



**УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ  
ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА**

**Владимир Дунић**

**РАЗВОЈ И ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА  
ТЕРМО-МЕХАНИЧКОГ КОНСТИТУТИВНОГ  
МОДЕЛА ЗА НУМЕРИЧКУ АНАЛИЗУ ПОНАШАЊА  
МАТЕРИЈАЛА СА СВОЈСТВОМ ПАМЋЕЊА ОБЛИКА**

**Докторска дисертација**

Крагујевац, 2015. година

*"Живот нам враћа само оно што ми другима дајемо."*

*Иво Андрић*

<b>I Аутор</b>
Име и презиме: Владимир Дунић
Датум и место рођења: 09.12.1983. године, Пирот, Република Србија
Садашње запослење: Истраживач сарадник, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу
<b>II Докторска дисертација</b>
Наслов: Развој и имплементација термо-механичког конститутивног модела за нумеричку анализу понашања материјала са својством памћења облика
Број страница: 158
Број слика: 67
Број библиографских података: 94
Установа и место где је рад израђен: Факултет инжењерских наука, Крагујевац
Научна област (УДК): Примењена механика и рачунарско инжењерство [539.4:620.1]:519.6
Ментор: др Радован Славковић, редовни професор, Факултет инжењерских наука, Крагујевац
Коментор: др Елзбиета А. Пиечиска (Elżbieta Pieczyska), ванредни професор, Институт за основна технолошка истраживања (IPPT), Пољска академија наука (PAN), Варшава, Пољска
<b>III Оцена и одбрана</b>
Датум пријаве теме: 07.04.2014.
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације: 01-1/2136-4, 10.07.2014.
Комисија за оцену подобности теме и кандидата:
1. др Радован Славковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука, Крагујевац
2. др Елзбиета Пиечиска (Elżbieta Pieczyska), ван. проф., Институт за основна технолошка истраживања, Пољска академија наука, Варшава
3. др Мирослав Живковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука, Крагујевац
4. др Ненад Филиповић, ред. проф., Факултет инжењерских наука, Крагујевац
5. др Александар Седмак, ред. проф., Машински факултет у Београду
6. др Ненад Грујовић, ред. проф., Факултет инжењерских наука, Крагујевац
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:
1. др Радован Славковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука, Крагујевац
2. др Елзбиета Пиечиска (Elżbieta Pieczyska), ван. проф., Институт за основна технолошка истраживања, Пољска академија наука, Варшава
3. др Мирослав Живковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука, Крагујевац
4. др Ненад Филиповић, ред. проф., Факултет инжењерских наука, Крагујевац
5. др Александар Седмак, ред. проф., Машински факултет у Београду
6. др Ненад Грујовић, ред. проф., Факултет инжењерских наука, Крагујевац
Датум одбране дисертације:

# РАЗВОЈ И ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА ТЕРМО-МЕХАНИЧКОГ КОНСТИТУТИВНОГ МОДЕЛА ЗА НУМЕРИЧКУ АНАЛИЗУ ПОНАШАЊА МАТЕРИЈАЛА СА СВОЈСТВОМ ПАМЋЕЊА ОБЛИКА

## Сажетак

Материјали са својством памћења облика (енг. Shape Memory Alloys - SMA) налазе све већу и чешћу примену у случајевима када је погодно искористити предности које они пружају кроз своје специфично понашање (псеудоеластичност и ефекат памћења облика) у различитим условима. Као пратећи ефекат, због високе термо-осетљивости јавља се јака термомеханичка спрега што указује на потребу за симулацијом комплексног термомеханичког одзива код реалних проблема. Појава комплексних напонских стања и опсег деформација намеће захтев за тачно решавање проблема великих деформација.

Предочени захтеви су решени у неколико корака:

(1) Феноменолошки конститутивни SMA модел (Лагоудас) је реформулисан извођењем променљивих да зависе од ефективних вредности напона и деформације и удела мартензита у запремини. Гипсова слободна енергија је сведена на скаларни облик чиме је омогућена интеграција напона у правцу девијатора напона за трансформацију унапред, односно укупне деформације трансформације за трансформацију уназад.

(2) Симулација термомеханичког понашања SMA је изведена коришћењем партиционисаног приступа спрезању за повезивање програма за структурну анализу ПАК-С и пренос топлоте ПАК-Т. Дисипативна енергија мартензитне фазне трансформације изазива промену температуре материјала у форми унутрашњег топлотног извора. Као комуникациони интерфејс између програма ПАК-С и ПАК-Т, коришћена је библиотека шаблона за компоненте (Component Template Library - CTL).

(3) Проширење на проблеме великих деформација је базирано на мултипликативној декомпозицији градијента деформације, чиме је деформација раздвојена на еластичну и нееластичну. Коришћењем енергетски конјугованих мера напона и деформације, омогућено је једноставно проширење алгоритма за мале деформације за решавање комплексних напонских стања код великих дефор-

мација.

(4) Експериментално испитивање TiNi SMA узорака за различите брзине оптерећења је употребљено за верификацију термо-механичке спреге. Нумеричка симулација појаве, развоја и засићења мартензитне трансформације за различите брзине оптерећења је поређена са експериментима, чиме је приказана квалитативна и квантитативна тачност оваквог приступа. Проширење на проблеме великих деформација је реализовано коришћењем логаритамске деформације. Применом на одабраним примерима из литературе, верификована је функционалност и тачност такве имплементације.

# DEVELOPMENT AND IMPLEMENTATION OF THERMO-MECHANICAL CONSTITUTIVE MODEL FOR NUMERICAL ANALYSIS OF SHAPE MEMORY ALLOYS

## Abstract

Shape memory alloys (SMA) have wider and more frequent application in cases when it is useful to employ their advantages through specific behavior (pseudoelasticity and shape memory effect) in various conditions. As a side effect due to the high thermosensitivity, strong thermomechanical coupling occurs what increases the need for simulation of complex thermomechanical response in realistic problems. The complex stress states and deformation range impose the requirements for accurate analysis of large strain problems. The presented requirements are solved in several steps:

(1) Phenomenological constitutive SMA model (Lagoudas) has been reformulated by derivation of variables to depend on effective values of stress and strain and martensitic volume fraction. Gibbs free energy is reduced to scalar form what provides stress integration in the direction of deviatoric stress for forward transformation or total transformation strain for the reverse transformation.

(2) Simulation of SMA thermomechanical behavior is realized using partitioned approach by coupling of programs for structural analysis - PAK-S and heat transfer PAK-T. Dissipative energy of martensitic phase transformation imposes change of the material temperature as an internal heat source. As a communication interface between the PAK-S and PAK-T, Component Template Library (CTL) is used.

(3) Extension to the large strain problems is based on multiplicative decomposition of the deformation gradient to decompose deformation on elastic and inelastic part. Using the energy conjugated stress and strain measures, easy extension of the algorithm for small strain is provided to solve complex stress states for large strains.

(4) Experimental investigation of TiNi SMA samples under various loading rates is used for verification of thermo-mechanical coupling. Numerical simulation of initiation, development and saturation of the martensitic phase transformation under various loading rates is compared to experimental results to show qualitative and quantitative accuracy of such approach. Extension to large strain problems is realized using the logarithmic strain. Simulation of the chosen examples from literature, the functionality and accuracy of the presented approach is verified.

# Захвалност

*"Ништавни су они људи који учитељев рад за ситно сматрају."  
Доситеј Обрадовић*

Докторска дисертација као круна истраживачког рада на докторским студијама, представља резултат који сам постигао користећи сва знања која сам стекао током живота и школовања. Овом приликом бих издвојио најзначајније особе и организације које су помогле у остваривању постигнутих резултата.

Највећу захвалност дугујем свом метору, Проф. Радовану Славковићу, који ми је својим стручним знањем, активним залагањем и корисним стручним и животним саветима, помогао да током свог школовања стекнем знања и вештине неопходне за квалитетан истраживачки рад. Такође, стручни савети и знања које сам стекао током рада са Проф. Мирославом Живковићем, су била од велике важности за успешну реализацију постављених циљева. Практични савети Проф. Ненада Грујовића, који су допринели рационалнијем приступу проблемима, су истраживачки рад учинили прагматичнијим и ефикаснијим.

Сарадња са коменторком Проф. Елзбиетом Пиечиском, са Института за основна технолошка истраживања Пољске академије наука, у оквиру КММ-VIN стипендије током 2013. године, је од велике важности за знања која сам стекао у области експерименталног испитивања материјала. Такође, посвећеност и енергија коју сам препознао у раду са Проф. Пиечиском су били значајан мотив да се постигнути резултати квалитетно обраде и публикују. Такође бих се захвалио Проф. Ненаду Филиповићу, на подршци током студија и учешће на конкурсима КММ-VIN.

Министарство за науку и технолошки развој, Републике Србије је током читавог истраживања подржавало мој рад на више начина: на почетку докторских студија кроз стипендију за најбоље докторанте, након тога кроз запошљавање и учешће на пројекту Министарства као истраживач-сарадник, кроз подршку за учешће на конференцијама и заједничком међународном пројекту

са ДААД. Конкретни резултати представљени у дисертацији су резултат актуелних пројеката "Развој софтвера за решавање спрегнутих мултифизичких проблема", ТР32036, и "Примена биомедицинског инжењеринга у претклиничкој и клиничкој пракси", ИИИ41007, као и МПН и ДААД пројекта - Решавање мултифизичких проблема коришћењем софтвера ПАК - СОМУПАК.

Такође бих издвојио и веома велику важност добре сарадње са колегама из Лабораторије за инжењерски софтвер који су ми несебично помогли током истраживања својим искуством и знањима, али и пријатном атмосфером у заједнички проведеном времену и дружењу.

На крају, бих истакао највећу захвалност својим најближима, прецима и потомцима, на безрезервној подршци, љубави и знању током живота и рада.

Владимир Дунџић

У Крагујевцу,

Март 2015.



# Садржај

Списак слика	12
Списак табела	16
Скраћенице	17
Листа симбола	19
<b>1 Увод</b>	<b>25</b>
1.1 Мотивација, циљ и структура . . . . .	25
1.2 О особинама, експерименталном испитивању и моделирању материјала са својством памћења облика . . . . .	27
1.3 Примена SMA . . . . .	33
1.3.1 Медицинска примена . . . . .	34
1.3.2 Техничка примена . . . . .	39
<b>2 Преглед и анализа постојећих приступа моделирању материјала са својством памћења облика</b>	<b>44</b>
2.1 Приступы моделирању SMA . . . . .	44
2.2 Преглед постојећих SMA модела . . . . .	45
2.3 Истраживачке теме и садржај дисертације . . . . .	50
<b>3 Унапређен конститутивни модел за анализу материјала са својством памћења облика</b>	<b>52</b>
3.1 Кинематика . . . . .	53
3.1.1 Градијент деформације . . . . .	53
3.1.2 Поларна декомпозиција градијента деформације . . . . .	53
3.1.3 Тензори деформације и релативне деформације . . . . .	55
3.1.4 Генералисане мере релативне деформације . . . . .	56
3.1.5 Тензори брзине деформације . . . . .	57
3.1.6 Објективна коротациона брзина . . . . .	58

САДРЖАЈ	10
3.1.7	Декомпозиција укупне деформације на еластичну и нееластичну . . . . . 59
3.1.8	Тензори напона . . . . . 65
3.1.9	Закон баланса механичке енергије . . . . . 67
3.2	Термодинамика континуума . . . . . 67
3.2.1	Први закон термодинамике (Одржање енергије) . . . . . 67
3.2.2	Други закон термодинамике (принцип неједнакости ентропије) . . . . . 68
3.3	Слободна енергија . . . . . 70
3.4	SMA конститутивни модел - Лагоудас . . . . . 71
3.5	Развој функције трансформације . . . . . 74
3.6	Функције ојачања . . . . . 76
<b>4</b>	<b>Нумеричка имплементација поступка интеграције напона код SMA 78</b>
4.1	Основне претпоставке . . . . . 78
4.2	Локални Њутн-Рапсонов алгоритам . . . . . 80
4.3	Интеграција напона за мале деформације . . . . . 81
4.4	Интеграција напона за велике деформације . . . . . 83
<b>5</b>	<b>Термо-механичка спрега програма за структурну и анализу провођења топлоте у SMA 86</b>
5.1	Једначина баланса енергије за спрегнуте проблеме . . . . . 86
5.2	Термомеханичка спрега и методе решавања . . . . . 87
5.2.1	Програм за провођење топлоте - ПАК-Т . . . . . 88
5.2.2	Програм за структурну анализу - ПАК-С . . . . . 91
5.3	Имплементација партиционисаног алгоритма за термо-механичко спрезање . . . . . 95
5.3.1	Математички опис . . . . . 95
5.3.2	Имплементација . . . . . 96
<b>6</b>	<b>Верификација спрегнутог термо-механичког модела поређењем са експерименталним резултатима 99</b>
6.1	Експериментални детаљи испитивања на затезање SMA узорака . 99
6.2	Опис МКЕ модела . . . . . 102
6.3	Експериментални и нумерички резултати . . . . . 104
6.3.1	Затезање контролисано деформацијом: експериментални и нумерички резултати . . . . . 104

6.3.2	Затезање контролисано силом: експериментални и нумерички резултати . . . . .	108
6.4	Дискусија верификационих резултата . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Нумеричка анализа проблема и моделирање реалних SMA структура</b>	<b>119</b>
7.1	Нумеричка анализа референтних примера . . . . .	119
7.1.1	Једноосно затезање . . . . .	119
7.1.2	Вишеосно оптерећење . . . . .	124
7.2	Примери великих деформација . . . . .	130
7.2.1	Просто смицање са суперпонираном крутом ротацијом . . .	130
7.2.2	Конзола оптерећена моментом на слободном крају . . . . .	132
7.2.3	Јединична ћелија стента . . . . .	134
<b>8</b>	<b>Закључци</b>	<b>141</b>
	<b>Литература</b>	<b>146</b>
	<b>ДодатакА Поступак интеграције напона</b>	<b>156</b>

# Списак слика

1.1	Шема фазног дијаграма у зависности напона и температуре за SMA	28
1.2	Фазна трансформација код SMA изазвана променом температуре	29
1.3	Шема ефекта памћења облика код SMA . . . . .	30
1.4	Криве зависности напон-деформација-температура за SME . . . . .	30
1.5	Шема псеудоеластичног оптерећења код SMA . . . . .	31
1.6	DSC - криве добијене за два комплетна циклуса грејања и хлађења SMA . . . . .	31
1.7	Шема интерфејса између фазе аустенита и мартензита . . . . .	32
1.8	Температурно поље на површини SMA узорка и профил температуре дуж линије (дужине узорка) на почетку локализоване мартензитне трансформације . . . . .	33
1.9	Протеза од нитинола коришћена за корекцију положаја зуба . . . . .	35
1.10	Шема NiTi бушилице која се користи за хирургију корена зуба . . . . .	35
1.11	Перидонтални имплант од SMA . . . . .	36
1.12	Интрамедуларни NiTi штап за хирургију скочног зглоба . . . . .	37
1.13	Самоекспандујући стент од нитинола приказан у растерећеној конфигурацији (изнад) и ограниченом стању (испод) . . . . .	38
1.14	Спајалица која се користи приликом операције стопала за фиксирање кости . . . . .	39
1.15	Уретрални стент (а) Слика стента направљеног од Нитинола са полимерном превлаком. (b) Репрезентација имплантираног уретралног стента (Allium Medical Ltd., Caesarea Industrial Park South, Israel) . . . . .	39
1.16	Шема функционисања SMA конектора за спајање цеви . . . . .	40
1.17	Бетонска греда ојачана супереластичним затегнутим кабловима методом накнадног затезања . . . . .	41
1.18	Четири кабла од 45 m у ELSA (European Laboratory for Structural Assessment). (A) кабал; (B) SMA пригушивач; (C) акцелерометар за истраживања . . . . .	42

3.1	Шема деформација приказана поларном декомпозицијом . . . . .	54
3.2	Шема мултипликативне декомпозиције градијента деформације . . . . .	61
3.3	Шема Коши-Гринових тензора деформације у вези са конфигурацијама . . . . .	62
3.4	Шема тензора логаритамске деформације и конфигурације . . . . .	64
3.5	Шема компатибилних тензора логаритамске деформације . . . . .	65
5.1	Шема термо-механичког спрезања коришћењем СТЛ интерфејса . . . . .	97
6.1	ТЕМ слика TiNi SMA у референтном стању . . . . .	100
6.2	Шема експерименталног система за термомеханичко испитивање SMA (GL обележава дужину мерача кидалице екстензометра) . . . . .	101
6.3	Фотографија експерименталне опреме дизајниране за термомеханичко испитивање SMA . . . . .	101
6.4	Мрежа коначних елемената са приказаним оптерећењем и граничним условима . . . . .	103
6.5	Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином деформације $10^{-3}\text{s}^{-1}$ . . . . .	105
6.6	Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином деформације $10^{-2}\text{s}^{-1}$ . . . . .	106
6.7	Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином деформације $10^{-1}\text{s}^{-1}$ . . . . .	107
6.8	Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином напона $12.5\text{ MPa/s}$ . . . . .	109
6.9	Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином напона $25\text{ MPa/s}$ . . . . .	110
6.10	Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином напона $50\text{ MPa/s}$ . . . . .	111
6.11	Поређење експерименталних кривих добијених током TiNi SMA затезања брзинама деформација $10^{-1}\text{s}^{-1}$ , $10^{-2}\text{s}^{-1}$ и $10^{-3}\text{s}^{-1}$ . . . . .	112
6.12	Поређење нумеричких кривих добијених током TiNi SMA затезања брзинама деформација $10^{-1}\text{s}^{-1}$ , $10^{-2}\text{s}^{-1}$ и $10^{-3}\text{s}^{-1}$ . . . . .	113

6.13	Поређење експерименталних кривих добијених током TiNi SMA затезања брзинама напона 12.5 MPa/s, 25 MPa/s и 50 MPa/s . . . . .	114
6.14	Поређење нумеричких кривих добијених током TiNi SMA затезања брзинама напона 12.5 MPa/s, 25 MPa/s и 50 MPa/s . . . . .	115
6.15	Експериментални резултати. Поређење кривих деформације и промене температуре са временом током затезања TiNi SMA за (а) брзину напона 25 MPa/s и (b) брзину деформације $10^{-2}s^{-1}$ . . . . .	116
6.16	Нумерички резултати. Поређење кривих деформације и промене температуре са временом током затезања TiNi SMA за (а) брзину напона 25 MPa/s и (b) брзину деформације $10^{-2}s^{-1}$ . . . . .	117
7.1	МКЕ мрежа са граничним условима и оптерећењима за примере једноосног затезања . . . . .	120
7.2	Поређење зависности напон-деформација за SMA псеудоеластични ефекат . . . . .	121
7.3	Поређење глатке (енг. smooth) функције ојачања са полиномном и косинусном за SMA псеудоеластични ефекат . . . . .	122
7.4	Поређење зависности напон-деформација за ефекат памћења облика код SMA . . . . .	123
7.5	Поређење глатке (енг. smooth) функције ојачања са полиномном и косинусном за SME . . . . .	123
7.6	Фазна трансформација изазвана променом температуре код SMA . . . . .	124
7.7	Поређење глатке (енг. smooth) функције ојачања са полиномном и косинусном за мартензитну трансформацију изазвану температуром . . . . .	125
7.8	Пућања напона за пропорционално оптерећење . . . . .	126
7.9	Зависност напон-деформација за затезање и смицање за пропорционално оптерећење . . . . .	126
7.10	Зависност аксијалне и смичуће деформације за пропорционално оптерећење . . . . .	127
7.11	Зависност аксијалног и смичућег напон за непропорционално оптерећење . . . . .	128
7.12	Зависност аксијалне и смичуће деформације за непропорционално оптерећење . . . . .	128
7.13	Зависност аксијалног напона и деформације за непропорционално оптерећење . . . . .	129
7.14	Зависност смичућег напона и деформације за непропорционално оптерећење . . . . .	129

7.15	Репрезентативни положаји за пример оптерећења простим смицањем са суперпонираном крутом ротацијом . . . . .	130
7.16	Поређење резултата добијених за SMA оптерећен на смицање са суперпонираном ротацијом и на смицање без суперпониране ротације . . . . .	131
7.17	Шема конзоле оптерећене моментом на крају . . . . .	132
7.18	Зависност сила-померање на оптерећеном крају SMA конзоле . . .	132
7.19	Распоред напона по дужини конзоле и удела мартензита у запремини у одабраним корацама при оптерећењу . . . . .	133
7.20	Распоред напона по дужини конзоле и удела мартензита у запремини у одабраним корацама при растерећењу . . . . .	134
7.21	Геометрија узорка јединичне ћелије стента дебљине 0.53 mm . . .	135
7.22	Недеформисана мрежа једне четвртине тестиране јединичне ћелије стента . . . . .	136
7.23	Одзив сила-померање добијена МКЕ анализом јединичне ћелије стента под псеудоеластичним условом . . . . .	136
7.24	Распоред удела мартензита у запремини кроз јединичну ћелију стента без утицаја ТМ спреге . . . . .	138
7.25	Поље температура ушица стента за иницијално стање . . . . .	139
7.26	Поље температура ушица стента за максимално оптерећење . . . .	139
7.27	Поље температура ушица стента за растерећено стање . . . . .	140

# Списак табела

3.1	Лежандреова трансформација између термодинамичких потенцијала . . . . .	70
4.1	Алгоритам одлучивања о смеру трансформације . . . . .	80
4.2	Локални Њутн-Рапсонов алгоритам за SMA конститутивни модел	81
5.1	Класификација нелинеарне анализе . . . . .	93
6.1	Материјални параметри SMA идентификовани за нумеричку анализу тестова на затезање у одељку 6 . . . . .	103
7.1	Материјални параметри SMA коришћени у примерима једноосног затезања . . . . .	120
7.2	Материјални параметри CuAlZnMn легуре коришћене за примере вишеосног оптерећења . . . . .	125
7.3	Материјални параметри SMA за пример јединичне ћелије стента .	135



# Скраћенице

**МКЕ** Метод Коначних Елемената

**ПАК** Програм за Анализу Конструкција

**ПЕ** Псеудоеластичност

**АИТ** Аичи технолошки институт (енг. Aichi Institute of Technology)

**CTL** Библиотека шаблона за компоненте (енг. Component Template Library)

**DSC** Диференцијална скенирајућа калориметрија (енг. Differential Scanning Calorimetry)

**IPPT** Институт за основна технолошка истраживања (пољ. Instytut Podstawowych Problemow Techniki - IPPT)

**MPI** Интерфејс за пренос порука (енг. Message Passing Interface)

**NOL** Лабораторија поморских убојних направа (енг. Naval Ordnance Laboratory)

**PAN** Пољска академија наука (пољ. Polskiej Akademii Nauk - PAN)

**SIMT** Мартензитна трансформација изазвана променом напона (енг. Stress Induced Martensitic Transformation)

**SMA** Легуре са својством памћења облика (енг. Shape Memory Alloys)

**SME** Ефекат памћења облика (енг. Shape Memory Effect)

**SSH** Сигурносна љуска (енг. Secure Shell)

**TCP/IP** Трансмисиони контролни протокол и Интернет протокол (енг. Transmission Control Protocol and Internet Protocol)

**ТЕМ** Трансмисиони електронски микроскоп (енг. Transmission Electron Microscopy)

**УЛН** кориговани Лагранжијан Хенки (енг. updated-Lagrangian-Hencky)

# Листа симбола

$A_f$  аустенитна крајња температура

$A_s$  аустенитна почетна температура

$E$  Јангов модул

$G$  модул смицања

$H$  максимална ефективна деформација трансформације

$J$  запремински коефицијент

$K^c$  матрица прелаза

$K^k$  матрица кондукције

$K^r$  матрица зрачења

$M_f$  мартензитна крајња температура

$M_s$  мартензитна почетна температура

$T^J$  чворне температуре

$T_0$  референтна температура

$T$  тренутна температура

$V$  запремина у референтној конфигурацији

$Y$  праг функције трансформације

$\Gamma$  укупна ентропија по јединици времена

$\Omega$  ограничена површ

$\Phi$  функција трансформације

$\Pi$  термодинамичка сила

$\alpha$  ефективни коефицијент термичког ширења

$\Sigma$  Манделов тензор напона

$\alpha$  тензор коефицијента термичког ширења

$\chi$  закон кретања

$\mathbb{H}$  тензор еластичности четвртог реда

$\sigma_u$  коротиран Кошијев тензор напона (Грин-Нагхди)

$\sigma$  Кошијев тензор напона

$\tau$  Кирхофов тензор напона

$\varepsilon$  тензор деформације

$\zeta$  вектор унутрашњих променљивих стања

$n_{tr}$  правац деформације трансформације

$\dot{x}$  брзина

$\lambda_k$  главна издужења

$\mathbf{B}$  матрица извода интерполационих функција

$\mathbf{C}^{IN}$  нееластични десни Коши-Гринов тензор деформације

$\mathbf{C}_{el}$  еластична конститутивна матрица

$\mathbf{C}$  десни Коши-Гринов тензор деформације

$\mathbf{E}$  Грин-Лагранжов тензор релативне деформације

$\mathbf{F}^E$  еластични градијент деформације

$\mathbf{F}^{IN}$  нееластични градијент деформације

$\mathbf{F}_{int}$  унутрашње силе

$\mathbf{F}$  градијент деформације

$\mathbf{G}$  метрички тензор у материјалној конфигурацији

- $\mathbf{H}^{IN}$  десна нееластична Хенкијева релативна деформација
- $\mathbf{H}_{int}$  матрица интерполационих функција
- $\mathbf{H}$  десна Хенкијева релативна деформација
- $\mathbf{K}$  матрица крутости
- $\mathbf{P}$  Пиола тензор напона
- $\mathbf{R}$  тензор ротације
- $\mathbf{S}'$  девијатор тензора напона
- $\mathbf{S}$  други Пиола-Кирхофов тензор напона
- $\mathbf{T}_B$  Биотов тензор напона
- $\mathbf{T}$  градијент температуре
- $\mathbf{U}$  десни тензор издужења
- $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  поље брзина у материјалном опису
- $\mathbf{X}$  вектор положаја у референтној конфигурацији
- $\mathbf{\Omega}$  кососиматрични тензор вртлога
- $\mathbf{b}^E$  еластични леви Коши-Гринов тензор деформације
- $\mathbf{b}$  леви Коши-Гринов тензор деформације
- $\mathbf{d}$  тензор брзине деформације
- $\mathbf{e}'$  девијатор тензора укупне деформације
- $\mathbf{e}_{EA}$  Ојлер-Алмансијев тензор релативне деформације
- $\mathbf{e}_{tr}$  деформација трансформације
- $\mathbf{e}$  тензор укупне деформације
- $\mathbf{g}$  метрички тензор у просторној конфигурацији
- $\mathbf{h}^E$  лева еластична Хенкијева релативна деформација
- $\mathbf{h}$  лева Хенкијева релативна деформација

- $\mathbf{k}$  тензор проводљивости
- $\mathbf{l}$  градијент брзине деформације
- $\mathbf{p}_k$  главни правци тензора деформације у референтној конфигурацији
- $\mathbf{q}_k$  главни правци тензора деформације у текућој конфигурацији
- $\mathbf{q}$  топлотни флукс
- $\mathbf{r}_s$  спољашња сила оптерећења
- $\mathbf{u}_n$  вектор померања чвора
- $\mathbf{u}_p$  вектор померања материјалне тачке
- $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  поље брзина у просторном опису
- $\mathbf{v}$  леви тензор издужења
- $\mathbf{w}$  тензор вртлога
- $\mathbf{x}_n$  вектор положаја чвора
- $\mathbf{x}_p$  вектор положаја материјалне тачке
- $\mathbf{x}$  вектор положаја у текућој конфигурацији
- $\mathcal{K}$  кинетичка енергија
- $\mathcal{M}$  ефективни тензор флексибилности
- $\mathcal{P}_{ext}$  спољашњи механички рад
- $\mathcal{P}_{int}$  унутрашњи механички рад
- $\mathcal{Q}$  топлотни рад
- $\mathcal{S}$  ентропија коју поседује континуум који обухвата одређен регион
- $\mathcal{U}$  унутрашња енергија
- $\nu$  Поасонов коефицијент
- $\omega$  угаона брзина
- $\bar{\mathcal{S}}$  ефективни напон

$\bar{\mathbf{C}}^E$  еластични десни Коши-Гринов тензор деформације

$\bar{\mathbf{G}}$  метрички тензор у међуконфигурацији

$\bar{\mathbf{H}}^E$  десна еластична Хенкијева релативна деформација

$\bar{\mathbf{b}}^{IN}$  нееластични леви Коши-Гринов тензор деформације

$\bar{\mathbf{h}}^{IN}$  лева нееластична Хенкијева релативна деформација

$\bar{e}_{tr}$  ефективна деформација трансформације

$\rho$  густина

$\sigma_m$  средњи напон

$\tilde{\mathbf{h}}$  Кошијев флуks ентропије

$\tilde{\mathcal{Q}}$  брзина промене улазне ентропије

$\tilde{r}$  извор ентропије по јединици времена и текућој запремини

$\xi$  удео мартензита у запремини

$b_k$  главна издужења левог Коши-Гриновог тензора релативне деформације

$c_k$  главна издужења десног Коши-Гриновог тензора релативне деформације

$c_m$  модул стишљивости

$c$  ефективна специфична топлота

$d\mathbf{X}$  линијски елемент у референтној конфигурацији

$d\mathbf{x}$  линијски елемент у текућој конфигурацији

$ds$  инфинитезимални елемент површине

$f(\xi)$  функција ојачања

$g$  Гипсова слободна енергија

$h_I$  тежинске функције

$h_J$  интерполационе функције

$h$  енталпија

$q_S$  улазни топлотни флуks на делу површи

$q_c$  флуks конвекције

$q_n$  укупан топлотни флуks на ограниченој површини

$q_r$  флуks радијације

$q_{dis}$  елементарна енергија дисипације

$q$  топлотни извор

$s_0$  ефективна специфична ентропија

$s$  ентропија по јединичној текућој запремини

$u_0$  ефективна специфична унутрашња енергија

$u$  специфична унутрашња енергија

$v$  запремина у текућој конфигурацији

$w_{int}$  унутрашњи механички рад у јединици времена по јединици запремине

$\mathbf{n}$  спољна нормала на инфинитезимални елемент површине  $ds$

$\mathcal{D}_{int}$  дисипација унутрашње енергије

$\psi$  Хелмхолцова слободна енергија

$e_m$  средња деформација

$e_{th}$  термичка деформација



# Глава 1

## Увод

### 1.1 Мотивација, циљ и структура

Током последњих неколико деценија, легуре са својством памћења облика (енг. Shape Memory Alloys) (SMA) су постале фасцинирајући материјали за истраживаче и инжењере [1]. Разлог за то је могућност коришћења напредних особина и ефеката у индустријској примени и различитим инжењерским решењима [2]. Да би се испитало понашање таквих материјала, веома је важно разумети механизам којим се феноменолошки ефекти јављају у SMA. У зависности од експлоатационе температуре SMA, могући ефекти се могу разликовати за исти материјал. То чини ове легуре мултифункционалним и веома осетљивим на температурне промене. Феноменолошки ефекти код SMA, термомеханичко понашање, особине и примери примене су дискутовани детаљно у литератури [3].

Уколико су карактеристике материјала познате, њихова термичка осетљивост се може користити као предност применом ефекта памћења облика на одговарајући начин [1, 2]. Из експерименталних истраживања се дошло до пуно детаља о понашању SMA, али коректна нумеричка анализа је увек корисна, због резултата којима се могу предвидети експлоатациони проблеми и могућа штета. Понашање SMA је последица комплексног термо-механичког стања, што разматрање конститутивног модела чини великим изазовом.

Последњих деценија, истраживачи широм света се баве унапређењем експерименталних и нумеричких поступака истраживања SMA са идејом да се обезбеде поузданији подаци за тачну симулацију понашања те врсте материјала. У складу са тим, ова теза се бави управо унапређењем и имплементацијом термо-механичког конститутивног модела за нумеричку анализу SMA и

његовом успешном применом.

Структура тезе је дата у наставку:

У Гл. 1 је дат увод у форми сажетог описа SMA особина и ефеката описаних дијаграмима и сликама. Феноменолошки ефекти, термо-механичко понашање, особине и примена SMA су детаљно размотрени.

У Гл. 2, разматран је преглед постојећих конститутивних модела. Такође је дата анализа и поређење детаља о могућим приступима SMA моделирању и постојећих нумеричких поступака. Посебно је размотрен случај експерименталног термо-механичког истраживања и постојећих конститутивних модела који могу да симулирају SMA феномене. Прегледом претходних радова су постављени захтеви и даљи правци истраживања.

У Гл. 3 су дати детаљи конститутивног модела за SMA. Изводи из механике континуума и изложени термодинамички принципи пружају основу за тачну формулацију функције слободне енергије. Изложени су детаљи којима се дефинишу различите мере деформација и одговарајућих конјугованих мера напона за теорију великих деформација, како би се обезбедило проширење алгоритма за мале деформације и омогућило решавање проблема великих деформација.

Гл. 4 се бави имплементацијом поступка за интеграцију напона. Представљени су детаљи имплементације дате теорије у програм за структурну анализу заснован на методи коначних елемената (МКЕ).

У Гл. 5 је дат алгоритам са детаљима имплементације за партиционисано термо-механичко спрезање МКЕ програма за структурну анализу и провођење топлоте.

У Гл. 6 је приказана верификација алгоритма спрезања, поређењем нумеричке симулације са резултатима добијеним експерименталним тестирањем SMA узорака. Приказане су криве зависности напона и промене температуре у функцији релативне деформације за различите брзине напона и деформација. Тестови су изведени контролисањем задате силе или померања што условљава разлике у понашању SMA које су анализиране у овој глави.

У Гл. 7 су приказани верификациони примери којима се испитује тачност имплементационог поступка интеграције напона. За примере једноосног затезања је дато поређење добијених резултата са резултатима из литературе. У наставку је кроз неколико примера вишеосног оптерећења извршено даље испитивање функционалности представљене процедуре. Успешна примена имплементационе теорије је коначно представљена на примерима одабраних реалних SMA проблема.

У Гл. 8 су приказана запажања и закључци добијени током истраживања.

Такође су дати и даљи могући правци истраживања и тренутни изазови у овој области.

## 1.2 О особинама, експерименталном испитивању и моделирању материјала са својством памћења облика

Због веома напредних особина, SMA припадају специфичној групи мултифункционалних или "паметних" материјала са одређеним захтевима, функцијама и ограничењима. Нпр. SMA имају способност да "запамте" и поврате првобитни облик и геометрију када се материјал налази на одређеној температури. Поред тога, максимална нееластична деформација забележена током коришћења зависи од врсте SMA и може бити и до 10%. Способност сензитивности (претварање механичког сигнала у немеханички) и актуације (претварање немеханичког сигнала у механички) и могућност коришћења ових особина симултано, сврстава овакве материјале у специјалну подгрупу активних или одзивних (енг. responsive) материјала [3].

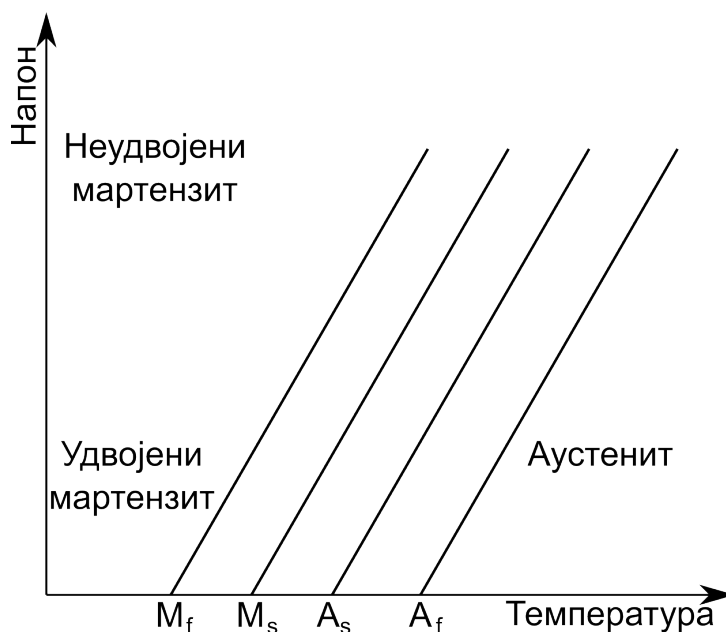
Током истраживања структурних фаза челика, забележено је постојање неколико могућих фаза, као нпр. аустенит и мартензит. Мартензитна фаза је добила име у част немачког металурга Адолфа Мартенса (Adolf Martens) (1850-1914), који се бавио истраживањем промене фаза у челику [1, 4]. Мартензитна трансформација је дефинисана као фазна трансформација која се дешава услед померања атома у форми механизма клизања (енг. shear mechanism) [4] без дифузионог премештања атома [5]. У почетку је мартензитна трансформација у челику посматрана као неповратна. Буелер (Buehler) и остали су у раду [6] из 1963. године, истраживали реверзibilност мартензитне трансформације у легури никла и титанијума (NiTi) и њен утицај на механичка својства легуре. Они су закључили да су главни разлози који управљају фазном трансформацијом "састав легуре, температура и облик пластичне деформације". Истраживање је спроведено у Лабораторији поморских убојних направа (енг. Naval Ordnance Laboratory) (NOL), тако да је NiTi легура добила име нитинол (NiTiNOL) у ту част. Неколико година касније, Буелер и Вајли (Wiley) су награђени патентном за развој серије NiTi легура [7].

Током даљег истраживања, такође се дошло и до следећих закључака [1–3, 6, 7]:

- NiTi легура садржи 49–57% никла (Ni) и идеалан састав нитинола може

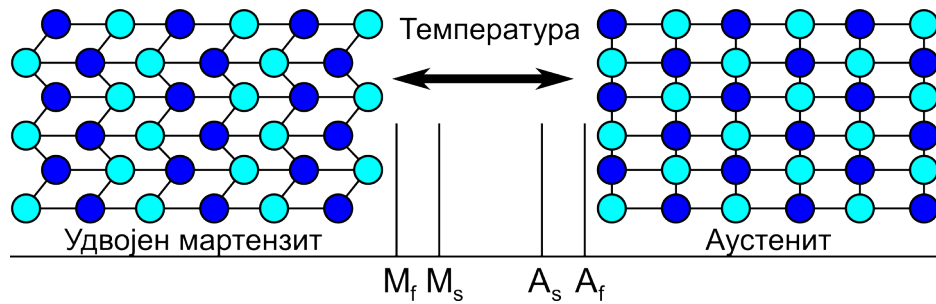
варирати од 38% до 50% титанијума (Ti),

- легирајући елементи као што су кобалт (Co) или гвожђе (Fe) додати у NiTi смањују температуру на којој долази до трансформације,
- постоје високо температурни SMA (TiPd, TiPt, TiAu) са температурама трансформације изнад 100 °C,
- бакар (Cu) као легирајући елемент чини хистерезис стрмијим.



Слика 1.1: Шема фазног дијаграма у зависности напона и температуре за SMA:  $M_s$  - мартензитна почетна,  $M_f$  - мартензитна крајња,  $A_s$  - аустенитна почетна,  $A_f$  - аустенитна крајња [3]

Концентрација фаза је важан фактор у понашању легура (Сл. 1.1). Однос фаза може бити контролисан различитим спољним факторима који се могу описати променљивим као што су: напон, температура, концентрација, магнетно поље, итд. У том смислу, SMA се могу наћи у две могуће фазе са различитим кристалним решеткама: аустенит (А) и мартензит (М). Аустенит је фаза која се јавља на високим температурама, док мартензит припада фази на ниским температурама. Трансформација међу фазама се дешава услед дисторзије решетке клизањем (енг. shear lattice distortion) тј. "хомогеног клизања суседних равни једних у односу на друге и одговарајуће промене удаљености између тих равни" [5]. Правац оријентације се зове варијанта (енг. variant). Мартензитне варијанте могу бити организоване као удвојени (енг. twinned) (комбинација



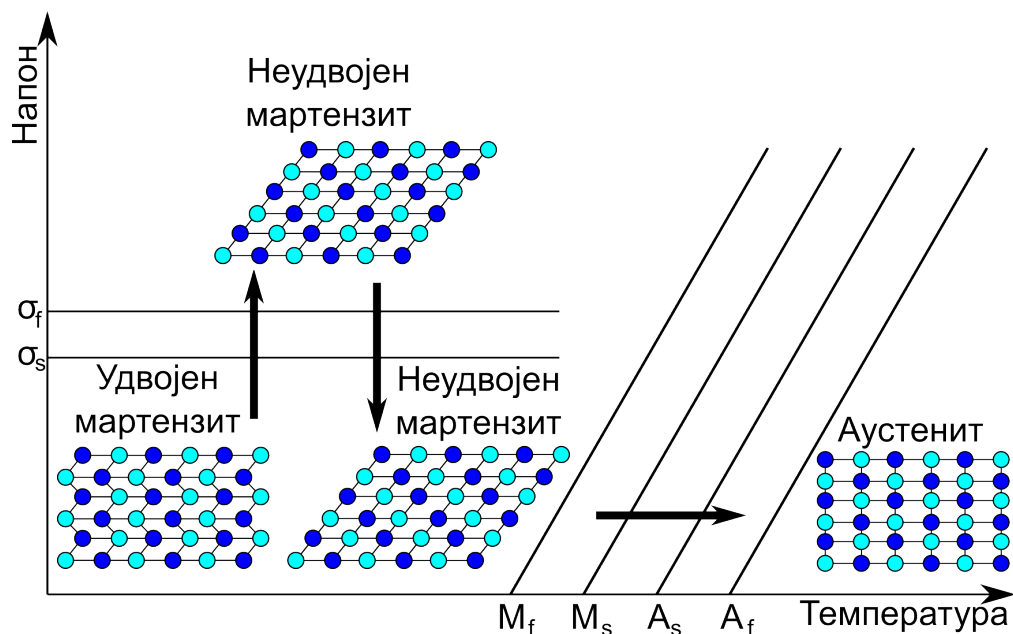
Слика 1.2: Фазна трансформација код SMA изазвана променом температуре [3]

мартензитних варијанти) и неудојени (енг. *detwinned*) мартензит (одређена варијанта је доминантна) [3].

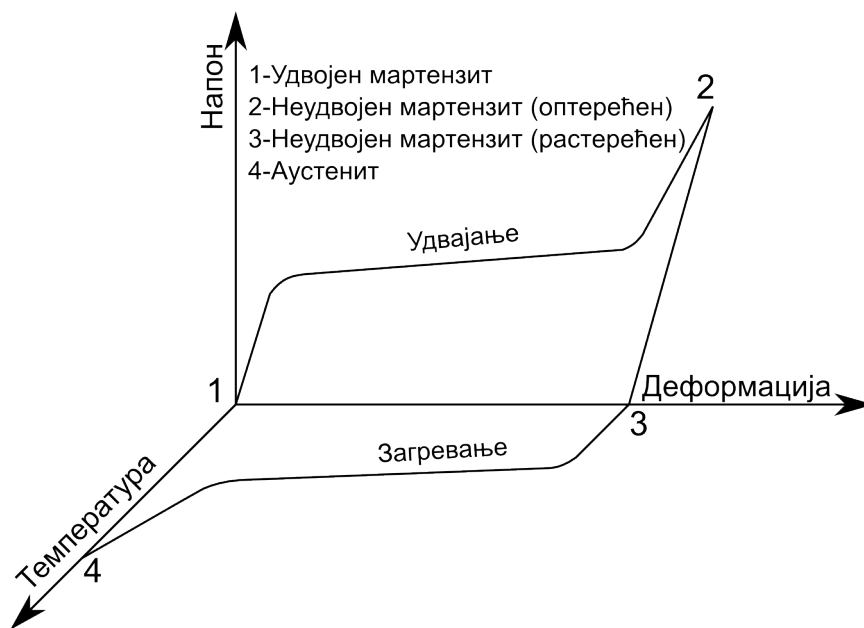
Промена температуре SMA може изазвати мартензитну трансформацију кристалне решетке (Сл. 1.2). Па тако, хлађење материјала може изазвати трансформацију унапред, која подразумева промену кристалне решетке из аустенита у удојени мартензит. Супротно, загревањем материјала изазива се мартензитна трансформација уназад из мартензита у аустенит. Температура почетка и завршетка трансформације је веома важна за процес мартензитне трансформације. Мартензитна и аустенитна температура су обележене са  $M$  и  $A$ , док су почетна и крајња тачка дефинисане, редом индексима "s" и "f" (од енгл. *start* и *finish*). Током оба смера трансформације, јављају се две карактеристичне температуре и то, када је трансформација започета и када је завршена (мартензитна почетна  $M_s$  и крајња  $M_f$  и аустенитна почетна  $A_s$  и крајња  $A_f$  температура) [3].

Промена кристалне решетке је такође могућа и услед механичког оптерећења. Уколико је задато оптерећење на ниској температури (удојени мартензит), неке варијанте могу да се реоријентишу и изгубе удојени изглед, што узрокује промену облика материјала (Сл. 1.3). Загревањем изнад аустенитне крајње температуре  $A_f$ , долази до фазне трансформације уназад и кристална решетка се трансформише из неудојеног мартензита у аустенит (Сл. 1.3). Након хлађења испод мартензитне крајње температуре  $M_f$ , удојени мартензит се поново формира. Овај ефекат је познат као ефекат памћења облика (енгл. *Shape Memory Effect*) (SME) или псеудопластичност (Сл. 1.4). Уколико је температура материјала изнад аустенитне крајње температуре  $A_f$ , оптерећење изазива трансформацију у неудојени мартензит из стабилног аустенита, који постоји на тој температури. Након растерећења, структура кристалне решетке се враћа у фазу аустенита (Сл. 1.5). Овај ефекат је познат као псеудоеластичност (ПЕ) [1–3].

