration, *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*. (2009) 730-733
- [43] Cahill, N. D., Noble, J. A., Hawkes, D. J., A Demons algorithm for image registration with locally adaptive regularization, *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Springer Berlin Heidelberg, (2009) 574-581

-
- [44] Stefanescu, R., Pennec, X., Ayache, N., Grid powered nonlinear image registration with locally adaptive regularization, *Medical image analysis*, 8(3), (2004) 325-342
- [45] Mansi, T., Pennec, X., Sermesant, M., Delingette, H., Ayache, N., iLogDemons: A Demons- Based Registration Algorithm for Tracking Incompressible Elastic Biological Tissues, *International journal of computer vision*, 92(1), (2011) 92-111
- [46] Guimond, A., Roche, A., Ayache, N., Meunier, J., Three-Dimensional Multimodal Brain Warping Corrections, *IEEE transactions on medical imaging*, 20(1), (2001) 58-69
- [47] Modat, M., Ridgway, G. R., Taylor, Z. A., Lehmann, M., Barnes, J., Hawkes, D. J., Fox, N. C., Ourselin, S., Fast free-form deformation using graphics processing units, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 98(3), (2010) 278-284
- [48] Tristan-Vega, A., Vegas-Sánchez-Ferrero, G., Aja-Fernández, S., Local Similarity Measures for Demons-like Registration Algorithms, In *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*, (2008) 1087-1090
- [49] Yeo, B. T. T., Vercauteren, T., Fillard, P., Peyrat, J. M., Pennec, X., Golland, P., Ayache, N., Clatz, O., DT-REFinD: diffusion tensor registration with exact finite-strain differential, *IEEE transactions on medical imaging*, 28(12), (2009) 1914-1928
- [50] Peyrat, J. M., Delingette, H., Sermesant, M., Pennec, X., Xu, C., Ayache, N., Registration of 4D time-series of cardiac images with multichannel Diffeomorphic Demons, In *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, (2008) 972-979

-
- [51] Yeو, B. T. T., Sabuncu, M. R., Vercauteren, T., Ayache, N., Fischl, B., Golland, P., Spherical demons: fast diffeomorphic landmark-free surface registration, *IEEE transactions on medical imaging*, 29(3), (2010) 650-668
- [52] Fischer, B., Modersitzki, J., Curvature based image registration, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 18(1), (2003) 81-85
- [53] Fischer, B., Modersitzki, J., A unified approach to fast image registration and a new curvature based registration technique, *Linear Algebra and its Applications*, 380, (2004) 107-124
- [54] Beuthien, B., Kamen, A., Fischer, B., Recursive Green's Function Registration, In *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Springer Berlin Heidelberg, (2010) 546-553
- [55] Dupuis, P., Grenander, U., Variational problems on flows of diffeomorphisms for image matching, *Quarterly of applied mathematics* LVI (1998) 587-600
- [56] Troune, A., Diffeomorphisms groups and pattern matching in image analysis, *International Journal of Computer Vision*, 28(3), (1998) 213-221
- [57] Risser, L., Vialard, F., Wolz, R., Murgasova, M., Holm, D., Rueckert, D., Simultaneous Multi-scale Registration using Large Deformation Diffeomorphic Metric Mapping, *IEEE transactions on medical imaging*, 30(10), (2011) 1746-1759
- [58] Sommer, S., Nielsen, M., Lauze, F., Pennec, X., A multi-scale kernel bundle for Iddmm: Towards sparse deformation description across space and scales, *Information Processing in Medical Imaging*, (2011) 624-635
-

-
- [59] Beg, M. F., Miller, M. I., Trouve, A., Younes, L., Computing Large Deformation Metric Mappings via Geodesic Flows of Diffeomorphisms, *International Journal of Computer Vision*, 61(2), (2005) 139-157
- [60] Joshi, S. C., Miller, M. I., Landmark matching via large deformation diffeomorphisms, *IEEE transactions on image processing*, 9(8), (2000) 1357-1370
- [61] Marsland, S., Twining, C. J., Constructing diffeomorphic representations for the groupwise analysis of nonrigid registrations of medical images, *IEEE transactions on medical imaging*, 23(8), (2004) 1006-1020
- [62] Miller, M. I., Trouve, A., Younes, L., On the metrics and Euler-Lagrange equations of computational anatomy, *Annual review of biomedical engineering*, 4(1), (2002) 375-405
- [63] Beg, M. F., Khan, A., Symmetric data attachment terms for large deformation image registration, *IEEE transactions on medical imaging*, 26(9), (2007) 1179-1189
- [64] Cao, Y., Miller, M.I., Mori, S., Winslow, R. L., Younes, L., Diffeomorphic Matching of Diffusion Tensor Images, In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*, (2006) 67
- [65] Glaunes, J., Vaillant, M., Miller, M. I., Landmark Matching via Large Deformation Diffeomorphisms on the Sphere, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20(1-2), (2004) 179-200
- [66] Leow, A., Thompson, R., Protas, H., Huang, S., Brain warping with implicit representations, In *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*, IEEE (2004) 603-606