Кристална структура аустенита је кубни кристал  $B2$ , док мартензит може



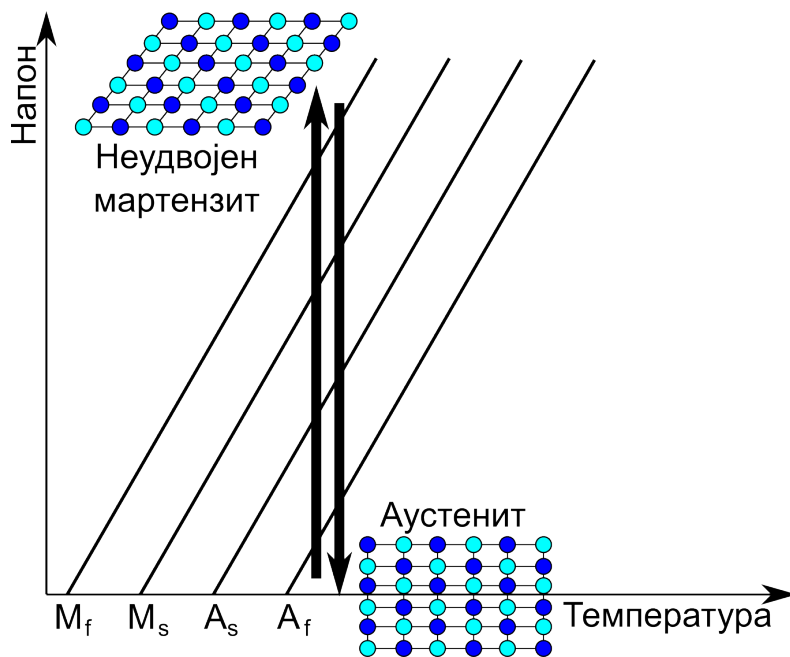
Слика 1.3: Шема ефекта памћења облика код SMA [3]



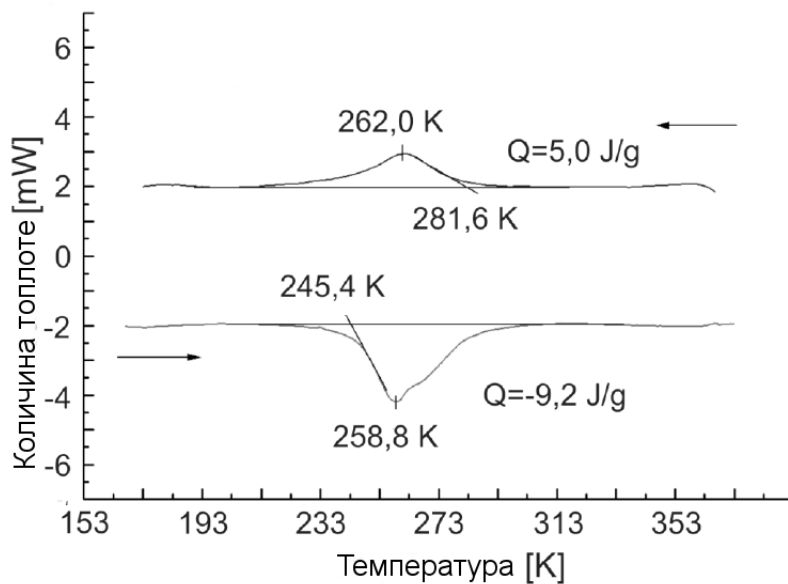
Слика 1.4: Криве зависности напон-деформација-температура за SME [3]

имати различите структуре што зависи од легирајућих елемената. У NiTi легирама, мартензитна фаза је моноклиничне структуре  $B19'$ . Директна трансформација  $B2 \rightarrow B19'$  није тако честа, због постојања мартензитне  $R$ -фазе ( $B2 \rightarrow R \rightarrow B19'$ ). Нпр., додавањем бакра (Cu) или паладијума (Pd), мартензит може настати у форми орторомбичне структуре  $B19$  или  $R$ -фазе [3, 4].

Диференцијална скенирајућа калориметрија (енг. Differential Scanning Calorimetry) (DSC) је техника чијим је коришћењем могуће одредити мартензитну (почетну



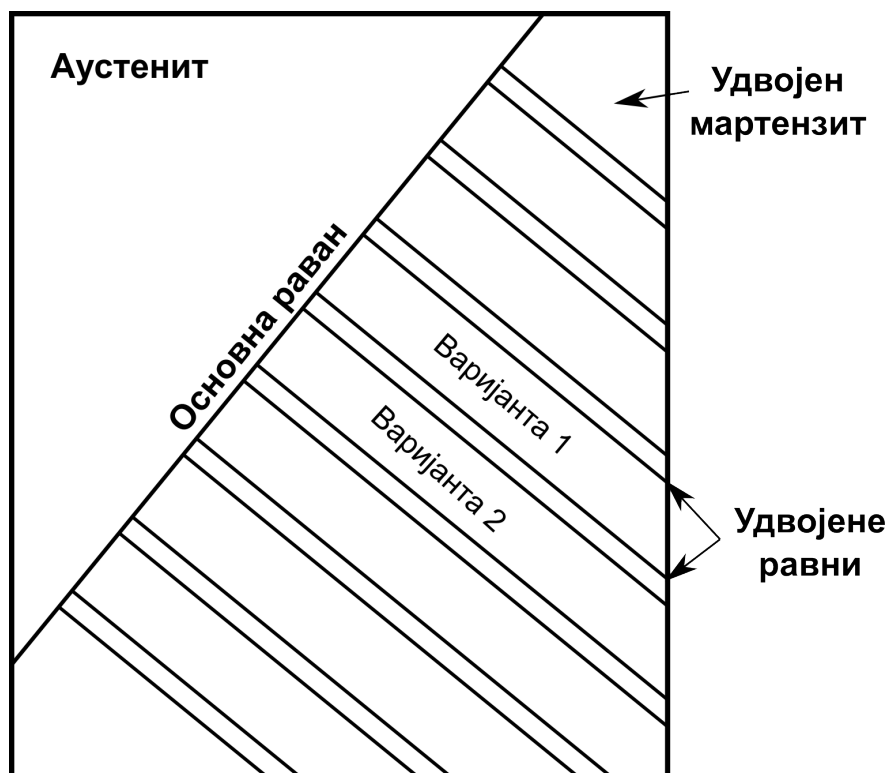
Слика 1.5: Шема псеудоеластичног оптерећења код SMA [3]



Слика 1.6: DSC криве добијене за два комплетна циклуса грејања и хлађења SMA (захвалност Данути Штроц (енг. Danuta Stroz, University of Silesia, Poland)) [8]

и крајњу) температуру за трансформацију унапред и уназад приликом загревања и хлађења материјала. Као што се може запазити на Сл. 1.6, крива хлађења приказује да почетак *R*-фазе почиње на  $\approx 283$  K тј. само један шири скок је видљив на кривој [8].

Мартензитна трансформација се одвија померањем атома (клизање решетке)



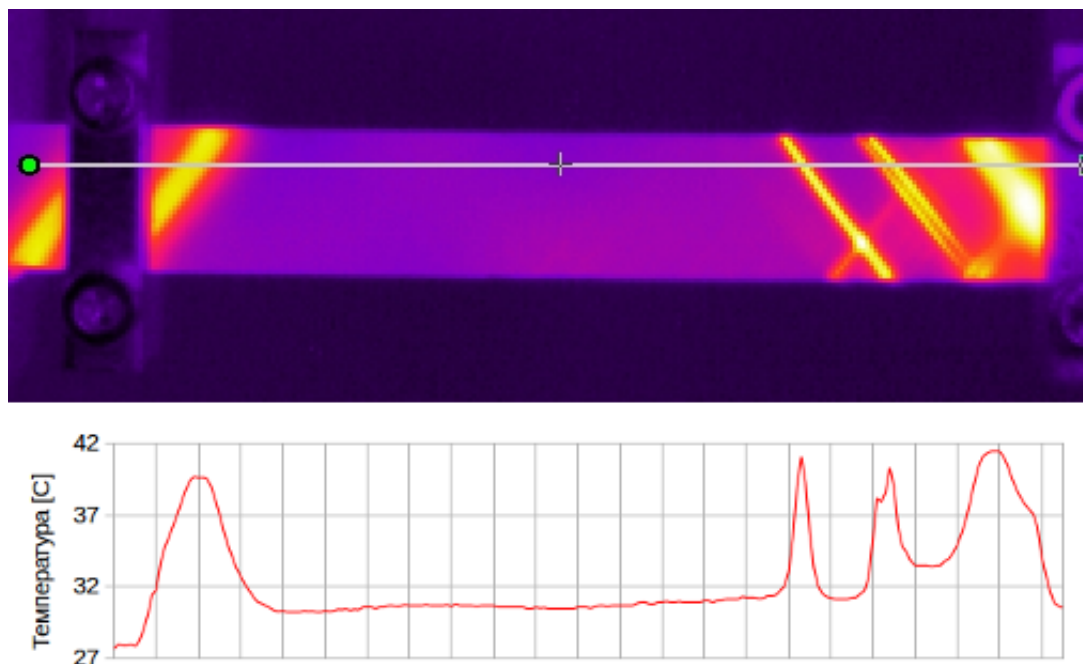
Слика 1.7: Шема интерфејса између фазе аустенита и мартензита [3]

дуж одређене равни која се зове основна (енг. habit) раван или инваријантна раван кристала, која формира интерфејс између мартензита и аустенита [3, 9]. Постоје два модела појаве мартензита у решеткама: клизање (енг. slip) и удвајање (енг. twinning). У SMA, удвајање је чешћи механизам. Детаљи су приказани на Сл. 1.7.

Такође, као што су разматрали Шав (Shaw) и Кириакидес (Kyriakides) и Халаи (Hallai) и Кириакидес у [10, 11], мартензитна трансформација уназад и унапред се не одвија хомогено у испитиваном узроку. Трансформација се одвија нуклеацијом и пропацијом фронта услед егзотермне природе трансформације из аустенита у мартензит и ендотермне природе трансформације из мартензита у аустенит. Ови фронтови у облику трака су слични онима који се јављају у меким челицима и зову се "Лудерсове траке" (енг. Lüders bands). Пиечиска (Pieczyska) и остали су инфрацрвеном камером забележили појаву трансформационих трака које прате деформисање TiNi SMA у режиму псеудоеластичности [8, 12–14]. Такође су, Пиечиска и остали [15] истраживали и температурну разлику између трака и остатка материјала што је приказано на Сл. 1.8.

Експерименталне резултате TiNi SMA узорака, испитиваних на затезање у [8] је проширио Дунић и остали [16] нумеричким моделирањем. Комплексно





Слика 1.8: Температурно поље на површини SMA узорка и профил температуре дуж линије (дужине узорка) на почетку локализоване мартензитне трансформације [15]

истраживање SMA подвргнутих различитим оптерећењима је приказао Тобуши (Tobushi) и остали у књизи [17]. Псеудоеластично понашање феромагнетних SMA монокристала подвргнутих циклусу притисног оптерећења и растерећења је презентовала Пиечиска у [18].

### 1.3 Примена SMA

Као активни материјали, SMA привлаче пажњу инжењерима и научницима у различитим областима. Могућност конверзије термалне енергије у механички рад, поузданост и мултифункционалност SMA, омогућавају примену таквих материјала у реалним инжењерским решењима. SMA су веома занимљиви у индустрији космичких летилица, авионској, грађевини, медицинској и транспортној индустрији, као и наутичкој и нафтној индустрији. SMA се такође могу наћи и у кућним апаратима у свакодневној употреби као нпр. апарати за кафу и припрему пиринча, клима уређаји, слушалице, флексибилне наочаре итд., али свакако најпопуларнија примена је у различитим биомедицинским уређајима.

Иако су NiTi легуре најскупље и најтеже их је произвести, и даље су најпопуларнији и најистраживанији SMA, због најбољих особина као што су: изражена псеудоеластичност и SME, већа стабилност у цикличним оптерећењима, већа ја-

чина и жилавост, електро-осетљивост, отпорност на корозију и најважнија од свих за биомедицинску примену - добра биокомпатибилност. Ипак, присуство никла (Ni) и могућност његовог отпуштања је по тврдњи неких лекара ипак ризично, јер може бити токсично, канцерогено и лоше утицати на имунитет [19]. Али, након бројних истраживања утврђено је да су NiTi легуре изузетно отпорне на корозију па је и бојазан од коришћења неоснована, јер Ti оксидише много брже од Ni што ствара  $TiO_2$  оксидни филм који спречава отпуштање Ni. Уколико су ипак услови експлоатације екстремни (као нпр. у људском организму), тада се користе специјалне технике површинске заштите као додатна сигурност [19].

Додавањем различитих легирајућих елемената у NiTi (Cu, Co, Fe, Nb, Mo), добијена је серија SMA са побољшаним хистерезисом, отпорношћу на корозију, трансформационим температурама и понашању код замора [20].

Различита SMA понашања се могу сврстати у две групе: примарни и секундарни ефекти. Неки од ових ефеката се могу користити за примену SMA. Примарни ефекти су [20]:

- Ефекат памћења облика и
- Псеудоеластичност.

Секундарни ефекти такође могу бити од значаја у практичној примени:

- Асиметрија код затезања - притисак,
- Стварање заосталих напона,
- Велики пригушни капацитет (нпр. могућност да расипа енергију вибрација код динамичких конструкција),
- Капацитет вршења рада.

### 1.3.1 Медицинска примена

Најчешћа комерцијална примена SMA је у биомедицини коришћењем псеудоеластичног ефекта. Биокомпатибилност која се постиже третирањем површине SMA базираних на NiTi и добре карактеристике дају предност код биомедицинске примене (ортодонтална примена, кардиоваскуларна примена, ортопедија, хируршки инструменти итд.) [20].

### Ортодонтална примена

Прва примена NiTi у медицинске сврхе, још 1971 године [19], је у производњи ортодонталних протеза (Сл. 1.9). Направљене од NiTi, коришћене су као много ефикасније и ефективније решење за корекцију положаја зуба у вилици. Главна предност у односу на челичне протезе је могућност да се нитинол користи у зони мартензитне трансформације, где су промене напона занемариве у односу на велике промене деформација. То омогућава да се малом силом коригује положај зуба током дужег периода без додатног подешавања протезе. Заправо, због скоро константне температуре у устима, могуће је остварити константу силу за велике деформације. Поред нитинола, друге врсте SMA такође могу произвести одговарајућу силу за различите примене [3,20]. Примена SMA, омогућава да се протеза подешава неколико пута годишње у односу на потребу за подешавањем челичних протеза на сваке 3-4 недеље [19].

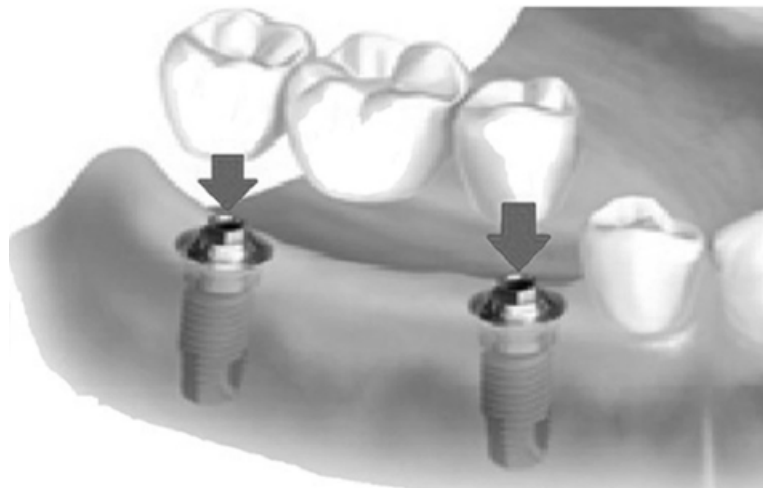


Слика 1.9: Протеза од нитинола коришћена за корекцију положаја зуба



Слика 1.10: Шема NiTi бушилице која се користи за хирургију корена зуба [3].

Поред тога, у ортодонталној примени, SMA такође налази примену за бушилице које се користе у хирургији корена зуба Сл. 1.10 и за импланте Сл. 1.11 [19].



Слика 1.11: Перидонтални имплант од SMA [19]

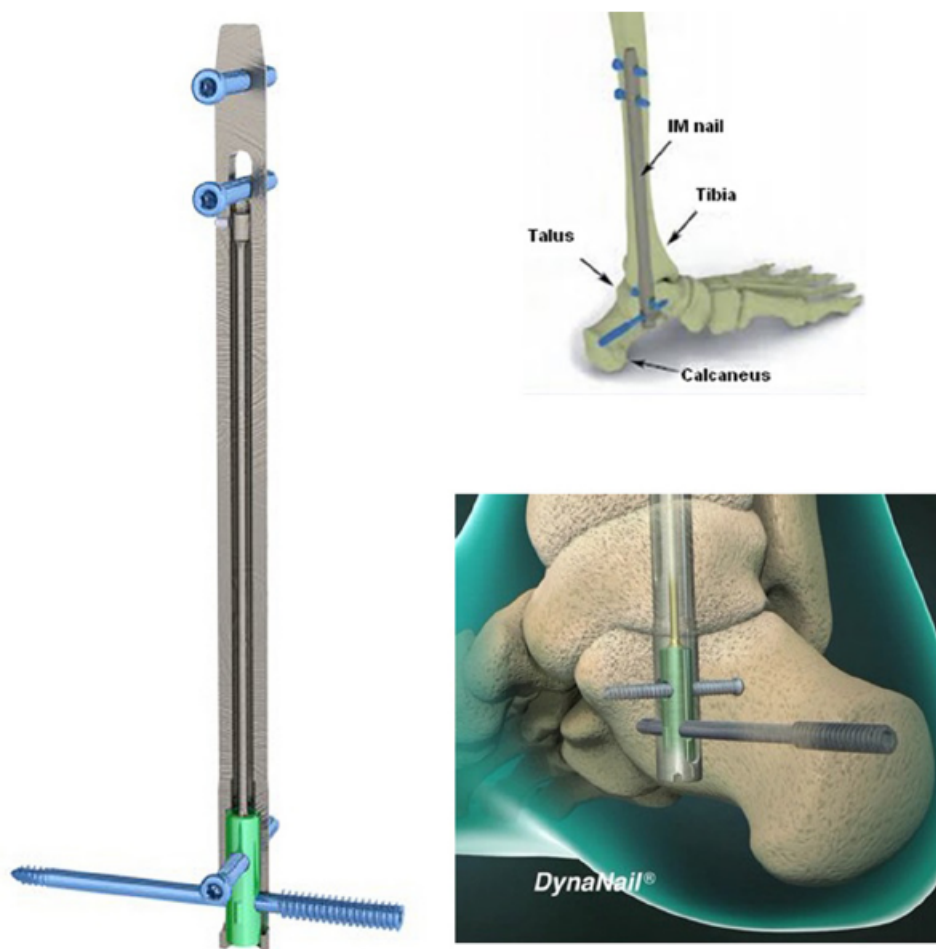
### Ортпедска примена

Да би се обезбедило ефикасно спајање поломљених делова костију, најважније је обезбедити стабилно фиксирање и одговарајући притисак између делова костију. Због тога се користе фиксатори који ојачавају кост и одржавају правилно налегање током периода оздрављења. Поред тога, фиксирање треба да буде неинвазивно, биокомпатибилно и треба да обезбеди биолошки одговарајући притисак за оптимално оздрављење. SMA могу да задовоље све наведене услове на ефикасан начин па се примењују у различитим варијантама спојница, фиксатора, импланата, корекционих штапова Сл. 1.12, итд.

### Кардиоваскуларна примена

Кардиоваскуларна примена SMA је од велике важности због смањене ивазивности и због све већег броја кардиоваскуларних проблема (атеросклероза, хипертензија, коронарне болести срца, инфаркт) са смртним исходом [21]. Кардиоваскуларни уређаји се деле у три могуће групе [21]: (1) катетери и жице-водилице, (2) емболички филтери и (3) стентови.

Најпознатија кардиоваскуларна примена (Сл. 1.13) је самоекспандујући NiTi стент. Његов задатак је да одржи константним обим цевастих крвних судова у телу. Када се стентови израђују од нерђајућег челика, постоји могућност општећења крвног суда након уградње због већих вредности сила које се јављају том приликом. Са друге стране, NiTi стент је самоекспандујући, тако да након уградње, температура прелази  $A_f$  и стент експандира у свој првобитни већи пречник. Оно што је такође важно, сила није велика, јер се експлоатација врши коришћењем ефекта псеудоеластичности, тако да се зидови крвног суда



Слика 1.12: Интрамедуларни NiTi штап за хирургију скочног зглоба [19]

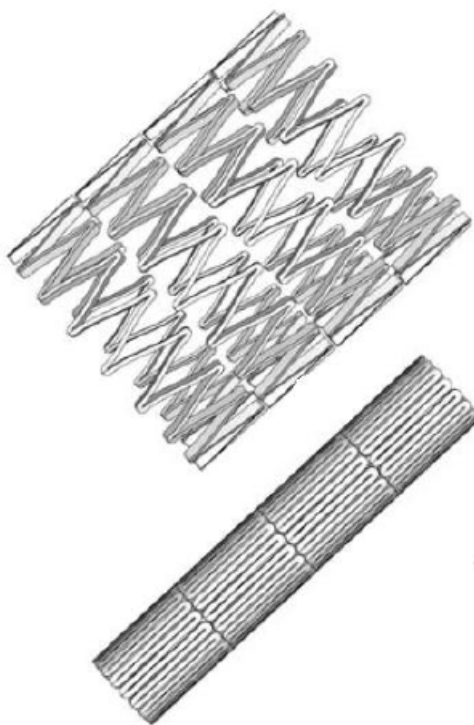
лагано померају [20].

Веома важна особина код стентова је њихов животни век у условима замора који је у овом случају изазван пулсирањем крви и свакодневним активностима. Заправо, стент може достићи и до 40 милиона циклуса оптерећења и растерећења годишње, тако да је животни век стента у условима замора њихова најбитнија карактеристика [19].

### Друга медицинска примена

Поред ових веома популарних примена SMA, у медицини се такође ови материјали примењују у [19]:

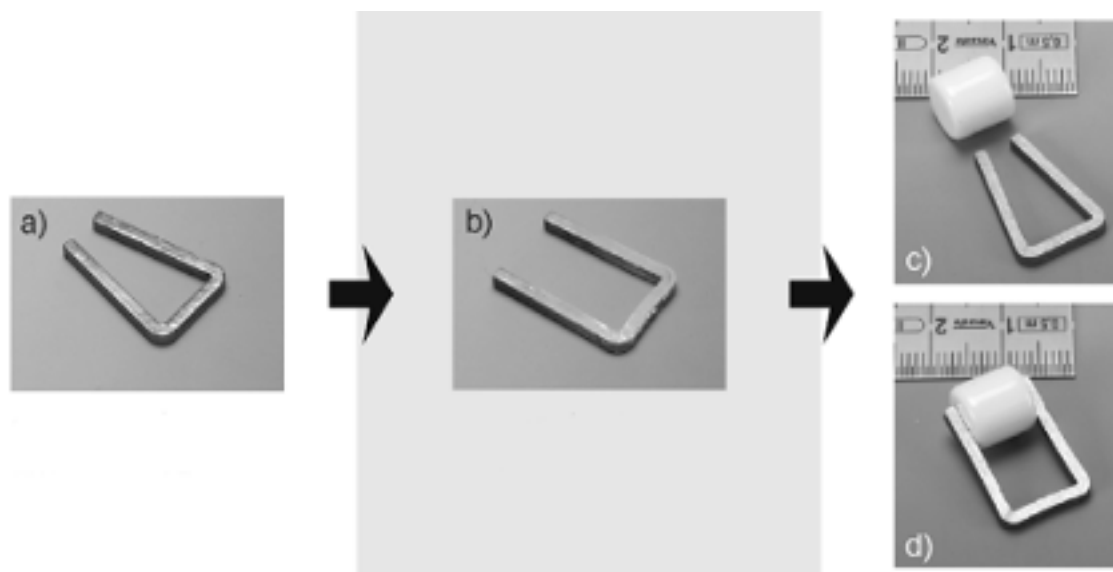
- Хирургији - уређаји који се користе приликом хируршких интервенција захтевају савитљивост и могућност задавања константе силе за велике промене деформација (нпр. уређаји за лапроскопију, операцију стопала Сл. 1.14)



Слика 1.13: Самоекспандирајући стент од нитинола приказан у растерећеној конфигурацији (изнад) и ограниченом стању (испод) [3, 20]

- Колоректална хирургија - за експанзију шупљина, за бешавно спајање (ColonRing) [19]
- Отоларингологији - протеза за "узенгију" у човековом уху,
- Неурохирургији - стентови, калемови, жице-водилице,
- Офталмологији - флексибилне наочаре,
- Урологији - уретрални стентови и стентови за простату Сл. 1.15,
- Гинекологији - импланти за контролу рађања, уређај за локацију тумора,
- Физиотерапији - за побуду атрофираних мишића коришћењем рукавице са TiNi жицама.

Пример спајалице костију је интересантан у хирургији, за спајање костију након операције скраћивања костију. Приликом скраћивања се кост дели на делиће које је након тога потребно спојити како би срасли [22]. Функционисање је приказано на Сл. 1.14. Као што се може видети, прво се спајалица хлади испод мартензитне крајње температуре  $M_f$ , након чега се она отвара механички савијањем крајева до жељеног положаја [22]. Након загревања изнад



Слика 1.14: Спајалица која се користи приликом операције стопала за фиксирање кости [22]

аустенитне крајње температуре  $A_f$ , спајалица се враћа у почетни облик уколико не постоји препрека за то. Стављањем дела кости између крајева, долази до његовог прихватања [22].

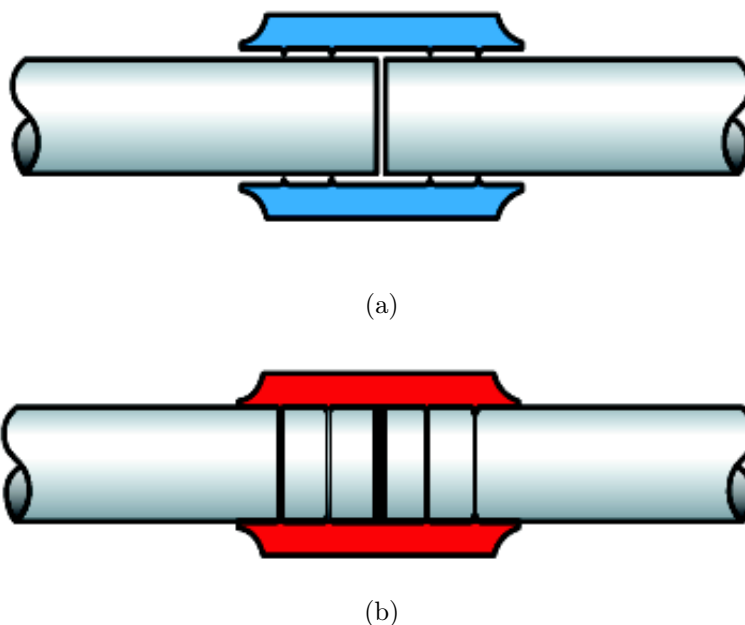


Слика 1.15: Уретрални стент (а) Слика стента направљеног од Нитинола са полимерном превлаком. (б) Репрезентација имплантираног уретралног стента (Allium Medical Ltd., Caesarea Industrial Park South, Israel) [19]

### 1.3.2 Техничка примена

Поред веома популарне медицинске примене, SMA су постали веома интересантни за коришћење у многим другим областима. Број комерцијалних примена се увећава сваке године са највећим уделом тржишта на актуаторима и моторима [23]. Тржиште "паметних материјала" се сваке године увећава за по 12.8% у периоду 2011.-2016. година [23].

Једна од првих примена SMA је за спајање цеви [24]. Предност оваквих конектора је издржљивост, лакоћа инсталације, тежина уређаја за спајање и могућност спајања различитих материјала [24]. Начин спајања је једноставан (Сл. 1.16): конектори су произведени у аустенитној фази и унутрашња величина конектора је мања од делова који треба да буду спојени. Тада се конектор хлади на температуру испод аустенитне почетне. У овом опсегу температуре, мартензитна трансформација се може изазвати механичким дејством. Након растерећења, на конектору се задржавају нееластичне деформације. Сада се може извршити спајање (Сл. 1.16(a)) и након загревања изнад аустенитне крајње температуре долази до остваривања чврсте везе (Сл. 1.16(b)). Једна од најпознатијих компанија које производе овакве конекторе је Аерофит у САД (енг. AeroFit Inc.) [25].



Слика 1.16: Шема функционисања SMA конектора за спајање цеви [25]

У последње време, примена SMA је проширена на још једну важну интегресну сферу - управљање грађевинским објектима [26]. Оваква примена би требало да унапреди одзив грађевине на спољни поремећај као и неочекивано оптерећење које угрожава безбедност конструкције. Главне жељене функционалне особине су актуација и сензитивност, дисипација енергије, самоподешавање, оздрављење конструкција итд. [23]. Оваква унапређења су неопходна за продужење употребљивости и века трајања конструкције, као и за контролу конструкција у случају земљотреса. Као што тврди Сонг (Song) и остали у [26], управљање грађевинама може бити активно, пасивно и полуактивно у облику



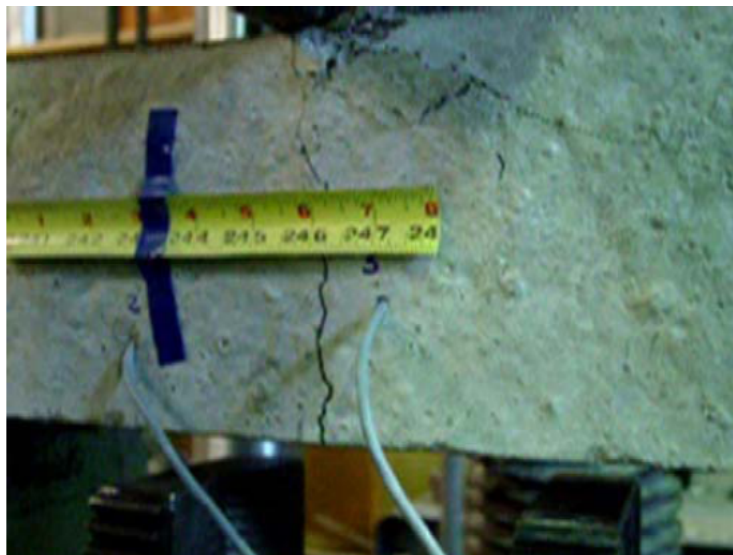
актуатора, дисипатора пасивне енергије и пригушивача за контролу грађевина.

### Активна и полуактивна контрола конструкција

За активну контролу грађевина, неопходна је примена силе на контролисану конструкцију. Полуактивни системи су слични активним, али користе мање енергије за контролу конструкције. SME је користан у примени SMA у форми активних и полуактивних актуатора у грађевинарству.



(а) Велика пукотина у току оптерећења



(b) Затварање пукотине након растерећења

Слика 1.17: Бетонска греда ојачана супереластичним затегнутим кабловима методом накнадног затезања [26]

Самооправљање грађевина (Сл. 1.17) коришћењем нискотемпературних SMA

је пример активне контроле конструкција. Пример полуактивне контроле је подешавање сопствене учесталости грађевине коришћењем SMA жица за пригушење вибрација [26].

### Пасивна контрола конструкција

Пасивна контрола одзивом SMA система је потребна када спољашње силе узрокују померање конструкције. Пасивна контрола конструкције је заснована на великом капацитету пригушења код SMA. Преглед истраживања својстава пригушења код SMA и зависност капацитета пригушења од температуре, учесталости оптерећења и броја циклуса је дата у [26]. SMA уређаји за пасивну контролу могу бити подешени на ниже температуре (мартензитни SMA) што даје SME и више температуре (аустенитни SMA) са псеудоеластичним својствима. Мартензитни SMA има већи капацитет пригушења, али спољашња топлота је неопходна за повратак иницијалног облика. Аустенитни SMA има мањи капацитет пригушења, али је јача сила неопходна за повратак на почетно стање. Ово сврстава SMA пасивне контролере у две групе: системи изолације тла и системи дисипације енергије.



Слика 1.18: Четири кабла од 45 m у ELSA (European Laboratory for Structural Assessment). (A) кабал; (B) SMA пригушивач; (C) акцелерометар за истраживања [23, 27]

Примери изолационог система тла које су дали Сонг и остали [26] су: стубови за мостове на аутопуту, жичани уређаји за рецентрирање грађевина, системи изолације опругом, тетивни изолациони системи за конструкције са више степени слободе. У истом раду, Сонг и остали [26] су дали примере система енергије дисипације: потпоре за оквирне конструкције, пригушни елементи Сл. 1.18 за

висеће мостове или просто-носеће мостове и структурно ојачање за прилагођавање земљотресу.

## Глава 2

# Преглед и анализа постојећих приступа моделирању материјала са својством памћења облика

У данашње време, новац и време су недостајући ресурси, па је неопходно предвидети понашање материјала да би се оптимизовала њихова функционалност и поузданост. Комплексност термомеханичког одзива и термичка осетљивост SMA чине истраживање веома захтевним. Због жеље за што тачнијим предвиђањем понашања материјала, настао је велики број конститутивних модела. У овом поглављу је презентован преглед постојећих модела и приступа.

### 2.1 Приступу моделирању SMA

У зависности од нивоа истраживања, разликујемо три главне групе SMA конститутивних модела [28,29]: микромеханички, микро-макромеханички и макромеханички (феноменолошки) модели.

Микромеханички или микро- модели захтевају истраживање микроструктуре SMA на нивоу зрна (стварање, кретање интерфејса, удвајање итд.). Региони или зрна мартензита се моделирају као јединствени поддомени. То узрокује постојање великог броја унутрашњих променљивих што отежава инжењерску примену, али основни феномени понашања материјала су много јаснији.

Феноменолошки или макро- модели могу да симулирају понашање материјала на макро нивоу [30]. Такви конститутивни модели су засновани на експерименталним резултатима. Конститутивни закони уз помоћ феноменолошке термодинамике континуума са унутрашњим променљивим, могу успешно опи-

сати понашање материјала. Уобичајено се као унутрашња променљива користи тзв. удео мартензита у запремини. Овакви модели су много једноставнији за уградњу и примену, али је теже разматрати микроскопске детаље.

Микро-макро модели су комбинација микро- и макро- модела. Засновани на моделирању једног зрна, хомогенизацијом као неопходним решењем за лакшу уградњу, њиховом применом је могуће предвидети понашање материјала на макро нивоу. Термодинамички закони се примењују ради предвиђања мартензитне трансформације. Понашање микроструктуре се користи за опис енергије међудејства услед фазне трансформације. Ово представља предност, али неке потешкоће су и даље присутне због великог броја унутрашњих променљивих.

## 2.2 Преглед постојећих SMA модела

Због жеље да се у овом истраживању симулира макро (феноменолошко) понашање SMA, као одговарајући приступ за нумеричку имплементацију и примену на реалним проблемима, изабран је макро (феноменолошки) приступ. Због тога ће главни осврт на постојеће SMA конститутивне моделе бити везан за макро моделе, иако ће неколико микро и микро-макро модела бити споменуто.

Макро (феноменолошки) SMA модели могу бити сврстани у две групе [20]: модели са и без унутрашњих променљивих. Модели без унутрашњих променљивих су описани деформацијом, напоном, температуром и ентропијом без променљивих који дефинишу мешавину фаза. Постоје два типа оваквих модела: полиномски потенцијал и хистерезисни модели [20]. Модели са унутрашњим променљивим могу описати унутрашњу структуру материјала. Конститутивне једначине могу бити изведене да зависе од унутрашњих променљивих и скупа механичких (напон и деформација) и термичких (температура и ентропија) променљивих. У овом раду, коришћена је термодинамика континуума са унутрашњим променљивим као одговарајуће решење за тродимензионалне SMA конститутивне једначине.

### **Модели са унутрашњим променљивим засновани на термодинамици континуума**

Многи истраживачи широм света раде на развоју SMA конститутивних модела. Најпопуларнији задаци су свакако: ојачање током трансформације, асиметрични одзив на затезање и притисак, моделирање мартензитног удвајања, двосмерни SME, ефекат реоријентације, акумулација пластичних деформација током цикличног оптерећења и утицај термо-механичког спрезања [3].

Иако су једнодимензионални модели и даље веома интересантни за примену на SMA жицама, комплексне геометрије као нпр. стентови и индустријска примена SMA мотивишу развој тродимензионалних феноменолошких модела. Један од првих модела су представили Лианг (Liang) и Рогерс (Rogers) 1992. године [31]. То је био термомеханички модел заснован на микро- и макро- механици и једној унутрашњој променљивој: удео мартензита у запремини. Као верификациони пример, приказана је торзија SMA штапа. Раниецки (Raniecki) и Лекселент (Lexcellent) [32] су 1994. године представили модел који може да симулира комплексна напонска стања. Модел је заснован на анализи једноосног напонског стања. Комбинација термодинамичких закона и релација између друге инваријанте напона и девијатора деформације је коришћена за развој овог модела. Дата је и функција слободне енергије за псеудоеластични модел за идеалном псеудоеластичношћу, са изотропним линеарним и нелинеарним трансформационим ојачањима. Као проширење овог рада, Леклер (Leclercq) и Лекселент [33] су 1996. године повећали број унутрашњих променљивих да би симулирали SMA понашање. Користили су два унутрашња параметра: запремински удео самоприлагодљиве (чист термални ефекат) и оријентисане (узрокован напоном) фазе. Током исте године, Бојд (Boyd) и Лагоудас (Lagoudas) [34] су представили термодинамички конститутивни модел за монолитне SMA. Употребили су функцију слободне енергије и дисипациони потенцијал модела ПЕ и SME. Разматрали су три случаја базирана на броју унутрашњих променљивих стања.

Током 1998. године, Раниецки и Лекселент [35] су наставили своје истраживање представљањем термодинамичке теорије за псеудо-еластично понашање SMA које узима у обзир асиметрију на затезање и притисак. Током исте године Соуза (Souza) и остали [36] су представили тродимензионалан феноменолошки модел и описали понашање поликристалних солида под утицајем напона. Тензор деформације трансформације је уведен да би се узела у обзир мартензитна трансформација изазвана напоном.

Кидваи (Qidwai) и Лагоудас (2000) [37,38] су извели конститутивну релацију коришћењем Лагранжеове формулације. Они су истраживали различите функције трансформације са идејом да предложи најпогоднију. Нумеричка имплементација SMA термомеханичког конститутивног модела је дата коришћењем алгоритама пројекције најближе тачке (енг. closest point projection) и конвексне равни сечења (енг. convex cutting plane) повратног пресликавања (енг. return mapping) већ коришћених у пластичности. Током 2001, Ауричио (Auricchio) [39] је представио ефикасан и робустан алгоритама за тродимензионални SMA модел

за велике деформације намењен анализи уређаја базираних на SMA. Током исте године, Тамбураја (Thamburaja) и Ананд (Anand) [40] су истраживали псеудоеластично понашање SMA на затезање и торзију. Користили су поликристални модел где је сваки елемент, кристал са оријентацијом, текстуром итд. "Макроскопски одзив напон-деформација су рачунати по запремини осредњеној кроз целу запремину."

Такође су Лекселент и остали [41] извели експериментална испитивања под утицајем двоаксијалног пропорционалног оптерећења на CuZnAl и CuAlBe легурама са циљем да одреде почетну површ фазне трансформације. Аурисио и Петрини (Petrini) су 2002. [42] и 2004. [43, 44] наставили истраживање са циљем да опишу асиметрично понашање SMA и ефекат термо-механичког спрезања. У радовима објављеним 2002. године разматрали су тродимензионални модел које је представио Соуза и остали [36] и сугерисали су унапређења неопходна за развој и имплементацију алгорита у МКЕ окружењу. Током 2004. године су представили модел који може да разматра термо-механичко спрезање да би симулирали такве проблеме. Између ова два рада 2003. године, Хелм (Helm) и Хаупт (Haupt) [45] су развили феноменолошки модел са могућношћу да симулира понашање под утицајем вишеосног напрезања SMA са једносмерним и двосмерним SME, псеудоеластичношћу и псеудопластичним понашањем. Модел је заснован на функцији слободне енергије и једначинама са унутрашњим променљивим. Током 2007. године, Попов (Popov) и Лагоудас [46] су представили поликристалан тродимензионалан SMA модел заснован на модификованим фазним дијаграмима. За симулацију мартензитне трансформације, модел користи три унутрашње променљиве и удвајање што га чини погодним за нумеричку анализу комплексних термомеханичких проблема. Панико (Panico) и Бринсон (Brinson) су 2007. године [9] објавили макроскопски феноменолошки модел који може да симулира ефекте вишеосног и непропорционалног оптерећења уз развој удвојеног и неудојеног мартензита. Нееластична деформација је подељена на два дела: која потиче од стварања неудојеног мартензита и реоријентације претходно постојећих мартензитних варијанти.

Заки (Zaki) и Моумни (Moumni) (2007) [47] су користили две унутрашње променљиве: удео мартензита у запремини и тензор мартензитне оријентације деформације, да би узели у обзир самоприлагођавање, оријентацију и реоријентацију мартензита са једносмерним SME и псеудоеластичношћу. Такође су приказали и поступак за идентификацију материјалних параметара да би поредили нумеричке и експерименталне резултате.

Резе (Reese) и Крист (Christ) [48] су током 2008. године представили нови

феноменолошки конститутивни модел са проширењем могућност решавања проблема великих деформација. Разлог су повећани захтеви за симулирање NiTi стентова. Годину дана касније у раду [22], они су такође представили спрегнут термомехнички материјални модел за SMA. Релације су приказане за случај великих деформација. Коришћена је мултипликативна декомпозиција градијента деформације. Термомеханичко спрезање је реализовано у монолитном приступу.

Тамбураја је 2010. године [49] представио спрегнут термо-механички поликристалан SMA конститутивни модел за проблеме великих деформација. Модел је имао могућност да симулира понашање SMA под вишеосним условима оптерећења. Аргхавани (Arghavani) и остали [50] су представили феноменолошки конститутивни модел за SMA, заснован на неповратности термодинамике и унутрашњим променљивима: количина мартензита и правац инваријанти. Коришћењем ових променљивих може се прецизније симулирати понашање под вишеосним непропорционалним оптерећењем. Касније у раду [51], Аргхавани и остали су проширили модел за мале деформације који су дали Панико и Бринсон [9] да би решили проблеме великих деформација коришћењем мултипликативне декомпозиције градијента деформације и адитивне декомпозиције тензора брзине нееластичне деформације. Током исте године, Хартл (Hartl) и остали [52] су размотрили "стварање и развој неповратних вископластичних деформација у SMA материјалу". Постоје ситуације када се такве деформације јављају на високим температурама. Они су такође дали конститутивни модел који узима у обзир такво понашање.

Током 2012. Лагоудас и остали [28] су објавили рад на тему термомеханичког SMA конститутивног модела. Унапређења у односу на рад Бојда и Лагоудаса [34] су глатка (енг. smooth) транзиција и зависност од термодинамичке силе на величину задате силе. У последње време, било је неколико идеја реформулације конститутивних модела за мале деформације да се омогући решавање проблема великих деформација [53, 54]. Ступкиевич (Stupkiewicz) и Петрик (Petrik) [54] су представили псеудоеластични модел у SMA и дали су методологију за проширење модела за мале деформације на режим за велике деформације. Користили су мултипликативну декомпозицију градијента деформације и експоненцијално пресликавање логаритамске деформације трансформације. Такође, Териахо (Teeriaho) [53] је предложио сличну идеју за Лагоудасову теорију [3]. Он је користио Ојлерову (Euler) формулацију засновану на брзини деформације са адитивном декомпозицијом тензора брзине деформације.



### Утицај брзине деформације на понашање SMA

Посебно ће бити дат преглед утицаја брзине деформације на понашање SMA. Пиечиска и остали [8, 13, 14] су запазили да је понашање SMA различито за различите брзине деформација. Одзив напон-деформација више ојачава и хистерезисна петља је све шири за веће брзине деформација. Да би симулирали такво понашање, Мирзаеифар (Mirzaeifar) и остали [55] су користили експлицитну шему коначних разлика за испитивање одзива SMA на затезање, узимајући у обзир ефекат генерисања латентне топлоте која прати трансформацију. Разматрали су неколико студија случаја са различитим геометријама узорака, брзина оптерећивања и растерећивања, као и граничних услова. Морин (Morin) и остали [56] су испитивали зависност брзине деформација и SMA механичког псеудоеластичног одзива коришћењем МКЕ, при чему су проучавали утицај брзине деформација и услове околине. Гранди (Grandi) и остали [57] извели су више нумеричких тестова којим су истраживали SMA механичко понашање под различитим условима. Јанг (Yang) и Дуи (Dui) су такође испитивали [58] TiNi легуре под оптерећењем затезањем. Пажња је била усмерена на локализацију деформација и феномен пропагације. Поред тога, дискутована је и зависност хистерезиса напон-деформација од брзине деформације узимајући у обзир промену температуре у епрувети. Разматране су три врсте граничних услова на крајевима тестираних епрувета.

Пиечиска и остали [8] су експериментално анализирали TiNi SMA на затезање за различите брзине напона и деформације. Појава и развој мартензитне трансформације узроковане напоном, је испитивана на основу поља температуре на површини епрувете, мерене брзом и осетљивом инфрацрвеном камером. Детаљи о зависности напон-деформација су анализирани у зависности од начина оптерећења. Стварање великог броја финих трансформационих трака је посматрано у различитим фазама мартензитне трансформације унапред и уназад. Даље су дискутовани остварени ефекти у вези са трансформацијом у зависности од услова оптерећења.

Дунић и остали су истраживали [16] поређење експерименталних резултата са резултатима добијеним нумеричком симулацијом. Поређење је вршено за SMA тестове на затезање под различитим брзинама оптерећивања. Приказано је да се нумеричким МКЕ моделом може квантитативно и квалитативно опонашати експериментално испитивање, што показује тачност датог метода истраживања.

## 2.3 Истраживачке теме и садржај дисертације

Приказани истраживачи резултати и све већа потреба за симулацијом комплексног термомеханичког одзива у реалним SMA проблемима, указују на неколико задатака важних за тачно и ефикасно нумеричко испитивање SMA понашања.

Један од задатака ове тезе је да се реформулише и нумерички имплементира феноменолошки конститутивни модел за SMA које је представио Лагоудас у [3]. У том смислу, модел који су развили и имплементирали Лагоудас и остали [3, 52] је реформулисан извођењем свих променљивих као функције ефективних вредности напона и деформације и унутрашњег параметра који описује удео мартензита у запремини. Гипсова (Gibbs) слободна енергија је коришћена као термодинамички потенцијал.

Да би се успешно симулирало термомеханичко понашање SMA, коришћен је партиционисани приступ спрезања за повезивање програма за структурну анализу [59] и провођење топлоте [60]. Дисипативна енергија мартензитне фазне трансформације је искоришћена као променљива која изазива промену температуре материјала у форми унутрашњег топлотног извора.

Партиционисани приступ је реализован коришћењем блок Гаус-Зајдел (Gauss-Seidel) алгоритма [61, 62]. Као комуникациони интерфејс између програма за структурну анализу и провођење топлоте, коришћен је Библиотека шаблона за компоненте (енг. Component Template Library) (CTL) [63] као мидлвер (eng. middleware). Софтвер спрегнут на овај начин, омогућава термомеханичку анализу SMA и испитивање утицаја брзине оптерећења на понашање материјала. Због високе термоосетљивости SMA, ово унапређење је неопходно за тачну симулацију. Поређење нумеричких и експерименталних резултата [8] је анализирано за тестове у којима је мартензитна трансформација изазвана напонам. Експериментални SMA тестови су изведени за различите брзине деформација и посматран је настанак, развој и засићење фазне трансформације.

Експерименти су изведени на Институту за основна технолошка истраживања (пољ. Instytut Podstawowych Problemow Techniki) (IPPT), Пољска академија наука (пољ. Polskiej Akademii Nauk - PAN) (PAN) и Аичи технолошком институту (енг. Aichi Institute of Technology) (AIT), Јапан [8, 13, 14, 17]. Развој и засићење мартензитне трансформације изазване променом напона под различитим условима оптерећења су такође и нумерички симулирани. Након поређења добијених резултата са експерименталним резултатима приказана је тачност оваквог приступа који квалитативно и квантитативно опонашају експе-

рименталне резултате.

Проширење на проблеме великих деформација је реализовано на основу сугестија датих у литератури [53, 64, 65]. Решење је засновано на мултипликативној декомпозицији градијента деформације. Логаритамска деформација је коришћена за неколико одабраних примера који верификују функционалност и тачност такве имплементације.

## Глава 3

# Унапређен конститутивни модел за анализу материјала са својством памћења облика

*Онај ко воли праксу без теорије је попут морепловца који се укрца на брод без кормила и компаса, те никад не зна на коју обалу ће пристати.*

*Леонардо да Винчи*

Природа деформације одређује приступ коју је неопходно користити да би се тачно описало понашање материјала. Теорија малих деформација је примењива на мале деформације и мале ротације, где је претпоставка да су недеформисана и деформисана конфигурација исте. Теорија коначних или великих деформација је неопходна за велике деформације и велике ротације, где се разликују недеформисана и деформисана конфигурација.

У овој глави је дат преглед основних принципа механике континуума (кинематика, закони одржања и конститутивне једначине) и термодинамике. Кинематика је неопходна да опише геометрију кретања и деформацију без разматрања узрока. Закони одржања описују како спољашње силе утичу на кретање. Конститутивне једначине описују понашање материјала математичким једначинама.

Механика континуума је алат којим се описују физички феномени без потребе за познавањем микроструктуре материјала. Дакле, за добро разумевање макроскопског понашања материјала, потребно је објаснити њихово кретање и деформисање. Дати су такође и детаљи потребни за тачно дефинисање мера

деформације код теорије великих деформација, као њима конјугованих мера напона. Представљена механика континуума може да опише понашање SMA засновано на Лагоудасовом моделу [3] са примењеним изменама за ефикаснију имплементацију и примену. Коришћена је логаритамска деформација и кориговани Лагранжијан Хенки (енг. updated-Lagrangian-Hencky) (ULH) формулација [59, 64, 66].

## 3.1 Кинематика

### 3.1.1 Градијент деформације

Проучавањем деформације континуума између два положаја описаних као референтна и текућа конфигурације, дефинисана је неопходност увођења градијента деформације као тензора који повезује две тачке. Градијент деформације је дат као [66–69]:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (3.1)$$

где је  $\mathbf{X}$  вектор положаја материјалне тачке у референтној конфигурацији и  $\mathbf{x}$  је вектор положаја материјалне тачке у текућој конфигурацији. Такође, однос текуће запремине ( $v$ ) и почетне запремине ( $V$ ) је описан детерминантом градијента деформације  $\mathbf{F}$  [67]:

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{dv}{dV} > 0. \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Поларна декомпозиција градијента деформације

Градијент деформације може бити декомпонован поларном декомпозицијом на леви  $\mathbf{v}$  и десни  $\mathbf{U}$  тензор издужења и тензор ротације  $\mathbf{R}$  као [64, 67]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}, \quad (3.3)$$

са следећим особинама:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^T. \quad (3.4)$$

Тензор ротације мери локалну ротацију. Релација  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  је позната као десна поларна декомпозиција, док је  $\mathbf{F} = \mathbf{v}\mathbf{R}$  лева поларна декомпозиција [67]. Применом спектралне декомпозиције [70], десни тензор издужења  $\mathbf{U}$  можемо

написати у облику:

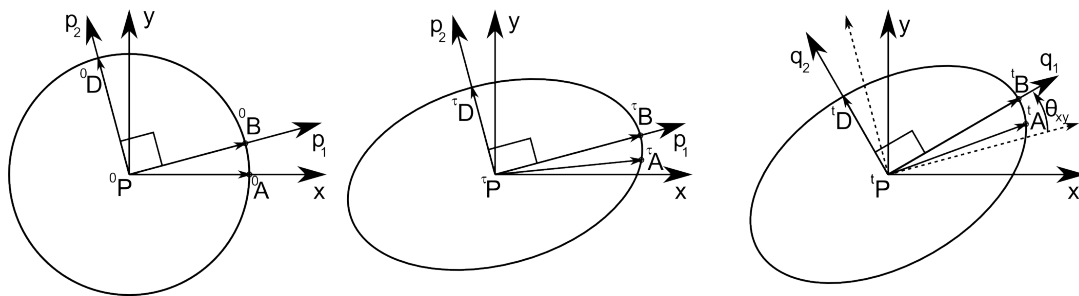
$${}^t_0\mathbf{U} = \sum_k {}^t_0\lambda_k {}^t\mathbf{p}_k \otimes {}^t\mathbf{p}_k, \quad (3.5)$$

где су  $\lambda_k$  главна издужења, а  $\mathbf{p}_k$  су одговарајући сопствени вектори тензора  $\mathbf{C}$  [64]. На сличан начин, могуће је дефинисати леви тензор издужења [70]:

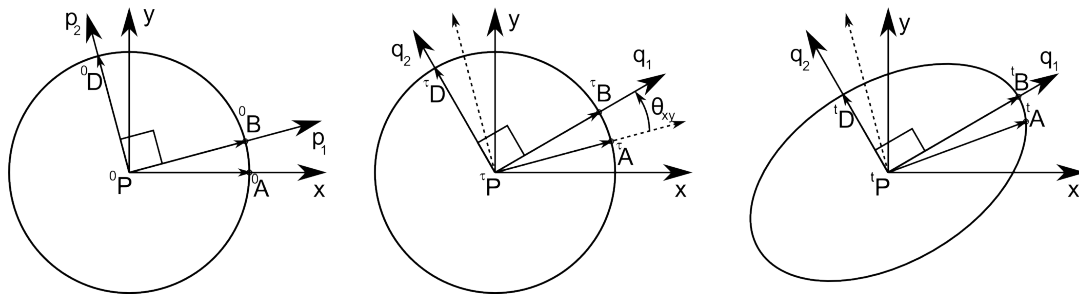
$${}^t_0\mathbf{v} = \sum_k {}^t_0\lambda_k {}^t\mathbf{q}_k \otimes {}^t\mathbf{q}_k, \quad (3.6)$$

са истим главним издужењима  $\lambda_k$ . Вектори  $\mathbf{p}_k$  и  $\mathbf{q}_k$  су јединичне дужине и представљају сопствене векторе  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{b}$ . Ови вектори образују две ортонормиране базе (десна и лева) повезане релацијом [64]:

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{R}\mathbf{p}_k. \quad (3.7)$$



(a) Десна декомпозиција  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$



(b) Лева декомпозиција  $\mathbf{F} = \mathbf{v}\mathbf{R}$

Слика 3.1: Шема деформација приказана поларном декомпозицијом [64]

На Сл. 3.1 је дат редослед деформација у  $x, y$  равни, где је трећи главни вектор управан на ту раван. На Сл. 3.1(a), коришћењем издужења  $\mathbf{U}$ , кружна материјална околина тачке  $P$  се деформише у елипсу са главним правцима  $\mathbf{p}_k$ . Као што се може запазити, сви вектори (као нпр.  $\vec{PA}$ ) из тачке  $P$  мењају дужину и правац осим вектора  $\vec{PB}$  и  $\vec{PD}$  који мењају само дужину. Коначна позиција материјала се добија крутом ротацијом за угао  $\theta_{xy}$ . Предложен редослед деформисања може бити промењен (Сл. 3.1(b)) тако да се прво врши

ротација тензором  $\mathbf{R}$  за  $\theta_{xy}$  и онда издужење левим тензором издужења  $\mathbf{v}$  [64].

### 3.1.3 Тензори деформације и релативне деформације

Поред градијента деформације, могу се дефинисати и друге мере коначне деформације. Десни Коши (Cauchy)-Гринов(Green) (или Гринов) тензор  $\mathbf{C}$  и леви Коши-Гринов (или Фингеров (Finger)) тензор  $\mathbf{b}$  се могу дефинисати као [66, 67, 69]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{v}^2. \quad (3.9)$$

Оба тензора су симетрична и позитивно дефинитна што значи да је [66, 67]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^T = \mathbf{C}^T, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = (\mathbf{F} \mathbf{F}^T)^T = \mathbf{b}^T. \quad (3.11)$$

На основу (3.4), тензори издужења могу бити повезани са одговарајућим тензором деформације као [66, 67]:

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Тензори релативне деформације (енг. strain tensors) такође представљају меру коначне деформације. Они могу бити приказани као функције десног Коши-Гриновог тензора деформације [66, 67]:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (3.14)$$

који је познат као Грин-Лагранжеов (Lagrange) тензор релативне деформације. Тензор релативне деформације може бити изражен и у функцији левог Коши-Гриновог тензора деформације и тада је [66, 67]:

$$\mathbf{e}_{EA} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}). \quad (3.15)$$

Овај тензор је познат као Ојлер-Алмансијев (Almansi) тензор релативне деформације.

### 3.1.4 Генералисане мере релативне деформације

На основу Хила (Hill) [71], може се дефинисати фамилија функција  $g(\lambda_k)$  главних издужења  $\lambda_k$  којом може да се дефинише релативна мера деформације. Генералисана релативна деформација у главним правцима  $\mathbf{p}_k$  је [64]:

$$\mathbf{E} = \sum g(\lambda_k) \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_k. \quad (3.16)$$

Ова релативна деформација одговара конфигурацији која се добија издужењем  $\mathbf{U}$ . С обзиром да су главна издужења  $\lambda_k$  у текућој конфигурацији у правцу леве базе  $\mathbf{q}_k$ , могуће је дефинисати генералисану меру релативне деформације и као [64, 70]:

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum g(\lambda_k) \mathbf{q}_k \otimes \mathbf{q}_k, \quad (3.17)$$

при чему функција  $g$  треба да задовољава услове [64]:

$$g(1) = 0, \quad (3.18)$$

$$\left( \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=1} = g'(1) = 1. \quad (3.19)$$

Општа формула фамилије функција  $g(\lambda_k)$  је дата као [64]:

$$g(\lambda_k)^n = \frac{1}{2n} (\lambda_k^{2n} - 1). \quad (3.20)$$

За специјалан случаја када је  $n = 0$  [64]:

$$g(\lambda_k)^0 = \ln \lambda_k, \quad (3.21)$$

добија се Хенкијева (Hencky) деформација у правцу десне или леве базе. Хенкијева деформација десног  $\mathbf{H}$  и левог  $\mathbf{h}$  Коши-Гриновог тензора релативне деформације су редом [70]:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C} = \ln \mathbf{U} = \sum_{k=1}^3 (\ln \lambda_k) \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_k, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{b} = \ln \mathbf{v} = \sum_{k=1}^3 (\ln \lambda_k) \mathbf{q}_k \otimes \mathbf{q}_k, \quad (3.23)$$

где су  $\lambda_k = c_k^{\frac{1}{2}} = b_k^{\frac{1}{2}}$  главна издужења главних вредности тензора релативне деформације. Главни правци левог и десног тензора издужења разликују се



само за ротацију.

### 3.1.5 Тензори брзине деформације

Даље ће бити показано како се неки од представљених тензора деформације мењају са временом уколико је познато кретање [67]:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), \quad (3.24)$$

где је  $\boldsymbol{\chi}$  закон кретања. Тада је градијент брзине деформације, односно брзина промене градијента деформације [67]:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}, \quad (3.25)$$

где је  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  материјално поље брзина. Просторни градијент брзине  $\mathbf{l}$  је дефинисан као [67]:

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.26)$$

где је  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  просторно поље брзина. Сада је могуће приказати просторни градијент брзине у функцији градијента брзине деформације као [67]:

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}. \quad (3.27)$$

Градијент брзине се може адитивно декомпоновати на симетричан и кососиметричан део као [67]:

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}, \quad (3.28)$$

где су  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{w}$  редом, тензор брзине деформације и тензор вртложности [67]:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T), \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}^T, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T), \quad \mathbf{w} = -\mathbf{w}^T. \quad (3.30)$$

Сада се могу приказати изводи по времену неких тензора деформације. Материјални извод Грин-Лагранжеовог тензора релативне деформације је [67]:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = \mathbf{F}^T \frac{1}{2}(\mathbf{l}^T + \mathbf{l}) \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F}. \quad (3.31)$$

Овај израз је познат и као материјални тензор брзине деформације. Такође на

основу (3.8) и (3.14) извод десног Коши-Гриновог тензора деформације је [67]:

$$\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}} = 2\mathbf{F}^T \mathbf{dF}. \quad (3.32)$$

Слично, извод левог Коши-Гриновог тензора деформације може бити приказан као [67]:

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{l}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{l}^T. \quad (3.33)$$

### 3.1.6 Објективна коротациона брзина

У механици континуума, потребно је да конститутивне једначине задовоље принцип материјалне независности од избора координатног система односно тзв. материјалну објективност [72]. Коротациона брзина Ојлеровог, објективног, симетричног тензора другог реда  $\mathbf{a}$  се дефинише као [53, 72, 73]:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{a}, \quad (3.34)$$

при чему је  $\dot{\mathbf{a}}$  материјални извод по времену,  $\mathbf{\Omega}$  кососиметрични вртложни тензор. Избор овог тензора дефинише врсту коротационе брзине [72]. Две познате коротационе брзине су [72]:

Јауманова (Jaumann)

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{w}, \quad (3.35)$$

и Грин-Нагхди

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R}, \quad (3.36)$$

где је  $\mathbf{R}$  тензор који се добија из поларне декомпозиције. Ксиао (Xiao) [73–75] и остали су показали да је коротациона брзина може бити приказана у функцији вртлога на следећи начин:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{w} + \sum_{i \neq j}^n h \left( \frac{b_i}{b_j} \right) \mathbf{q}_i \mathbf{d}\mathbf{q}_j, \quad (3.37)$$

где је  $h$  функција вртлога која дефинише објективну коротациону брзину, а  $b_k$  и  $\mathbf{q}_k$  су сопствене вредности и сопствени вектори левог Коши-Гриновог тензора деформације  $\mathbf{b}$ . Функција вртлога за логаритамску брзину је [53, 75]:

$$h(z) = \frac{1+z}{1-z} + \frac{2}{\ln z}. \quad (3.38)$$

где је  $z$  позитивна реална променљива тако да функција  $h$  има особину [75]:

$$h(z^{-1}) = -h(z). \quad (3.39)$$

Тада је логаритамски вртлог [53, 73]:

$$\boldsymbol{\Omega}^{log} = \mathbf{w} + \sum_{i \neq j}^n \left( \frac{b_j + b_i}{b_j - b_i} + \frac{2}{\ln b_i - \ln b_j} \right) \mathbf{q}_i \mathbf{d}\mathbf{q}_j, \quad (3.40)$$

па је у том случају тензор брзине Ојлерове логаритамске деформације [53, 73, 75]:

$$\mathbf{h}^{\dot{log}} = \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h}\boldsymbol{\Omega}^{log} - \boldsymbol{\Omega}^{log}\mathbf{h} = \mathbf{d}. \quad (3.41)$$

Овде кажемо за  $\boldsymbol{\Omega}^{log}$  да је логаритамски спин, односно да посматрач који је везан за конфигурацију која ротира логаритамским спином види да је брзина промене логаритамске деформације  $\ln \mathbf{v}$  једнака тензору брзине деформације  $\mathbf{d}$  [74]. Свакако, овај спин једини задовољава овај услов.

На основу [53], уколико је Ојлеров тензор другог реда  $\mathbf{P}$  коротациона брзина  $\mathring{\mathbf{A}}$  у вези са истим тензором ротације као и интеграција  $\mathbf{R}$ , тада је:

$$\int_{corot} \mathring{\mathbf{A}} ds = \mathbf{A}. \quad (3.42)$$

Интеграцијом једначине (3.41) коришћењем коротационе интеграције добија се [53]:

$$\mathbf{h} = \int_{corot} \mathbf{h}^{\dot{log}} ds, \quad (3.43)$$

тј. логаритамском коротационом интеграцијом тензора брзине деформације  $\mathbf{d}$ , се добија Ојлерова Хенкијева деформација [53].

### 3.1.7 Декомпозиција укупне деформације на еластичну и нееластичну

Деформација трансформације је нееластична и може се анализирати по аналогiji са пластичном деформацијом. Па тако, за мале деформације, укупна деформација са може раздвојити на еластични и нееластични део адитивном декомпозицијом [73]:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^E + \mathbf{e}^{IN}, \quad (3.44)$$

при чему је:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}^E + \dot{\mathbf{e}}^{IN}. \quad (3.45)$$

Овде су  $\dot{\mathbf{e}}^E$  и  $\dot{\mathbf{e}}^{IN}$  брзине еластичне и нееластичне деформације.

Мале деформације се не могу примењивати за нумеричку анализу у случајевима где се јављају велике деформације или ротације, па је неопходно проширење на проблеме великих деформација. Проблем великих деформација је свакако тема око које постоје многа неслагања, што говори и преглед еласто-пластичности који је дао Ксиао са 441 референцом у раду [73]. Проширење на област великих (коначних) деформација може да се уведе на више начина.

Први начин је директно проширење теорије малих деформација на велике применом адитивне декомпозиције тензора брзине деформације [73]:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^E + \mathbf{d}^{IN}, \quad (3.46)$$

где су  $\mathbf{d}^E$  и  $\mathbf{d}^{IN}$ , еластична и нееластична брзина деформације у текућој конфигурацији. У овом случају за мале деформације, хипоеластично понашање материјала може бити приказано Хуковим законом као:

$$\mathbf{e}^E = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\mu} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}}{2\mu} \mathbf{I}, \quad (3.47)$$

односно у форми брзине као:

$$\dot{\mathbf{e}}^E = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\text{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu} \mathbf{I}. \quad (3.48)$$

Директно проширење претходне једначине се може остварити заменом брзине еластичне деформације  $\dot{\mathbf{e}}^E$  са тензором брзине еластичне деформације  $\mathbf{d}^E$ . Добијена једначина није објективна, па се мора дефинисати објективан тензор брзине напона.

Уколико уведемо објективну брзину Кирхофовог напона  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$ , тада је директно проширење једначине (3.48) на велике деформације дато као [73]:

$$\mathbf{d}^E = \frac{\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}}{2\mu} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\text{tr}\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}}{2\mu} \mathbf{I}, \quad (3.49)$$

односно:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{H}\mathbf{d}^E, \quad (3.50)$$

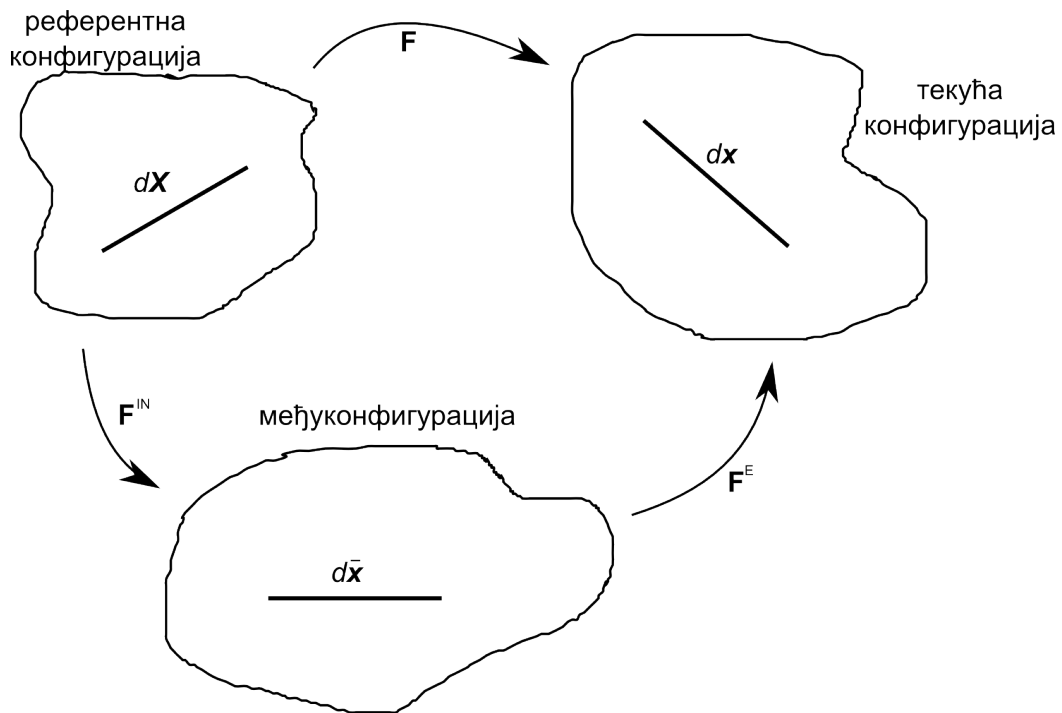
где је  $\mathbb{H}$  еластични тензор четвртог реда, који у општем случају зависи од  $\boldsymbol{\tau}$ . Овакав приступ може бити неинтеграбилан уколико се не посвети специјална

пажња да све инкременталне релације између напона и деформација буду објективне. Оваква ситуација може изазвати нежељене појаве као што је хистерезисна дисипација која не одговара еластичности [76].

Други приступ је хипереластичан опис еластичног одзива применом мултипликативне декомпозиције којом се може извршити декомпоновање градијента деформације на еластични и нееластични део. На основу Лијевог (Lee) рада [77], могуће је увести мултипликативну декомпозицију укупног градијента деформације као [64, 67, 68, 76]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^E \mathbf{F}^{IN}, \quad (3.51)$$

где су  $\mathbf{F}^E$  и  $\mathbf{F}^{IN}$  еластични и нееластични градијент деформације. Главна идеја је увођење тзв. међуконфигурације која је локална, концептуална и добија се растерећењем деформисане конфигурације еластичним делом градијента деформације  $\mathbf{F}^E$ .



Слика 3.2: Шема мултипликативне декомпозиције градијента деформације

На основу Сл. 3.2, може се запазити да је [73]:

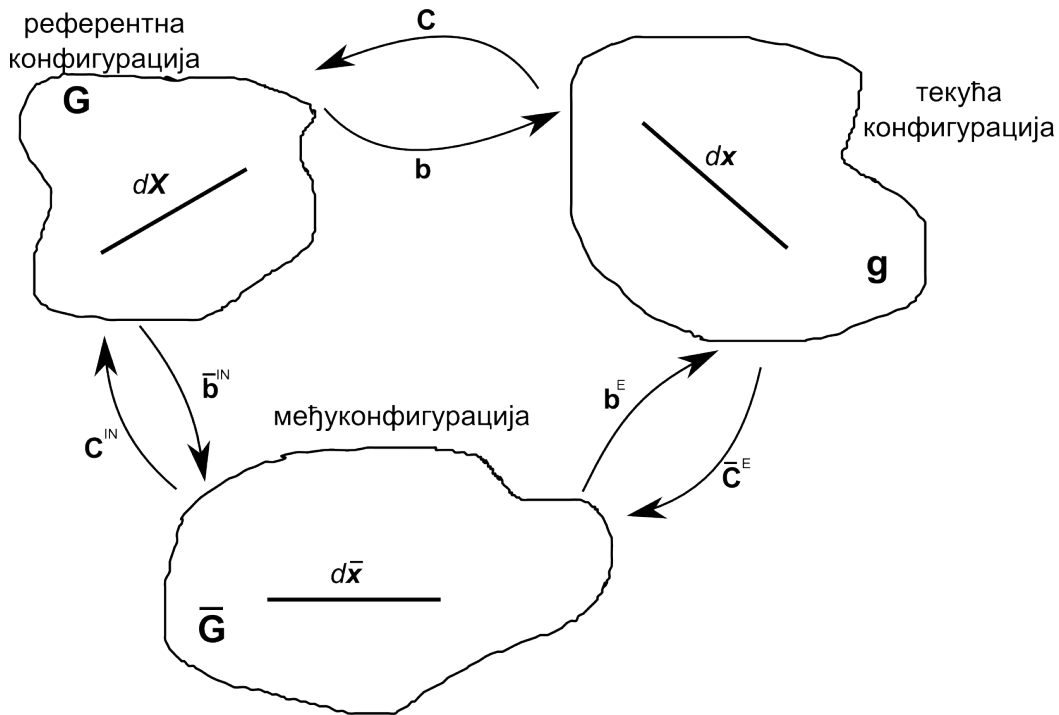
$$d\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{IN} d\mathbf{X}, \quad (3.52)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}^E d\bar{\mathbf{x}}, \quad (3.53)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (3.54)$$

Дакле, материјал се деформише прво нееластично до међуконфигурације, па тек онда еластично до текуће конфигурације.

Општи хипереластични опис може бити разматран у односу на материјалну (Лагранжеову), просторну (Ојлерову) или међуконфигурацију. Увођење међу-конфигурације захтева јасније тумачење тензора деформација у одговарајућим конфигурацијама. У свакој од конфигурација сада дефинишемо метрички тензор, па тако материјални обележавамо са  $\mathbf{G}$ , просторни са  $\mathbf{g}$  и метрички тензор у међуконфигурацији са  $\bar{\mathbf{G}}$  [76]. Операцијама трансформација метричких тензора унапред и уназад између поменутих конфигурација, добијамо одговарајуће тензоре деформација у одабраним конфигурацијама [70].



Слика 3.3: Шема Коши-Гринових тензора деформације у вези са конфигурацијама

Материјални опис локалног нееластичног стања материјала је описан Лагранжеовим тензором деформације  $\mathbf{E}$  и нееластичном Лагранжеовом деформацијом [76]:

$$\mathbf{E}^{IN} = \frac{1}{2} (\mathbf{C}^{IN} - \mathbf{G}), \quad (3.55)$$

где је десни Коши-Гринов тензор нееластичне деформације добијен трансформацијом уназад метричког тензора датог у међуконфигурацији нееластичним градијентом деформације  $\mathbf{F}^{IN}$ :

$$\mathbf{C}^{IN} = (\mathbf{F}^{IN})^T \bar{\mathbf{G}} \mathbf{F}^{IN}. \quad (3.56)$$

У овом контексту, еластична Лагранжеова деформација  $\mathbf{E}^E$  се формално дефинише као [76]:

$$\mathbf{E}^E = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{IN}. \quad (3.57)$$

У односу на међуконфигурацију, локално нееластично стање је описано Лагранжеовим тензором деформације [76]:

$$\bar{\mathbf{E}}^E = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{C}}^E - \bar{\mathbf{G}}), \quad (3.58)$$

$$\bar{\mathbf{E}}^{IN} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{G}} - (\bar{\mathbf{b}}^{IN})^{-1}), \quad (3.59)$$

где је десни еластични Коши-Гринов тензор деформације добијен трансформацијом уназад метричког тензора датог у текућој конфигурацији еластичним градијентом деформације  $\mathbf{F}^E$ :

$$\bar{\mathbf{C}}^E = (\mathbf{F}^E)^T \mathbf{g} \mathbf{F}^E, \quad (3.60)$$

а леви нееластични Фингеров тензор деформације трансформацијом унапред метричког тензора у почетној конфигурацији нееластичним градијентом деформације:

$$(\bar{\mathbf{b}}^{IN})^{-1} = (\mathbf{F}^{IN})^{-T} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^{IN})^{-1}. \quad (3.61)$$

У текућој конфигурацији, Алмансијев тензор деформације је дефинисан као [76]:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - (\mathbf{b})^{-1}), \quad (3.62)$$

где је укупан леви Фингеров тензор деформације добијен трансформацијом уназад метричког тензора датог у почетној конфигурацији укупним градијентом деформације:

$$(\mathbf{b})^{-1} = (\mathbf{F})^{-T} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F})^{-1}. \quad (3.63)$$

Еластични Алмансијев тензор деформације је [76]:

$$\mathbf{e}^E = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - (\mathbf{b}^E)^{-1}), \quad (3.64)$$

где је еластичан леви Фингеров тензор деформације добијен трансформацијом уназад метричког тензора датог у почетној конфигурацији еластичним градијентом деформације:

$$(\mathbf{b}^E)^{-1} = \mathbf{F}^{E-T} \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{F}^{E-1}. \quad (3.65)$$

У овом случају, нееластична деформација се може дефинисати као [76]:

$$\mathbf{e}^{IN} = \mathbf{e} - \mathbf{e}^E. \quad (3.66)$$

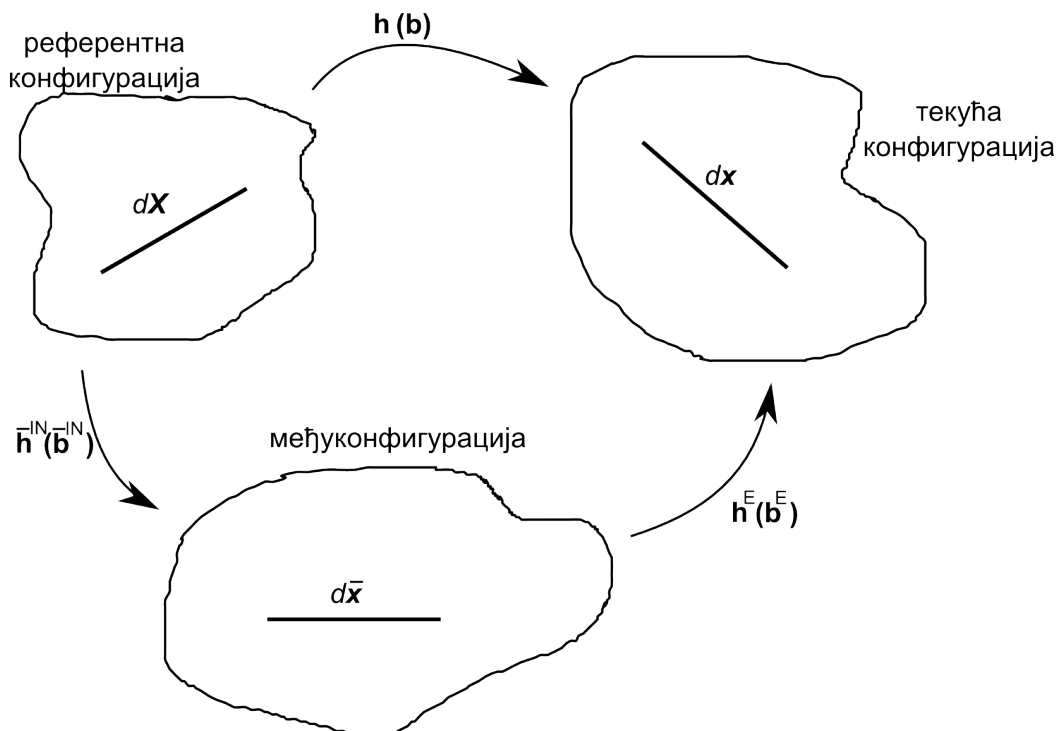
Предност оваквог начина изражавања тензора деформације је у томе што су све мере деформација у околини посматране материјалне тачке потпуно одређене разликом текућег и почетног метричког тензора у односу на било коју конфигурацију [70].

Еластична и нееластична Хенкијева релативна деформације су дефинисане као [67]:

$$\bar{\mathbf{H}}^E = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{C}}^E, \quad \mathbf{h}^E = \frac{1}{2} \ln \mathbf{b}^E \quad (3.67)$$

$$\mathbf{H}^{IN} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C}^{IN} \quad \bar{\mathbf{h}}^{IN} = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{b}}^{IN}. \quad (3.68)$$

Као што се може запазити на Сл. 3.4, Хенкијева укупна деформација  $\mathbf{h}$  је дата у односу на текућу конфигурацију, као и еластична лева Хенкијева деформација  $\mathbf{h}^E$ . Са друге стране, нееластична Хенкијева мера деформације  $\bar{\mathbf{h}}^{IN}$  је дефинисана у односу на међуконфигурацију.



Слика 3.4: Шема тензора логаритамске деформације и конфигурације

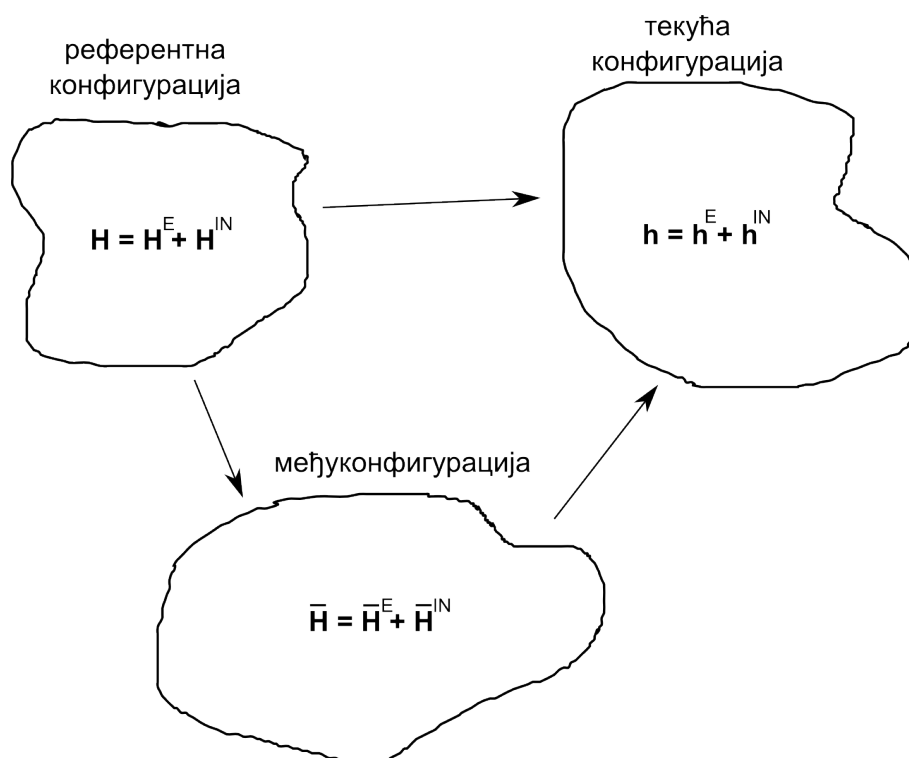
У том смислу, с обзиром да је могуће вршити сабирање еластичног и нееластичног тензора деформација изражених у односу на исту конфигурацију [70]



(Сл. 3.5), за прорачун нееластичне мере деформације у текућој конфигурацији, могуће је одузети еластичну деформацију од укупне деформације дефинисане у истој (текућој) конфигурацији (3.66). Тако да се, деформација трансформације у текућој конфигурацији (нееластична деформација) може израчунати из леве Хенкијеве деформације као:

$$\mathbf{e}_{tr} = \mathbf{h} - \mathbf{h}^E. \quad (3.69)$$

У поређењу са материјалним моделом пластичности метала, за случај материјала са својством памћења облика нам је потребна тачна укупна деформација трансформације за правац интеграције напона код мартензитне трансформације уназад о чему ће бити речи у Гл. 4.



Слика 3.5: Шема компатибилних тензора логаритамске деформације

### 3.1.8 Тензори напона

Напон дефинисан у текућој конфигурацији представља Кошијев тензор напона  $\boldsymbol{\sigma}$  (симетричан тензор) или стварни напон. Такође, напон може бити изражен у референтној конфигурацији или међуконфигурацију. То пружа могућност дефинисања алтернативних мера напона нпр. мера напона дефинисана у почетној конфигурацији представља први Пиола (Piola)-Кирхофов (Kirchhoff) (или просто Пиола напон)  $\mathbf{P}$  који је у општем случају несиметричан тензор. Веза између Кошијевог и Пиола напона је позната као Пиола трансформација

ција [67]:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (3.70)$$

Поред ова два тензора напона дефинисана у познатој конфигурацији која имају физичко значење, постоје и други тензори напона који се користе у практичној нелинеарној анализи. Тензор Кирхофовог напона  $\boldsymbol{\tau}$  (симатричан тензор) се разликује од Кошијевог тензора напона само за запремински однос  $J$  дефинисан изразом (3.2) [67]:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}. \quad (3.71)$$

Други Пиола-Кирхофов тензор напона  $\mathbf{S}$  је такође симатричан и могуће га је добити трансформацијом [67]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}. \quad (3.72)$$

Трансформацијом у супротном смеру, Кирхофов напон се може добити као [67]:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T. \quad (3.73)$$

Веза између првог и другог Пиола-Кирхофовог тензора напона се може представити као [67]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}. \quad (3.74)$$

Поред претходних мера напона, могуће је дефинисати још један несиматрични материјални тензор напона као [67]:

$$\mathbf{T}_B = \mathbf{R}^T\mathbf{P}. \quad (3.75)$$

Тензор  $\mathbf{T}_B$  је познат као Биотов (Biot) тензор напона. Остали примери тензора напона [67] су коротирани Кошијев тензор напона  $\boldsymbol{\sigma}_u$ , који су увели Грин и Нагхди (Naghdi) и Манделов (Mandel) тензор напона  $\boldsymbol{\Sigma}$  који је у општем случају несиметричан. Ови тензори су дефинисани у односу на међуконфигурацију. Веза између коротираног Кошијевог и Манделовог тензора напона је дата као [67]:

$$\boldsymbol{\sigma}_u = J^{-1}\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U} = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R} \quad (3.76)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}\mathbf{S}. \quad (3.77)$$

Скуп енергетски конјугованих (3.78) мера деформације и напона [67] даје израз за снагу напона (3.79). Алтернативни изрази енергетски конјугованих

парова напона и деформације су дати у [67] као:

$$w_{int}(t) = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\Sigma} : \frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}} = J\boldsymbol{\sigma}_u : \mathbf{D}_R = \text{sym}\mathbf{T}_B : \dot{\mathbf{U}}. \quad (3.78)$$

### 3.1.9 Закон баланса механичке енергије

Унутрашњи механички рад извршен у јединци времена (снага напона)  $\mathcal{P}_{int}$  је могуће дефинисати у вези са (3.78) као [67]:

$$\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{{}^t\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}dv = \int_{{}^0\Omega} J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}dV, \quad (3.79)$$

где је  ${}^0\Omega$  референтна и  ${}^t\Omega$  текућа запремина у датом тренутку, а  $\mathbf{d}$  представља тензора брзине деформације. Унутрашњи механички рад извршен у јединци времена по јединици референтне запремине је  $w_{int}$ . Она се изражава преко мера конјугованих напона и деформација (конјуговани парови (3.78)). Одржање механичке енергије је дато као [67]:

$$\dot{\mathcal{K}}(t) = \mathcal{P}_{ext} - \mathcal{P}_{int}, \quad (3.80)$$

где је  $\mathcal{K}$  кинетичка енергија,  $\mathcal{P}_{ext}$  је спољашњи механички рад у јединци времена (снага) и  $\mathcal{P}_{int}$  је унутрашњи механички рад у јединци времена (снага). Ово значи да је брзина промене кинетичке енергије  $\dot{\mathcal{K}}$  једнака разлици између спољашњег  $\mathcal{P}_{ext}$  и унутрашњег  $\mathcal{P}_{int}$  механичког рада у јединици времена.

## 3.2 Термодинамика континуума

Континууми који поседују механичку и термичку енергију, називају се термодинамички континууми, а величине које описују систем су термодинамичке променљиве стања. Термодинамичке функције стања описују везе између променљивих стања; релације које повезују променљиве стања су конститутивне једначине.

### 3.2.1 Први закон термодинамике (Одржање енергије)

Први закон термодинамике повезује рад извршен на континууму и промену унутрашње енергије у деформабилном телу. Представљен је као једнакост између промене рада у јединици времена и промене унутрашње енергије у јединици времена  $\dot{\mathcal{U}}$ . Рад извршен у јединици времена на систему може бити

извршен механичким силама  $\mathcal{P}_{int}$  или може бити додат систему као топлота  $\mathcal{Q}$ , тако да одржање може бити представљено као [67]:

$$\mathcal{P}_{int}(t) + \mathcal{Q}(t) = \dot{\mathcal{U}}(t). \quad (3.81)$$

На основу одржања механичке енергије (3.80), Први закон термодинамике је дат као [67]:

$$\dot{\mathcal{K}}(t) + \dot{\mathcal{U}}(t) = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{Q}(t). \quad (3.82)$$

На основу дефиниције дате у [3, 67]: Закон конзервације енергије гласи да је брзина промене укупне енергије (кинетичка плус унутрашња енергија) континуума у времену једнака брзини којом се извршава спољашњи механички рад на том телу задатим силама плус брзина којом се термичка енергија додаје кроз топлотни флуks и изворе топлоте. Локални облик је дат као [3, 67]:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \operatorname{div}(\mathbf{q}) + \rho q, \quad (3.83)$$

где је  $u$  специфична унутрашња енергија,  $\rho$  је густина материјала,  $\boldsymbol{\sigma}$  је Кошијев тензор напона и  $\mathbf{d}$  је тензор брзине деформације.

### 3.2.2 Други закон термодинамике (принцип неједнакости ентропије)

Правац преноса енергије не може бити одређен на основу Првог закона термодинамике (3.83), јер разматра само трансфер енергије. Други закон термодинамике је описује правац процеса преноса енергије.

Због тога је потребно је увести ентропију  $\mathcal{S}$  као концепт. Ентропија је важна особина коју је Клаузијус (Clausius) описао у 19. веку. Ентропија се може описати као "квантитативна мера микроскопске случајности и нереда. Разлика између брзине промене ентропије  $\dot{\mathcal{S}}$  и брзине улаза ентропије по јединици времена  $\tilde{\mathcal{Q}}$ , одређује укупну производњу ентропије по јединици времена коју обе лежавамо са  $\Gamma$ " [67].

Други закон термодинамике говори, да је укупна производња ентропије увек већа или једнака нули. Математички израз који то описује је [67]:

$$\Gamma(t) = \dot{\mathcal{S}}(t) - \tilde{\mathcal{Q}}(t) \geq 0. \quad (3.84)$$

Ентропија континуума је дефинисана као [67]:

$$\mathcal{S}(t) = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}, t) dv, \quad (3.85)$$

док се брзина улаза ентропије састоји од ентропије пренесене кроз граничну површ  $\partial\Omega$  Кошијевим флуksom ентропије  $\tilde{\mathbf{h}}$  и ентропије произведене изворима  $\tilde{r}$  унутар тела [67]:

$$\tilde{\mathcal{Q}}(t) = - \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \tilde{r} dv. \quad (3.86)$$

Сада можемо приказати експлицитни облик Другог закона термодинамике као [67]:

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} \dot{s} dv + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \tilde{r} dv \geq 0. \quad (3.87)$$

Као што је дато у [67], наредна једнакост је:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{q}}{T}, \quad \tilde{r} = \frac{q}{T}, \quad (3.88)$$

тако да је релација (3.87) тада [67]:

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} \dot{s} dv + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \frac{q}{T} dv \geq 0, \quad (3.89)$$

позната као Клаузијус-Дијемова (Duhem) неједнакост. Применом Гаусове теореме за трансформацију површинског у запремински интеграл [67]:

$$\int_s \mathbf{u} \mathbf{n} ds = \int_v \operatorname{div} \mathbf{u} dv, \quad (3.90)$$

и особине дивергенције да је [67]:

$$\operatorname{div} F \mathbf{u} = F \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla F, \quad (3.91)$$

ова неједнакост може бити изражена у локалној форми као [3]:

$$\rho \dot{s} + \frac{1}{T} \operatorname{div}(\mathbf{q}) - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T - \frac{\rho q}{T} \geq 0. \quad (3.92)$$

Физички посматрано, топлота спонтано прелази од топлијег материјала ка хладнијем. С обзиром да је  $T$  увек ненегативна, неједнакост провођења топлоте

је [3]:

$$\mathbf{q} \cdot \nabla T \leq 0, \quad (3.93)$$

одакле следи да је максимум за  $\mathbf{q} \cdot \nabla T$  једнак нули, тако да је израз  $-\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T$  увек једнак нули, што даје нови облик Клаузијус-Дијемове неједнакости:

$$\rho \dot{s} + \frac{1}{T} \operatorname{div}(\mathbf{q}) - \frac{\rho q}{T} \geq 0. \quad (3.94)$$

Сменом једначине (3.83) у претходну, Други закон термодинамике се добија у форми познате Клаузију-Планк (Planck) неједнакости [3]:

$$\mathcal{D}_{int} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \dot{u} + T \dot{s} \geq 0, \quad (3.95)$$

који представља унутрашњу дисипацију или локално генерисање ентропије.