- [67] Leow, A., Yu, C. L., Lee, S. J., Huang, S. C., Protas, H., Nicolson, R., Hayashi, K. M., Toga, A. W., Thompson, P. M., Brain structural mapping using a Novel hybrid implicit/explicit framework based on the level-set method, *NeuroImage*, 24(3), (2005) 910-927
- [68] Vaillant, M., Glaunes, J., Surface matching via currents, *Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging*, Springer Berlin Heidelberg, (2005) 381-392
- [69] Qiu, A., Younes, L., Wang, L., Ratnanather, J. T., Gillepsie, S. K., Kaplan, G., Csernansky, J., Miller, M. I., Combining anatomical manifold information via diffeomorphic metric mappings for studying cortical thinning of the cingulate gyrus in schizophrenia, *NeuroImage*, 37(3), (2007) 821-833
- [70] Durrleman, S., Pennec, X., Troune, A., Ayache, N., Statistical models of sets of curves and surfaces based on currents, *Medical image analysis*, 13(5), (2009) 793-808
- [71] Avants, B. B., Schoenemann, P. T., Gee, J. C., Lagrangian frame diffeomorphic image registration: Morphometric comparison of human and chimpanzee cortex, *Medical image analysis*, 10(3), (2006) 397-412
- [72] Auzias, G., Colliot, O., Glaunes, J. A., Perrot, M., Mangin, J.F., Troune, A., Baillet, S., Diffeomorphic brain registration under exhaustive sulcal constraints, *IEEE transactions on medical imaging*, 30(6), (2011) 1214-1227
- [73] Marsland, S., McLachlan, R., A Hamiltonian particle method for diffeomorphic image registration, *Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging*. Springer Berlin Heidelberg, (2007) 396-407

-
- [74] Cotter, C. J., Holm, D. D., Singular solutions, momentum maps and computational anatomy, Arxiv preprint nlin/0605020 (2006)
- [75] Ashburner, J., Friston, K. J., Diffeomorphic registration using geodesic shooting and Gauss-Newton optimisation, *NeuroImage*, 55(3), (2011) 954-967
- [76] Arsigny, V., Commowick, O., Pennec, X., Ayache, N., A log-Euclidean framework for statistics on diffeomorphisms, *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Springer Berlin Heidelberg, (2006) 924-931
- [77] Zagorchev, L., Goshtasby, A., A comparative study of transformation functions for nonrigid image registration, *IEEE transactions on image processing*, 15(3), (2006) 529- 538
- [78] Yang, X., Xue, Z., Liu, X., Xiong, D., Topology preservation evaluation of compact-support radial basis functions for image registration, *Pattern Recognition Letters*, 32(8), (2011) 1162-1177
- [79] Bookstein, F., Principal warps: thin-plate splines and the decomposition of deformations, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(6), (1989) 567-585
- [80] Bookstein, F., Thin-plate splines and the atlas problem for biomedical images, *Information Processing in Medical Imaging*, (1991) 326-342
- [81] Johnson, H. J., Christensen, G. E., Landmark and Intensity-Based, Consistent Thin-Plate Spline Image Registration, *Information Processing in Medical Imaging*, (2001) 329-343
- [82] Li, J., Yang, X., Yu, J., Compact support Thin Plate Spline algorithm, *Journal of Electronics*, 24, (2007) 515-522
-