### 3.3 Слободна енергија

Конститутивни материјални модел, за било коју врсту материјала, може бити изведен коришћењем неке од функција слободне енергије. Постоји неколико алтернативних форми термодинамичког потенцијала које се могу наћи Лежандревом (Legendre) трансформацијом. Лежандрева трансформација је процедура која пружа могућност да се једна променљива замени другом конјугованом променљивом. Веза између унутрашње енергије  $u$ , енталпије  $h$  и Хелмхолцове (Helmholtz)  $\psi$  и Гипсове (Gibbs)  $g$  слободне енергије су дали Холцапфел (Holzapfel) [67] и Лагоудас [3] као што је представљено у Таб. 3.1.

Табела 3.1: Лежандрева трансформација између термодинамичких потенцијала [3, 67]

Термодинамички потенцијал	Симбол	Трансформација
Унутрашња енергија	$u$	$u$
Енталпија	$h$	$h = u - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$
Хелмхолцова енергија	$\psi$	$\psi = u - sT$
Гипсова енергија	$g$	$g = u - sT - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$

Извод по времену Гипсове слободне енергије је дат у следећем облику [3]:

$$\dot{g}(\boldsymbol{\sigma}, T, \zeta) = \dot{u} - \dot{s}T - s\dot{T} - \frac{1}{\rho} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.96)$$

Гипсова слободна енергија зависи од напона  $\boldsymbol{\sigma}$ , температуре  $T$  и градијента

температуре  $\mathbf{T} = \nabla T$  и скупа унутрашњих променљивих  $\zeta$  [3]. Тотални извод Гипсове слободне енергије  $\dot{g}$  је у том случају [3]:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \frac{\partial g}{\partial \zeta} \cdot \dot{\zeta}. \quad (3.97)$$

Извод по времену Лежандреове трансформације (3.96) замењен у Други закон термодинамике (Класузијус-Планк неједнакост) (3.94), даје следећи облик [3]:

$$-\rho \dot{g} - \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} - \rho s \dot{T} \geq 0. \quad (3.98)$$

Након смене (3.97) у (3.98) може се показати да је [3]:

$$-\rho \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \frac{\partial g}{\partial \zeta} \cdot \dot{\zeta} \right) - \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} - \rho s \dot{T} \geq 0. \quad (3.99)$$

Пошто  $\dot{\mathbf{T}}$  може бити или позитиван или негативан, (3.99) је задовољена ако је  $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{T}} \equiv 0$ . Уколико се дефинишу као константне све осим једне променљиве добијају се следеће релације [3]:

$$s = -\frac{\partial g}{\partial T} \quad (3.100)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\rho \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.101)$$

Сменом ентропије и деформације, Клаузијус-Планк неједнакост постаје [3]:

$$-\rho \frac{\partial g}{\partial \zeta} \cdot \dot{\zeta} \geq 0. \quad (3.102)$$

За унутрашње променљиве одабране су деформација трансформације  $\mathbf{e}_{tr}$  и удео мартензита у запремини  $\xi$  [3]. Клаузијус-Планк неједнакост, (3.99), се тада своди на следећи облик:

$$\left( -\rho \frac{\partial g}{\partial \mathbf{e}_{tr}} \right) : \dot{\mathbf{e}}_{tr} + \left( -\rho \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) \dot{\xi} \geq 0. \quad (3.103)$$

### 3.4 SMA конститутивни модел - Лагоудас

Модел фазне трансформације за SMA, који су формулисали Бојд и Лагоудас [34] и Лагоудас [3] је основа овог истраживања. Термодинамички потенцијал представљен функцијом Гипсове слободне енергије  $g$  је дефинисан за трансформацију унапред и уназад (видети Одељ. 1.2). Слободна енергија може бити

приказана у квадратној полиномној форми као [3]:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, T) = -\frac{1}{2\rho}\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha} (T - T_0) + c \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] - s_0 T + u_0, \quad (3.104)$$

где је  $T_0$  референтна температура. Променљива  $\boldsymbol{\sigma}$  је Кошијев укупни напон,  $T$  је температура SMA,  $\xi$  је удео мартензита у запремини и  $\mathbf{e}_{tr}$  је деформација трансформације. Функција  $f(\xi)$  је функција трансформационог ојачања. Материјални параметри  $c$ ,  $u_0$ ,  $s_0$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  су редом ефективна специфична топлота, ефективна специфична унутрашња енергија, ефективна специфична ентропија, ефективни тензор флексибилности и тензор ефективног термичког ширења. Ови ефективни материјални параметри могу бити одређени коришћењем параметара чистих фаза и удела мартензита у запремини  $\xi$  по правилу мешавине.

Коришћењем (3.100), ентропија  $s$  и деформација  $\boldsymbol{\varepsilon}$  могу бити добијене као [3]:

$$s = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha} + c \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + s_0, \quad (3.105)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha} (T - T_0). \quad (3.106)$$

Основни облик Гипсове слободне енергије (3.104), која зависи од дефинисаних унутрашњих променљивих стања, који су представили Кидваи и Лагоудас [37] је дата као што следи [3]:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi, \mathbf{e}_{tr}) = -\frac{1}{2\rho}\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : [\boldsymbol{\alpha}(T - T_0) + \mathbf{e}_{tr}] + c \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] - s_0 T + u_0 + \frac{1}{\rho} f(\xi), \quad (3.107)$$

где је  $f(\xi)$  функција ојачања.

Коришћењем Лежандреове трансформације (Таб. 3.1) између Гипсове слободне енергије  $g$ , унутрашње енергије  $u$  и Првог и Другог закона термодинамике смењеног у Клаузијус-Планкову неједнакост, показано је да у неповратним процесима унутрашња дисипација енергије је већа или једнака нули [3]:

$$\mathcal{D}_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}_{tr} + \left( -\rho \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) \dot{\xi} \geq 0. \quad (3.108)$$

Главна претпоставка за развој овог конститутивног модела је дата, по аналогiji са пластичношћу метала [64], да "свака промена у текућем микроструктурном стању материјала је стриктно резултат промене удела мартензита у



запремини" [3, 28, 34, 37]:

$$\mathbf{e}_{tr} = H \mathbf{n}_{tr} \dot{\xi}. \quad (3.109)$$

Правац трансформације је у правцу девијатора напона  $\mathbf{S}'$  за трансформацију унапред, док је током трансформације уназад, правац тензора укупне деформације трансформације  $\mathbf{e}_{tr}$  [3]:

$$\mathbf{n}_{tr} = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}'}{\bar{S}}; & \dot{\xi} > 0 \\ \frac{\mathbf{e}_{tr}}{\bar{e}_{tr}}; & \dot{\xi} < 0 \end{cases}, \quad (3.110)$$

где је  $H$  максималне ефективна деформација трансформације.

Тензор девијатора напона  $\mathbf{S}'$ , ефективни (еквивалентан фон Мизесов (von Mises)) напон  $\bar{S}$  и ефективна деформација трансформације  $\bar{e}_{tr}$  су дефинисане као:

$$\mathbf{S}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I}, \quad (3.111)$$

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}' : \mathbf{S}'}, \quad (3.112)$$

$$\bar{e}_{tr} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{e}_{tr} : \mathbf{e}_{tr}}, \quad (3.113)$$

где је  $\sigma_m$  средњи напон.

Заменом (3.109) у Клаузијус-Планкову неједнакост (3.108), може се добити [3]:

$$\left( \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}_{tr} H - \rho \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) \dot{\xi} = \Pi \dot{\xi} \geq 0 \quad (3.114)$$

где је  $\Pi$  генералисана термодинамичка сила. За дату Гипсову слободну енергију (3.107), експлицитни развој  $\Pi$  је [3]:

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi) = & \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}_{tr} H + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \Delta \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\alpha} (T - T_0) - \\ & \rho \Delta c \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] + \rho \Delta s_0 T - \rho \Delta u_0 - \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (3.115)$$

где су  $\Delta \mathcal{M} = \mathcal{M}^M - \mathcal{M}^A$ ,  $\Delta \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^M - \boldsymbol{\alpha}^A$ ,  $\Delta c = c^M - c^A$ ,  $\Delta s_0 = s_0^M - s_0^A$ ,  $\Delta u_0 = u_0^M - u_0^A$ , где А и М обележавају аустенитну и мартензитну фазу, редом. Ефективне особине материјала се могу одредити у функцији чистих

фаза и удела мартензита у запремини  $\xi$  по правилу мешавине [3]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(\xi) &= \mathcal{M}^A + \xi (\mathcal{M}^M - \mathcal{M}^A) = \mathcal{M}^A + \xi \Delta \mathcal{M}, \\
 \boldsymbol{\alpha}(\xi) &= \boldsymbol{\alpha}^A + \xi (\boldsymbol{\alpha}^M - \boldsymbol{\alpha}^A) = \boldsymbol{\alpha}^A + \xi \Delta \boldsymbol{\alpha}, \\
 c(\xi) &= c^A + \xi (c^M - c^A) = \boldsymbol{\alpha}^A + \xi \Delta c, \\
 s_0(\xi) &= s_0^A + \xi (s_0^M - s_0^A) = s_0^A + \xi \Delta s_0, \\
 u_0(\xi) &= u_0^A + \xi (u_0^M - u_0^A) = u_0^A + \xi \Delta u_0.
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

Функцију трансформације  $\Phi$  је увео Лагоудас као [3, 37]:

$$\Phi = \begin{cases} \Pi - Y; & \dot{\xi} > 0 \\ -\Pi - Y & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \tag{3.117}$$

где је  $Y$  гранична вредност чији облик зависи од избора функције ојачања [3, 78]. Функција трансформације  $\Phi$  треба да задовољи услов  $\Phi = 0$  током трансформације. Тај услов представља површи трансформације за  $0 < \xi < 1$  и две граничне површи за  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  сваке фамилије трансформационе површи [3].

Оно што је важно нагласити је да се предложени правци трансформације могу бити различито имплементирани у зависности од приступа који се примењује. Коришћењем (3.111), (3.112), (3.113), могуће је термодинамичку силу (3.115) довести на скаларни облик, чиме се омогућава решавање једне нелинеарне једначине на нивоу интеграционе тачке. Извођење предложеног унапређења је дато у наредном одељку.

### 3.5 Развој функције трансформације

У претходним изразима, декомпозиција на девијатор напона и средњи напон (3.111) се може користити у једначини (3.115) уз апроксимацију да је предложени правац трансформације (3.109) константан и једнак вредности са почетка временског корака ( $\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_*$  и  $\mathbf{e}_{tr} = {}^t\mathbf{e}_{tr}$ ).

Први члан у једначини (3.115) се може приказати за трансформацију унапред ( $\dot{\xi} > 0$ ) као:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}_{tr} H &= (\mathbf{S}' + \sigma_m \mathbf{I}) : \frac{3}{2} H \frac{\mathbf{S}'_*}{\bar{S}_*} = \frac{3H}{2\bar{S}_*} (\mathbf{S}' : \mathbf{S}'_* + \sigma_m \mathbf{I} : \mathbf{S}'_*) = \\
 &= \frac{3H}{2\bar{S}_*} \frac{\bar{S}'_*}{\bar{S}_*} \mathbf{S}'_* = \frac{\bar{S} H \bar{S}_*^2}{\bar{S}_*^2} = H \bar{S}.
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

Други члан у једначини (3.115) је исти за обе, трансформацију унапред и уназад али са различитим знаком. Извођење је дато у наставку:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \Delta \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\mathcal{M}^M : \boldsymbol{\sigma} - \mathcal{M}^A : \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{e}^M - \mathbf{e}^A) = \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{S}' + \sigma_m : \mathbf{I}) : \left( \frac{\mathbf{S}'}{2G^M} + \frac{\sigma_m \mathbf{I}}{c_m^M} - \frac{\mathbf{S}'}{2G^A} - \frac{\sigma_m \mathbf{I}}{c_m^A} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \mathbf{S}' : \mathbf{S}' \left( \frac{1}{G^M} - \frac{1}{G^A} \right) + 3\sigma_m^2 \left( \frac{1}{c_m^M} - \frac{1}{c_m^A} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \bar{S}^2 \left( \frac{1}{G^M} - \frac{1}{G^A} \right) + 3\sigma_m^2 \left( \frac{1}{c_m^M} - \frac{1}{c_m^A} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

Трећи члан у једначини (3.115) је такође исти за оба правца трансформације, али са различитим знаком и може бити изведен на следећи начин:

$$\begin{aligned}
 \Delta \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\sigma} (T - T_0) &= (\boldsymbol{\alpha}^M - \boldsymbol{\alpha}^A) : (\mathbf{S}' + \sigma_m \mathbf{I}) \Delta T = \\
 &= (\mathbf{S}' + \sigma_m \mathbf{I}) : \boldsymbol{\alpha}^M \mathbf{I} \Delta T - (\mathbf{S}' + \sigma_m \mathbf{I}) : \boldsymbol{\alpha}^A \mathbf{I} \Delta T = \\
 &= 3\sigma_m (\boldsymbol{\alpha}^M - \boldsymbol{\alpha}^A) \Delta T.
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

У једначинама (3.118) и (3.119), имамо ефективне вредности девијатора напона  $\bar{S}_*$  и деформације трансформације  $\bar{\epsilon}_{tr}$ , средњи напон  $\sigma_m$  и модуле смицања:

$$G^A = \frac{E^A}{2(1+\nu)} \quad G^M = \frac{E^M}{2(1+\nu)}, \tag{3.121}$$

за аустенит и мартензит и  $c_m^A$  и  $c_m^M$  модуле стишљивости за фазу аустенита и мартензита, редом:

$$c_m^A = \frac{E^A}{1-2\nu} \quad c_m^M = \frac{E^M}{1-2\nu}. \tag{3.122}$$

Коначан облик функције трансформације добијамо заменом претходних израза у (3.117) као:

$$\Phi = \begin{cases} H\bar{S} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \bar{S}^2 \left( \frac{1}{G^M} - \frac{1}{G^A} \right) + 3\sigma_m^2 \left( \frac{1}{c_m^M} - \frac{1}{c_m^A} \right) \right) + 3\sigma_m (\boldsymbol{\alpha}^M - \boldsymbol{\alpha}^A) \Delta T + \\ \quad \rho \Delta s_0 (T - M_s) - \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}; & \xi > 0 \\ -\mathbf{S}'_* : {}^t \mathbf{e}_{tr} \frac{H}{\bar{\epsilon}_{tr}} + 3G \Delta \xi H^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \bar{S}^2 \left( \frac{1}{G^M} - \frac{1}{G^A} \right) + 3\sigma_m^2 \left( \frac{1}{c_m^M} - \frac{1}{c_m^A} \right) \right) - \\ \quad 3\sigma_m (\boldsymbol{\alpha}^M - \boldsymbol{\alpha}^A) \Delta T - \rho \Delta s_0 (T - A_f) + \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}; & \xi < 0 \end{cases} \tag{3.123}$$

Поступак интеграције дат у [3] подразумева промену правца интеграције у

оквиру временског корака и израчунавање укупног напона без декомпозиције на девијаторски и запремински део, што негативно утиче на ефикасност имплементације. Поступак интеграције захтева решавање векторске једначине на нивоу интеграционе тачке. С обзиром да је имплементација дата у [3] заснована на брзини деформације трансформације, у оквиру корака се израчунавају прираштаји деформације трансформације и укупног напона, коришћењем вектора прираштаја укупне деформације као улазне величине.

Насупрот томе, оваквим развојем функције трансформације у ефективни облик, омогућава се решавање једне нелинеарне једначине на нивоу интеграционе тачке. То даље омогућава већу ефикасност интеграције напона, као и могућност једноставног проширења алгорита за интеграцију напона за проблеме великих деформација. Функционалност датог приступа је тестирана кроз верификационе примере из литературе али и поређењем са експерименталним резултатима.

### 3.6 Функције ојачања

Различите функције ојачања се користе ради што тачнијег симулирања реалног понашања материјала. Избором функције ојачања се добијају различити облици криве зависности напона и деформације. Функције ојачања  $f(\xi)$  узимају у обзир међудејство између фаза и варијанти мартензита [3]. Различите функције ојачања узрокују различите резултате симулације за исти конститутивни модел. Неколико функција ојачања се могу наћи у литератури:

- Танакин (Танака) експоненцијални модел [3, 79]

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{\rho\Delta s_0}{a^M} [(1 - \xi) \ln(1 - \xi) + \xi] + (\mu_1 + \mu_2)\xi; & \dot{\xi} > 0 \\ -\frac{\rho\Delta s_0}{a^A} \xi [\ln \xi - 1] + (\mu_1 - \mu_2)\xi; & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3.124)$$

- косинусни модел који су предложили Лианг и Рогерс [3, 80]

$$f(\xi) = \begin{cases} \int_0^\xi -\frac{\rho\Delta s_0}{a^M} [\pi - \arccos(2\xi - 1)] d\xi + (\mu_1 + \mu_2)\xi; & \dot{\xi} > 0 \\ \int_0^\xi -\frac{\rho\Delta s_0}{a^A} [\pi - \arccos(2\xi - 1)] d\xi + (\mu_1 - \mu_2)\xi; & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3.125)$$

- Бојдов и Лагоудасов полиномски модел [3]

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho b^M \xi^2 + (\mu_1 + \mu_2) \xi; & \dot{\xi} > 0 \\ \frac{1}{2}\rho b^A \xi^2 + (\mu_1 - \mu_2) \xi; & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3.126)$$

- глатка (енг. smooth) функција ојачања коју су предложили Макадо (Machado) и Лагоудас [3, 81]

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho b^M \left( \xi + \frac{\xi^{n_1+1}}{n_1+1} + \frac{(1-\xi)^{n_2+1}}{(n_2+1)} \right); & \dot{\xi} > 0 \\ \frac{1}{2}\rho b^A \left( \xi + \frac{\xi^{n_3+1}}{n_3+1} + \frac{(1-\xi)^{n_4+1}}{(n_4+1)} \right); & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3.127)$$

У горњим једначинама  $a^M, a^A, \mu_1, \mu_2, \rho b^M, \rho b^A, n_1, n_2, n_3, n_4$  представљају параметре ојачања трансформације расположиве у [3, 81].

За функцију трансформације, први извод  $f(\xi)$  по  $\xi$  је неопходан. Диференцирањем функције  $f(\xi)$  за поједине функције ојачања се добија:

- Танакин експоненцијални модел [3, 79]

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \begin{cases} \frac{\rho \Delta s_0}{a^M} [-\ln(1-\xi)] + (\mu_1 + \mu_2); & \dot{\xi} > 0 \\ \frac{\rho \Delta s_0}{a^A} [\ln \xi - 1] + \frac{\xi}{\xi-1} + (\mu_1 - \mu_2); & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3.128)$$

- косинусни модел који су предложили Лианг и Рогерс [3, 80]

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \begin{cases} -\frac{\rho \Delta s_0}{a^M} [\pi - \arccos(2\xi - 1)] + (\mu_1^c + \mu_2^c); & \dot{\xi} > 0 \\ -\frac{\rho \Delta s_0}{a^A} [\pi - \arccos(2\xi - 1)] + (\mu_1^c - \mu_2^c); & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3.129)$$

- Бојдов и Лагоудасов полиномски модел [3]

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \begin{cases} \rho b^M \xi + (\mu_1 + \mu_2); & \dot{\xi} > 0 \\ \rho b^A \xi + (\mu_1 - \mu_2); & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3.130)$$

- глатка функција ојачања коју су предложили Макадо и Лагоудас [3, 81]

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho b^M (1 + \xi^{n_1} - (1-\xi)^{n_2}); & \dot{\xi} > 0 \\ \frac{1}{2}\rho b^M (1 + \xi^{n_3} - (1-\xi)^{n_4}); & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3.131)$$

## Глава 4

# Нумеричка имплементација поступка интеграције напона код SMA

### 4.1 Основне претпоставке

Имплементација је инспирисана радовима Којића и Батеа (Bathe) [64], Сима (Simó) и Хјуза (Hughes) [82], Кидваиа и Лагоудаса [28, 37], Вебера (Weber) и Ананда (Anand) [83], Хенана (Henann) и Ананда [84] и Каминера (Camínero) и осталих [85]. Најуобичајенији приступ за имплицитну интеграцију напона за моделе независне од брзине деформација је алгоритам пресликавања уназад [64, 82]. Он се састоји од два корака: (1) претпостављање пробног еластичног стања (еластични предиктор) и (2) корекција напона због фазне трансформације (нееластични коректор). У [3], коришћен је алгоритам конвексне равни сечења, што подразумева да се правац корекције услед трансформације мења током итерација, док се код метода представљеног у [64, 84], тај правац не мења током интеграције у оквиру корака. На основу формулације, базиране на примени брзине деформације, деформација трансформације је дефинисана једначином (3.109). Тада, слично као и код пластичности, прираштај деформације трансформације у временском кораку је [3]:

$$\Delta \mathbf{e}_{tr} = H \Delta \xi \mathbf{n}_{tr}. \quad (4.1)$$

Пробни девијатор напона  $\mathbf{S}'_*$  се може израчунати као [64]:

$$\mathbf{S}'_* = 2G\mathbf{e}'_* \quad (4.2)$$

где је  $G$  модул смицања и  $\mathbf{e}'_*$  је пробни девијатор еластичне деформације. Са познатим прираштајем деформације трансформације  $\Delta\mathbf{e}_{tr}$ , коначан девијатор напона се може добити [64]:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_* - 2G\Delta\mathbf{e}_{tr}. \quad (4.3)$$

Увођењем једначине (4.1), добијамо израз за девијатор напона при фазној трансформацији унапред:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_* - 2GH\Delta\xi\mathbf{n}_{tr}. \quad (4.4)$$

На основу релације (3.109), за трансформацију унапред, имамо:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_* - 2GH\Delta\xi\frac{3\mathbf{S}'}{2\bar{S}}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{S}'_* = \mathbf{S}' \left( 1 + \frac{3GH\Delta\xi}{\bar{S}} \right), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{S}' = \frac{\bar{S}\mathbf{S}'_*}{\bar{S} + 3GH\Delta\xi}. \quad (4.7)$$

Ефективни девијатор напона се може тада приказати као:

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}' : \mathbf{S}'} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\bar{S}\mathbf{S}'_*}{\bar{S} + 3GH\Delta\xi} : \frac{\bar{S}\mathbf{S}'_*}{\bar{S} + 3GH\Delta\xi}}, \quad (4.8)$$

$$\bar{S} = \frac{\bar{S}\bar{S}_*}{\bar{S} + 3GH\Delta\xi}, \quad (4.9)$$

$$\bar{S} = \bar{S}_* - 3GH\Delta\xi. \quad (4.10)$$

Коначно, добијамо да се девијатор напона за трансформацију унапред може извести на следећи начин:

$$\mathbf{S}' = \frac{\bar{S}\mathbf{S}'_*}{\bar{S}_*}. \quad (4.11)$$

Коришћењем исте процедуре, девијатор напона и ефективни напон могу бити изведени за трансформацију уназад:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_* - 3GH\Delta\xi\frac{\mathbf{e}_{tr}}{\bar{e}_{tr}}, \quad (4.12)$$

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}' : \mathbf{S}'} = \sqrt{\bar{S}_*^2 - 6GH\Delta\xi \frac{\mathbf{S}'_* : \mathbf{e}_{tr}}{\bar{e}_{tr}} + 9G^2H^2\Delta\xi^2}. \quad (4.13)$$

## 4.2 Локални Њутн-Рапсонов алгоритам

Функција трансформације (3.123) се рачуна са пробним девијатором напона (4.2), променом температуре  $\Delta T = T - T_0$  и претпоставком  ${}^{t+\Delta t}\xi^{(0)} = {}^t\xi$ . Проверава се услов  ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(0)} \leq 0$  [28]. Уколико је задовољен, еластично решење се прихвата као коначно. Уколико услов  ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(0)} \leq 0$  није задовољен, корекција решења треба да задовољи да је  $\Phi = 0$ . Наведени услов се своди на решавање нелинеарне једначине по параметру  $\Delta\xi$  уз одговарајућа ограничења ( $0 \leq \xi \leq 1$ ). Итеративна шема дата у Таб. 4.2 се наставља све док је  ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k+1)}$  веће од неке толеранције или  ${}^{t+\Delta t}\xi$  достигне граничне вредности 0 или 1.

Табела 4.1: Алгоритам одлучивања о смеру трансформације

- 
1. Претпостављамо смер трансформација као у претходном кораку
  2. Рачунамо функцију трансформације  ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)}$  на основу формуле (3.123)
  3. Ако је  ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} > 0$  онда
    - Трансформацију наставити у истом смеру
    - или
    - Претпостављамо супротан смер трансформације
    - Рачунамо функцију трансформације  ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)}$  на основу формуле (3.123)
    - Ако је  ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} > 0$  онда
    - Трансформацију настављамо у новом смеру
    - Или
    - Решење је еластично - ићи у наредни временски корак
- 

Одлука о смеру мартензитне трансформације је важна за тачну интеграцију функције трансформације. Прво, претпостављен је смер трансформације као у претходном кораку. Вредност функције трансформације се рачуна коришћењем пробних вредности напона и деформације и вредности из претходног корака за удео мартензита у запремини. Уколико услов  ${}^{t+\Delta t}\Phi \leq 0$  није задовољен, тада смер трансформације остаје исти и примењује се даљи поступак интеграције. Уколико је услов задовољен, тада се функција трансформације рачуна за случај  ${}^{t+\Delta t}\xi_*$  (3.123). Уколико сада услов  ${}^{t+\Delta t}\Phi \leq 0$  није задовољен, смер трансформације се мења. Уколико је услов и сада задовољен, решење је еластично и идемо у наредни временски корак. Алгоритам је дат у Таб. 4.1.



Табела 4.2: Локални Њутн-Рапсонов алгоритам за SMA конститутивни модел

1. Нека је  $k = 0$ ,  ${}^{t+\Delta t}\xi^{(0)} = {}^t\xi$ ,  ${}^{t+\Delta t}G^{(0)} = {}^tG$ ,  ${}^{t+\Delta t}\alpha^{(0)} = {}^t\alpha$ ,  ${}^{t+\Delta t}c_m^{(0)} = {}^tc_m$
2. Рачунамо функцију трансформације (3.123)

$${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} = \Phi \left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_*, {}^{t+\Delta t}\xi^{(k)}, {}^{t+\Delta t}T, {}^{t+\Delta t}\sigma_m \right]$$

Ако је  ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} \leq \textit{tolerance}$  онда

Решење је еластично - иди у наредни временски корак

или

Настави у фазну трансформацију

3. Израчунати прираштај удела мартензита у запремини у итерацији

$${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} + d{}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\Phi^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)}}{\partial \xi} d{}^{t+\Delta t}\xi^{(k)} \simeq 0$$

$$d{}^{t+\Delta t}\xi^{(k)} = - \frac{{}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)}}{\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)}}{\partial \xi}}$$

4. Прираштај у кораку удела мартензита у запремини и текући удео мартензита се ажурирају као:

$$\Delta {}^{t+\Delta t}\xi^{(k+1)} = \Delta {}^{t+\Delta t}\xi^{(k)} + d{}^{t+\Delta t}\xi^{(k)}$$

$${}^{t+\Delta t}\xi = {}^t\xi + \Delta {}^{t+\Delta t}\xi^{(k+1)}$$

5. Ажурирање ефективног девијатора напона:

$${}^{t+\Delta t}\bar{S} = \begin{cases} {}^{t+\Delta t}\bar{S}_* - 3{}^{t+\Delta t}GH\Delta {}^{t+\Delta t}\xi; & \dot{\xi} > 0 \\ \sqrt{{}^{t+\Delta t}\bar{S}_*^2 - 6{}^{t+\Delta t}GH\Delta {}^{t+\Delta t}\xi \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_* \cdot {}^t\mathbf{e}_{tr}}{t\bar{e}_{tr}} + 9{}^{t+\Delta t}G^2H^2\Delta {}^{t+\Delta t}\xi^2}; & \dot{\xi} < 0 \end{cases}$$

Нека је  $k = k + 1$  и иди у корак 2.

### 4.3 Интеграција напона за мале деформације

У случају малих деформација, пробна еластична девијаторска деформација  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'_*$ , средња деформација  ${}^{t+\Delta t}e_m$  и термичка деформација  ${}^{t+\Delta t}e_{th}$  се могу представити као [64, 70]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'_* = {}^{t+\Delta t}\mathbf{e} - {}^{t+\Delta t}e_m \mathbf{I} - {}^t\mathbf{e}_{tr} - \Delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr}, \quad (4.14)$$

$${}^{t+\Delta t}e_m = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 {}^{t+\Delta t}e_{kk}, \quad (4.15)$$

$${}^{t+\Delta t}e_{th} = {}^{t+\Delta t}\alpha \Delta T, \quad (4.16)$$

где коефицијент термичког ширења  ${}^{t+\Delta t}\alpha$  зависи од  $\xi$ . Укупна деформација на крају корака и деформација трансформације из претходног корака су редом  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$  и  ${}^t\mathbf{e}_{tr}$ . Пре свега, термоеластичном предикцијом, претпоставља се да је прираштај деформације трансформације  $\Delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr}$  једнак нули (4.14). Пробни еластични девијатор напона  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_*$  и средњи напон  ${}^{t+\Delta t}\sigma_m$  се рачунају уз претпоставку да нема фазне трансформације у кораку [64, 70]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_* = 2{}^{t+\Delta t}G {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'_*, \quad (4.17)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m = {}^{t+\Delta t}c_m ({}^{t+\Delta t}e_m - {}^{t+\Delta t}e_{th}), \quad (4.18)$$

где модул смицања  ${}^{t+\Delta t}G$  и модул стишљивости  ${}^{t+\Delta t}c_m$  зависе од  $\xi$ . Сада, настављамо алгоритмом датим у Таб. 4.2.

Коначно, са познатим вредностима удела мартензита у запремини  ${}^{t+\Delta t}\xi$  и променљивим ажурираним током интеграције, девијатор напона на крају корака се може израчунати као [64, 70]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_* = \begin{cases} \frac{{}^{t+\Delta t}\bar{S}^E}{{}^{t+\Delta t}\bar{S}_*^E} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_*; & \dot{\xi} > 0 \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_* - 2{}^{t+\Delta t}GH \Delta {}^{t+\Delta t}\xi \frac{{}^t\mathbf{e}_{tr}}{{}^t\bar{e}_{tr}}; & \dot{\xi} < 0 \end{cases}.$$

Укупан напон и деформација трансформације (користећи једначину (4.1)), на крају временског корака су дати као [64, 70]:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_* + {}^{t+\Delta t}\sigma_m \mathbf{I}, \quad (4.19)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr} = {}^t\mathbf{e}_{tr} + \begin{cases} \frac{3H\Delta {}^{t+\Delta t}\xi}{{}^{t+\Delta t}\bar{S}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_*; & \dot{\xi} > 0 \\ \frac{H\Delta {}^{t+\Delta t}\xi}{{}^t\bar{e}_{tr}} {}^t\mathbf{e}_{tr}; & \dot{\xi} < 0 \end{cases}. \quad (4.20)$$

Овај алгоритам користи напон декомпонован на девијаторски и средњи део и са апроксимацијом (4.1) решење се заснива на једној нелинераној једначини. Алгоритам је реформулисан у поређењу са алгоритмом радијалног повратка коришћеним у [3], где је коришћен укупан напон. За такву нумеричку имплементацију алгоритма интеграције напона, у случају пропорционалног оптерећења, имамо потпуно тачна решења [64, 84]. У случају произвољног оптерећења, од-

ступање зависи од величине временског корака. Ово ће бити показано у одељку са нумеричким примерима. Такође, ова итеративна процедура може бити коришћена за проблеме великих деформација што ће бити описано у наредном одељку.

## 4.4 Интеграција напона за велике деформације

Предложеним унапређењима поступка интеграције, омогућено је коришћење процедуре за мале деформације за решавање проблема великих деформација уз задовољење геометријских релација битних за коначне деформације. Различитим мерама деформација, одговарају различите мере енергетски конјугованих напона датих у (3.78). Одабиром одређене мере деформације као улазне величине, потребно је прилагодити алгоритам тако да се резултујући напон коректно трансформише на њој конјуговану величину. У овом поглављу ће бити представљен поступак интеграције напона за Ојлерову логаритамску меру деформације (Хенкијева деформација) која се добија из левог Коши-Гриновог тензора деформације.

Такође, треба напоменути да ће бити разматран случај еластичног запреминског одзива, као што је случај код пластичности метала. Идеја је раздвојити градијент деформације на девијаторски и запремински део применом мултипликативне декомпозиције. Тада уводимо, на основу [70, 86], следећу релацију за модификовани релативни и укупни градијент деформације  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}$  и  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}$ :

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} = (\det {}^{t+\Delta t}\mathbf{F})^{-\frac{1}{3}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \quad {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} = (\det {}^{t+\Delta t}\mathbf{F})^{-\frac{1}{3}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}, \quad (4.21)$$

при чему је  $\det \bar{\mathbf{F}} = 1$ .

У вези са тим дефинишемо леви Коши-Гринов тензор деформације  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}$  коришћењем модификованог градијента деформације  $\bar{\mathbf{F}}$  као [64, 70]:

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}} = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}^T. \quad (4.22)$$

Такође, пробни еластични леви Коши-Гринов тензор деформације  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_*$  се може израчунати коришћењем познатих података за  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}^E$  из претходног корака [64, 70] као:

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_*^E = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}^E {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}^T. \quad (4.23)$$

У случају логаритамске деформације, укупна Хенкијева деформација  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{h}$

и пробна еластична Хенкијева деформација  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'^E_*$  су:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}} = \sum_{k=1}^3 \ln \left( {}^{t+\Delta t}\bar{\lambda}_k \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_k {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_k, \quad (4.24)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'^E_* = {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}^E_* = \frac{1}{2} \ln {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_*^E = \sum_{k=1}^3 \ln \left( {}^{t+\Delta t}\bar{\lambda}_{k*}^E \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_k {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_k, \quad (4.25)$$

где су  ${}^{t+\Delta t}\bar{\lambda}_k$  и  ${}^{t+\Delta t}\bar{\lambda}_{k*}^E$  редом, укупна главна издужења и пробна еластична главна издужења.  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_k$  су одговарајући главни правци тензора  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}$  и  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_*^E$ .

За израчунавање логаритамске деформације, неопходно је наћи спектралну декомпозицију  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}$  и  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_*^E$  да би нашли главна издужења  ${}^{t+\Delta t}\bar{\lambda}_k$  и  ${}^{t+\Delta t}\bar{\lambda}_{k*}^E$  и правци  $\mathbf{q}_k$ . Тензор логаритамске деформације има више интересантних особина. Позната је као природна мера деформације и користи се за директно проширење поступка интеграције напона развијеног за мале деформације на проблеме великих деформација. Такође, коришћењем логаритамске деформације, могуће је изразити промену запремине коришћењем главних деформација. Ово је важно за пластичност и SMA материјале јер су нееластичне деформације девијаторске.

У овом случају, с обзиром на (3.69), може се претпоставити и пробна деформација трансформације, која ће бити и коначна за случај да је решење еластично и да нема фазне трансформације. Пробна деформација трансформације се може израчунати као:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr*} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{h} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}^E_*. \quad (4.26)$$

Она се користи као правац интеграције напона за мартензитну трансформацију уназад. Таква претпоставка, дефинише тачан правац интеграције напона за случај великих деформација.

За познато пробно еластично стање, примењује се исти поступак интеграције као у случају малих деформација (Таб. 4.2) на проблеме великих деформација [64, 70].

Ажурирање левог Коши-Гриновог тензора  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}^E$  је дефинисано експонанцијалним мапирањем нееластичног градијента деформације као у [84, 85]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{IN} = \exp(\Delta \mathbf{e}_{tr}) {}^t\mathbf{F}^{IN}. \quad (4.27)$$

Инверзна релација је тада:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{IN-1} = {}^t\mathbf{F}^{IN-1} \exp(-\Delta \mathbf{e}_{tr}). \quad (4.28)$$

Даље се коришћењем мултипликативне декомпозиције (3.51),  $\mathbf{F}^E = \mathbf{F}\mathbf{F}^{IN-1}$  добија да је:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^E = {}^t\mathbf{F}_*^E \exp(-\Delta \mathbf{e}_{tr}), \quad (4.29)$$

јер је:

$$\mathbf{F}_*^E = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} {}^t\mathbf{F}^{IN-1}. \quad (4.30)$$

Применом апроксимација предложених у [84] да је:

$$\exp(-\Delta \mathbf{e}_{tr}) = (\mathbf{1} - \Delta \mathbf{e}_{tr}), \quad (4.31)$$

може се показати да је:

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}^E = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_*^E (\mathbf{1} - 2\Delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr}). \quad (4.32)$$

За случај логаритамске деформације, ажурирање деформације трансформације на крају временског корака је дато као:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{h} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}^E, \quad (4.33)$$

где је

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{h}^E = \frac{1}{2} \ln {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}^E. \quad (4.34)$$

Као што се може запазити, поступак интеграције напона је исти за мале и велике деформације, а разлика је у задовољењу геометријских захтева коришћењем одговарајућих мера деформација и напона. Да би се то постигло, користе се коначне мере деформација, које је након интеграције неопходно кориговати на одговарајући начин. Дакле, коришћењем мултипликативне декомпозиције градијента деформације, поларне декомпозиције и укупних мера деформације у предложеном алгоритму, могу се лако решавати проблеми са великим деформацијама [64, 84].

## Глава 5

# Термо-механичка спрега програма за структурну и анализу провођења топлоте у SMA

Познато је, и у експерименталном испитивању и моделирању, да је термо-механичка спрега веома јака код SMA, нарочито при великим брзинама деформације, јер су тада процеси блиски адијабатским [8, 13]. Производња латентне топлоте или њена апсорпција утиче на повећање или смањење температуре материјала, које је одговорно за промену материјалних карактеристика SMA. Као што је показано у [3] производња латентне топлоте је уско повезана са променом количином мартензитне фазе (удео мартензита у запремини).

### 5.1 Једначина баланса енергије за спрегнуте проблеме

Полазећи од Првог и Другог закона термодинамике, показано је да је унутрашња дисипација представљена једначином (3.95). Увођењем Гипсове слободне енергије и Лежандреве трансформације, добијамо коначан облик Клаузијус - Планк неједнакости (3.114). Са ове тачке гледишта, може се рећи да је на основу [3]:

$$\Pi \dot{\xi} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho \dot{u} + \rho T \dot{s}. \quad (5.1)$$

Коришћењем првог закона термодинамике (3.83), може се добити да је на основу [3]:

$$\rho \dot{s} T - \Pi \dot{\xi} = -\text{div}(\mathbf{q}) + \rho q. \quad (5.2)$$

Коришћењем једначина (3.100), (3.97) и (3.114), можемо дефинисати извод ентропије  $\dot{s}$  као [3]:

$$\dot{s} = -\frac{\partial \dot{g}}{\partial T} = \frac{\partial^2 g}{\partial T \partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial T} \dot{\xi}. \quad (5.3)$$

Гипсова слободна енергија  $g$  и термодинамичка сила  $\Pi$  су дате редом једначинама (3.107) и (3.115). Сменом у релацију за брзину ентропије (5.3), добијемо [3]:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\rho} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial T^2} = -\frac{c}{T} \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \Delta \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\sigma} - \Delta c \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \Delta s_0. \quad (5.6)$$

Експлицитни облик за брзину ентропије може се добити сменом у (5.3) [3]:

$$\dot{s} = -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\rho} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{c}{T} \dot{T} + \left( \frac{1}{\rho} \Delta \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\sigma} - \Delta c \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \Delta s_0 \right) \dot{\xi}. \quad (5.7)$$

Сада једначина (5.2) добија следећи облик [3]:

$$-T \boldsymbol{\alpha} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \rho c \dot{T} + \left( -\Pi + T \Delta \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\sigma} - \rho \Delta c T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \rho \Delta s_0 T \right) \dot{\xi} = -\text{div}(\mathbf{q}) + \rho q. \quad (5.8)$$

Ово формула представља једначину баланса енергије за спрегнуте SMA проблеме. Први члан израза је повезан са утицајем напонског стања на промену температуре. Други члан израза је повезан са специфичном топлотом, док трећи члан повезује промену температуре са променом удела мартензита у запремини. Уз претпоставку да је  $\Delta \boldsymbol{\alpha} = 0$  и  $\Delta c = 0$ , односно да су дати материјални параметри исти за аустенитну и мартензитну фазу, једначина провођења топлоте има следећи облик:

$$-T \boldsymbol{\alpha} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \rho c \dot{T} + (-\Pi + \rho \Delta s_0 T) \dot{\xi} = -\text{div}(\mathbf{q}) + \rho q. \quad (5.9)$$

## 5.2 Термомеханичка спрега и методе решавања

За разматрање термомеханичке спреге коришћен је партиционисани приступ [61]. МКЕ програми за структурну анализу и провођења топлоте су повезани коришћењем софтверског инжењеринга базираног на компонентама - Би-

блиотека шаблона за компоненте (енг. Component Template Library) (CTL) [63]. CTL је коришћен као комуникациони интерфејс. CTL је већ до сада коришћен за партиционисани алгоритам спрезања (флуид-структурна интеракција) [62]. Коришћењем CTL, компоненте које се спрежу су независне од локације и могу бити повезане кроз комуникациони канал као нпр. Трансмисиони контролни протокол и Интернет протокол (енг. Transmission Control Protocol and Internet Protocol) (TCP/IP), Интерфејс за пренос порука (енг. Message Passing Interface) (MPI), Сигурносна љуска (енг. Secure Shell) (SSH), итд.

За реализацију термомеханичке спреге неопходно је имати најмање два програмска кода, која могу независно да симулирају провођење топлоте и механичко понашање материјала. Сваки од ових програма може решити независно једну врсту физичког проблема. Да би симулирали дате физичке феномене, развијен је ефикасан алгоритам за комуникацију између кодова.

За ову намену, усвојен је партиционисани приступ на принципима нелинеарне блок-Гаус (Gaus)-Зајдел (Seidel) нумеричке процедуре за јако спрезање [61]. Алгоритам је заснован на размени информација између два програма. Програм за структурну анализу израчунава дисипациону енергију ослобођену током фазне трансформације (или нпр. пластичне деформације). Та енергија прелази у унутрашњу топлоту која се даље користи у програму за пренос топлоте као запремински извор за рачунање промене температуре. Промена температуре утиче на промену функције трансформације и термодинамичку силу (или материјалне карактеристике и додатна промена нееластичних деформација). Програм за структурну анализу такође рачуна термичке деформације узроковане променом температуре. Ефекти међудејства се узимају у обзир код синхорнизације спрегнутих променљивих стања: удео мартензита у запремини (или ефективна пластична деформација) и температура.

### 5.2.1 Програм за провођење топлоте - ПAK-T

Програм за провођење топлоте софтвера (Програм за Анализу Конструкција (ПАК)) [60] пружа могућност да се реше проблеми провођења топлоте кроз чврста тела коришћењем МКЕ са граничним условима: конвекција на делу површине, задат површински флуks, задате температуре, радијација, итд. Поступак заснован на основним принципима одржања енергије је коришћен за решавање једначине баланса енергије [66, 87]:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt}, \quad (5.10)$$



где је  $\mathcal{Q}$  топлота додата систему и  $\mathcal{U}$  је унутрашња енергија. Промена унутрашње енергије је дата као [87]:

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \int_V \rho c \frac{dT}{dt} dV, \quad (5.11)$$

где је  $\rho$  густина материјала,  $c$  је специфична топлота и  $dV$  је елементарна запремина. Промена топлотне енергије се може описати као [87]:

$$-\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV, \quad (5.12)$$

где је  $\mathbf{q}$  топлотни флуks кроз елементарну запремину  $dV$ .

Из Фуријевог (Fourier) закона за провођења топлоте [87]:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}\nabla T, \quad (5.13)$$

једначина енергетске равнотеже је изведена као [3]:

$$-\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla^T (\mathbf{k}\nabla T) + q + (q_{dis} - T_0 \alpha c_m \dot{\epsilon}_m) = 0, \quad (5.14)$$

где је  $q$  локални топлотни извор,  $\mathbf{k}$  проводљивост материјала,  $\mathbf{T} = \nabla T$  је градијент температуре и  $q_{dis}$  је елементарна енергија дисипације. Израз  $-T_0 \alpha c_m \dot{\epsilon}_m$  описује Гауг-Џулов (Gough-Joule) ефекат (пиезокалориметријски или термоеластични ефекат такође познат и као Лорд Келвинова (Lord Kelvin) формула) [88] која даје пад температуре када је материјал под еластичним затезањем и повећање температуре услед оптерећења притиском [89].

Израз у загради представља дисипативну енергију описану једначином (5.15) и термоеластични ефекат [88]. Елементарна дисипативна енергија  $q_{dis}$  фазне трансформације претворена у топлоту је дата као [3]:

$$q_{dis} = \eta (\Pi - \rho \Delta s_0 T) \dot{\xi}, \quad (5.15)$$

где је  $\eta$  фактор дисипације,  $\Pi$  термодинамичка сила мартензитне трансформације,  $\dot{\xi}$  је брзина промене удела мартензита у запремини, производ  $\rho$  је густина материјала и  $\Delta s_0$  је разлика ефективне ентропије у растерећеном стању за мартензитну и аустенитну фазу [3]. Може се запазити да је количина енергије дисипације пропорционална брзини промене удела мартензита у запремини. Једначина (5.15) такође описује промену температуре услед промене удела мар-

тензита у запремини, која је у вези са латентном топлотом фазне трансформације [3]. Енергија настала услед фазне трансформације се рачуна на нивоу интеграционе тачке у програму за структурну анализу ПАК-С. Енергија се даље преноси СТЛ-ом, програму за провођење топлоте (ПАК-Т) [60] као извор унутрашње топлоте. ПАК-Т израчунава промену температуре и враћа ПАК-С ради даље интеграције напона. Шема термомеханичке спреге је дата на Сл. 5.1 коришћењем СТЛ интерфејса.

Множењем једначине (5.14) тежинским функцијама  $h_I$  (Галеркинов (Galerkin) метод) [66, 87], добијамо:

$$\begin{aligned}
 - \int_V \rho c h_I \frac{dT}{dt} dV + \int_V h_I (\nabla^T \mathbf{k} \nabla T) dV + \int_V h_I q dV + \\
 \int_V h_I (q_{dis} - T_0 \alpha c_m \dot{e}_m) dV = 0, \quad \forall h_I.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Применом Гринеове формуле на други интеграл у једначини (5.16) и коришћењем истих интерполационих функција за температуре, добијамо [87]:

$$\sum_J \left[ \int_V h_I (\nabla^T \mathbf{k} \nabla h_J) dV \right] T^J = - \sum_J \left[ \int_V (\nabla h_I \mathbf{k} \nabla h_J) dV \right] h_J + \int_S h_I q_n dS, \tag{5.17}$$

где су  $T^J$  температуре у чворовима,  $h_J$  су интерполационе функције, што значи да је температура у било којој тачки запремине:

$$T(x, y, z) = \sum_J T^J h_J(x, y, z). \tag{5.18}$$

Такође,  $q_n = \mathbf{n}^T \mathbf{q}$  је укупан топлотни флуks на ограниченој површи који се састоји од задатог улазног топлотног флуksа на делу површине ( $q_S$ ), конвективног флуksа:

$$q_c = h_c (T_0 - T) \tag{5.19}$$

и флуksа радијације:

$$q_r = h_r (T_r - T). \tag{5.20}$$

Ово даје [87]:

$$\int_S h_I q_n ds = Q_I^S + \left( Q_I^c - \sum_J K^c_{IJ} T^J \right) + \left( Q_I^r - \sum_J K^r_{IJ} T^J \right). \tag{5.21}$$

Из претходних једначина, равнотежа енергије се добија као [87]:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{Q}, \quad (5.22)$$

где је:

$$C_{IJ} = \int_V \rho c h_I h_J dV, \quad (5.23)$$

$$K_{IJ} = K^k_{IJ} + K^c_{IJ} + K^r_{IJ}, \quad (5.24)$$

$$K^k_{IJ} = \int_V \nabla h_I \mathbf{k} \nabla h_J dV, \quad (5.25)$$

$$Q_I = Q_I^q + Q_I^{qs} + Q_I^c + Q_I^r + Q_I^{dis}. \quad (5.26)$$

Дискретизацијом у времену, нелинеарна једначина равнотеже енергије се може решити итеративно [87]:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}^{(i-1)} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^{(i-1)} - {}^t \mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}^{(i)}) + \mathbf{K}^{(i-1)} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{T}^{(i)}) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}^{(i-1)}, \quad (5.27)$$

$$\Delta \mathbf{T}^{(i)} = \left( \hat{\mathbf{K}}^{(i-1)} \right)^{-1} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{Q}}^{(i-1)}, \quad (5.28)$$

где је:

$$\hat{\mathbf{K}}^{(i-1)} = \mathbf{K}^{(i-1)} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}^{(i-1)}, \quad (5.29)$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{Q}}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}^{(i-1)} - \mathbf{K}^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^{(i-1)} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}^{(i-1)} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^{(i-1)} - {}^t \mathbf{T}). \quad (5.30)$$

Ова итеративна процедура траје све док је прираштај температуре већи од неке толеранције. Такође, горњи леви индекси  $t$  и  $t + \Delta t$  обележавају редом претходни и текући временски корак. Такође координате чворова елемената се ажурирају у текућем временском кораку у складу са деформацијама мреже добијеним из програма за структурну анализу ПАК-С. Ово значи да се градијент температуре и интеграција врше у текућој конфигурацији.

## 5.2.2 Програм за структурну анализу - ПАК-С

Програмом за структурну анализу софтвера ПАК (ПАК-С) могуће је решавати линеарне и нелинеарне структурне проблеме. Прво, уводимо релације неопходне за МКЕ формулацију за тродимензионални елемент. Релације за интерполацију геометрије и померања су дате као [87]:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{H}_{int} \mathbf{x}_n, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{H}_{int} \mathbf{u}_n, \quad (5.32)$$

где су  $\mathbf{x}_p$  и  $\mathbf{u}_p$  координате и померања материјалне тачке,  $\mathbf{x}_n$  и  $\mathbf{u}_n$  су координате и померања чворова елемента и  $\mathbf{H}_{int}$  је интерполациона матрица. Вектор укупне деформације  $\mathbf{e}$  је одређен у материјалној тачки релацијом [87]:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B} \mathbf{u}_n, \quad (5.33)$$

где је  $\mathbf{B}$  матрица извода интерполационих функција по координатама. За еластични и термоеластични материјал, напон се одређује конститутивном релацијом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{el} (\mathbf{e} - e_{th} \mathbf{I}), \quad (5.34)$$

где је  $\mathbf{C}_{el}$  еластична конститутивна матрица и  $e_{th}$  је термичка деформација. За коначне мере деформација, равнотежне једначине се могу извести у следећем облику [61, 62, 90]:

$$-\text{div}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{r}_s, \quad (5.35)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2G\mathbf{h} + c_m(\text{tr}\mathbf{h})\mathbf{I}, \quad \mathbf{h} = \ln \mathbf{v}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{v}^2 \quad (5.36)$$

где "tr" представља функцију "трага",  $\boldsymbol{\tau}$  је Кирхофов напон,  $\mathbf{h}$  је Хенкијева (логаритамска) деформација,  $\mathbf{F}$  је градијент деформације,  $\mathbf{v}$  је леви тензор издужења,  $\mathbf{b}$  је леви Коши-Гринов тензор деформације и  $\mathbf{r}_s$  је оптерећење тела. Једначине (5.34), (5.35), (5.36) представљају исте конститутивне релације за различите мере деформација и напона.

Са ове тачке гледишта, можемо дефинисати матрицу крутости елемента као [87]:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{el} \mathbf{B} dV. \quad (5.37)$$

Силе у чворовима елемента се могу одредити из равнотеже виртуалног рада [87]:

$$\delta \mathcal{P}_{int} = \int_V \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}_n^T \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{F}_{int}, \quad (5.38)$$

па онда имамо:

$$\mathbf{F}_{int} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (5.39)$$

Одавде, добијамо да је [87]:

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{K} \mathbf{u}_n. \quad (5.40)$$

Дакле, померање  $\mathbf{u}_n$  је линеарна функција вектора унутрашњих сила  $\mathbf{F}_{int}$

што значи да једначина (5.40) одговара линеарној анализи. Уколико то није случај, онда говоримо о геометријском и материјалном нелинеарном понашању. Класификација нелинеарног понашања се може разматрати зависно од типа анализе. Формулација су дате у Таб. 5.1.

Табела 5.1: Класификација нелинеарне анализе [66]

Тип анализе	Формулација	Мере напона и деформације
Материјална нелинеарност	Материјална нелинеарност (МНО)	Инжењерски напон и деформација
Велика померања, велике ротације, али мале деформације	Тотални Лагранжијан (ТЛ)  Кориговани Лагранжијан (КЛ)	Други Пиола-Кирхофов напон, Грин-Лагранжеова деформација  Кошијев напон, Алмансијева деформација
Велика померања, велике ротације, велике деформације	Тотални Лагранжијан (ТЛ)  Кориговани Лагранжијан (КЛ)	Други Пиола-Кирхофов напон, Грин-Лагранжеова деформација  Кошијев напон, логаритамска деформација

Коришћењем равнотеже (5.35) и кинематских и конститутивних једначина (5.36), нелинеарни систем једначина се може формулисати коришћењем стандардне процедуре дате у [66]. Тај систем се може решити коришћењем класичне итеративне Њутн-Рапсонове методе [66, 87]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{u}_n^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}^{(i-1)}, \quad (5.41)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_n^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_n^{(i-1)} + \Delta\mathbf{u}_n^{(i)}, \quad (5.42)$$

са почетним условима:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_n^{(0)} = {}^t\mathbf{u}_n \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} = {}^t\mathbf{K} \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}_{int}, \quad (5.43)$$

где је  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$  тангентна матрица крутости конструкције [66],  $\Delta\mathbf{u}_n^{(i)}$  је вектор прираштаја померања у чворовима,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s$  је спољашња сила и  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}^{(i-1)}$  је унутрашња сила.

Зависно од формулације која се користи, разликују се две могуће варијанте: Тотални Лагранжијан (ТЛ) (енг. Total Lagrangian - TL) и Кориговани Лагранжијан (КЛ) (енг. Updated Lagrangian - UL). Код Тоталног Лагранжијана, све

статичке и кинематске променљиве се односе на почетну конфигурацију, док се код Коригованог Лагранжијана користи исти поступак, али се све променљиве односе на последњу тј. текућу конфигурацију. Више детаља и упоредна анализа коришћења једног и другог поступка је дата у [66].

Зависно од изабране формулације, једначина равнотеже коначног елемента може бити [66]:

- Материјална нелинеарност

$${}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}_n = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s - {}^t\mathbf{F}_{int}, \quad (5.44)$$

- Тотални Лагранжијан

$$({}_0^t\mathbf{K}_L + {}_0^t\mathbf{K}_{NL}) \Delta\mathbf{u}_n = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s - {}_0^t\mathbf{F}_{int}, \quad (5.45)$$

- Кориговани Лагранжијан

$$({}_t^t\mathbf{K}_L + {}_t^t\mathbf{K}_{NL}) \Delta\mathbf{u}_n = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_s - {}_t^t\mathbf{F}_{int}, \quad (5.46)$$

где су:

${}^t\mathbf{K}$ ,  ${}_0^t\mathbf{K}_L$ ,  ${}_t^t\mathbf{K}_L$  - линеарне матрице крутости

${}_0^t\mathbf{K}_{NL}$ ,  ${}_t^t\mathbf{K}_{NL}$  - нелинеарне матрице крутости (геометријске).

Овде треба нагласити да се линеарне матрице крутости добијају као:

$$\mathbf{K}_L = \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_V \mathbf{B}_{NL}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}_{NL} dV, \quad (5.48)$$

где је:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{e}}, \quad (5.49)$$

тангентна матрица. На брзину конвергенције Њутн-Рапсонове шеме, значајно утиче тачност рачунања тангентне матрице [64, 66].

## 5.3 Имплементација партиционисаног алгоритма за термо-механичко спрезање

### 5.3.1 Математички опис

Термо-механички проблем који је потребно решити партиционисаном процедуром може бити уопштено описан нелинеарним системом једначина [90]:

$$f(\mathbf{u}_n, T) = 0, \quad (5.50)$$

$$g(\mathbf{u}_n, T) = 0, \quad (5.51)$$

где су  $f$  и  $g$  редом термички и структурни потпроблем. Нумеричка симулација прве једначине је изведена коришћењем програма ПАК-Т, док је нумеричка симулација друге једначине урађена коришћењем програма ПАК-С. Размена података између ових компонената се одвија тако да је решење термичког потпроблема  $f$  температура  $T$  за задата померања  $\mathbf{u}_n$ , док су решења структурног потпроблема  $g$  померања  $\mathbf{u}_n$  за температуру  $T$  као задати параметар. Услед нелинеарности система датог једначинама (5.50), (5.51), коришћена је блок Гаус-Зајделова процедура за спрезање [61, 90]. Алгоритам решава систем у форми итерације у фиксираној тачки као:

$$T^{k+1} = F(\mathbf{u}_n^k, T^k), \quad (5.52)$$

$$\mathbf{u}_n^{k+1} = G(\mathbf{u}_n^k, T^{k+1}), \quad (5.53)$$

где је  $k$  бројач итерација глобалне итеративне процедуре.

Да би израчунали утицај структурне анализе на поље температуре, ПАК-Т програму је неопходно познавање дисипативне енергије која изазива промену температуре као унутрашњи извор. Тако да, дисипативна енергија мартензитне трансформације узрокована померањем се рачуна у свакој интеграционој тачки и прослеђује се ПАК-Т програму као променљива стања за спрезање. Енергија дисипације се може израчунати као:

$$q_{dis_i}^k = \eta \left( \Pi_i^k - \rho \Delta s_0 T_i^k \right) \dot{\xi}_i^k, \quad (5.54)$$

где је  $i$  текући број интеграционе тачке,  $\eta$  је фактор дисипације,  $\Pi_i^k$ ,  $T_i^k$  и  $\dot{\xi}_i^k$  су термодинамичке силе, температура и брзина промене удела мартензита у запремини у одговарајућој итерацији и интеграционој тачки. За прослеђену

енергију, ПАК-Т рачуна ново поље температура у конструкцији и враћа ПАК-С програму на корекцију померања у интергационој процедури датој у Гл. 4. Овај процес се понавља све док глобални критеријум конвергенције:

$$\frac{q_{dis}^k - q_{dis}^{k-1}}{q_{dis}^{k-1}} < tol_W, \quad (5.55)$$

не буде задовољен. Одавде,  $q_{dis}^k$  је енергија дисипације целе конструкције, а  $tol_W$  је толеранција која дефинише конвергенцију глобалних итерација. Коначно, дисипативна енергија целе конструкције може бити израчуната као:

$$q_{dis}^k = \sum_{i=1}^P q_{dis_i}^k \quad (5.56)$$

где је  $P$  укупан број интеграционих тачака.

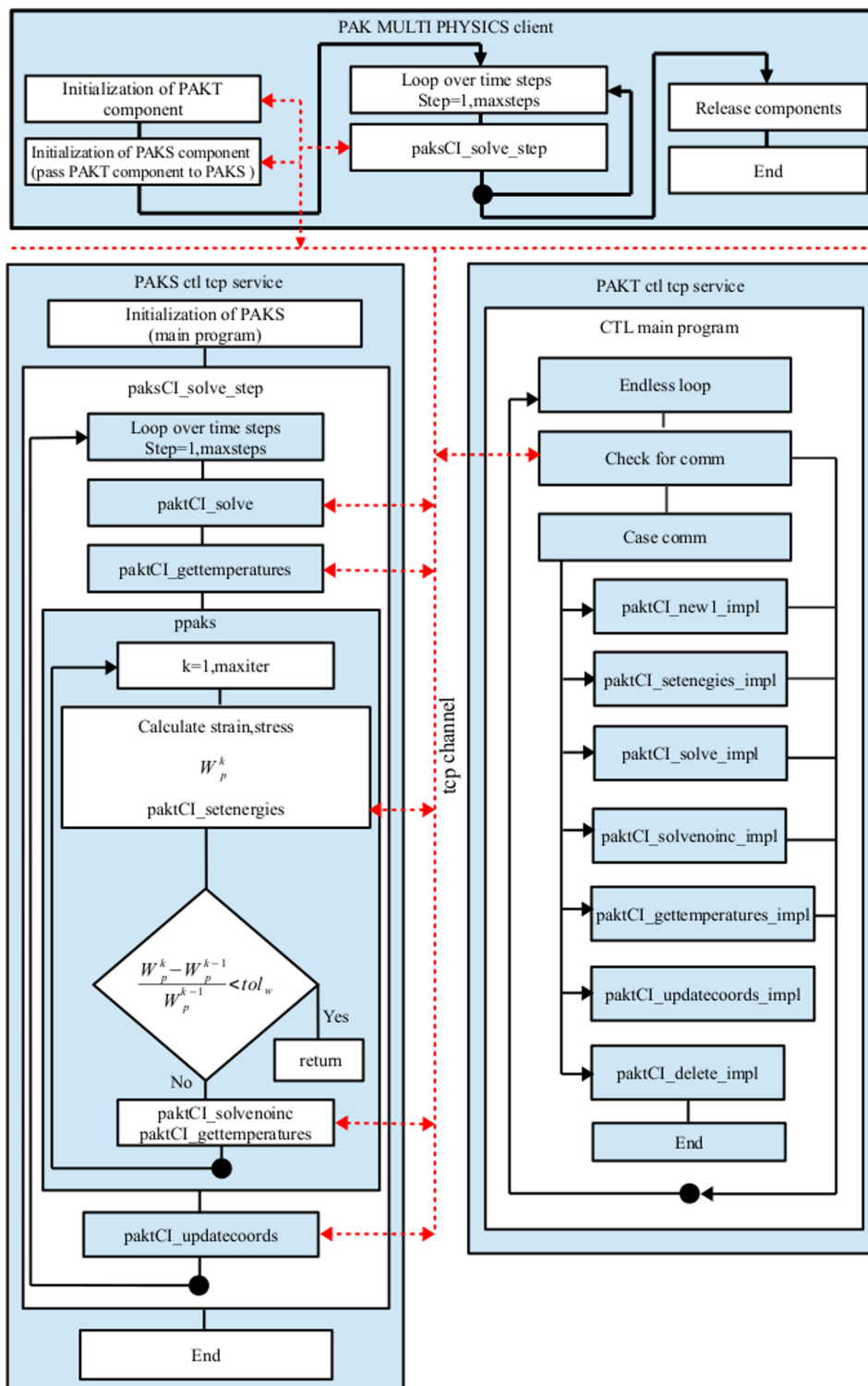
### 5.3.2 Имплементација

За комуникацију између компонената софтвера за провођење топлоте и структурну анализу коришћен је STL као мидлвер (енг. middleware). Компонента је јединица програмске структуре која покрива имплементацију преко интерфејса који се састоји од сервиса које пружа компонента другим компонентама система. Иако је заснован на C++ генеричком шаблонском програмирању, STL пружа C, FORTRAN или C++ интерфејсе. Компоненте су независне од локације и може им се приступити кроз комуникационе канале као што су TCP/IP, MPI, SSH, итд.

Реализација спрезања је изведена креирањем компонената од два појединачна програма коришћењем STL. Клијентска апликација мора бити направљена у C++, који позива компоненте. За компоненту провођења топлоте (ПАК-Т), коришћен је FORTRAN STL интерфејс, иако је његова функционалност ограничена, јер FORTRAN-ски код није објектно оријентисан програмски језик. STL C++ интерфејс је коришћен за структурну компоненту ПАК-С, јер је неопходно прихватити показивач на инстанцу објекта ПАК-Т. Такође, неопходно је написати C++ љуску (енг. wrapper) око ПАК-С кода, јер је ПАК-С програм написан у FORTRAN-у. Све ово је потребно спровести тако да компонента ПАК-С може директно да комуницира са компонентом ПАК-Т.

Шема партиционисаног спрезања је дата на Сл. 5.1. Клијентска апликација је коришћена за иницијализацију компоненте. Прво се компонента ПАК-Т иницијализује и прослеђује компоненти ПАК-С као иницијализациони аргумент.





Слика 5.1: Шема термо-механичког спрезања коришћењем CTL интерфејса (захвалност колеги Ненаду Бусарцу)

Након иницијализације компонената, `paksCI_solve_step` функција извршава један корак у петљи по корацима. Почетна температура за текући временски

корак се рачуна позивањем *paktCI\_solve* и даљим прослеђивањем из компоненте ПАК-Т преко *paktCI\_gettemperatures* до ПАК-С. На овом месту, све променљиве неопходне за рачунање напона и деформација су примљене. Наредни блок представља петљу по итерацијама у временском кораку компоненте ПАК-С. На почетку сваке итерације, израчунавају се напони и деформације. Истовремено, енергија дисипације се рачуна за све интеграционе тачке. Након тога, енергија дисипације се шаље компоненти ПАК-Т, где се користи као запремински топлотни извор. На крају сваке итерације, проверава се критеријум конвергенције. Уколико је конвергенција постигнута, ПАК-С компонента излази из итерационе петље и враћа се у клијентску петљу по временским корацима. Свакако, у случају да критеријум конвергенције није задовољен, цела процедура се понавља испочетка. Да би смањили број итерација, унутрашња итерациона петља компонента ПАК-С се користи истовремено и за глобалне итерације.

## Глава 6

# Верификација спрегнутог термо-механичког модела поређењем са експерименталним резултатима

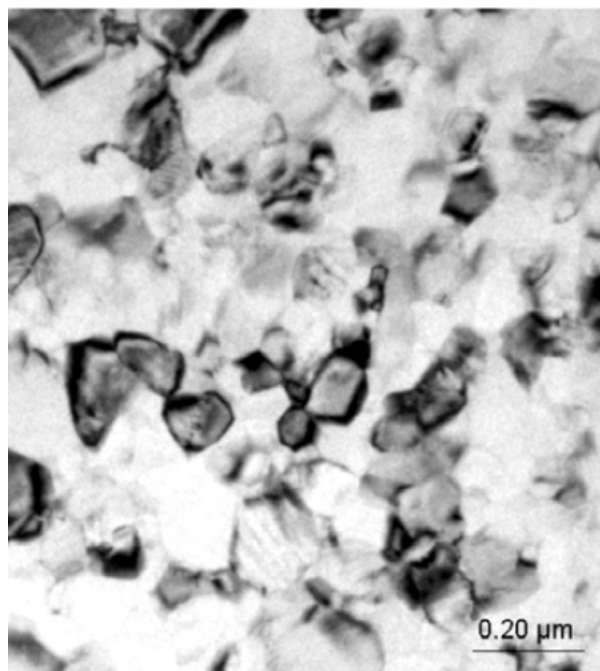
### 6.1 Експериментални детаљи испитивања на затезање SMA узорака

Експерименти су спроведени на TiNi SMA узорцима (произведеним у Фуракава Електрик компанији (Furukawa Electric Co.)), на Институту за основна технолошка истраживања, Пољска академија наука<sup>1</sup> и Аичи технолошком институту<sup>2</sup>, Тојота, Јапан. Микроструктура TiNi легуре је добијена коришћењем Трансмисионог електронског микроскопа (енг. Transmission Electron Microscopy) (ТЕМ) са високом резолуцијом (Jem 310, JOEL Co.) (Сл. 6.1 [8]). Као што су Пиечиска и остали запазили у [8]: "микроструктура је карактерисана униформном расподелом, регуларним зрнима пречника приближно 80 nm." [16]

SMA епрувете су механички оптерећене и растерећене електро-механичком Инстрон (Instron) 5867 кидалицом на собној температури (приближно 25<sup>0</sup>С), која је изнад  $A_f$  температуре, па је очекивано понашање материјала псеудоеластично. Процес оптерећења и растерећења може бити контролисан силом или померањем. У случају експеримената код којих је оптерећење задато брзином

<sup>1</sup>Институт за основна технолошка истраживања (пољ. Instytut Podstawowych Problemow Techniki - IPPT) (IPPT), Пољска академија наука (пољ. Polskiej Akademii Nauk - PAN) (PAN)

<sup>2</sup>Аичи технолошки институт (енг. Aichi Institute of Technology) (AIT)

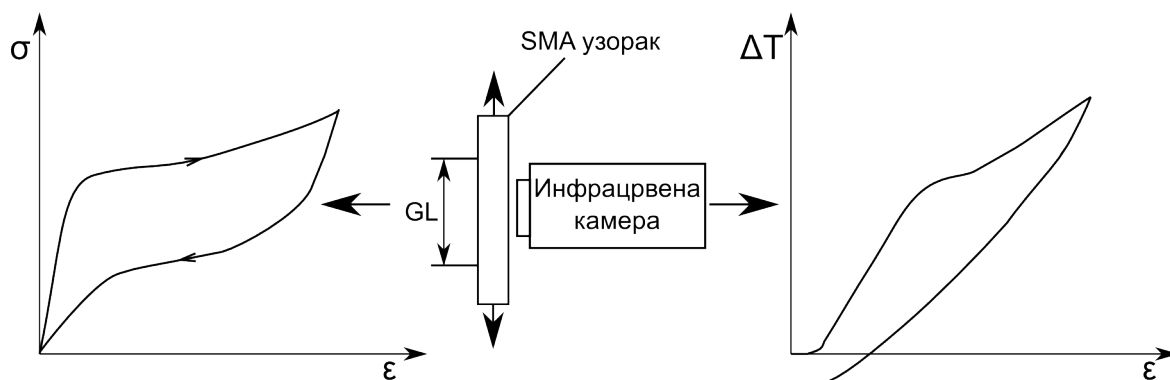


Слика 6.1: ТЕМ слика TiNi SMA у референтном стању (захвалност Данути Штроц (енг. Danuta Stroz, University of Silesia, Poland)) [8]

промене напона 12.5 МПа/s, 25 МПа/s и 50 МПа/s, кидалица је контролисана задатом силом. С друге стране, када је оптерећење задато брзином промене деформације  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ,  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  и  $10^{-1} \text{ s}^{-1}$ , кидалица се управља задатим померањима. Неколико серија оптерећења и растерећења је извршено за сваки експериментални тест. Поред тога, брзом и осетљивом "FLIR Co" инфрацрвеном камером је забележена процена утицаја ефекта термомеханичке спреге услед мартензитне трансформације изазване променом напона (енг. Stress Induced Martensitic Transformation) (SIMT) [8]. Шема експерименталне опреме је приказана на Сл. 6.2 док фотографије на Сл. 6.3(a) и Сл. 6.3(b) приказују TiNi SMA у чељустима кидалице [8, 16].

Експериментални подаци добијени затезањем SMA за различите брзине напона и деформација су анализирани представљеним спрегнутим термомеханичким МКЕ моделом, добијеним модификацијом феноменолошког Лагоудасовог конститутивног модела [3] имплементираним у ПАК-С софтвер за структурну анализу [59] и у ПАК-Т софтвер за анализу провођења топлоте [60]. Резултати добијени експериментом и МКЕ моделирањем су поређени и дискутовани у оквиру ове главе. [16]

Епрувете облика траке (160 mm × 10 mm × 0.38 mm), исечене из TiNi SMA (50.5at% Ni) листова, су постављене у специјално направљен држач да би се обезбедила тачност функционисања експерименталног система који се састоји



Слика 6.2: Шема експерименталног система за термомеханичко испитивање SMA (GL обележава дужину мерача кидалице екстензометра) [16].



(а) TiNi SMA у чељустима кидалице екстензометра



(б) кидалица и инфрацрвени мерни систем

Слика 6.3: Фотографија експерименталне опреме дизајниране за термомеханичко испитивање SMA [14]

од TiNi узорка, механичког екстензометра и држача кидалице (Сл. 6.3) [14, 16]. Коришћен је механички екстензометар са параметром  $25\text{mm}+50\%$ . Одговарајуће функционисање мерног система је верификовано током иницијалне процедуре калибрације која укључује тестове на затезање изведене коришћењем ласерског екстензометра, који дозвољава мерење деформације независно од утицаја кидалице [8]. Експериментална процедура је понављана, све док није добијено добро слагање вредности деформација забележених ласерским и механичким екстензометром, јер само механички екстензометар може бити коришћен током експерименталне процене ефеката термомеханичког спрезања, због могућег утицаја ласера на инфрацрвена мерења. Добијене вредности напона и деформација дате у дијаграмима (Сл. 6.5 до 6.16), су дати у односу на текући

попречни пресек епрувете и представљају стварни напон и деформацију [16]:

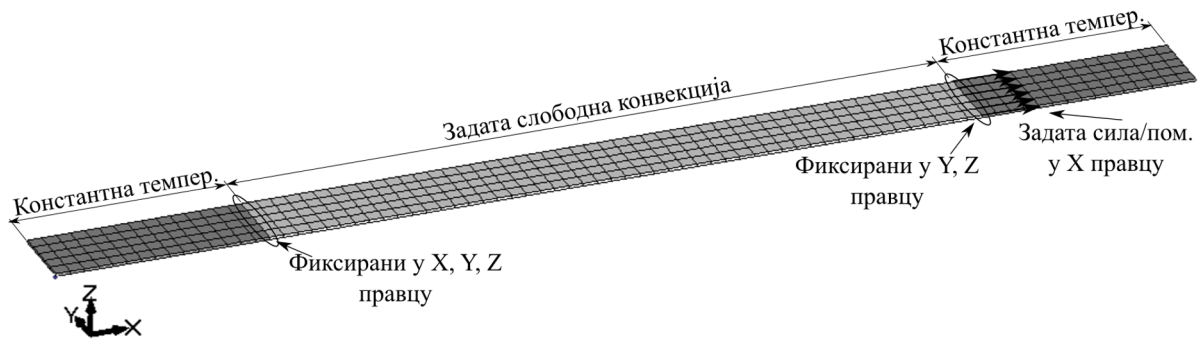
$$\sigma_{true} = \frac{l + \Delta l_0}{l_0 S_0} F, \quad \varepsilon_{true} = \ln \frac{l + \Delta l}{l_0}, \quad (6.1)$$

где је  $l_0$  дужина епрувете пре оптерећења,  $\Delta l$  је издужење,  $S_0$  је површина попречног пресека и  $F$  је задата сила. Инфрацрвена камера омогућава снимање промене температуре на испитиваној површини на различите начине: као просечна вредност са одабране области, линије, тачака, итд. Резултати температуре дати на Сл. 6.5 до 6.16, су израчунати као просечни са површине узорка [18]. Промене температуре представљене као функција деформације или времена указује на развој процеса мартензитне трансформације унапред и уназад [16].

## 6.2 Опис МКЕ модела

Понашање експериментално испитиваних узорака је моделирано коришћењем МКЕ тродимензионалних елемената [16]. МКЕ мрежа се састоји од 400 елемената ( $80 \times 5 \times 1$ ) са 972 чвора (Сл. 6.4). Димензије модела су исте као и димензије експериментално тестираних узорака датих у Одељ. 6.1. Три врсте могућих гранични услова за такве случајеве моделирања су дискутовали Јанг и Дуи у [58]. Као одговарајуће решење, за велике металне чељусти на кидалици у односу на дебљину узорака коришћених у експериментима, примењена је прва врста граничних услова, презентована у [58], која подразумева да је температура на крајевима узорка фиксирана на температуру околине, а чељусти кидалице се моделирају као перфектни понори топлоте [16]. Радна дужина узорка је ограничена држачима кидалице на 100 mm, тако да је 15 редова елемената на левој страни узорка фиксирано и 15 редова елемената на десној страни је оптерећено. Слободна конвекција је задата на елементима између чељусти, са коефицијентом конвекције усвојеним према литератури [58]. Исти гранични услови су коришћени за све тестове разматране у овој глави. Иста МКЕ мрежа је коришћена за структурну анализу и провођење топлоте са граничним условима приказаним на Сл. 6.4 [16].

Материјални параметри TiNi SMA коришћени код свих нумеричких тестова су дати у Таб. 6.1. Идентификацију материјалних и термодинамичких параметара за коришћену TiNi легуру, неопходних за SMA моделирање, је презентовала Пиечиска у [13, 14]. До сада је изведен широк спектар специјално припремљених иницијалних тестова као нпр. DSC и додатних тестова на затезање



Слика 6.4: Мрежа коначних елемената са приказаним оптерећењем и граничним условима

Табела 6.1: Материјални параметри SMA идентификовани за нумеричку анализу тестова на затезање у одељку 6 [16]

$E_A$	$E_M$	$\alpha_A$	$\alpha_M$
59.2 GPa	45 GPa	$11.0 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$	$11.0 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$
$M_{0s}$	$M_{0f}$	$A_{0s}$	$A_{0f}$
213K	209K	270K	276K
$H$	$\nu$	$\rho \Delta s_A$	$\rho \Delta s_M$
0.06	0.41	$-0.378 \text{ MPa K}^{-1}$	$-0.378 \text{ MPa K}^{-1}$
$h$	$c_p$	$\lambda_c$	$\rho$
$6.5 \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-1}$	$460 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$18 \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-1}$	$6.29 \text{ g cm}^{-3}$
$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
0.2	0.2	0.25	-0.35

у термичкој комори на три различите температуре са малим брзинама деформације. Из добијених резултата, могуће је дефинисати нагиб SMA фазног дијаграма  $c^{M,A}$  који може бити дат као  $c^{M,A} = \frac{\rho \Delta s_0}{H}$  [78]: где је  $H$  максимална ефективна деформација трансформације. Мартензитна почетна ( $M_s$ ) и крајња ( $M_f$ ) као и аустенитна почетна ( $A_s$ ) и крајња ( $A_f$ ) температура су процењене из резултата добијених за TiNi SMA тестове на затезање и поређења са DSC резултатима у [13]. Процењене вредности SMA параметара се благо разликују у зависности од коришћене технике, као и због тога што у DSC процесу трансформација се развија у свим правцима док је током тестова на затезање један правац фаворизован. За TiNi SMA коришћеном у овом истраживању, закључено је да је  $A_f$  приближно једнако 276 K, па је очигледно да ће SMA манифестовати ПЕ понашање током деформације на собној температури. Глатка (енг. smooth) функција ојачања користи експоненте  $n_1, n_2, n_3, n_4$  за жељени ниво закривљености криве у почетном и крајњем делу фазне трансформације [3]. Дати параметри су одабрани у складу са обликом кривих напон-деформација доби-

јених из тестова на затезање [16].

### 6.3 Експериментални и нумерички резултати

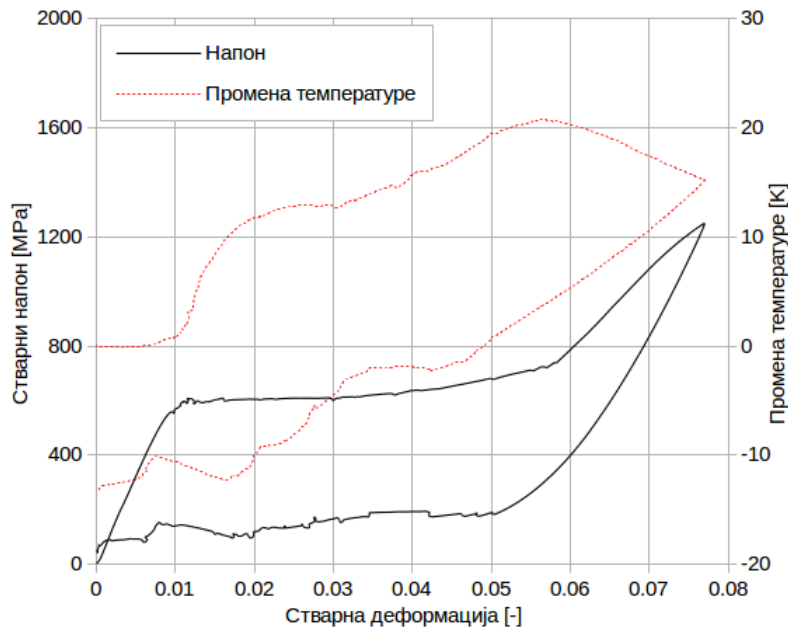
Експериментални и нумерички резултати стварног напона и промене средње вредности температуре према стварној деформацији, добијени током TiNi SMA затезања за различите брзине деформација и напона, су дати редом на Сл. 6.5 до 6.7 и на Сл. 6.8 до 6.10. Добијени дијаграми потврђују егзотермни карактер за мартензитну трансформацију унапред, изазвану променом напона и ендотермни карактер за повратну трансформацију, јер температура SMA узорка расте током оптерећења и опада током процеса растерећења. За веће брзине деформација, запажа се већа промена температуре, што значајно утиче на ниво напона код трансформације унапред и уназад [8].

#### 6.3.1 Затезање контролисано деформацијом: експериментални и нумерички резултати

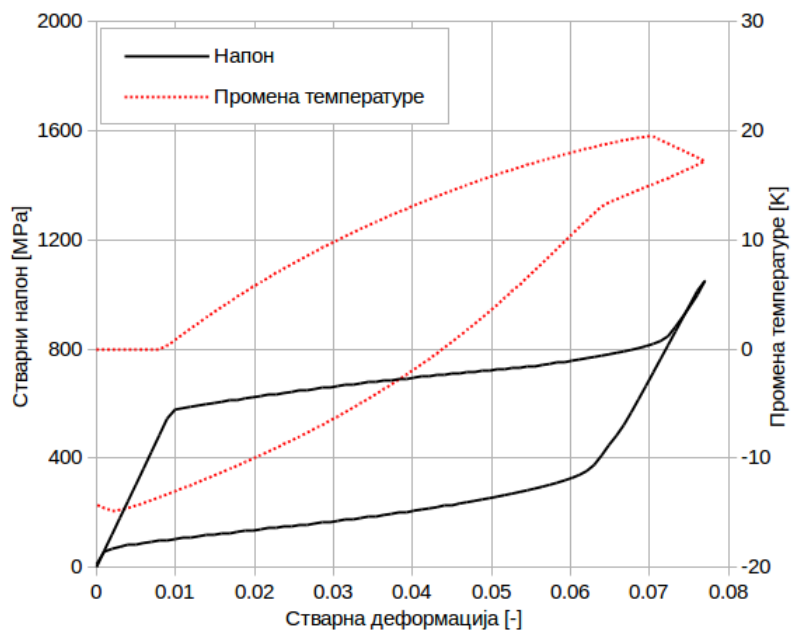
Експерименталне криве зависности напона и промене средње вредности температуре према деформацији, су приказане на Сл. 6.5(a), 6.6(a) и 6.7(a) за TiNi SMA узорке испитиване на затезање за брзине деформација  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ,  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  и  $10^{-1} \text{ s}^{-1}$ , при чему се одговарајући нумерички резултати дати редом на Сл. 6.5(b), 6.6(b) и 6.7(b). Посматрајући Сл. 6.5, може се запазити да током оптерећења узорка средња температура расте приближно 20 K. Ипак, на вредности стварне деформације од око 0.055, температура почиње да опада. То значи да је мартензитна трансформација унапред скоро завршена у овој фази SMA оптерећења: пренос топлоте чељустима кидалице и топлотна конвекција је већа у поређењу са генерисањем топлоте услед егзотермне мартензитне трансформације унапред. Са Сл. 6.5, такође уочавамо да је температура узорка по завршетку циклуса нижа у односу на почетну температуру. За веће брзине деформације, нпр.  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$ , петља напон-деформација је много ужа због значајног утицаја ефекта термомеханичког спрезања, нпр. температура SMA узорка расте за 39 K (Сл. 6.6(a)). За брзину деформација  $10^{-1} \text{ s}^{-1}$ , хистерезисна петља напон-деформација је најужа (Сл. 6.7(a)). Уочен је велики пораст температуре за 56 K и криве зависности промене температуре према деформацији се скоро поклапају за трансформацију унапред и уназад. Ово указује да је тест изведен у скоро адијабатским условима [16].

Максимална укупна деформација задата у нумеричкој анализи је била 8%.





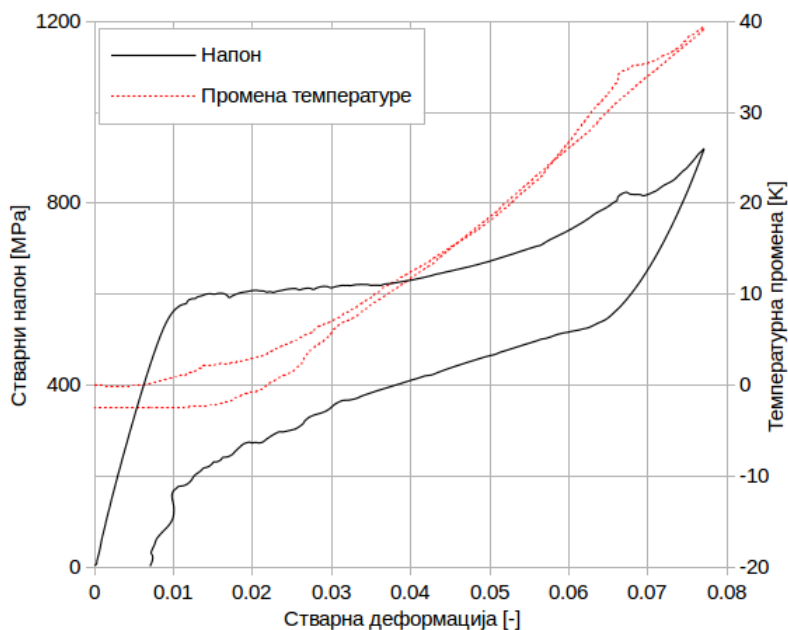
(a) експериментални резултати



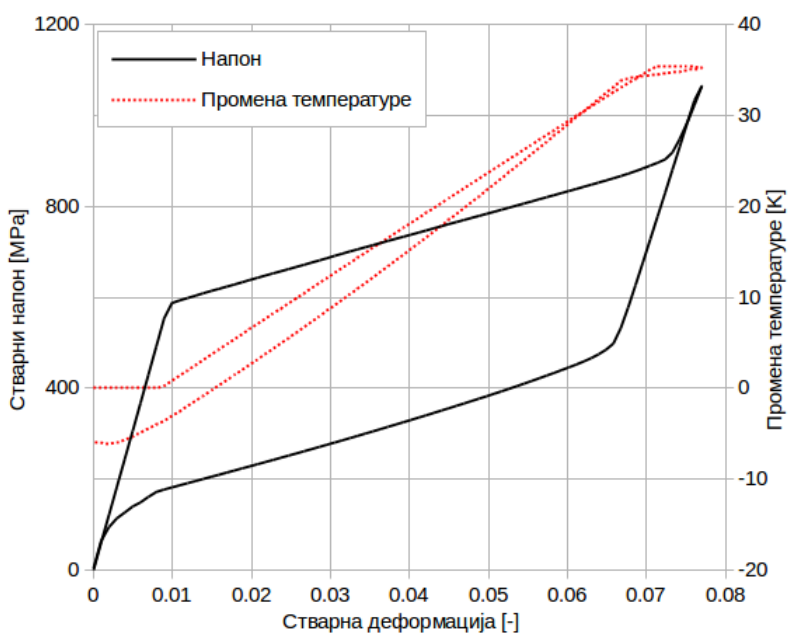
(b) нумерички резултати

Слика 6.5: Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином деформације  $10^{-3}\text{s}^{-1}$  [8, 16]

Сви нумерички тестови разматрани за различите брзине деформација су изведени у 160 једнаких временских корака одговарајуће величине која зависи од брзине оптерећења. Нумерички резултати показују слично квалитативно и квантитативно понашање кривих зависности напон-деформација и средња про-



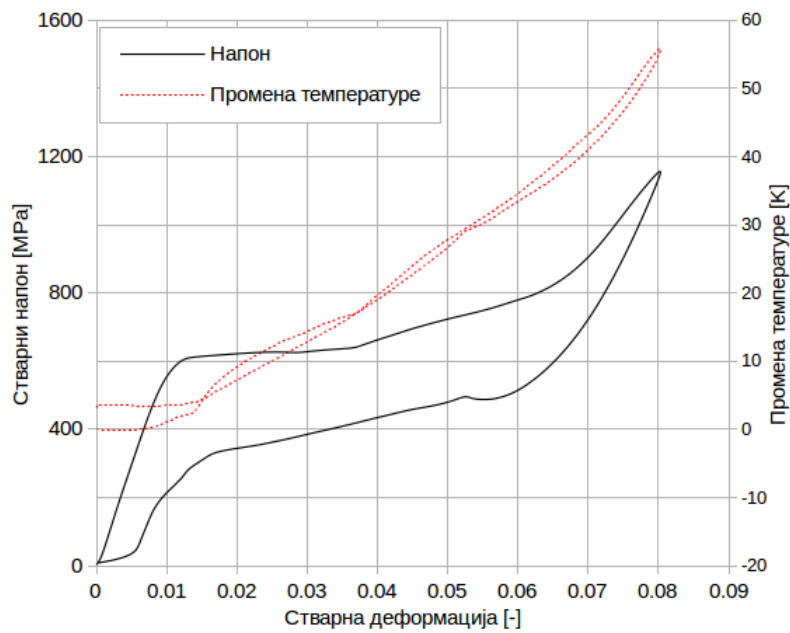
(a) експериментални резултати



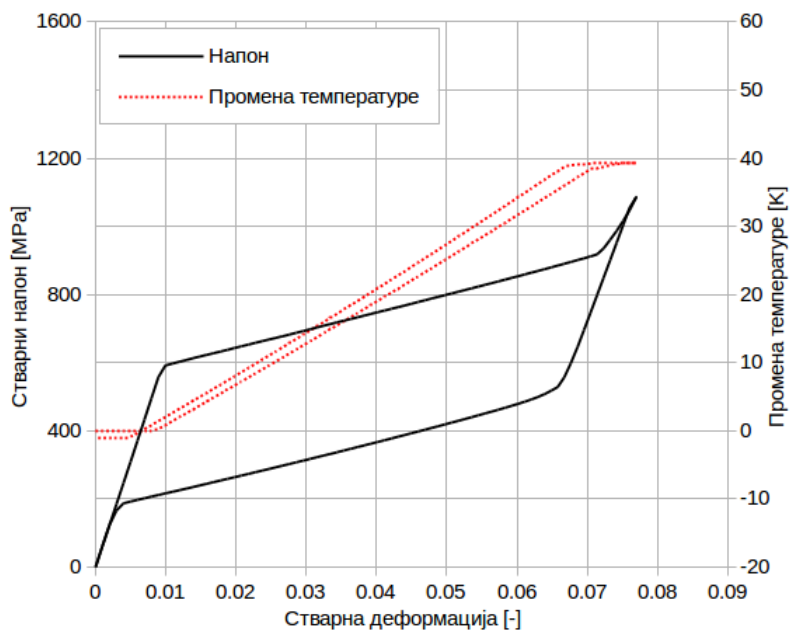
(b) нумерички резултати

Слика 6.6: Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином деформације  $10^{-2}s^{-1}$  [8, 16]

мена температуре - деформација за све тестове; Сл. 6.5(b), 6.6(b) и 6.7(b) у поређењу са експерименталним; Сл. 6.5(a), 6.6(a) и 6.7(a). Такође треба запознати да су вредности ефекта засићења мартензитне трансформације унапред сличне за брзину деформације  $10^{-3}s^{-1}$  (Сл. 6.5). Штавише, ефекат трансфор-



(a) експериментални резултати



(b) нумерички резултати

Слика 6.7: Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином деформације  $10^{-1}s^{-1}$  [8, 16]

мационог засићења је такође потврђен моделирањем за брзину деформације  $10^{-2}s^{-1}$  и  $10^{-1}s^{-1}$  (Сл. 6.6 и 6.7) [16].