-
- [83] Yang, X., Zhang, Z., Elastic image deformation using adaptive support radial basic function, International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, (2008) 158-162
- [84] Rohr, K., Worz, S., An extension of thin-plate splines for image registration with radial basis functions, Biomedical Imaging (ISBI), 2012 9th IEEE International Symposium on, (2012) 442 -445
- [85] Camion, V., Younes, L., Geodesic interpolating splines, International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition, Springer Berlin Heidelberg, (2001) 513-527
- [86] Younes, L., Combining Geodesic Interpolating Splines and Affine Transformations, IEEE Transactions on Image Processing, 15(5), (2006) 1111-1119
- [87] Mills, A., Shardlow, T., Marsland, S., Computing the geodesic interpolating spline, International Workshop on Biomedical Image Registration. Springer Berlin Heidelberg, (2006) 169-177
- [88] Ruprecht, D., Nagel, R., Miiller, H., Free form deformation with scattered data interpolation methods, Computer & Graphics 19, (1995) 63-71
- [89] Little, J., Hill, D., Hawkes, D., Deformations Incorporating Rigid Structures. Computer Vision and Image Understanding, 66, (1996) 223-232
- [90] Arad, N., Dyn, N., Reinfeld, D., Yeshurun, Y., Warping by radial basis functions: application to facial expressions, CVGIP Graph. Models Image Process. 56(2), (1994) 161-172
- [91] Shen, D., Davatzikos, C., HAMMER: hierarchical attribute matching mechanism for elastic registration, IEEE transactions on medical imaging, 21(11), (2002) 1421-1439
-

-
- [92] Fornefett, M., Rohr, K., Stiehl, H., Radial basis functions with compact support for elastic registration of medical images, *Image and Vision Computing*, 19(1), (2001) 87-96
- [93] Wendland, H., Piecewise polynomial, positive definite, and compactly supported radial basis functions of minimal degree, *Advances in Computational Mathematics*, 4(1), (1995) 389-396
- [94] Wendland, H., Error estimates for interpolation by compactly supported radial functions of minimal degree, *Journal of approximation theory*, 93(2), (1998) 258-272
- [95] Wu, Z. M., Compactly supported positive definite radial functions, *Advances in Computational Mathematics*, 4(1), (1995) 283-292
- [96] Buhmann, M. D., A New Class of Radial Basis Functions with Compact Support. *Mathematics of Computation*, 70(233), (2000) 307-318
- [97] Rohde, G. K., Aldroubi, A., Dawant, B. M., The adaptive bases algorithm for intensity-based nonrigid image registration, *IEEE transactions on medical imaging*, 22(11), (2003) 1470-1479
- [98] Siddiqui, A. M., Masood, A., Saleem, M., A locally constrained radial basis function for registration and warping of images, *Pattern Recognition Letters*, 30(4), (2009) 377-390
- [99] Tristan-Vega, A., Garcia-Perez, V., Comments on: A locally constrained radial basis function for registration and warping of images, *Pattern Recognition Letters*, 32(4), (2011) 586-589
- [100] Lowitzsch, S., Approximation and Interpolation Employing Divergence-free Radial Basis Functions with Applications. PhD thesis, Texas A&M University (2002)

-
- [101] Davis, M. H., Khotanzad, A., Flamig, D. P., Harms, S. E., A physics-based coordinate transformation for 3-D image matching. *IEEE transactions on medical imaging*, 16(3), (1997) 317-328
- [102] Kohlrausch, J., Rohr, K., Stiehl, H. S., A New Class of Elastic Body Splines for Nonrigid Registration of Medical Images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23(3), (2005) 253-280
- [103] Worz, S., Rohr, K., Physics-based elastic registration using non-radial basis functions and including landmark localization uncertainties, *Computer Vision and Image Understanding*, 111(3), (2008) 263-274
- [104] Sederberg, T. W., Parry, S. R., Free-form deformation of solid geometric models, *ACM Siggraph Computer Graphics*, 20(4), (1986) 151-160
- [105] Hsu, W., Hughes, J., Kaufman, H., Direct manipulation of free-form deformations, *ACM Siggraph Computer Graphics*, 26(2), (1992) 177-184
- [106] Declerck, J., Feldmar, J., Goris, M. I., Betting, F., Automatic registration and alignment on a template of cardiac stress and rest reoriented SPECT images, *IEEE transactions on medical imaging* 16(6), (1997) 727-737
- [107] Rueckert, D., Sonoda, L. I., Hayes, C., Hill, D.L.G., Leach, M.O., Hawkes, D. J., Nonrigid registration using free-form deformations: application to breast MR images, *IEEE transactions on medical imaging*, 18(8), (1999) 712-721
- [108] Rueckert, D., Aljabar, P., Heckemann, R.A., Hajnal, J.V., Hammers, A., Diffeomorphic registration using B-splines. *International Conference on Medical Image Computing and*