### 6.3.2 Затезање контролисано силом: експериментални и нумерички резултати

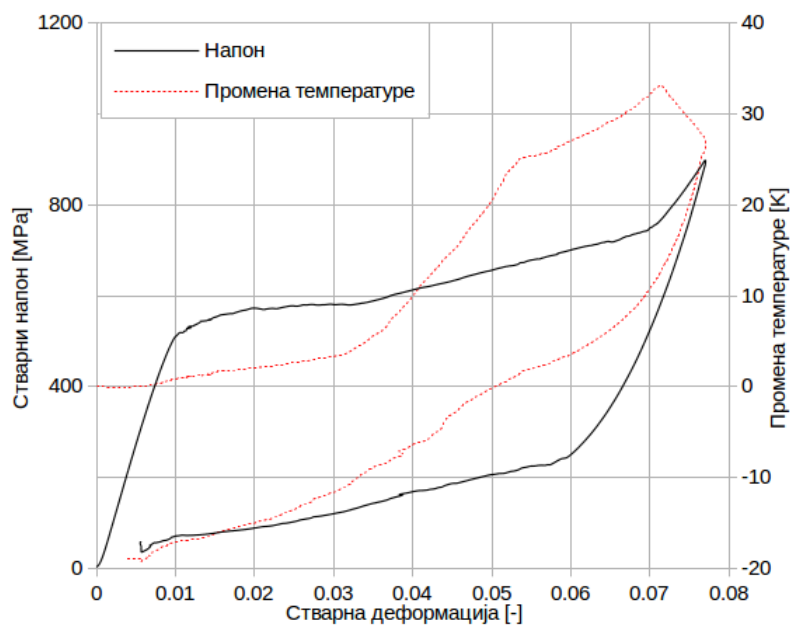
Експерименталне криве зависности напона и промене средње вредности температуре према деформацији, добијене за TiNi SMA подвргнутог циклусу оптерећења и растерећења затезањем за брзине напона 12.5 МПа/s, 25 МПа/s и 50 МПа/s, су дати на Сл. 6.8(a), 6.9(a) и 6.10(a), док су одговарајући нумерички резултати приказани редом на Сл. 6.8(b), 6.9(b) и 6.10(b) [16]. Слично као у претходно приказаним резултатима, у почетној фази затезања, температура се не мења, али ипак почне лагано да расте пре закривљења на зависности напон-деформација [8, 12–14, 18]. Затим, услед генерисања топлоте узроковане екзотермном мартензитном трансформацијом унапред, средња температура узорка рапидно расте за 33 К за брзину напона од 12.5 МПа/s (Сл. 6.8) и преко 40 К за брзину напона 50 МПа/s (Сл. 6.10). Штавише, у поодмаклом стању трансформације, запажа се пад температуре узорка, што указује на фазу засићења мартензитне трансформације унапред, слично као што се види на Сл. 6.5 до 6.7 за тестове на затезање контролисане деформацијом [16].

Сви нумерички тестови контролисани напоном су спроведени у 72 једнака временска корака одговарајуће величине која зависи од брзине оптерећења; максимални задат напон је 900 МПа. Нумеричка анализа даје сличне квантитативне и квалитативне резултате за криве напон-деформација и промена температуре-деформација (Сл. 6.8(b), 6.9(b) и 6.10(b)) у поређењу са експерименталним (Сл. 6.8(a), 6.9(a) и 6.10(a)). Штавише, слични ефекти засићења за мартензитну трансформацију унапред су добијени и за експерименталне и нумеричке резултате за све задате брзине напона [8, 16].

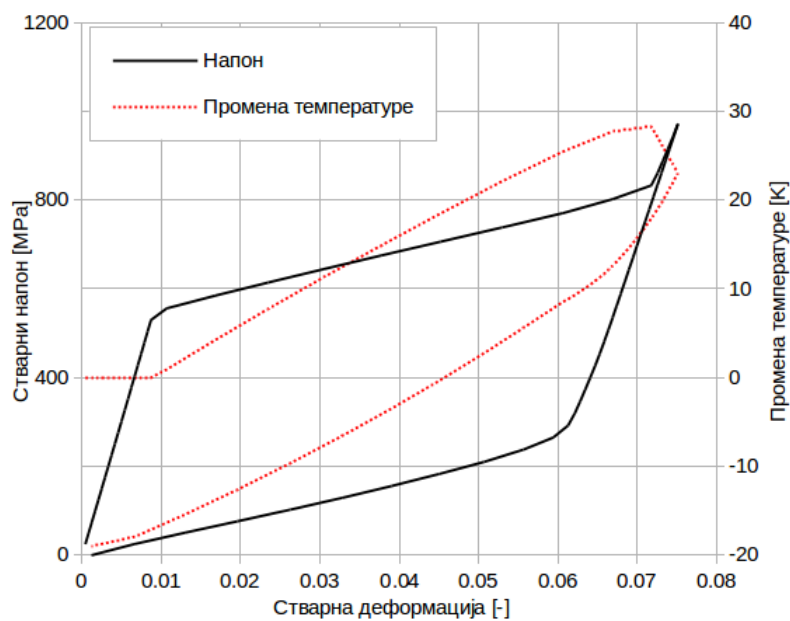
## 6.4 Дискусија верификационих резултата

Поређење експерименталних и нумеричких резултата добијених током затезања TiNi SMA, за различите брзине оптерећења је дат на Сл. 6.11 до 6.14. Поређење експерименталних резултата напон-деформација је дат на Сл. 6.11(a) и 6.13(a), где је одговарајуће поређење промене температуре дато на Сл. 6.11(b) и 6.13(b). Нумерички резултати напон-деформација су дати на Сл. 6.12(a) и 6.14(a), док је одговарајуће поређење промена температуре - деформација приказано на Сл. 6.12(b) и 6.14(b) [16].

За веће брзине оптерећења, веће вредности напона и промене температуре су добијене за све тестове независно од начина оптерећења (Сл. 6.11 до 6.14).



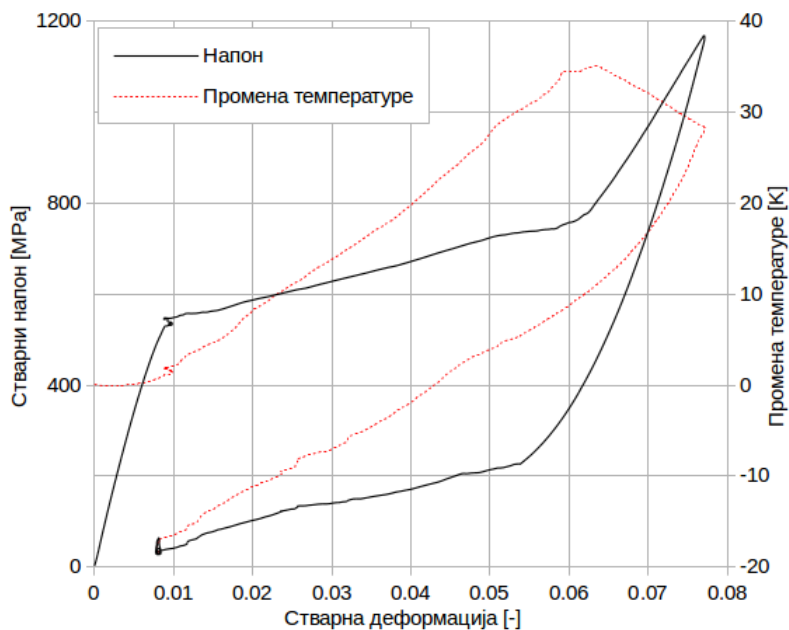
(a) експериментални резултати



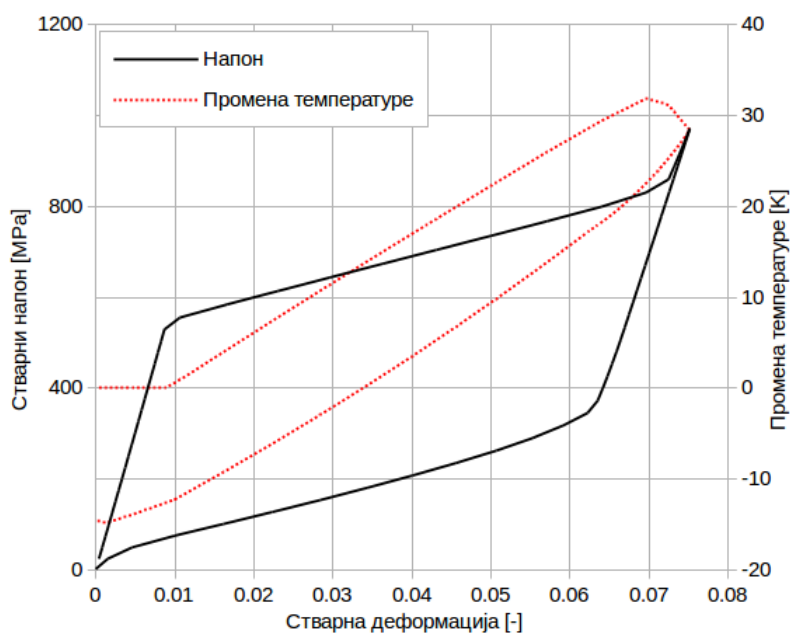
(b) нумерички резултати

Слика 6.8: Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином напона 12.5 MPa/s [8, 16]

Температура SMA постаје већа, јер је мартензитна трансформација унапред праћена великим генерисањем топлоте; у случају већих брзина оптерећења, нема довољно времена да се ослобођена топлота одведе. Као резултат, температура узорка расте, изазивајући већи ниво напона током оптерећења SMA и



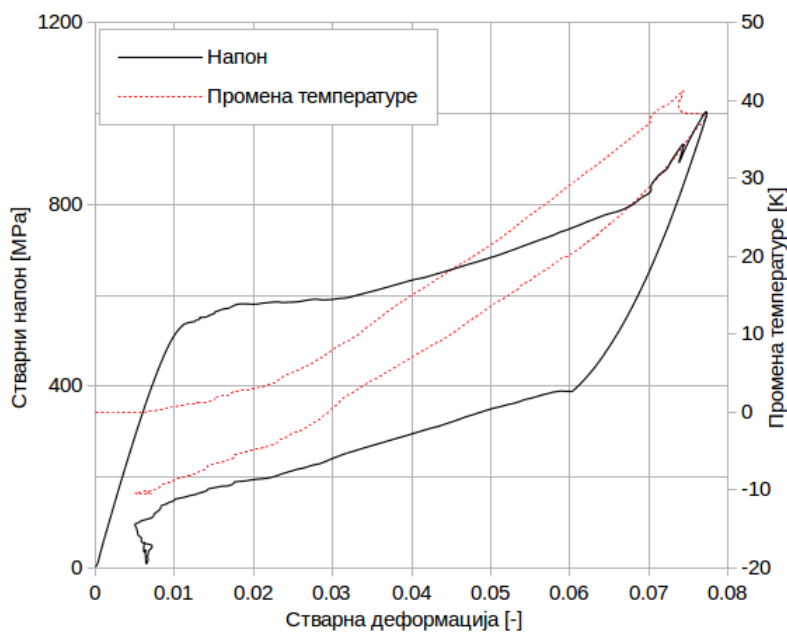
(a) експериментални резултати



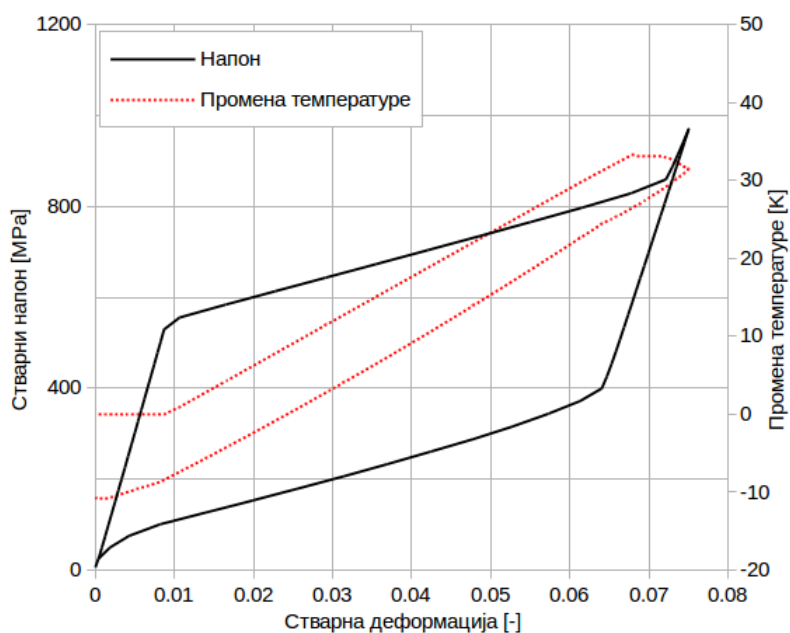
(b) нумерички резултати

Слика 6.9: Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином напона 25 MPa/s [8, 16]

већи нагиб кривих напон-деформација [16]. Значајан скок температуре, који прати оптерећење SMA на већим брзинама деформације, изазива виши ниво температуре током процес растерећења, који резултира већим нивоом напона ендотермне повратне трансформације и ужу хистерезисну петљу [16]. Због тога



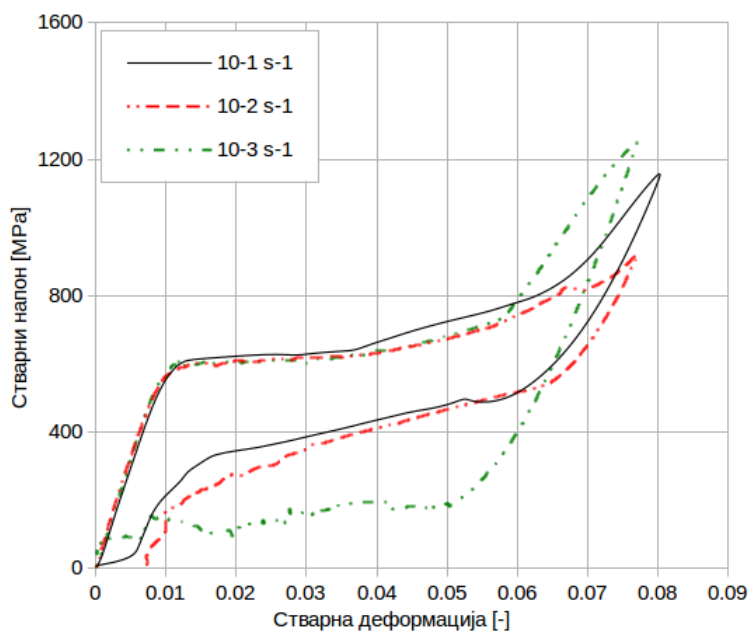
(a) експериментални резултати



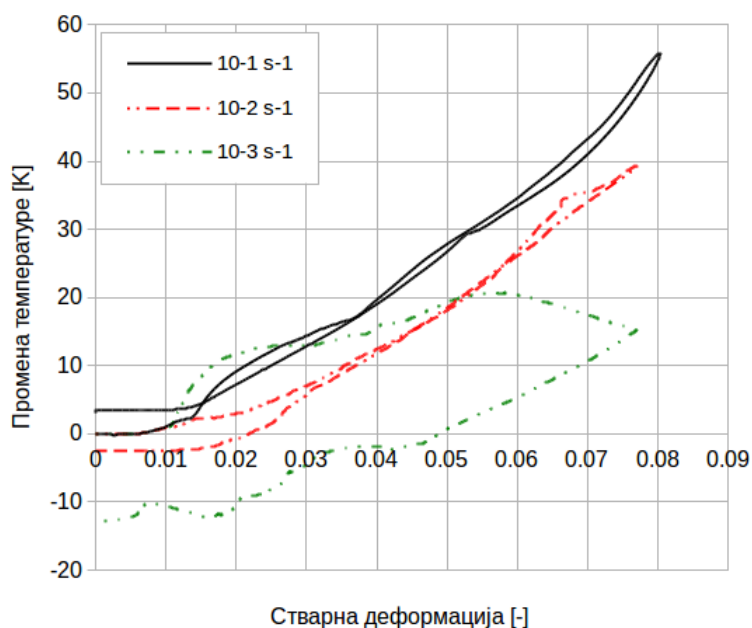
(b) нумерички резултати

Слика 6.10: Поређење кривих зависности напон - деформација и промена температуре - деформација за TiNi SMA током затезања брзином напона 50 МПа/s [8, 16]

што добијена разлика промене температуре између трансформације унапред и уназад постаје све мања, крива промена температура - деформација је такође ужа (Сл. 6.11(b), 6.12(b), 6.13(b) и 6.14(b)). Посматрани ефекат указује на јако термомеханичко спрезање, које изазива комплексно механичко и термичко



(a) напон-деформација



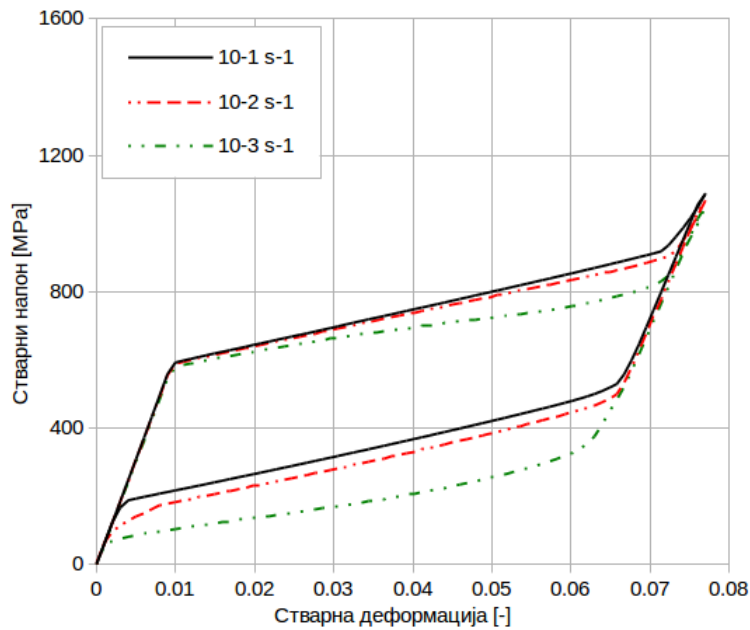
(b) промена температуре - деформација

Слика 6.11: Поређење експерименталних кривих добијених током TiNi SMA затезања брзинама деформација  $10^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $10^{-2}\text{s}^{-1}$  и  $10^{-3}\text{s}^{-1}$  [8, 16]

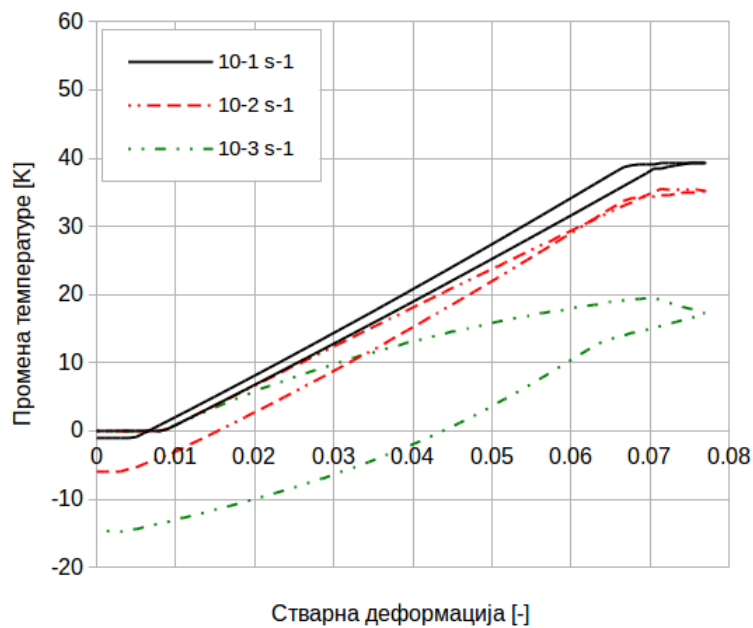
стање током мартензитне трансформације изазване напоном, нарочито када су услови блиски адијабатским, нпр. за веће брзине оптерећења [91].

Коришћењем брзе и осетљиве инфрацрвене камере је такође забележено, да након растерећења SMA, температура узорка значајније опада испод почетне температуре за мање брзине деформације (Сл. 6.11(b) и 6.13(b)). Овај термални





(a) напон-деформација

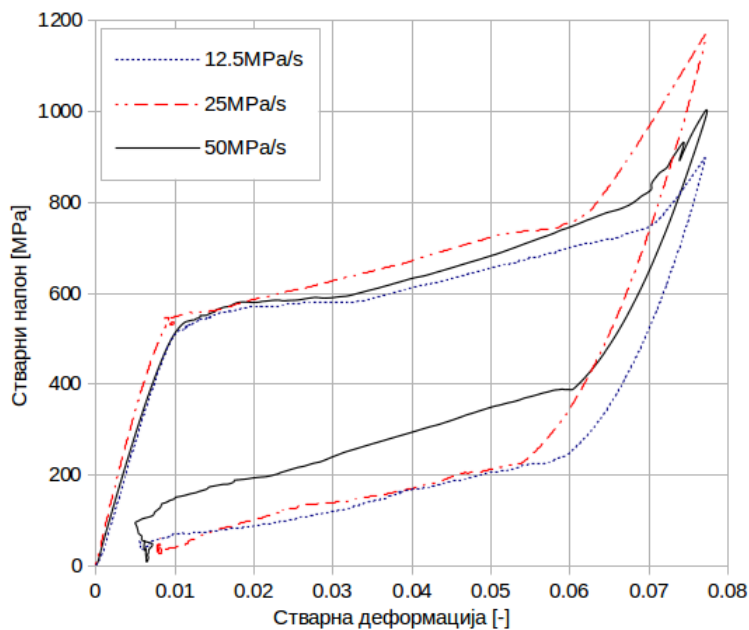


(b) промена температуре - деформација

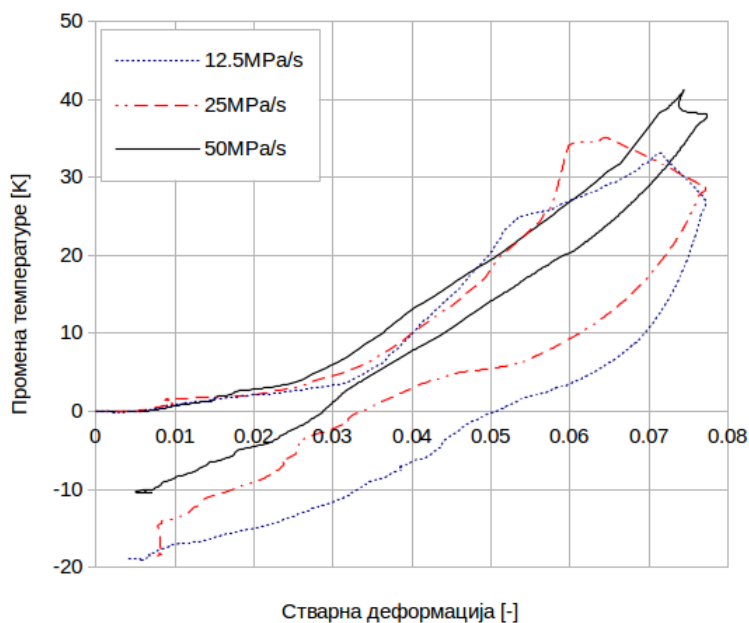
Слика 6.12: Поређење нумеричких кривих добијених током TiNi SMA затезања брзинама деформација  $10^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $10^{-2}\text{s}^{-1}$  и  $10^{-3}\text{s}^{-1}$  [16]

ефекат, [8,18] важан за друге врсте примене SMA као елемента за хлађење, је такође потврђен предложеним моделом и имплементацијом (Сл. 6.12(b) и 6.14(b)). Такви резултати потврђују високу тачност коришћене опреме и експерименталног приступа, као и коректност коришћеног модела [16].

Да би детаљније објаснили разлику услова мартензитне трансформације



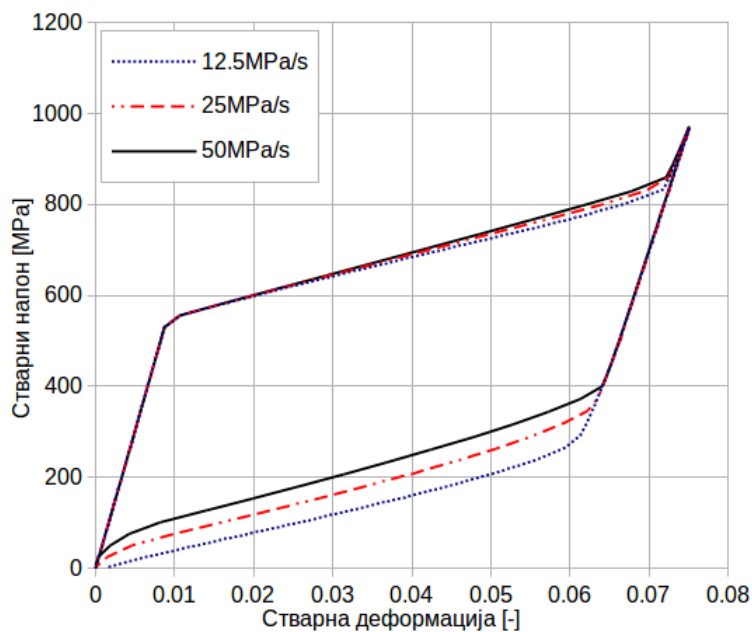
(a) напон-деформација



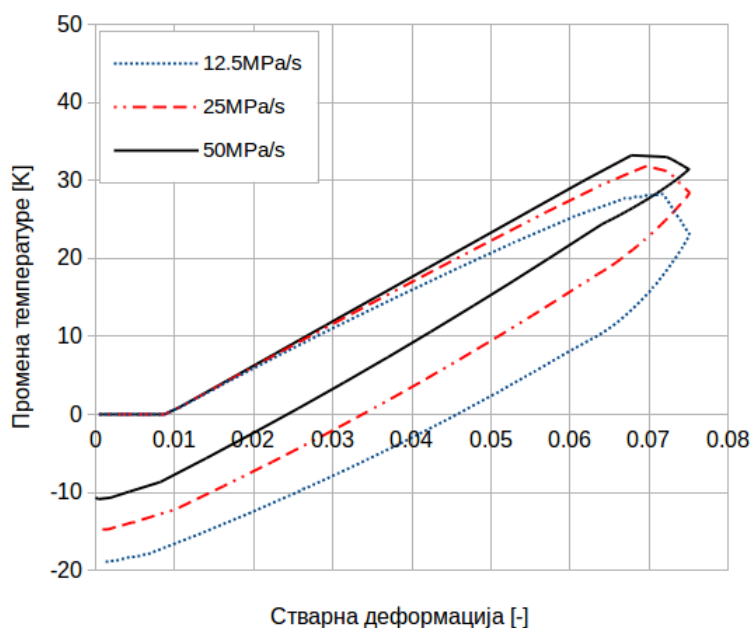
(b) промена температуре - деформација

Слика 6.13: Поређење експерименталних кривих добијених током TiNi SMA затезања брзинама напона 12.5 MPa/s, 25 MPa/s и 50 MPa/s [8, 16]

изазване напоном између два примењена експериментална приступа (тестови контролисани напоном или деформацијом), презентоване су зависности деформације и промене температуре од времена за брзину напона 25 MPa/s и брзину деформације  $10^{-2} s^{-1}$  за експериментални и нумерички случај на Сл. 6.15 и 6.16 [12]. Графикони доказују зашто су таква брзина напона и деформа-



(a) напон-деформација

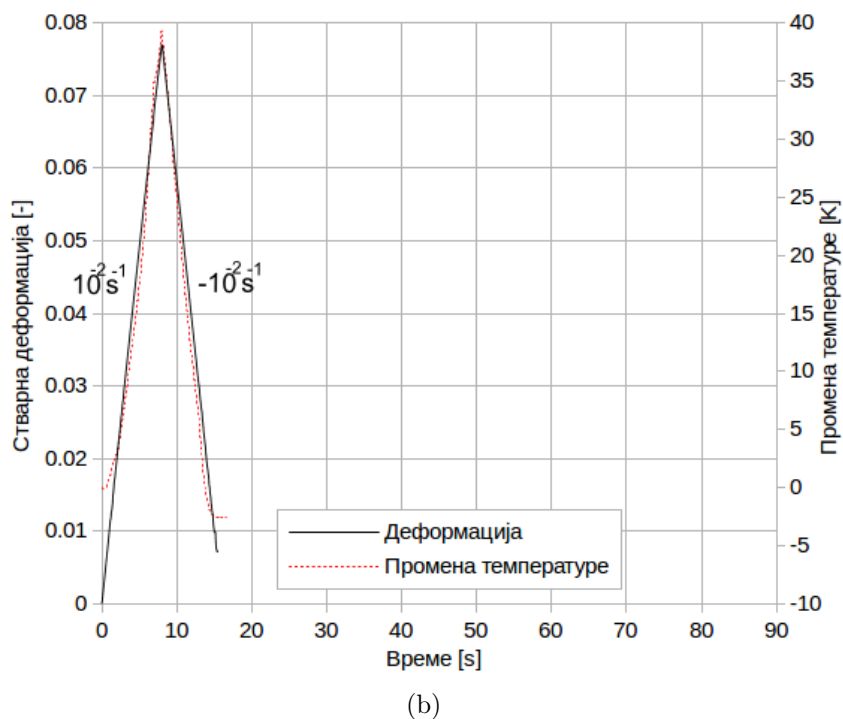
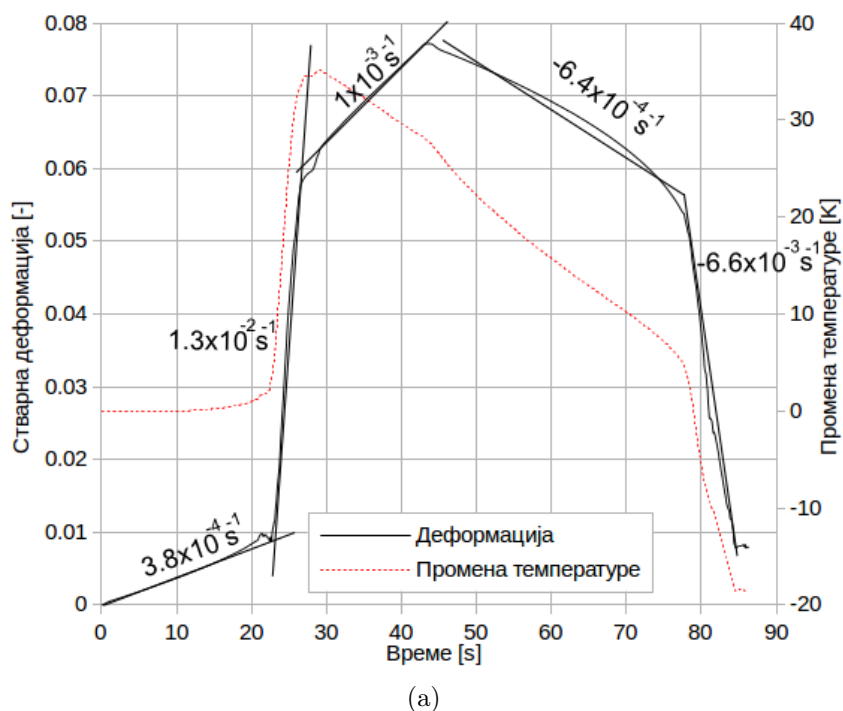


(b) промена температуре - деформација

Слика 6.14: Поређење нумеричких кривих добијених током TiNi SMA затезања брзинама напона 12.5 MPa/s, 25 MPa/s и 50 MPa/s [16]

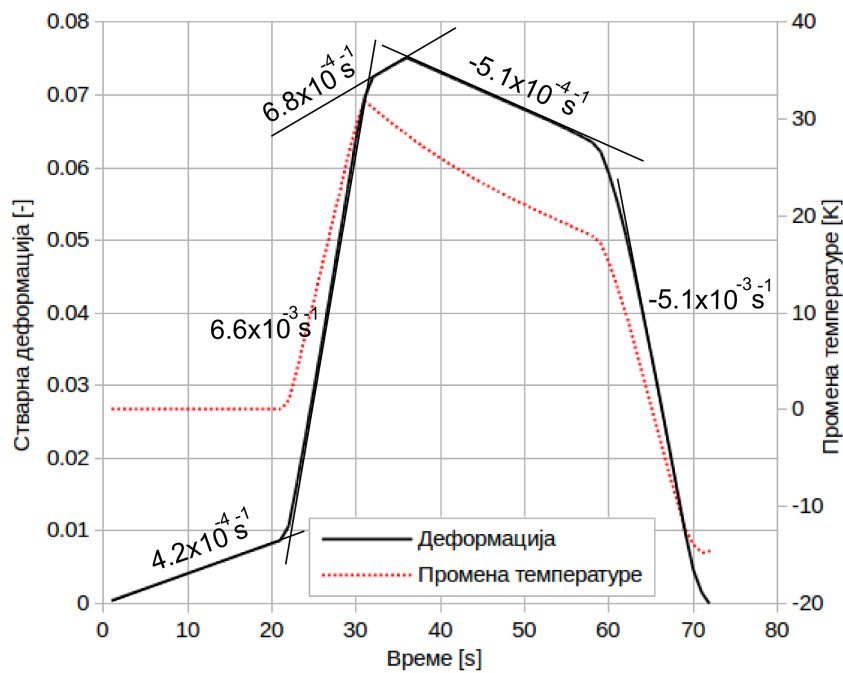
ције узети у разматрање. Наиме, брзина деформисања, која је најодговорнија за услове трансформације, је слична за ова два одабрана теста током главне (средње) фазе SMA оптерећења са брзином деформације  $10^{-2}\text{s}^{-1}$ , јер су њихове процењене вредности једнаке приближно  $6.6 \times 10^{-3}\text{s}^{-1}$  (Сл. 6.16(a)) [16].

Може се запазити на Сл. 6.15 и 6.16 да у случају константне брзине про-

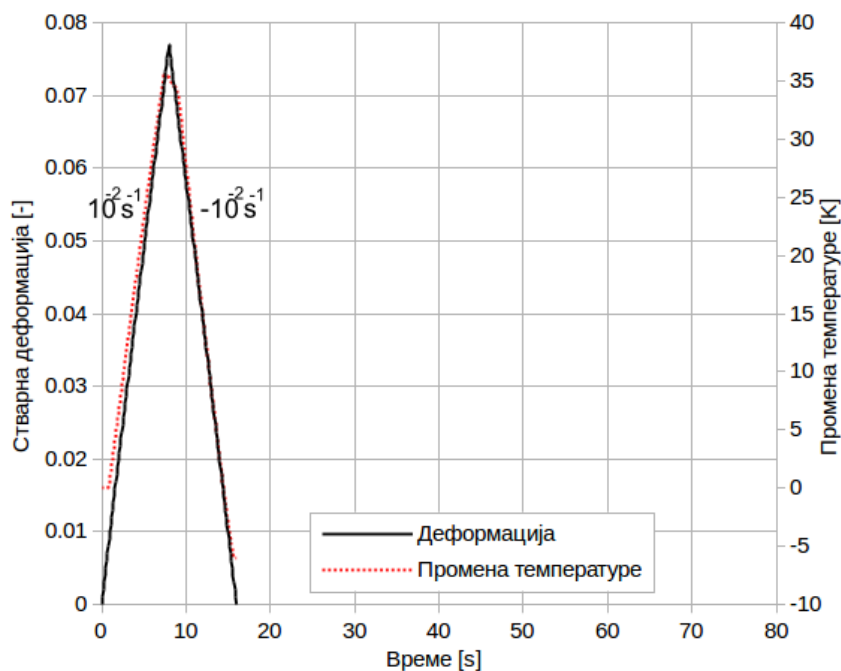


Слика 6.15: Експериментални резултати. Поређење кривих деформације и промене температуре са временом током затезања TiNi SMA за (a) брзину напона 25 MPa/s и (b) брзину деформације  $10^{-2}\text{s}^{-1}$  [8, 16]

мене напона SMA се деформише различитим брзинама деформације. Као што је наглашено у [8], тестови контролисани силом треба да обезбеде константну



(a)



(b)

Слика 6.16: Нумерички резултати. Поређење кривих деформације и промене температуре са временом током затезања TiNi SMA за (a) брзину напона 25 MPa/s и (b) брзину деформације  $10^{-2} s^{-1}$  [16]

брзину промене напона, док се брзина деформације мења у складу са развојем трансформације. Три различите фазе се могу разликовати током оптерећења

брзином напона 25 МРа/s, са освртом на брзину деформације и развој трансформације: прва фаза где је брзина деформације мала, друга где интензиван раст брзине деформације осликава интензиван развој мартензитне трансформације узроковане напоном и трећа фаза везана за нижу брзину деформације близу фазе трансформационог засићења (Сл. 6.15(а) и 6.16(а)). За тестове контролисане деформацијом, брзина деформације је константна током процеса оптерећења и растерећења за трансформацију унапред и уназад и једнака усвојеној вредности  $10^{-2}\text{s}^{-1}$  (Сл. 6.15(б) и 6.16(б)) [16].

## Глава 7

# Нумеричка анализа проблема и моделирање реалних SMA структура

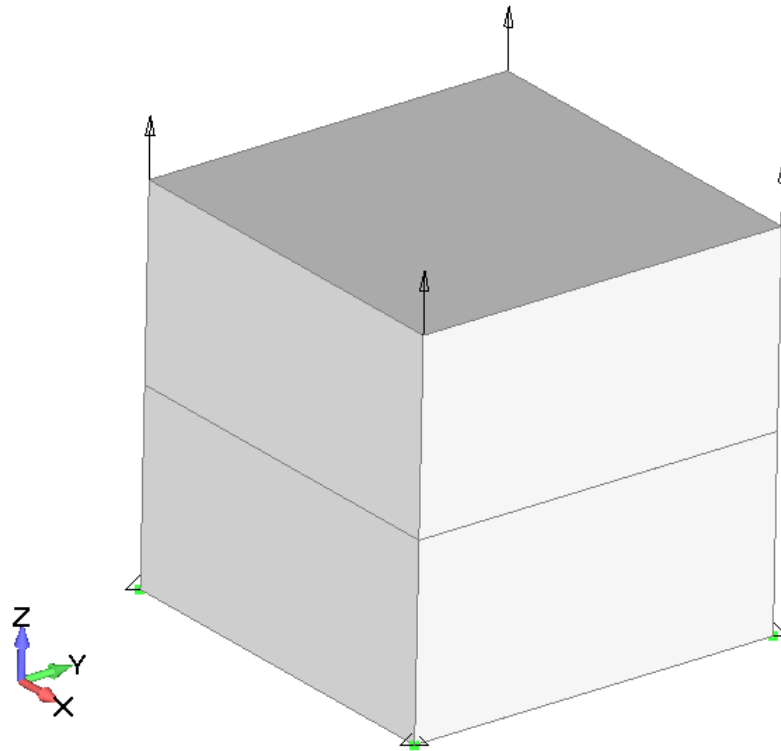
### 7.1 Нумеричка анализа референтних примера

Да би верификовали функционалност конститутивног модела и његове имплементације, неопходно је успешно симулирати предложене SMA феноменолошке ефекте (псеудоеластичност и SME). Референтни примери служе за верификацију коректности уграђеног интеграционог поступка. Као уводни тестови, једноосно затезући примери су припремљени и добијени резултати су упоређени са резултатима из литературе. Истраживање ће бити проширено на тестове вишеосног оптерећења из литературе да би се додатно доказала коректност модела.

#### 7.1.1 Једноосно затезање

Примери једноосног оптерећења на затезање су моделирани на основу литературе [78]. Јединична SMA коцка је моделирана као тродимензионални МКЕ модел. Модел се састоји од два једнака тродимензионална 8-чворна коначна елемента. Гранични услови, оптерећења и материјални параметри су задати у складу са литературом (Сл. 7.1) [3, 78]. Материјални параметри неопходни за прорачуне су Јангов модул за фазу аустенита и мартензита  $E_A$  и  $E_M$ , коефицијенти термичког ширења  $\alpha_A$  и  $\alpha_M$ , мартензитна почетна и крајња  $M_s$ ,  $M_f$  као и аустенитна почетна и крајња температура за нулти напон,  $A_s$  и  $A_f$ ,

максимална деформација трансформације  $H$ , коефицијенти напонског утицаја за аустенит и мартензит,  $\rho\Delta s_A$  and  $\rho\Delta s_M$ . Материјални параметри из [78], коришћени у овим примерима су дати у Таб. 7.1. Додатно, за испитивање глатке (енг. smooth) функције ојачања, неопходно је одабрати одговарајуће параметре ојачања  $n_1, n_2, n_3, n_4$ . Дати су такође и коментари о бирању тих параметара ( $n_1, n_2, n_3, n_4$ ).



Слика 7.1: МКЕ мрежа са граничним условима и оптерећењима за примере једноосног затезања

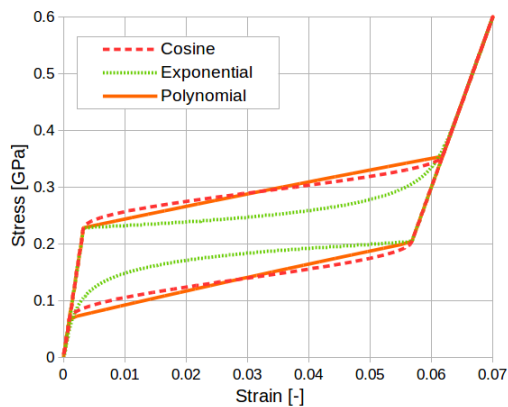
Табела 7.1: Материјални параметри SMA коришћени у примерима једноосног затезања [78]

$E_A$	$E_M$	$\alpha_A$	$\alpha_M$
70.000 МПа	30.000 МПа	$22.0 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$	$22.0 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$
$M_s$	$M_f$	$A_s$	$A_f$
291K	271K	295K	315K
$H$	$\nu$	$\rho \Delta s_A$	$\rho \Delta s_M$
0.05	0.33	$-0.35 \text{ МПа K}^{-1}$	$-0.35 \text{ МПа K}^{-1}$

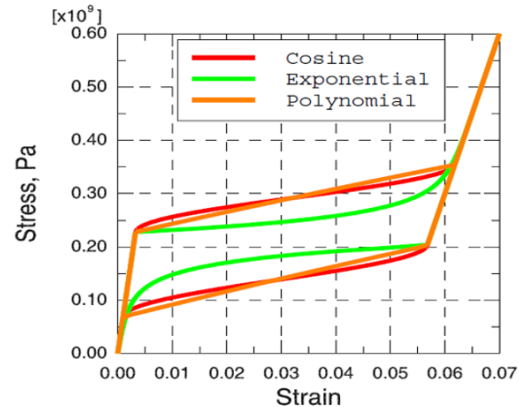


## Пример псеудоеластичног ефекта

Овај пример приказује феноменолошки ефекат псеудоеластичног понашања SMA. Процес је изведен на константној температури од 325 К под изотермним условима. Температура је већа него аустенитна крајња температура  $A_f = 315$  К. Коцка је оптерећена квазистатично једноосним напоном затезања од  $\sigma = 600$  МПа у 100 једнаких временских корака, све док се не постигне комплетна мартензитна трансформација. Материјал је након тога растерећен у 100 једнаких корака до растерећене конфигурације. Као што се може запазити Сл. 7.2(а), деформација трансформације је комплетно нестала. Симулација је дата за експоненцијалну, косинусну и полиномну функцију да би поредили добијене резултате (Сл. 7.2(а)) са резултатима из литературе (Сл. 7.2(б)). Као што се може запазити на Сл. 7.2(а) и Сл. 7.2(б), резултати се поклапају.