- Computer-Assisted Intervention, Springer Berlin Heidelberg, (2006) 702-709
- [109] Choi, Y., Lee, S., Injectivity Conditions of 2D and 3D Uniform Cubic B-Spline Functions, *Graphical Models*, 62(2), (2000) 411-427
- [110] Feng, W., Reeves, S. J., Denney Jr, T. S., Lloyd, S., Dell'Italia, L., Gupta, H., A new consistent image registration formulation with B-spline deformation model, In *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*. (2009) 2-5
- [111] Wang, J., Jiang, T., Nonrigid registration of brain MRI using NURBS, *Pattern Recognition Letters*, 28(2), (2007) 214-223
- [112] Noblet, V., Heinrich, C., Heitz, F., Armspach, J. P., Symmetric nonrigid image registration: application to average brain templates construction, In *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Springer Berlin Heidelberg, (2008) 897-904
- [113] Sotiras, A., Paragios, N., Discrete symmetric image registration, *Biomedical Imaging (ISBI)*, 2012 9th IEEE International Symposium on, (2012) 342 -345
- [114] Bhatia, K., Hajnal, J. V., Puri, B., Edwards, A., Rueckert, D., Consistent groupwise non-rigid registration for atlas construction, In *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*, (2004) 908-911
- [115] Balci, S.K., Golland, P., Shenton, M., Wells III, W. M., Free-Form B-spline Deformation Model for Groupwise Registration, *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, 10, (2007)

- [116] Metz, C. T., Klein, S., Schaap, M., van Walsum, T., Niessen, W. J., Nonrigid registration of dynamic medical imaging data using $nD + t$ B-splines and a groupwise optimization approach, *Medical image analysis*, 15(2), (2011) 238-249
- [117] Perperidis, D., Mohiaddin, R. H., Rueckert, D., Spatio-temporal free-form registration of cardiac MR image sequences, *Medical image analysis*, 9(5), (2005) 441-456
- [118] Ledesma-Carbayo, M. J., Kybic, J., Desco, M., Santos, A., Siuhling, M., Hunziker, P., Unser, M., Spatio-temporal nonrigid registration for ultrasound cardiac motion estimation, *IEEE transactions on medical imaging*, 24(9), (2005) 1113-1126
- [119] Vandemeulebroucke, J., Rit, S., Kybic, J., Clarysse, P., Sarrut, D., Spatiotemporal motion estimation for respiratory-correlated imaging of the lungs, *Medical Physics*, 38(1), (2011) 166-178
- [120] Wu, Y., Kanade, T., Li, C., Cohn, J., Image registration using wavelet-based motion model, *International Journal of Computer Vision*, 38(2), (2000) 129-152
- [121] Gefen, S., Tretiak, O., Nissanov, J., Elastic 3-D alignment of rat brain histological images, *IEEE transactions on medical imaging*, 22(11), (2003) 1480-1489
- [122] Musse, O., Heitz, F., Armspach, J. P., Topology preserving deformable image matching using constrained hierarchical parametric models, *IEEE transactions on image processing*, 10(7), (2001) 1081-1093
- [123] Noblet, V., Heinrich, C., Heitz, F., Armspach, J. P., 3-D deformable image registration: a topology preservation scheme based on hierarchical deformation models and interval analysis

- optimization, *IEEE transactions on image processing*, 14(5), (2005) 553-566
- [124] Noblet, V., Heinrich, C., Heitz, F., Armspach, J.P., Retrospective evaluation of a topology preserving non-rigid registration method. *Medical image analysis*, 10(3), (2006) 366-384
- [125] Cathier, P., Iconic feature registration with sparse wavelet coefficients, *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, Springer Berlin Heidelberg (2006) 694-701
- [126] Hellier, P., Barillot, C., Memin, E., Perez, P., Hierarchical estimation of a dense deformation field for 3-D robust registration, *IEEE transactions on medical imaging*, 20(5), (2001) 388-402
- [127] Zhang, H., Yushkevich, P. A., Alexander, D. C., Gee, J. C., Deformable registration of diffusion tensor MR images with explicit orientation optimization, *Medical image analysis*, 10(5), (2006) 764-785
- [128] Pitiot, A., Bardinet, E., Thompson, P.M., Malandain, G., Piecewise affine registration of biological images for volume reconstruction, *Medical image analysis*, 10(3), (2006) 465-483
- [129] Cootes, T. F., Twining, C. J., Petrovi, V. S., Babalola, K.O., Taylor, C. J., Computation Accurate Correspondences across Groups of Images, *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 32(11), (2010) 1994-2005
- [130] Buerger, C., Schaeffter, T., King, A.P., Hierarchical adaptive local affine registration for fast and robust respiratory motion estimation, *Medical image analysis*, 15(4), (2011) 551-564
- [131] Narayanan, R., Fessler, J. A., Park, H., Meyerl, C. R., Diffeomorphic nonlinear transformations: a local parametric