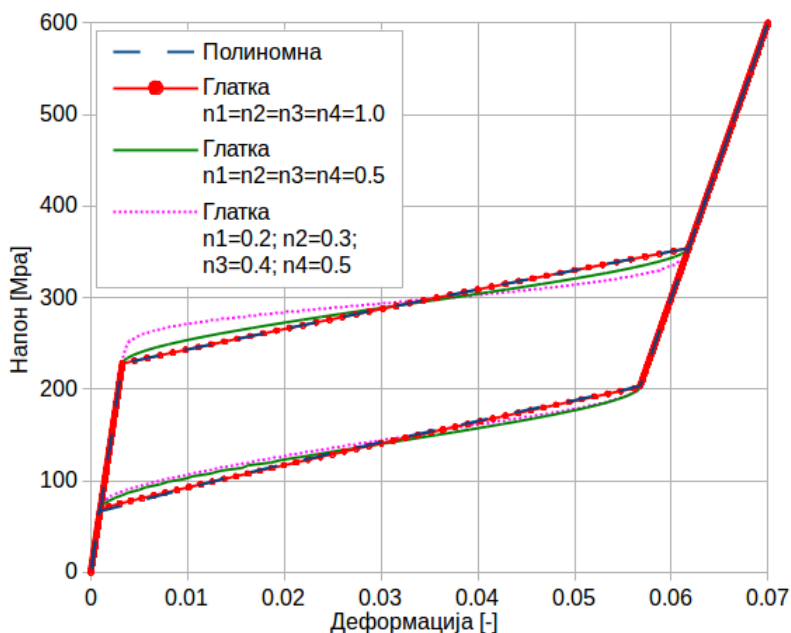
(а) резултати симулације



(б) резултати из литературе [3, 78]

Слика 7.2: Поређење зависности напон-деформација за SMA псеудоеластични ефекат

Даље је дао поређење полиномне и косинусне функције ојачања са глатком функцијом ојачања. Коришћењем глатке функције и корекцијом параметара, могуће је подесити резултате да одговарају експерименталним мерењима. Варијацијом коефицијената  $n_1, n_2, n_3, n_4$  крива зависности се понаша у глатком (енг. smooth) облику. За случај  $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1.0$ , добијени резултати су исти као за полиномну функцију ојачања. За ефекат глаткости (енг. smoothness),  $M_s$  и  $A_f$  је потребно смањити, а  $A_s$  и  $M_f$  би требало повећати да би се постигло боље слагање са експерименталним резултатима [3, 52, 81].

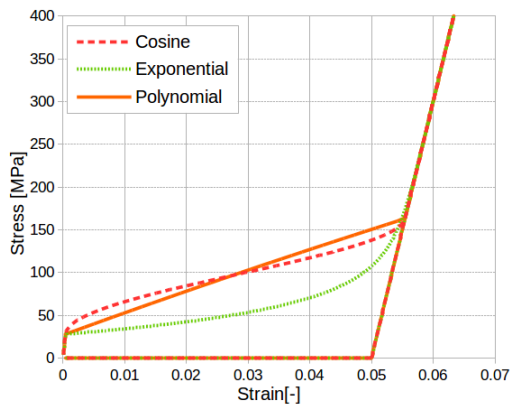


Слика 7.3: Поређење глатке (енг. smooth) функције ојачања са полиномном и косинусном за SMA псеудоеластични ефекат

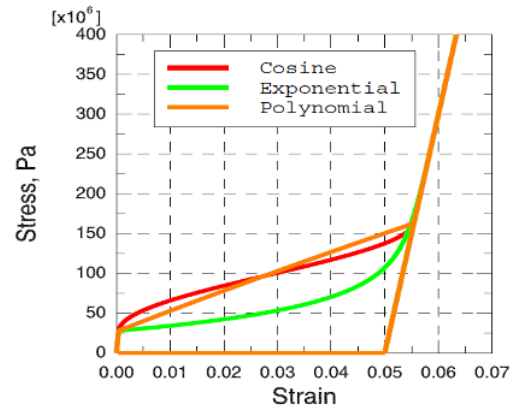
### Пример ефекта памћења облика

Овај пример показује способност имплементираног модела да симулира ефекат памћења облика. Почетна температура SMA узорка је фиксирана на 295 К што је између аустенитне  $A_s$  и мартензитне  $M_s$  почетне температуре. Једноосно затезање напоном  $\sigma = 600$  МПа је задато квази-статично у 100 једнаких временских корака док се не достигне максимална деформација трансформације. Након тога је коцка релаксирана у наредних 100 корака до растеређеног стања. У овом случају, претпоставка је да су процес оптерећења и растеређења без утицаја ефекта термомеханичке спреге. Након релаксације, постоје заостале деформације, док се материјал налази у мартензитној фази. Даље се температура коцке повећава у свим чворовима изнад аустенитне крајње температуре  $A_f$  до 350 К у 100 корака што изазива комплетно нестајање деформације трансформације, као што је дато на Сл. 7.4. Дато је поређење добијених резултата (Сл. 7.4(a)) са подацима из литературе (Сл. 7.4(b)) на којем се види да је постигнуто одлично поклапање.

Коначно, дато је поређење глатке (енг. smooth) функције ојачања (са коефицијентима ојачања  $n_1 = 0.2, n_2 = 0.3, n_3 = 0.4$  и  $n_4 = 0.5$ ) са полиномним и косинусним законом ојачања [3]. Резултати симулације су дати на Сл. 7.5.

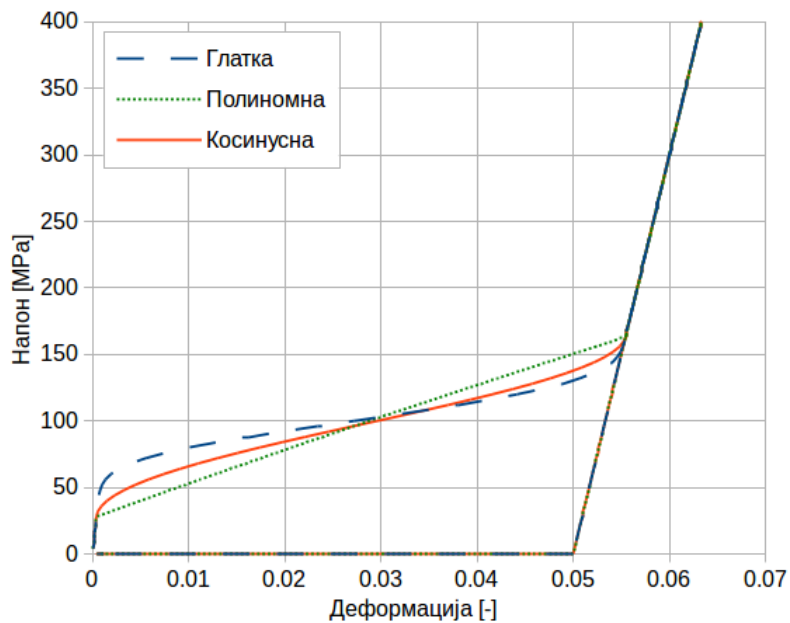


(a) резултати симулације



(b) резултати из литературе [3, 78]

Слика 7.4: Поређење зависности напон-деформација за ефекат памћења облика код SMA

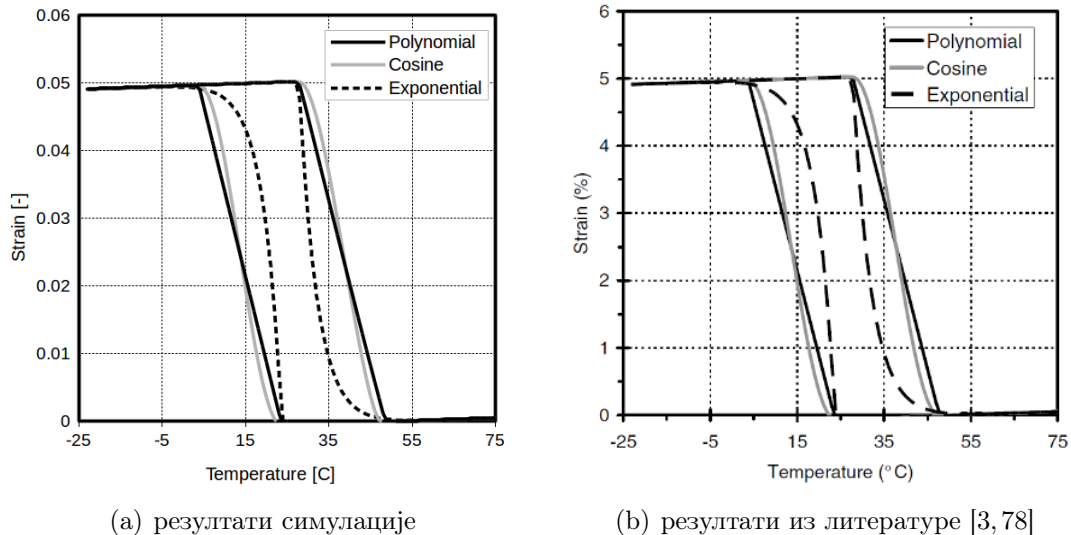


Слика 7.5: Поређење глатке (енг. smooth) функције ојачања са полиномном и косинусном за SME

### Фазна трансформација изазвана променом температуре

Представљени SMA конституивни модел може да симулира и фазну трансформацију изазвана променом температуре. Да би то приказали, овај пример је моделиран у складу са литературом [3, 78]. Почетна температура легуре је 350 K (изнад  $A_f$ ). Једноосни напон од 40 MPa (недовољан да иницира фазну трансформацију) је задат на једној страни модела коцке, док је супротна страна фиксирана. Температура материјала опада испод мартензитне крајње

температуре  $M_f$  до 250 K што изазива мартензитну фазна трансформација. Након загревања на почетну температуру, током фазне трансформације уназад, деформације трансформације потпуно нестају. Зависност деформација-температура је дата на Сл. 7.6. На поређењу резултата симулације (Сл. 7.6(a)) са подацима из литературе (Сл. 7.6(b)) може се запазити потпуно иста зависност деформација-температура.

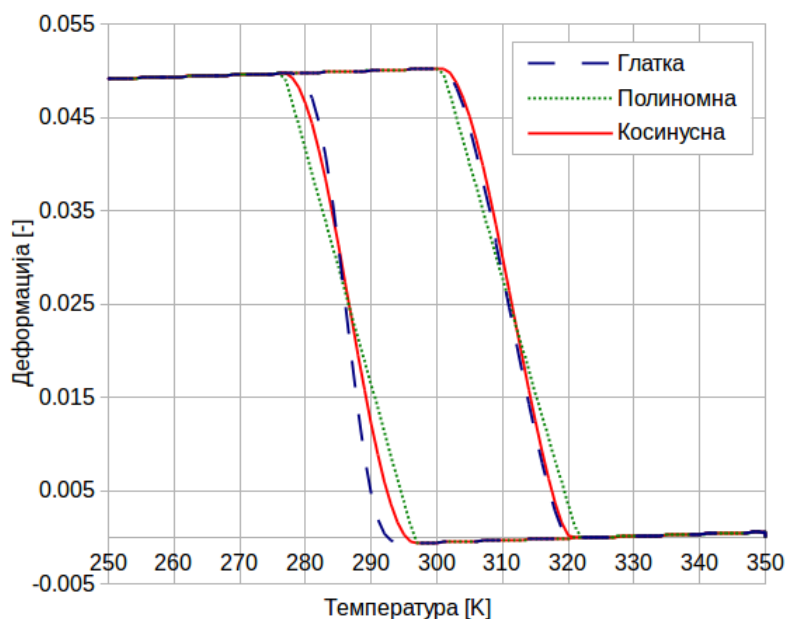


Слика 7.6: Фазна трансформација изазвана променом температуре код SMA

Параметри глатког (енг. smoothness) ојачања су такође испитивани за овај случај и дато је поређење са полиномним и косинусним [3] ојачањем. Добијени резултати су презентовани на Сл. 7.7.

### 7.1.2 Вишеосно оптерећење

Ради додатне верификације предложеног модела, анализирана су и два примера вишеосног оптерећења, позната у литератури [28, 50, 92]. МКЕ модел је коцка димензија  $2 \times 2 \times 2$ . Услови оптерећења су задати као аксијални и смичући напон на пропорционалан и непропорционалан начин. Материјални параметри коришћени за ове симулације су усвојени у складу са литературом [28] и дати су на Таб. 7.2. Као интересантан избор функције ојачања, закон глатког (енг. smooth) ојачања [3, 78, 81] је коришћен. Параметри глаткости (енг. smoothness) су одабрани као  $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0.3$ .



Слика 7.7: Поређење глатке (енг. smooth) функције ојачања са полиномном и косинусном за мартензитну трансформацију изазвану температуром

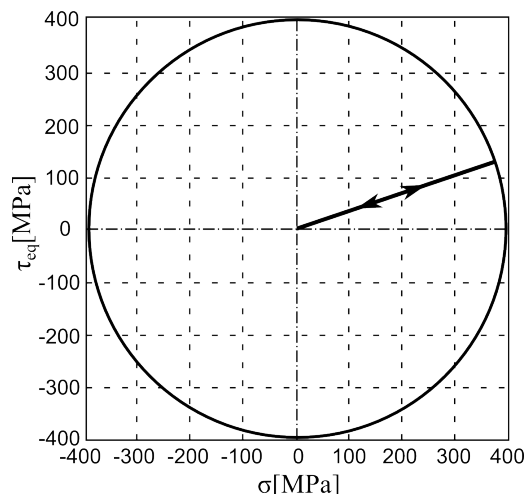
Табела 7.2: Материјални параметри CuAlZnMn легуре коришћене за примере вишеосног оптерећења [28,92]

$E_A$	$E_M$	$\alpha_A$	$\alpha_M$
30.000 MPa	10.000 MPa	$10.0 \cdot 10^{-6} K^{-1}$	$10.0 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
$M_{0s}$	$M_{0f}$	$A_{0s}$	$A_{0f}$
269K	183K	188K	283K
$H$	$\nu$	$\rho\Delta s_A$	$\rho\Delta s_M$
0.035	0.30	$-0.28 \text{ MPa } K^{-1}$	$-0.28 \text{ MPa } K^{-1}$

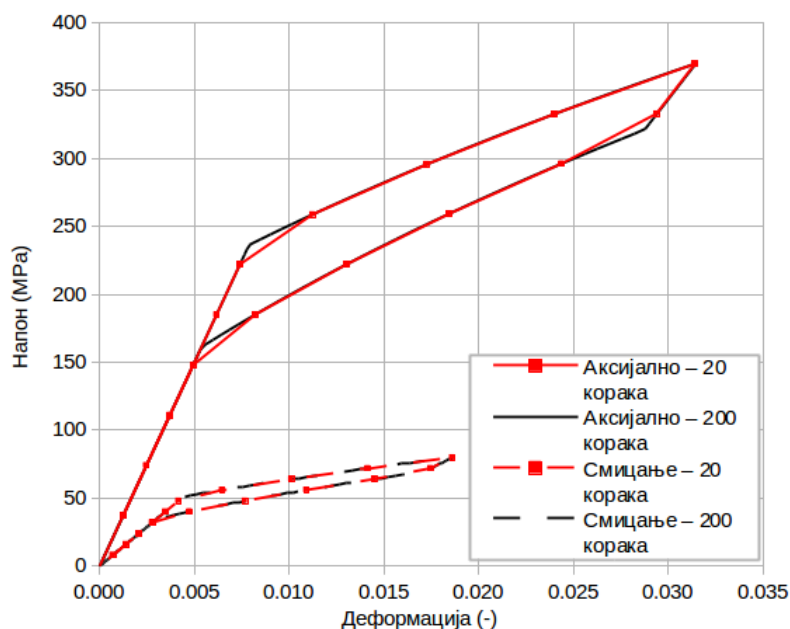
### Пример пропорционалног оптерећења на затезање - смицање

Модификован модел је даље испитан предвиђањем понашања под вишеосним оптерећењем у псеудоеластичном опсегу. SMA температура је константна и једнака 308K током анализе. Као што је речено у [92], температура је 25K већа од  $A_f = 283K$ . Путања оптерећења, дата на Сл. 7.8, је одабрана у складу са [50], где је затезање водеће оптерећење, а смицање је задато преко фактора пропорционалности. Амплитуда затезања је 370 MPa, док је максималан напон смицања 80 MPa. Растерећење је такође спроведено пропорционално, а добијени резултати напон-деформације су дати на Сл. 7.9.

Као што се може запазити, и затезање и смицање имају псеудоеластични одзив (Сл. 7.9). Такође, и оптерећење и растерећење се одвијају симултано (Сл. 7.10), што приказује способност модела да симулира понашање SMA у



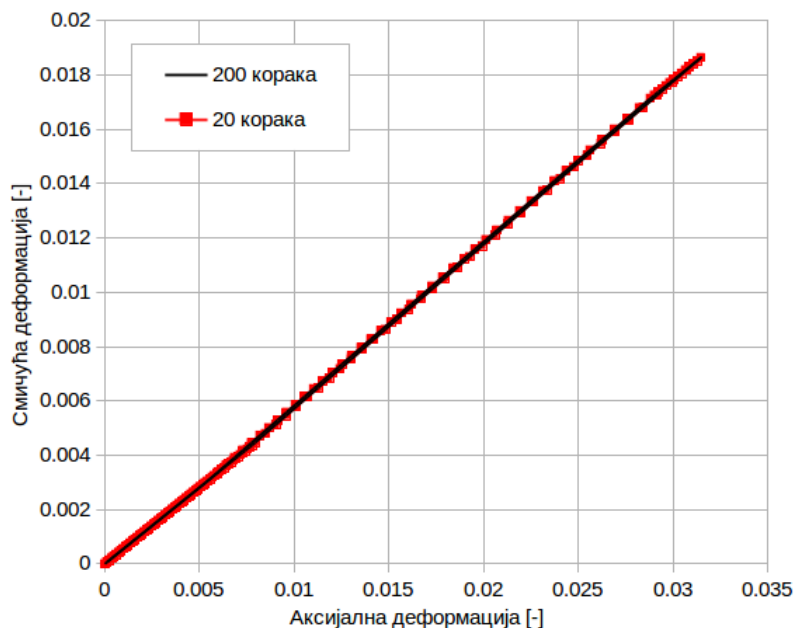
Слика 7.8: Путања напона за пропорционално оптерећење



Слика 7.9: Зависност напон-деформација за затезање и смицање за пропорционално оптерећење

условима пропорционалног оптерећења.

Такође је анализиран утицај временског корака на тачност код пропорционалног оптерећења. Анализа је извршена у 200 временских корака. Поређење резултата са резултатима симулације 10 пута већим кораком (анализа у 20 временских корака) је дато на Сл. 7.9. Може се запазити да је зависност напон-деформација иста у корацима који се поклапају, али путање могу бити различите јер зависе од фазе оптерећења (фазна трансформација или еластични услови).



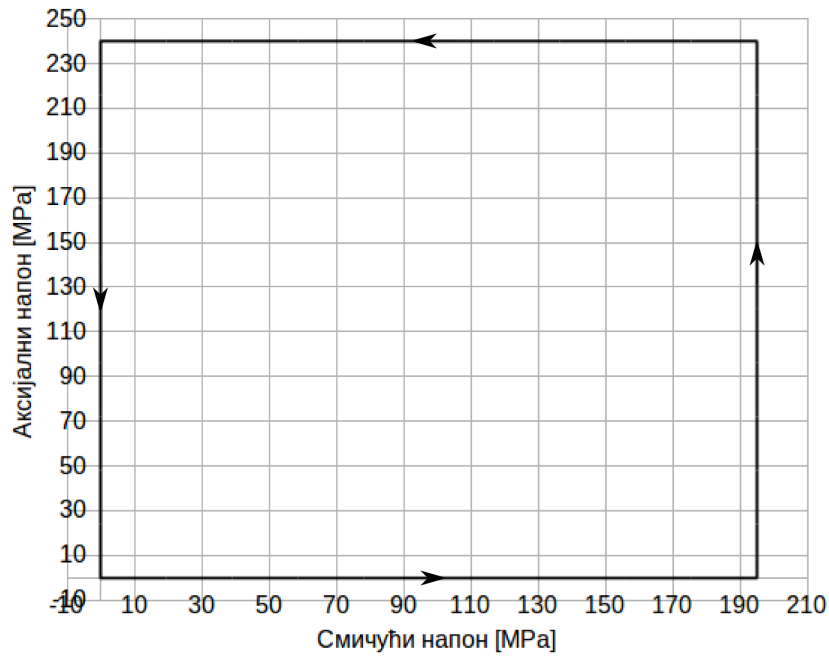
Слика 7.10: Зависност аксијалне и смичуће деформације за пропорционално оптерећење

### Пример непропорционалног оптерећења на затезање - смицање

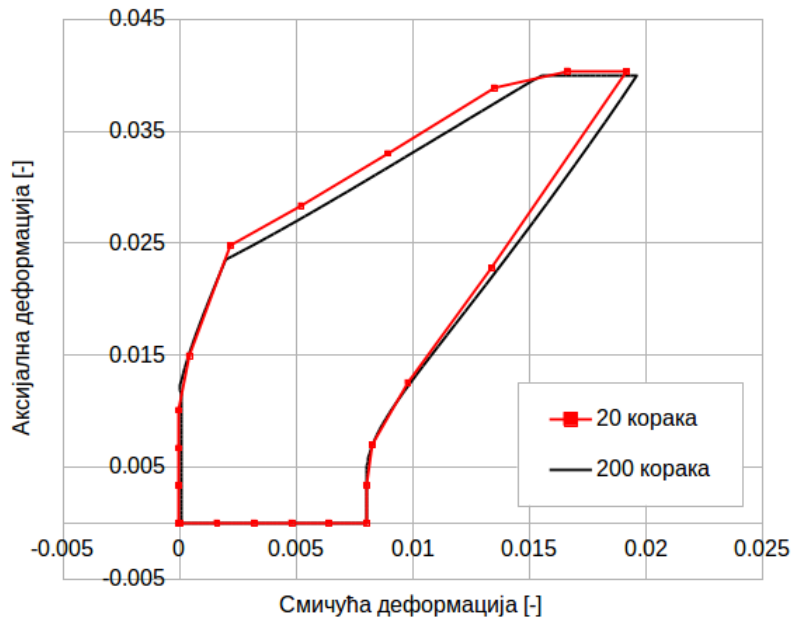
Резултати експеримената [92] и нумеричке симулације [28,50] дати у литератури, приказују понашање материјала у условима непропорционалног оптерећења. Експериментални резултати су добијени за експеримент затезање-торзија на узорку мале дебљине [92] направљеног од CuAlZnMn легуре и добијени резултати су на располагању у литератури [28,29,92]. То је наметнуло задатак да се модификована имплементација конститутивног модела испита на могућност симулације таквог оптерећења за псеудоеластични ефекат. У том смислу, температура узорка SMA је 308 K (25 K већа него аустенитна крајња температура  $A_f = 283$  K), задата на свим чворовима модела.

За симулацију експеримента, аксијални напон од 240 MPa и смичући напон од 200 MPa су комбиновано задати (прво је задат аксијални, па смичући напон) на истој страни коцке ( $2 \times 2 \times 2$ ) која се састоји од једног тродимензионалног елемента, док је супротна страна ограничена (Сл. 7.11). Растерећење је такође изведено комбиновано у истом редоследу. Материјални параметри у овој анализи су задати у складу са литературом [28]. За задати аксијални и смичући напон, зависност аксијална деформација - смичућа деформација је приказана на Сл. 7.12. Даље су релације између аксијалног напона и деформације и смичућег напона и деформације презентоване на Сл. 7.13 и 7.14, редом.

Као што се може запазити, за непропорционално оптерећење, тачност зависи



Слика 7.11: Зависност аксијалног и смичућег напон за непропорционално оптерећење

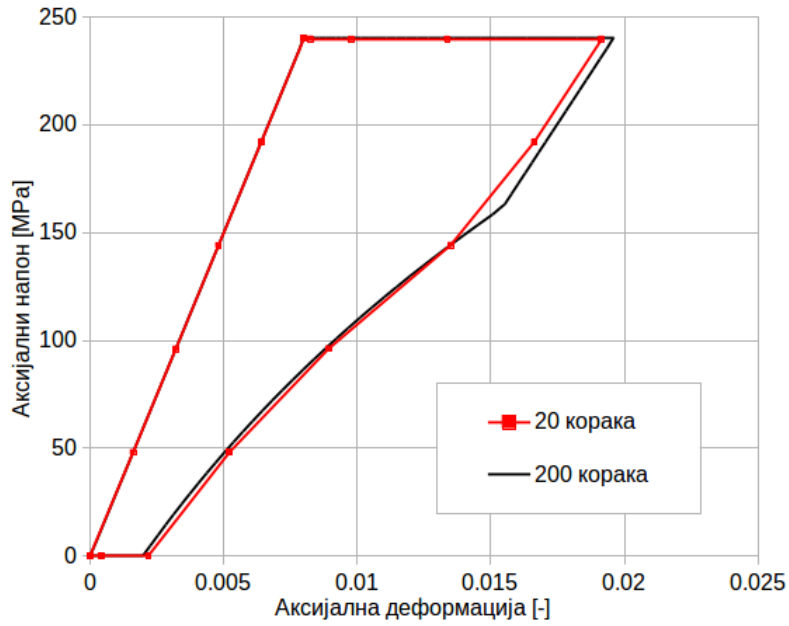


Слика 7.12: Зависност аксијалне и смичуће деформације за непропорционално оптерећење

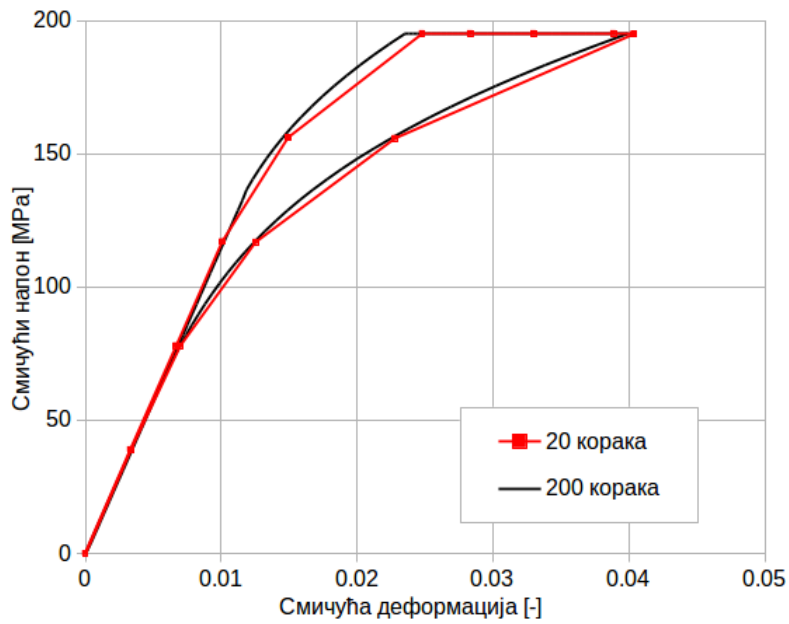
од величине корака због задржавања константног правца интеграције током временског корака, док се код пропорционалног оптерећења таква разлика не примећује, јер је правац интеграције константан. Добро слагање резултата за различите временске кораке оправдава уведене претпоставке у вези интеграције



напона у временском кораку.



Слика 7.13: Зависност аксијалног напона и деформације за непропорционално оптерећење

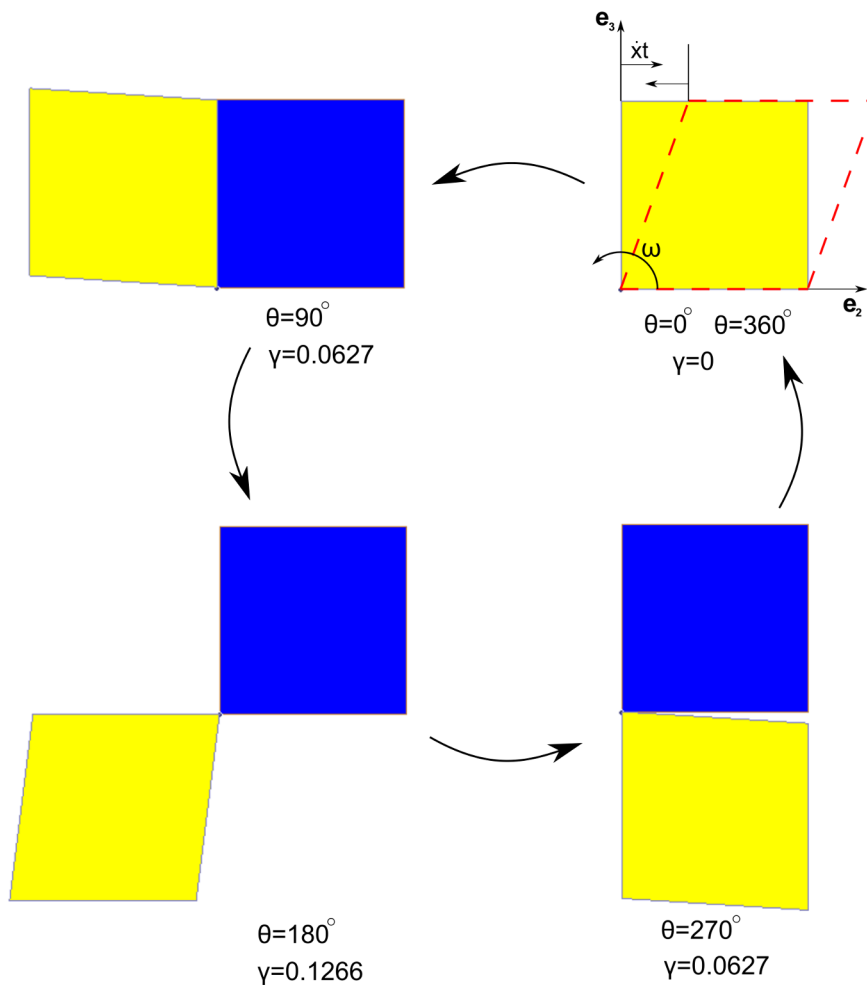


Слика 7.14: Зависност смичућег напона и деформације за непропорционално оптерећење

## 7.2 Примери великих деформација

### 7.2.1 Просто смицање са суперпонираном крутом ротацијом

Да би демонстрирали објективност конститутивних једначина и независност интеграције напона од посматрача, пример оптерећења SMA простим смицањем је изведен уз суперпонирану круту ротацију [84, 93].



Слика 7.15: Репрезентативни положаји за пример оптерећења простим смицањем са суперпонираном крутом ротацијом

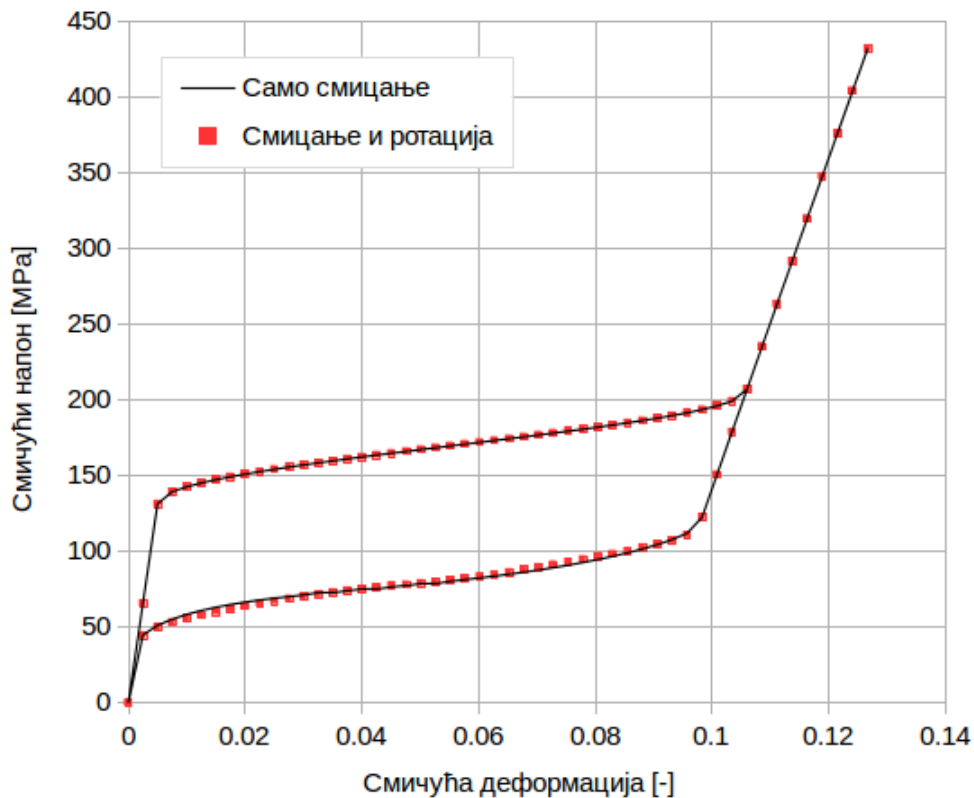
Просто смицање је дефинисано померањима задатим у функцији ротације око  $e_1$ -осе на следећи начин:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} [\mathbf{X} + (\dot{x}t) X_3 \mathbf{e}_2], \quad (7.1)$$

где је тензор ротације  $\mathbf{R}$  дефинисан као:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \cos(\omega t) + (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) \sin(\omega t) + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1. \quad (7.2)$$

Материјални параметри коришћени у нумеричком прорачуну су исти као што су дати у Таб. 7.1. Угаона брзина ротације је  $\omega = 0.02\pi$  радијана по секунди за  $t \in [0, 100]$ , тако да  $\theta = \omega t \in [0, 2\pi]$ . Брзина померања је позитивна у првој половини ротације  $\dot{x} = 0.0025$  у секунди за  $t \in [0, 50]$  тако да  $\dot{x}t \in [0, 0.125]$ . Док је брзина померања у другој половини процеса ротације негативна  $\dot{x} = -0.0025$  у секунди за  $t \in [50, 100]$  тако да  $\dot{x}t \in [0.125, 0]$ . Временски корак  $\Delta t = 1s$  је фиксиран и одговара инкременту померања  $\Delta \dot{x}t = 0.0025$  и инкременту ротације  $\Delta \theta = 3.6^\circ$ . Резултати зависности смичуће компоненте Кирхофовог напона према величини смицања  $\gamma$ , добијена из нумеричког прорачуна је приказан на Сл. 7.16.



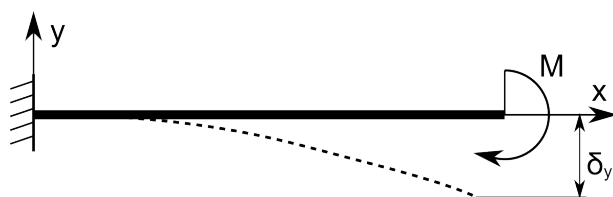
Слика 7.16: Поређење резултата добијених за SMA оптерећен на смицање са суперпонираном ротацијом и на смицање без суперпониране ротације

Две добијене криве се преклапају што показује добро слагање између два приступа рачунања. Поглед на почетну и деформисану геометрију у више репрезентативних положаја чистог смицања уз суперпонирану ротацију су при-

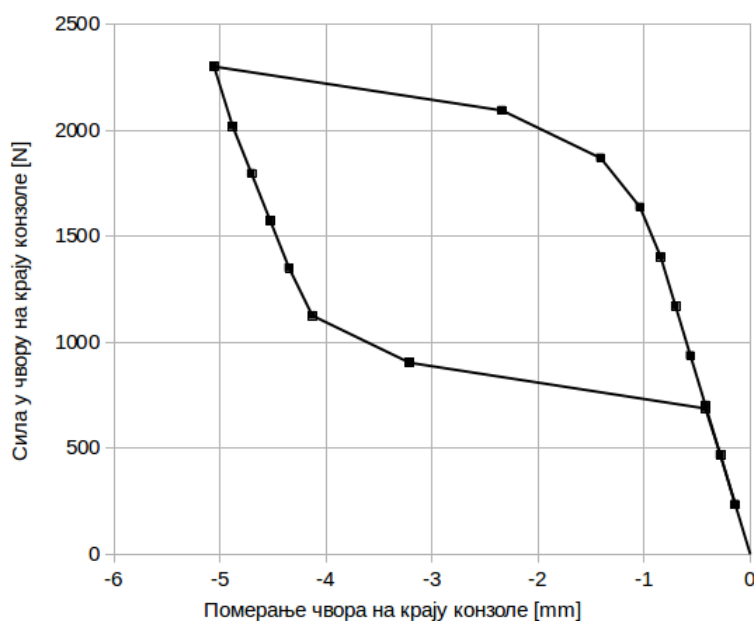
казани на Сл. 7.15.

### 7.2.2 Конзола оптерећена моментом на слободном крају

Велико савијање греде се јавља у многим индустријским применама, као што су космичко инжењерство, дизајн конструкција, носећи мостови, и различите врсте процеса производње. Такође, као популаран проблем разматрана је конзола правоугаоног попречног пресека са моментом на слободном крају (Сл. 7.17).



Слика 7.17: Шема конзоле оптерећене моментом на крају

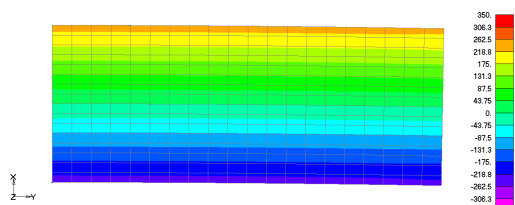


Слика 7.18: Зависност сила-померање на оптерећеном крају SMA конзоле

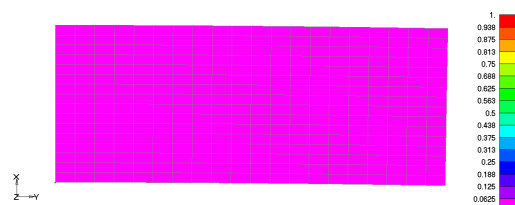
Конзола је направљена од SMA истих материјалних параметара као у Таб. 7.1. Димензије модела су  $100 \text{ mm} \times 40 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ . МКЕ мрежа је подељена на 320 ( $20 \times 16 \times 1$ ) 3D елемената. Модел је оптерећен на слободном крају моментом, који је задат као притисак у правцу дужине конзоле. Притисак је позитиван на горњој половини попречног пресека и негативан на доњој половини распо- ређен као униформна зависност (линеарна функција) вертикалне координате.

Зависност сила-померање на оптерећеном крају SMA конзоле је приказана на Сл. 7.18.

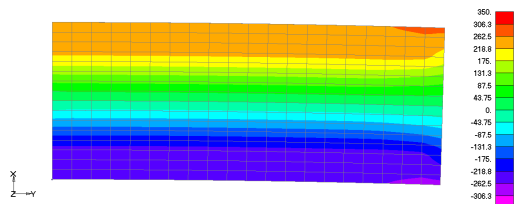
На Сл. 7.19(а), 7.19(с) и 7.19(е) се може запазити да се током оптерећења, аксијални напон у правцу дужине конзоле мења на очекиван начин (симетрично у односу на неутралну линију). Напон има највећу вредност у најудаљенијој тачки гледајући од неутралне (средње) линије, где је аксијални напон једнак нули. У тренутку када фазна трансформација почне у 8-ом кораку (Сл. 7.19(д)), акумулација удела мартензита у запремини се може запазити на слободном крају конзоле. Разлог за ово је савијање конзоле што утиче на геометријску асиметрију проблема. Концентрација мартензита је највећа у 10-ом кораку (Сл. 7.19(ф)), док постаје све мања када почне растерећење (Сл. 7.20(б), 7.20(д) и 7.20(ф)) и потпуно нестаје када се вратимо у еластичну зону.



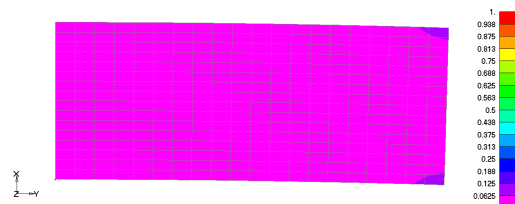
(а) Распоред напона по дужини конзоле у 6-ом кораку



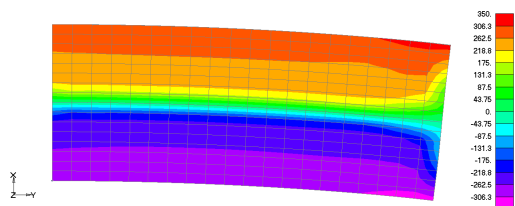
(б) Удео мартензита у запремини у 6-ом кораку



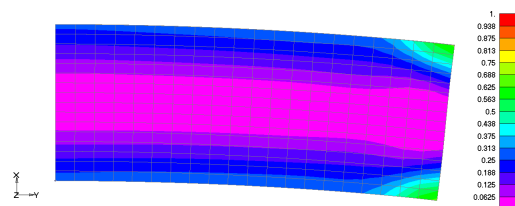
(с) Распоред напона по дужини конзоле у 8-ом кораку



(д) Удео мартензита у запремини у 8-ом кораку

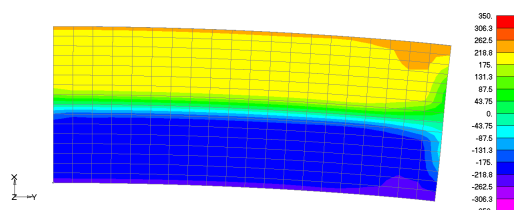


(е) Распоред напона по дужини конзоле у 10-ом кораку

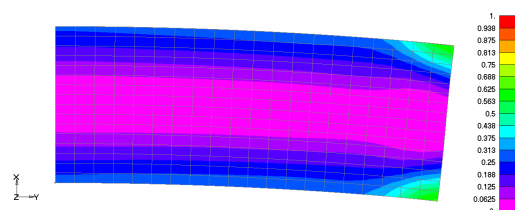


(ф) Удео мартензита у запремини у 10-ом кораку

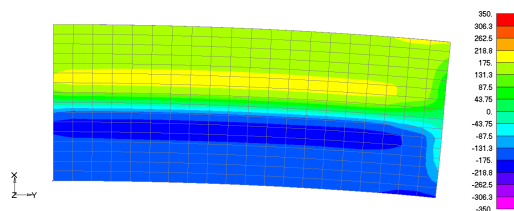
Слика 7.19: Распоред напона по дужини конзоле и удела мартензита у запремини у одабраним корацима при оптерећењу



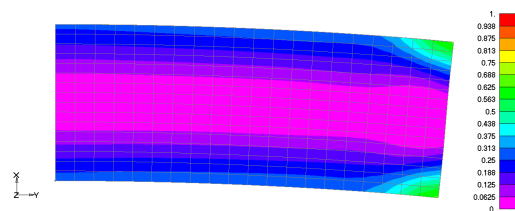
(a) Распоред напона по дужини конзоле у 12-ом кораку



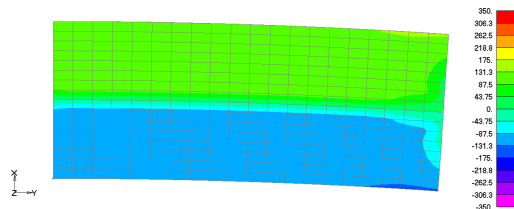
(b) Удео мартензита у запремини у 12-ом кораку



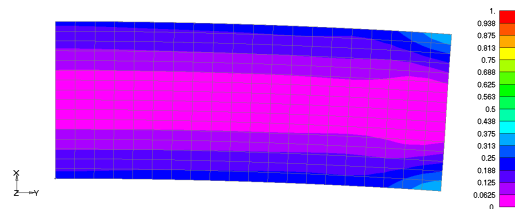
(c) Распоред напона по дужини конзоле у 14-ом кораку



(d) Удео мартензита у запремини у 14-ом кораку



(e) Распоред напона по дужини конзоле у 16-ом кораку



(f) Удео мартензита у запремини у 16-ом кораку

Слика 7.20: Распоред напона по дужини конзоле и удела мартензита у запремини у одабраним корацама при растерећењу

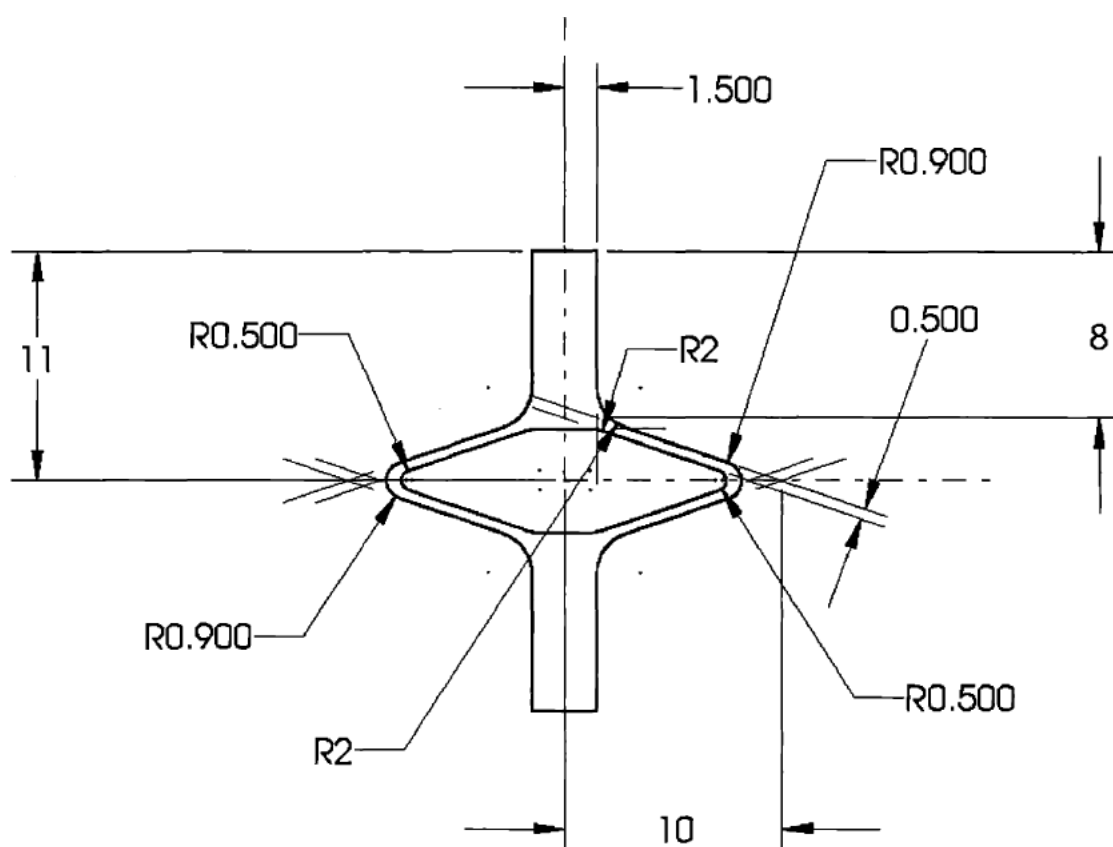
### 7.2.3 Јединична ћелија стента

За нумеричку анализу понашања комплексних SMA структура изложених великим деформацијама, конститутивни модел за коначне деформације је неопходан за тачну симулацију. Да би се приказала могућности примењеног приступа, понашање јединичне ћелије стента је моделирано са почетном геометријом датом на Сл. 7.21 [49, 94]. Услед симетрије, дат је МКЕ модел једне четвртине јединичне ћелије стента на Сл. 7.22. Материјални параметри коришћени у овој анализи су дати у Таб. 7.3.