- approach for image registration, Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging, Springer Berlin Heidelberg, (2005) 174-185
- [132] Arsigny, V., Pennec, X., Ayache, N., Polyrigid and polyaffine transformations: a Novel geometrical tool to deal with non-rigid deformations - application to the registration of histological slices, Medical image analysis, 9(6), (2005) 507-523
- [133] Surutka, J. V., Elektromagnetika, Akademska misao, Beograd (2006)
- [134] Taflove, A., Hagness, S. C., Hagness. Computational electrodynamics, Artech house publishers, (2000)
- [135] Hughes, J. F., Van Dam, A., Foley, J. D., Feiner, S. K., Computer graphics: principles and practice, (2014)
- [136] Hans, S. S., Jareunpoon, O., Balasubramaniam, M., Zelenock, G. B., Size and location of thrombus in intact and ruptured abdominal aortic aneurysms, Journal of Vascular Surgery, 41(4), (2005) 584–588
- [137] Noel, A. A., Gloviczki, P., Cherry, K. J., Bower, T. C., Panneton, J. M., Mozes, G. I., Hallett, J. W., Ruptured abdominal aortic aneurysm; the excessive mortality of conventional repair, Journal of vascular surgery, 34(1), (2001) 41–46
- [138] Sokolis, D. P., Kefaloyannis, E. M., Kouloukoussa, M., Marinos, E., Boudoulas, H., Karayannacos, P. E., A structural basis for the aortic stress–strain relation in uniaxial tension, Journal of Biomechanics, 39(9), (2006) 1651–1662
- [139] Stella, J. A., Liao, J., Sacks, M. S., Time-dependent biaxial mechanical behavior of the aortic heart valve leaflet, Journal of Biomechanics, 40(14), (2007) 3169–3177

- [140] Slifka, A. J., Drexler, E. S., Wright, J. E., Shandas, R., Bubble-test method for synthetic and bovine vascular material, *Journal of Biomechanics*, 39(10), (2006) 1939-1942
- [141] John A. S., Jun L., Michael S. S., Time-dependent biaxial mechanical behavior of the aortic heart valve leaflet, *Journal of Biomechanics*, 40(14), (2007) 3169–3177
- [142] Acharya, T., Ray, A. K., *Image Processing - Principles and Applications*, Wiley-Interscience, (2005) 148
- [143] van't Veer, M., Buth, J., Merckx, M., Tonino, P., van den Bosch, H., Pijls, N., van de Vosse, F., Biomechanical properties of abdominal aortic aneurysms assessed by simultaneously measured pressure and volume changes in humans, *Journal of vascular surgery*, 48(6), (2008) 1401-1407
- [144] Mower, W. R., Quiñones, W. J., Gambhir, S. S., Effect of intraluminal thrombus on abdominal aortic aneurysm wall stress, *Journal of Vascular Surgery*, 26(4), (1997) 602-608
- [145] Kutzner, I., Heinlein, B., Graichen, F., Bender, A., Rohlmann, A., Halder, A., Bergmann, G., Loading of the knee joint during activities of daily living measured in vivo in five subjects, *Journal of Biomechanics*, 43(11), (2010) 2164–2173
- [146] Ahldén, M., Hoshino, Y., Samuelsson, K., Araujo, P., Musahl, V., Karlsson, J., Validation of a non-invasive fluoroscopic imaging technique for the measurement of dynamic knee joint motion, *Journal of Biomechanics*, 41(7), (2008) 1616–1622
- [147] Reinschmidt, C., Van den Bogert, A. J., Lundberg, A., Nigg, B. M., Murphy, N., Stacoff, A., Stano, A., Tibiofemoral and tibio-calcanal motion during walking: external vs. Skeletal markers, *Gait and Posture*, 6(2), (1997) 98–109

- [148] Yang, N. H., Canavan, P. K., Nayeb-Hashemi, H., Najafi, B., Vaziri, A., Protocol for constructing subject-specific biomechanical models of knee joint, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 13(5), (2010) 589–603
- [149] Djurić-Jovičić, M. D., Jovičić, N. S., Popović, D. B., Kinematics of gait: new method for angle estimation based on accelerometers, *Sensors*, 11(11), (2011) 10571–10585
- [150] Dejnabadi, H., Jolles, B. M., Aminian, K., A new approach to accurate measurement of uniaxial joint angles based on a combination of accelerometers and gyroscopes, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 52(8), (2005) 1478–1484
- [151] Tong, K., Granat, M. H., A practical gait analysis system using gyroscopes, *Medical Engineering and Physics*, 21(2), (1999) 87–94
- [152] Tao, W., Liu, T., Zheng, R., Feng, H., Gait analysis using wearable sensors, *Sensors*, 12(2), (2012) 2255–2283
- [153] Wang, Y., Fan, Y., Zhang, M., Comparison of stress on knee cartilage during kneeling and standing using finite element models, *Medical Engineering & Physics*, 36(4), (2014) 439–447
- [154] Halonen, K. S., Mononen, M. E., Jurvelin, J. S., Töyräs, J., Salo, J., Korhonen, R. K., Deformation of articular cartilage during static loading of a knee joint—experimental and finite element analysis, *Journal of Biomechanics*, 47(10), (2014) 2467–2474
- [155] Dabiri, Y., Li, L. P., Altered knee joint mechanics in simple compression associated with early cartilage degeneration, *Computational & Mathematical Methods in Medicine*, 2013, (2013)
- [156] Filipovic, N., Vulovic, R., Peulic, A., Radakovic, R., Kosanic, D., Ristic, B., Noninvasive determination of knee cartilage

- deformation during jumping, *Journal of Sports Science and Medicine*, 8(4), (2009) 584–590
- [157] Wismans, J. A. C., Veldpaus, F., Janssen, J., Huson, A., & Struben, P., A three-dimensional mathematical model of the knee-joint, *Journal of Biomechanics*, 13(8), (1980) 677–685
- [158] Kojic, M., Filipovic, N., Mijailovic, S., A large strain finite element analysis of cartilage deformation with electrokinetic coupling, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(18), (2001), 2447–2464
- [159] Garling, E. H., Kaptein, B. L., Mertens, B., Barendregt, W., Veeger, H. E. J., Nelissen, R. G., Valstar, E. R., Soft-tissue artefact assessment during step-up using fluoroscopy and skin-mounted markers, *Journal of Biomechanics*, 40(1), (2007) S18–S24
- [160] Chen, C. C., Chen, Y. J., Chen, S. C., Lin, H. S., Lu, T. W., Evaluation of soft-tissue artifacts when using anatomical and technical markers to measure mandibular motion, *Journal of Dental Sciences*, 6(2), (2011) 95–101
- [161] Dumas, R., Camomilla, V., Bonci, T., Cheze, L., Cappozzo, A., Generalized mathematical representation of the soft tissue artefact, *Journal of Biomechanics*, 47(2), (2014) 476–481
- [162] Filipovic, N., Kojic, M., Živkovic, M., Slavkovic, R., Grujovic, N., PAK-FS Finite Element Program for Fluid-Structure Interaction, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kragujevac, Kragujevac, Serbia, (2010)
- [163] Ming, Z., Yubo, F., *Computational Biomechanics of the Musculoskeletal System*, CRC Press, (2014)
- [164] Mijailovic, N., Vulovic, R, Milankovic, I., Radakovic, R., Filipovic, N., Peulic, A., *Assessment of Knee Cartilage Stress*

Distribution and Deformation Using Motion Capture System and Wearable Sensors for Force Ratio Detection, Computational and Mathematical Methods in Medicine, (2015)

- [165] Josifović, M., Osnovi strukturalne analize aerotehničkih konstrukcija, Mašinski fakultet Univerzitet u Beogradu, Beograd (1979)
- [166] Rašković, D., Teorija elastičnosti, Naučna knjiga, Beograd, (1985)
- [167] Kojić, M., Slavković, R., Živković, M., & Grujović, N., Metoda konačnih elemenata I. Linearna analiza, Mašinski fakultet, Kragujevac (1998)
- [168] Rao, S. S., The finite element method in engineering, Elsevier, (2010)