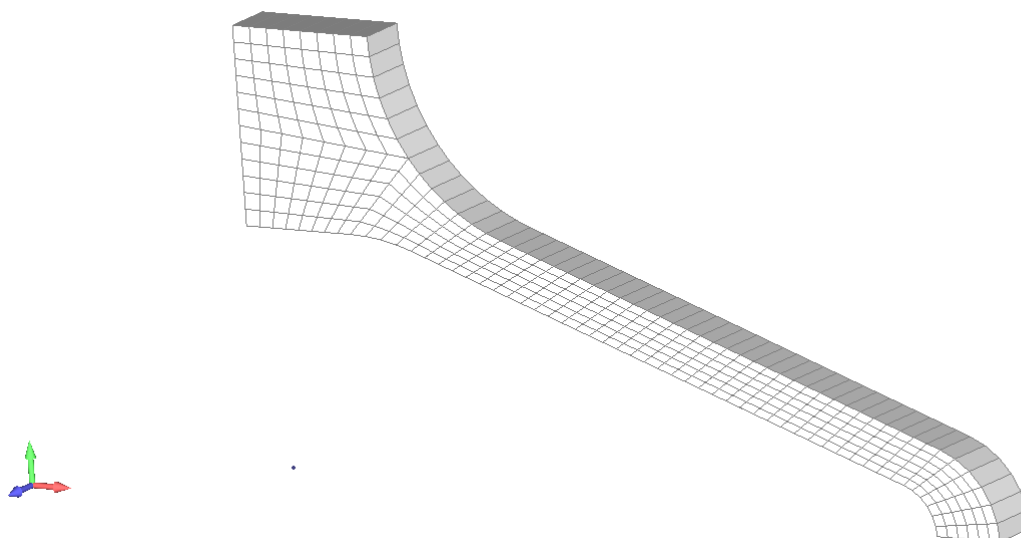
Задати гранични услови за јединичну ћелију стента су: чворови на доњој површини су ограничени тако да дефинишу симетрију у  $Y$ -правцу, на левој површи су чворови ограничени тако да дефинишу симетрију у  $X$ -правцу, док је на горњој површини задат профил померања дуж  $Y$ -правца у свим чворовима. Сви чворови имају исту иницијалну температуру 298K. Симулација предложе-

Табела 7.3: Материјални параметри SMA за пример јединичне ћелије стента

Параметар	Вредност
Аустенитни Јангов модул	$E_A = 6.20 \cdot 10^5 \text{MPa}$
Мартензитни Јангов модул	$E_M = 3.10 \cdot 10^5 \text{MPa}$
Поасонов коефицијент	$\nu = 0.33$
Максимална деформација трансформације	$H = 0.047$
Густина	$\rho = 6290 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Аустенитни коефицијент термичког ширења	$\alpha = 1.0 \cdot 10^{-5}$
Мартензитни коефицијент термичког ширења	$\alpha = 1.0 \cdot 10^{-5}$
Проводљивост	$k = 18 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$
Конвективност	$\lambda_c = 6.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$
Капацитет	$c = 0.46 \cdot 10^{-9} \frac{\text{MJ}}{\text{kgK}}$
Аустенитни коефицијент утицаја напона	$\rho\Delta s_A = -0.364 \frac{\text{MPa}}{\text{K}}$
Мартензитни коефицијент утицаја напона	$\rho\Delta s_M = -0.364 \frac{\text{MPa}}{\text{K}}$
Мартензитна почетна температура	$M_{0s} = 251.3\text{K}$
Мартензитна крајња температура	$M_{0f} = 213\text{K}$
Аустенитна почетна температура	$A_{0s} = 260.3\text{K}$
Аустенитна крајња температура	$A_{0f} = 268.5\text{K}$

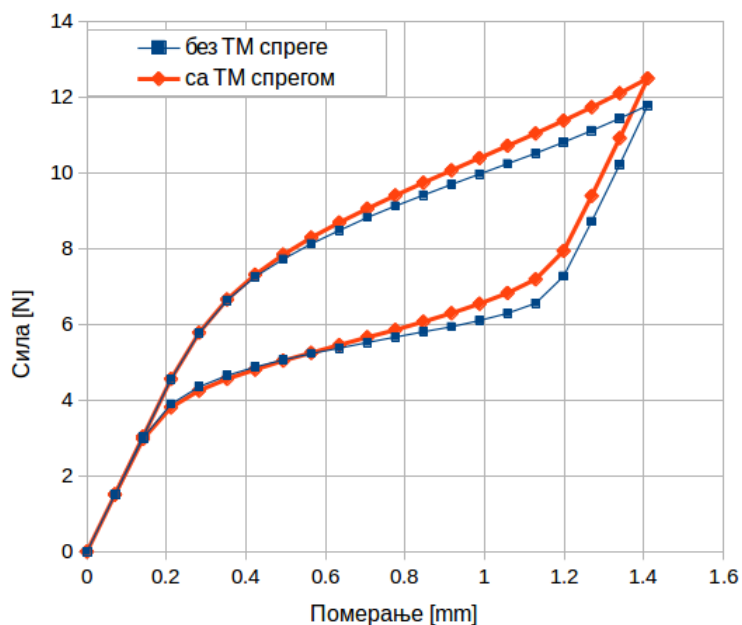


Слика 7.21: Геометрија узорка јединичне ћелије стента дебљине 0.53 mm [49,94]



Слика 7.22: Недеформисана мрежа једне четвртине тестиране јединичне ћелије стента

ним моделом је спроведена са и без укљученог утицаја топлоте на понашање материјала. На Сл. 7.23, приказано је поређење зависности сила-померање из циклуса оптерећење-растерећење за случаја коришћења термо-механичког спрегања и у случају задате константне температуре.



Слика 7.23: Одзив сила-померање добијена МКЕ анализом јединичне ћелије стента под псеудоеластичним условом

Приказана сила је добијена као реакција везе дуж Y-правца за све чворове на горњој површи. Из криве приказане на Сл. 7.23, може се запазити да се

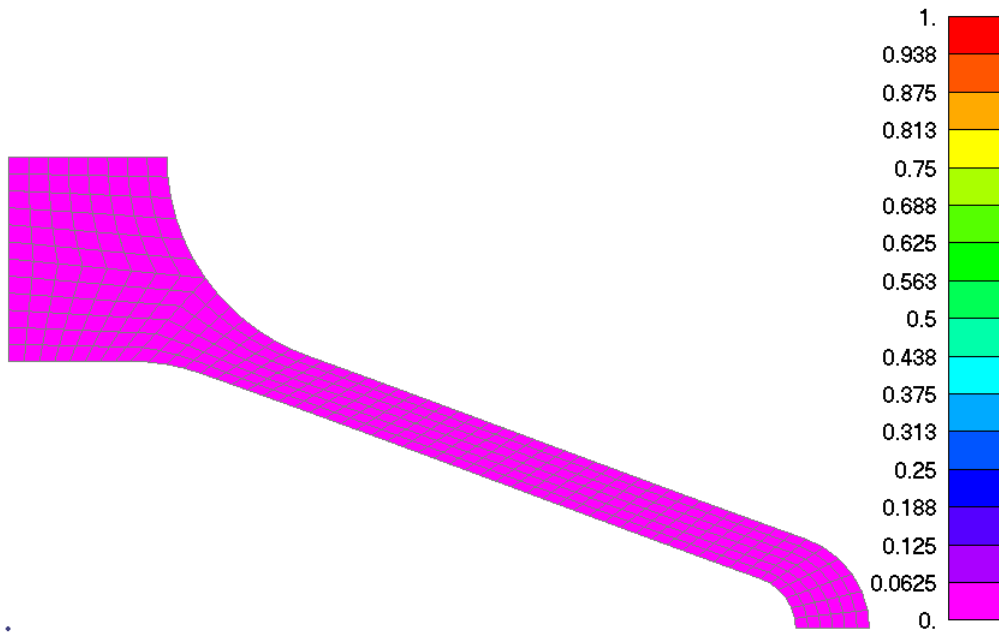


јавља псеудоеластични једноосни одзив (у облику заставе). Такође, може се видети да термо-механичка спрега значајно утиче на дијаграм сила-померање, што је такође забележено и приликом верификације модела на примерима једноосног затезања [16]. Приказана зависност показује да се приликом експлоатације SMA структура, јавља значајна промена температуре што може бити од изузетног значаја код цикличног оптерећења и деформација при великим брзинама оптерећења.

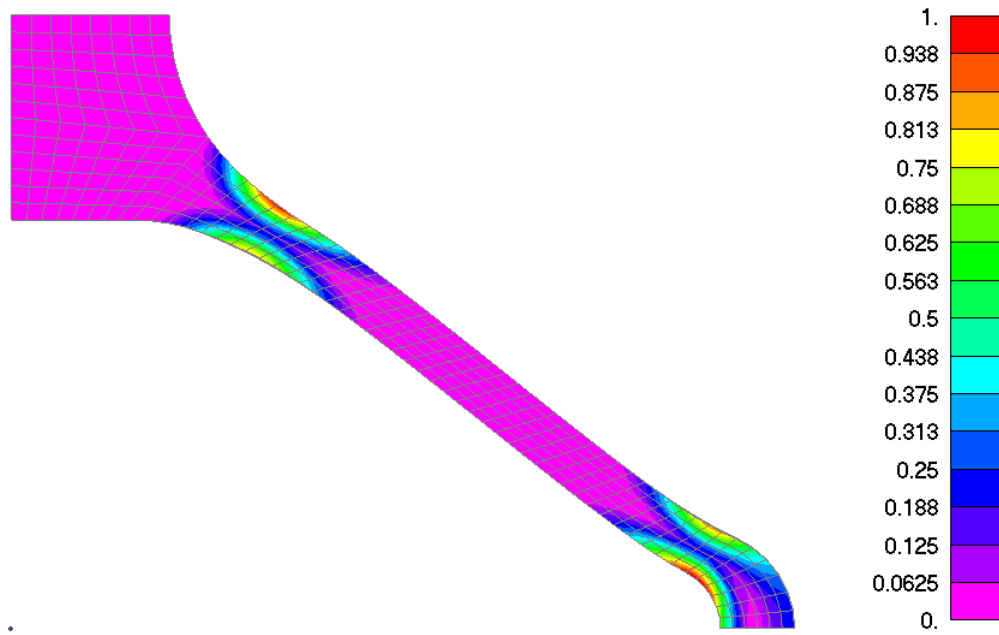
Такође, удео мартензита у запремини кроз јединичну ћелију стента је одређен у свакој тачки процеса оптерећења. На Сл. 7.24 је дат распоред удела мартензита у запремини у почетном стању (Сл. 7.24(a)) и на максимуму оптерећења нпр. највећа концентрација удела мартензита у запремини (Сл. 7.24(b)).

Промена температуре стента, која се јавља за случај адијабатског провођења топлоте је приказана на Сл. 7.25 до 7.27. Иницијална температура је дата на Сл. 7.25. Након оптерећења стента брзином деформације  $v = 2.82\text{mm/s}$  у 20 временских корака до максималног померања од  $2.82\text{mm}$ , енергија фазне трансформације претворена у топлоту је дала промену температуре приказану на Сл. 7.26. У наредних 20 корака, истом брзином деформације је стент растерећен, при чему је дошло до фазне трансформације уназад што је узроковало промену температуре приказану на Сл. 7.27. Као што се може запазити, фазна трансформација унапред, ослобађа топлоту и материјал се греје, док фазна трансформација уназад, апсорбује топлоту, па имамо случај да се на појединим деловима стента температура смањила испод иницијалне температуре.

Овај феномен је познат од раније, када су за различите брзине деформација, експериментално и нумерички испитивани SMA узорци. Тада је забележено да је температура узорака, за мање брзине деформација, била испод почетне температуре након растерећења, што је забележено и у овом случају. Тиме приказана потпуна функционалност представљене термо-механичке имплементације SMA конститутивног модела за проблеме великих деформација.

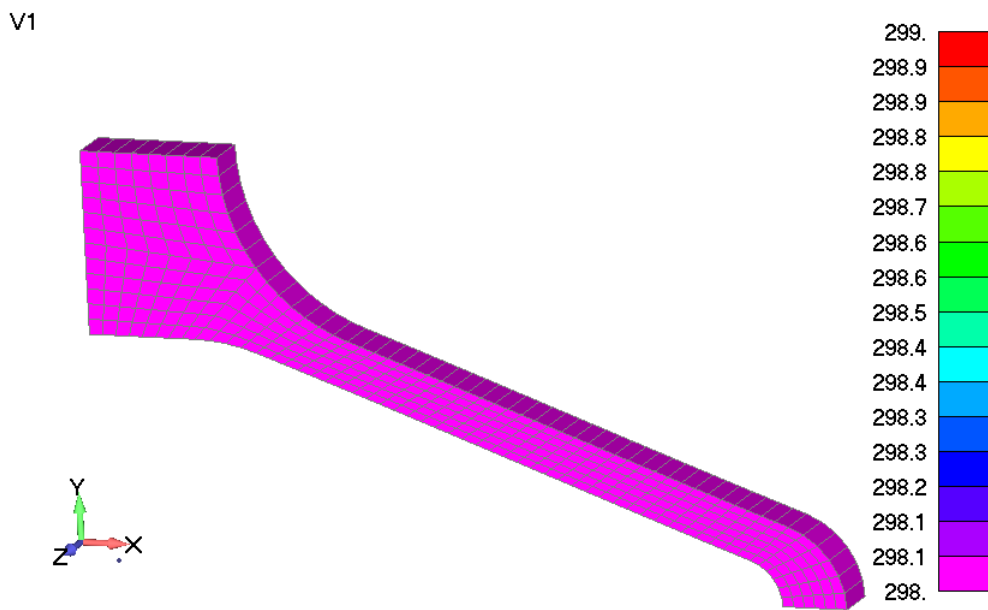


(a) иницијално стање и након потпуног повратка деформације у почетно стање

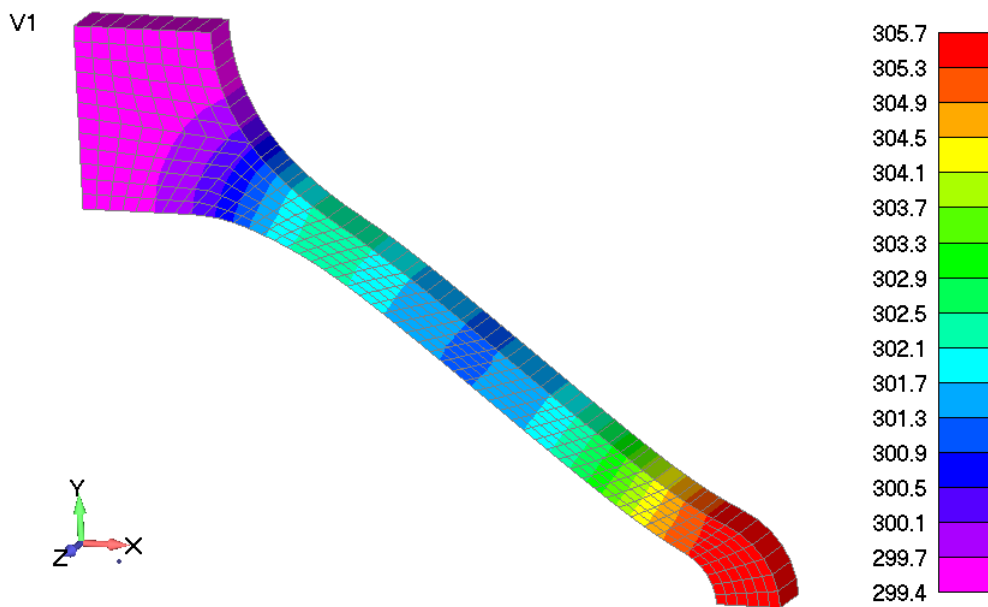


(b) стање у условима максималног оптерећења

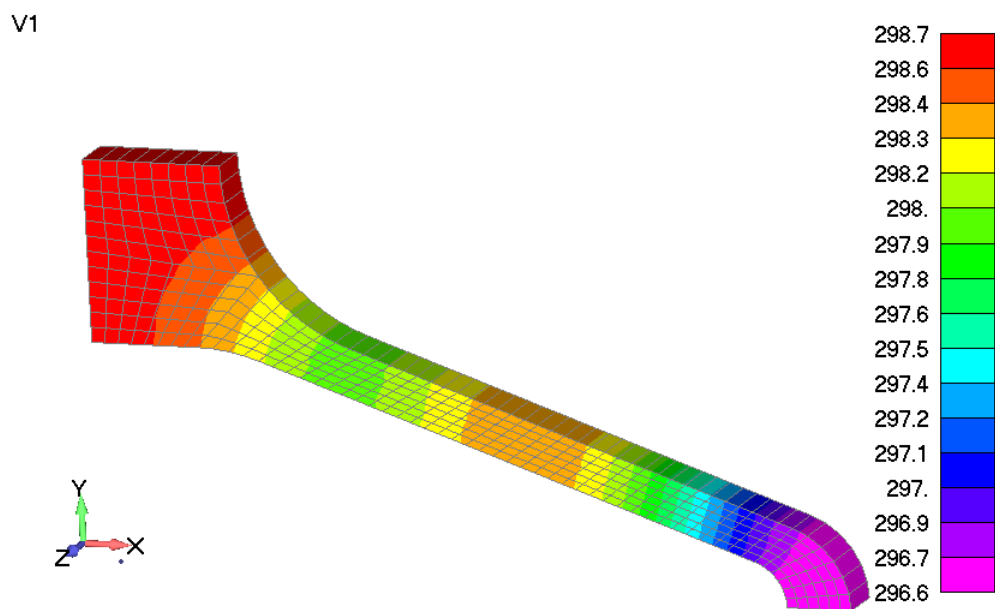
Слика 7.24: Распоред удела мартензита у запремини кроз јединичну ћелију стента без утицаја ТМ спреге



Слика 7.25: Поље температура ушица стента за иницијално стање



Слика 7.26: Поље температура ушица стента за максимално оптерећење



Слика 7.27: Поље температура ушица стента за растеређено стање

# Глава 8

## Закључци

Фасцинантне особине SMA и феномени који прате њихово понашање, пружају могућност широке примене у одговорним и поузданим конструкцијама. Захтеви постављени од стране истраживача, инжењера и корисника широм света, мотивисали су аутора да се бави испитивањем понашања SMA. Идеја да се ефикасно и тачно симулира понашање SMA је веома корисна за многе научне проблеме и индустријска решења у којима SMA налази своју употребу. Постоји велики број математичких модела који описују феноменологију понашања SMA и неколико различитих приступа, што додатно отежава правилан избор најоптималнијег решења. Из тог разлога, неопходна су поједностављења и унапређења, како би се имплементација учинила ефикаснијом и тачнијом. Раздвајање тензора напона на девијаторски и запремински део и коришћење ефективних величина, омогућили су једноставнији приступ и могућности даље проширења конститутивног модела.

Једна од битних карактеристика SMA забележена на основу експерименталних резултата је њихова велика термичка осетљивост. Веома често то ствара проблеме приликом експлоатације и производње, па уједно представља и додатан мотив да се утицај промене температуре узме у обзир. Поред спољашњих фактора који утичу на промену температуре SMA, појава енергије дисипације као последице мартензитне фазне трансформације и њен утицај на понашање SMA су од велике важности за тачну симулацију понашања таквих материјала. Као најоптималније решење за ту намену, одабран је партиционисан приступ спрезању компонената софтвера за структурну анализу и провођење топлоте, који се показао као моћно решење за термо-механичке спрегнуте проблеме.

Захтеви за симулацијом понашања комплексних напонских стања и тродимензионалних МКЕ модела при великим деформацијама које се крећу и до

10% код SMA, намећу потребу проширења примене конститутивног модела на проблеме описане теоријом великих деформација. Применом мултипликативне декомпозиције, и већ опробаних техника проширења конститутивних модела за употребу на проблемима великих деформација, као и унапређења самог конститутивног модела, добијено је модерно софтверско решење којим је могуће решавати термо-механичке SMA проблеме за комплексна напонска стања.

Предложена решења реализована су кроз неколико фаза и више конкретних задатака:

- Теорија коју је Лагоудас презентовао у својој књизи [3], је била инспирација и основа за размишљање о математичком опису SMA понашања. Детаљи дати у књизи и објављеним радовима, су мотивисали аутора да прошири истраживање у оквиру феноменолошких SMA модела.
  - Након почетне примене дате теорије, неопходна упрошћења су усвојена ради примене методе које су предложили Којић и Бате [64] и Хенан и Ананд [84] за ефикасну интеграцију конститутивних једначина.
  - Неопходно је било модификовати критичну термодинамичку силу да одговара новој интеграционој методи. Укупан напон је декомпонован на девијаторски и средњи део и интеграција напона је извршена у правцу пробног девијаторског напона или пробне деформације трансформације. То упрошћава конститутивни модел и проблем своди на решавање само једне скаларне нелинеарне једначине у итеративној процедури. Примери које је Лагоудас дао у [78] су испитани као референтни тестови за тачност и функционалност имплементираних конститутивног модела. Три примера једноосног оптерећења [78] су анализирана ради верификације описаних модификација при чему су добијени исти резултати.
- Поред тога, широк спектар експерименталних тестова изведених на IPRT, PAN и AIT Јапан, расположивих у литератури, потврђује јаку термомеханику спрегу током псеудоеластичног оптерећења и растерећења. Експерименти су спроведени за различите брзине напона и деформације, што је био неопходан захтев за тачну нумеричку анализу. Експерименти су пажљиво изведени и важни подаци су измерени, систематизовани и поређени да покажу утицај различитих начина оптерећења на понашање материјала. Добијени резултати показују

велику осетљивост SMA кривих напон-деформација у односу на брзине оптерећења и њихове одговарајуће промене температура услед јаке термомеханичке спреге.

- Термо осетљивост и специфично понашање SMA под различитим брзинама оптерећења су нови захтеви које је потребно задовољити ради постизања тачне и коректне нумеричке симулације.
  - Ова запажања узрокују даље проширење SMA конститутивних једначина. Неопходно је да SMA конститутивни модел има способност да симулира термо-механичке спрегнуте проблеме што шири поље интересовања на термичке особине фазне трансформације. На располагању су посебне МКЕ софтверске компоненте за структурну анализу и провођење топлоте. Партиционисани приступ спрезању је усвојен као значајно решење због могућности да се моделира комплексно напонско и термичко стање и да се узме у обзир међусобни утицај.
  - Даље, такав приступ спрезању пружа поновну употребу постојећег МКЕ софтвера да би се тачно предвидело понашање SMA. Да би показали предности спрегнуте анализе, експерименти су моделирани што реалније, са укљученим граничним условима и оптерећењем и за структурну анализу и за провођење топлоте.
  - Добијени нумерички резултати су упоређени са експерименталним за све брзине напона и деформација. Поређење експерименталних и нумеричких резултата указује на добро квалитативно и квантитативно слагање, јер модел потврђује и промене напона и температуре.
  - И експериментални у нумерички резултати значајно зависе од задатих брзина оптерећења.
  - Нумерички модел такође потврђује фазу засићења егзотермне мартензитне трансформације унапред, као и пад температуре током трансформације уназад као и његов пад након растерећења испод почетне температуре SMA узорка. Та промена температуре значајно утиче на понашање SMA.
3. • Као одговор на захтев моделирања комплексних SMA конструкција, претпостављена је мултипликативна декомпозиција укупног градијента деформације.
- Пробна еластична девијаторска деформација се може израчунати коришћењем тензора логаритамске деформације и даљи интеграциони поступак је исти као у случају малих деформација.

- То пружа могућност да се користи иста итеративна процедура за рачунање проблема великих деформација. За верификацију овог приступа, припремљено је неколико референтних примера вишеосног оптерећења.
- Да би проширили примену представљене имплементације, моделирана је конзола оптерећена моментом на слободном крају. Презентовани резултати показују да се распоред напона и удела мартензита у запремини добија у складу са очекивањима. На крају, јединична ћелија стента је моделирана да покаже примењивост дате имплементације. Добијени резултати су поређени са резултатима из литературе и задовољавајуће поклапање резултата је постигнуто.

## Правци даљег истраживања

Током истраживања представљеног у оквиру ове дисертације, наметнуло се више могућих праваца даљег истраживања у овој области.

Експериментална истраживања понашања циклично оптерећених SMA представљају изазов због промене карактеристика материјала. Њихова нумеричка симулација је један од задатака који би требало да покаже примену представљене имплементације и дефинишу захтеве за унапређењем. Један од могућих проблема које је потребно узети у обзир на основу експерименталних истраживања је акумулација удела мартензита у запремини у условима цикличног оптерећења.

Такође, специјалан случај цикличног оптерећења у којем је растерећење извршено у току фазне трансформације је неопходно испитати као реалну појаву у примени SMA. У оквиру цикличног испитивања, поставља се и питање испитивања понашања SMA материјала на замор.

У дисертацији су представљени референтни примери и одабрани примери из литературе који приказују функционалност датог приступа. Даље моделирање реалних проблема и симулација комплексних напонских стања који се јављају, представља изазов и обавезу у даљем испитивању оваквих материјала. Детаљи на које би требало обратити пажњу су свакако могућност појаве пластичних деформација при великим напонима у комбинацији са деформацијом трансформације, као и могућност зависности максималне деформације трансформације од величине напона. Такође, различито понашање (асиметрија) SMA при затезању и притиску је интересантан феномен који би требало описати.

Такође, друге врсте мултифизичких проблема који захтевају интеракцију



више физичких поља могу бити интересантни нпр. приликом испитивања интеракције стента и ткива током уградње у крвни суд, што представља ризичан захват. Након уградње, стент се налази у специфичном окружењу где има стални контакт са флуидом, па би симулација таквог понашања коришћењем флуид-структура интеракције помогла у предвиђању могућих нежељених последица. С обзиром на добру електро-проводљивост SMA, може се користити загревање услед Џуловог ефекта на понашање код каблова кроз које се пропушта електрична енергија.

Посебна врста SMA са магнетним својствима се показала као корисна и примењива. Због тога је неопходно проширити спрегу на термо-магнето-механичку и на тај начин омогућити решавање таквих мултифизичких проблема. То захтева развој посебне компоненте за решавање проблема магнетних поља и њено спрезање са већ описаним компонентама. Такође, на основу већ публикованих резултата експерименталног испитивања таквих материјала [18], потребно је анализирати физичке захтеве које таква спрега поставља.

# Литература

- [1] K. Otsuka and C. Wayman, eds., *Shape memory materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [2] T. Duering, K. Melton, D. Stockel, and C. Wayman, *Engineering Aspects of Shape Memory Alloys*. Butterworth-Heinemann, London, 1990.
- [3] D. Lagoudas, *Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications*. Springer, 2010.
- [4] C. Grabe, *Experimental testing and parameter identification on the multidimensional material behavior of shape memory alloys*. PhD thesis, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, Germany, Jun 2007.
- [5] M. Jovanović, V. Lazić, D. Adamović, and N. Ratković, *Mašinski materijali*. Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet u Kragujevcu, 2003.
- [6] W. Buehler, J. Gilfrich, and R. Wiley, “Effect of low-temperature phase changes on the mechanical properties of alloys near composition TiNi,” *Journal of Applied Physics*, vol. 34, no. 5, pp. 1475–1477, 1963.
- [7] S. Barbarino, E. Saavedra Flores, R. Ajaj, I. Dayyani, and M. Friswell, “A review on shape memory alloys with applications to morphing aircraft,” *Smart Materials and Structures*, vol. 23, no. 6, p. 063001, 2014.
- [8] E. Pieczyska, H. Tobushi, and K. Kulasinski, “Development of transformation bands in TiNi SMA for various stress and strain rates studied by a fast and sensitive infrared camera,” *Smart Materials and Structures*, vol. 22, no. 3, p. 035007, 2013.
- [9] M. Panico and L. Brinson, “A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 55, no. 11, pp. 2491 – 2511, 2007.

- [10] J. Shaw and S. Kyriakides, “Thermomechanical aspects of NiTi,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 43, no. 8, pp. 1243 – 1281, 1995.
- [11] J. Hallai and S. Kyriakides, “Underlying material response for Lüders-like instabilities,” *International Journal of Plasticity*, vol. 47, no. 0, pp. 1 – 12, 2013.
- [12] E. Pieczyska, S. Gadaj, W. Nowacki, and H. Tobushi, “Phase-transformation fronts evolution for stress- and strain-controlled tension tests in TiNi shape memory alloy,” *Experimental Mechanics*, vol. 46, no. 4, pp. 531–542, 2006.
- [13] E. Pieczyska, *Analiza doświadczalna właściwości termomechanicznych stopów TiNi oraz poliuretanu z pamięcia kształtu (Experimental Analysis of Thermomechanical Properties of TiNi Shape Memory Alloys and Shape Memory Polyurethane)*. Prace IPPT-IFTR Reports, Institute of Fundamental Technological Research of the Polish Academy of Sciences, 2008. in Polish, graphs in English, Habilitation thesis.
- [14] E. Pieczyska, “Experimental investigation of stress-induced martensite transformation activity in shape memory alloy,” report grant No NN501 2208 37, Institute of Fundamental Technological Research of the Polish Academy of Sciences, 2012.
- [15] E. Pieczyska, M. Staszczak, V. Dunić, R. Slavković, H. Tobushi, and K. Takeda, “Development of Stress-Induced Martensitic Transformation in TiNi Shape Memory Alloy,” *Journal of Materials Engineering and Performance*, vol. 23, no. 7, pp. 2505–2514, 2014.
- [16] V. Dunić, E. Pieczyska, H. Tobushi, M. Staszczak, and R. Slavković, “Experimental and numerical thermo-mechanical analysis of shape memory alloy subjected to tension with various stress and strain rates,” *Smart Materials and Structures*, vol. 23, no. 5, p. 055026, 2014.
- [17] H. Tobushi, R. Matsui, K. Takeda, and E. Pieczyska, *Mechanical Properties of Shape Memory Materials*. Materials Science and Technologies, Mechanical Engineering Theory and Applications, NOVA Publishers, 2013.
- [18] E. Pieczyska, “Mechanical behavior and infrared imaging of ferromagnetic NiFeGaCo SMA single crystal subjected to subsequent compression cycles,” *Meccanica*, vol. 50, no. 2, pp. 585–590, 2015.

- [19] F. Auricchio, E. Boatti, and M. Conti, “Chapter 11 - SMA Biomedical Applications,” in *Shape Memory Alloy Engineering* (L. L. Concilio, ed.), pp. 307 – 341, Boston: Butterworth-Heinemann, 2015.
- [20] J. Arghavani, *Thermo-mechanical behavior of shape memory alloys under mutiaxial loadings: constitutive modeling and numerical implementation at small and finite strains*. PhD thesis, Sharif University of Technology, Tehran, Iran, September 2010.
- [21] F. Auricchio, E. Boatti, and M. Conti, “Chapter 12 - SMA Cardiovascular Applications and Computer-Based Design,” in *Shape Memory Alloy Engineering* (L. L. Concilio, ed.), pp. 343 – 367, Boston: Butterworth-Heinemann, 2015.
- [22] D. Christ and S. Reese, “A finite element model for shape memory alloys considering thermomechanical couplings at large strains,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, no. 20, pp. 3694–3709, 2009.
- [23] C. Menna, F. Auricchio, and D. Asprone, “Chapter 13 - applications of Shape Memory Alloys in Structural Engineering,” in *Shape Memory Alloy Engineering* (L. L. Concilio, ed.), pp. 369 – 403, Boston: Butterworth-Heinemann, 2015.
- [24] D. Helm, “Numerical simulation of martensitic phase transitions in shape memory alloys using an improved integration algorithm,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69, no. 10, pp. 1997–2035, 2007.
- [25] I. Aerofit, “Shape Memory Alloy (SMA), Fluid Fitting System, Product Handbook and Engineering Data,” 2015.
- [26] G. Song, N. Ma, and H.-N. Li, “Applications of shape memory alloys in civil structures,” *Engineering Structures*, vol. 28, no. 9, pp. 1266–1274, 2006.
- [27] V. Torra, C. Auguet, A. Isalgue, G. Carreras, P. Terriault, and F. Lovey, “Built in dampers for stayed cables in bridges via SMA. The SMARTeR-ESF project: A mesoscopic and macroscopic experimental analysis with numerical simulations,” *Engineering Structures*, vol. 49, no. 0, pp. 43 – 57, 2013.
- [28] D. Lagoudas, D. Hartl, Y. Chemisky, L. Machado, and P. Popov, “Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys,” *International Journal of Plasticity*, vol. 32–33, no. 0, pp. 155–183, 2012.

- [29] J. Arghavani, F. Auricchio, R. Naghdabadi, A. Reali, and S. Sohrabpour, “A 3D finite strain phenomenological constitutive model for shape memory alloys considering martensite reorientation,” *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 22, no. 5, pp. 345–362, 2010.
- [30] D. Hartl, *Modeling of shape memory alloys considering rate-independent and rate-dependent irrecoverable strains*. PhD thesis, Texas A&M University, USA, December 2009.
- [31] C. Liang and C. Rogers, “A multi-dimensional constitutive model for shape memory alloys,” *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 26, no. 3, pp. 429–443, 1992.
- [32] B. Raniecki and C. Lexcellent, “RL-models of pseudoelasticity and their specification for some shape memory solids,” *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 13, no. 1, pp. 21 – 50, 1994.
- [33] S. Leclercq and C. Lexcellent, “A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, no. 6, pp. 953 – 980, 1996.
- [34] J. Boyd and D. Lagoudas, “A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. part I. The monolithic shape memory alloy,” *International Journal of Plasticity*, vol. 12, no. 6, pp. 805–842, 1996.
- [35] B. Raniecki and C. Lexcellent, “Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys,” *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 17, no. 2, pp. 185 – 205, 1998.
- [36] A. Souza, E. Mamiya, and N. Zouain, “Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations,” *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 17, no. 5, pp. 789 – 806, 1998.
- [37] M. Qidwai and D. Lagoudas, “Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, no. 6, pp. 1123–1168, 2000.
- [38] M. Qidwai and D. Lagoudas, “On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material,” *International Journal of Plasticity*, vol. 16, no. 10–11, pp. 1309 – 1343, 2000.

- [39] F. Auricchio, “A robust integration–algorithm for a finite-strain shape memory alloy superelastic model,” *International Journal of Plasticity*, vol. 17, no. 7, pp. 971–990, 2001.
- [40] P. Thamburaja and L. Anand, “Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, no. 4, pp. 709–737, 2001.
- [41] C. LExcellent, A. Vivet, C. Bouvet, S. Calloch, and P. Blanc, “Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape–memory alloys,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, no. 12, pp. 2717–2735, 2002.
- [42] F. Auricchio and L. Petrini, “Improvements and algorithmical considerations on a recent three–dimensional model describing stress-induced solid phase transformations,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 55, no. 11, pp. 1255–1284, 2002.
- [43] F. Auricchio and L. Petrini, “A three-dimensional model describing stress–temperature induced solid phase transformations: solution algorithm and boundary value problems,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, no. 6, pp. 807–836, 2004.
- [44] F. Auricchio and L. Petrini, “A three–dimensional model describing stress–temperature induced solid phase transformations: thermomechanical coupling and hybrid composite applications,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, no. 5, pp. 716–737, 2004.
- [45] D. Helm and P. Haupt, “Shape memory behaviour: modelling within continuum thermomechanics,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 4, pp. 827 – 849, 2003.
- [46] P. Popov and D. Lagoudas, “A 3-D constitutive model for shape memory alloys incorporating pseudoelasticity and detwinning of self–accommodated martensite,” *International Journal of Plasticity*, vol. 23, no. 10–11, pp. 1679 – 1720, 2007. In honor of Professor Dusan Krajcinovic.
- [47] W. Zaki and Z. Moumni, “A three–dimensional model of the thermomechanical behavior of shape memory alloys,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 55, no. 11, pp. 2455 – 2490, 2007.

- [48] S. Reese and D. Christ, “Finite deformation pseudo-elasticity of shape memory alloys – constitutive modelling and finite element implementation,” *International Journal of Plasticity*, vol. 24, no. 3, pp. 455 – 482, 2008.
- [49] P. Thamburaja, “A finite-deformation-based phenomenological theory for shape-memory alloys,” *International Journal of Plasticity*, vol. 26, no. 8, pp. 1195 – 1219, 2010. Special Issue In Honor of Lallit Anand.
- [50] J. Arghavani, F. Auricchio, R. Naghdabadi, A. Reali, and S. Sohrabpour, “A 3-D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings,” *International Journal of Plasticity*, vol. 26, no. 7, pp. 976 – 991, 2010.
- [51] J. Arghavani, F. Auricchio, R. Naghdabadi, A. Reali, and S. Sohrabpour, “A 3D finite strain phenomenological constitutive model for shape memory alloys considering martensite reorientation,” *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 22, no. 5, pp. 345–362, 2010.
- [52] D. Hartl, G. Chatzigeorgiou, and D. Lagoudas, “Three-dimensional modeling and numerical analysis of rate-dependent irrecoverable deformation in shape memory alloys,” *International Journal of Plasticity*, vol. 26, no. 10, pp. 1485–1507, 2010.
- [53] J.-P. Teeriaho, “An extension of a shape memory alloy model for large deformations based on an exactly integrable eulerian rate formulation with changing elastic properties,” *International Journal of Plasticity*, vol. 43, no. 0, pp. 153–176, 2013.
- [54] S. Stupkiewicz and H. Petryk, “A robust model of pseudoelasticity in shape memory alloys,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 93, no. 7, pp. 747–769, 2013.
- [55] R. Mirzaeifar, R. DesRoches, and A. Yavari, “Analysis of the rate-dependent coupled thermo-mechanical response of shape memory alloy bars and wires in tension,” *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 23, no. 4, pp. 363–385, 2011.
- [56] C. Morin, Z. Moumni, and W. Zaki, “A constitutive model for shape memory alloys accounting for thermomechanical coupling,” *International Journal of Plasticity*, vol. 27, no. 5, pp. 748–767, 2011.

- [57] D. Grandi, M. Maraldi, and L. Molari, “A macroscale phase-field model for shape memory alloys with non-isothermal effects: Influence of strain rate and environmental conditions on the mechanical response,” *Acta Materialia*, vol. 60, no. 1, pp. 179–191, 2012.
- [58] S. Yang and G. Dui, “Temperature analysis of one-dimensional NiTi shape memory alloys under different loading rates and boundary conditions,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, no. 20–21, pp. 3254 – 3265, 2013.
- [59] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković, and N. Grujović, *PAK-S: Program for FE Structural Analysis*. Faculty of Mechanical Engineering, University of Kragujevac, Kragujevac, 1999.
- [60] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković, and N. Grujović, *PAK-T: Program for Heat Transfer Analysis*. Faculty of Mechanical Engineering, University of Kragujevac, Kragujevac, 1999.
- [61] H. Matthies, R. Niekamp, and J. Steindorf, “Algorithms for strong coupling procedures,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, no. 17–18, pp. 2028–2049, 2006. Fluid–Structure Interaction.
- [62] H. Matthies and J. Steindorf, “Partitioned strong coupling algorithms for fluid–structure–interaction,” informatikbericht, Institute of Scientific Computing, Technische Universit at Braunschweig, 2002.
- [63] R. Niekamp, *CTL Manual for Linux/Unix for the Usage with C++*. Institut fur Wissenschaftliches Rechnen – TU Braunschweig, Germany, 2005.
- [64] M. Kojić and K.-J. Bathe, *Inelastic Analysis of Solids and Structures*. Computational Fluid and Solid Mechanics, Berlin: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH KG, 1st edition. ed., Dec. 2005.
- [65] A. Cuitiño and M. Ortiz, “A material-independent method for extending stress update algorithms from small-strain plasticity to finite plasticity with multiplicative kinematics,” *Engineering Computations*, vol. 9, no. 4, pp. 437–451, 1992.
- [66] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*. Cambridge, MA: K.-J. Bathe, Feb. 2006.
- [67] G. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics. A continuum approach for engineering*. Chichester: J. Wiley and Sons, 2000.



- [68] M. Mićunović, *Primenjena mehanika kontinuuma*. Naučna knjiga, 1990.
- [69] J. Jarić, *Mehanika kontinuuma*. Gradjevinska knjiga, 1988.
- [70] M. Živković, *Nelinearna analiza konstrukcija*. Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet, 2006.
- [71] R. Hill, “Aspects of invariance in solid mechanics,” vol. 18 of *Advances in Applied Mechanics*, pp. 1 – 75, Elsevier, 1979.
- [72] T. Brepols, I. Vladimirov, and S. Reese, “Numerical comparison of isotropic hypo- and hyperelastic-based plasticity models with application to industrial forming processes,” *International Journal of Plasticity*, vol. 63, no. 0, pp. 18 – 48, 2014. Deformation Tensors in Material Modeling in Honor of Prof. Otto T. Bruhns.
- [73] H. Xiao, O. Bruhns, and A. Meyers, “Elastoplasticity beyond small deformations,” *Acta Mechanica*, vol. 182, no. 0, pp. 31–111, 2006.
- [74] H. Xiao, O. Bruhns, and A. Meyers, “Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate,” *Acta Mechanica*, vol. 124, no. 1-4, pp. 89–105, 1997.
- [75] H. Xiao, O. Bruhns, and A. Meyers, “On objective corotational rates and their defining spin tensors,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, no. 30, pp. 4001 – 4014, 1998.
- [76] J. Simo and M. Ortiz, “A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 49, no. -, pp. 221 – 245, 1985.
- [77] E. Lee, “Elastic-plastic deformation at finite strains,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 36, no. 1, pp. 1–36, 1969.
- [78] D. Lagoudas, Z. Bo, M. Qidwai, and P. Entchev, “SMA–UM: User Material subroutine for thermomechanical constitutive model of shape memory alloys,” tech. rep., Texas A&M University, College Station, TX, 2003.
- [79] K. Tanaka, “A thermomechanical sketch of shape memory effect: Onedimensional tensile behavior,” *Res Mechanica*, vol. 18, pp. 251 – 263, 1986.

- [80] C. Liang and C. Rogers, “A multi-dimensional constitutive model for shape memory alloys,” *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 26, no. 3, pp. 429–443, 1992.
- [81] L. Machado, *Shape Memory Alloys for vibration isolation and damping*. PhD thesis, Texas A&M University, USA, December 2007.
- [82] J. Simó and T. Hughes, *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary applied mathematics: Mechanics and materials, Springer New York, 1998.
- [83] G. Weber and L. Anand, “Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic–viscoplastic solids,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 79, no. 2, pp. 173 – 202, 1990.
- [84] D. Henann and L. Anand, “A large deformation theory for rate-dependent elastic–plastic materials with combined isotropic and kinematic hardening,” *International Journal of Plasticity*, vol. 25, no. 10, pp. 1833–1878, 2009.
- [85] M. Caminero, F. Montáns, and K.-J. Bathe, “Modeling large strain anisotropic elasto-plasticity with logarithmic strain and stress measures,” *Computers & Structures*, vol. 89, no. 11–12, pp. 826–843, 2011. Computational Fluid and Solid Mechanics 2011 Proceedings Sixth {MIT} Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.
- [86] J. Simo, “A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part i. continuum formulation,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 66, no. 2, pp. 199 – 219, 1988.
- [87] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković, and N. Grujović, *Metod konačnih elemenata - Linearna analiza*. Kragujevac: Mašinski fakultet Kragujevac, Univerzitet u Kragujevcu, 1998. Serbian.
- [88] B. Schweizer and J. Wauer, “Atomistic explanation of the Gough-Joule-effect,” *The European Physical Journal B – Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 23, no. 3, pp. 383–390, 2001.
- [89] P. Høakansson, M. Wallin, and M. Ristinmaa, “Comparison of isotropic hardening and kinematic hardening in thermoplasticity,” *International Journal of Plasticity*, vol. 21, no. 7, pp. 1435 – 1460, 2005.

- [90] A. Yeckel, L. Lun, and J. Derby, “An approximate block newton method for coupled iterations of nonlinear solvers: Theory and conjugate heat transfer applications,” *Journal of Computational Physics*, vol. 228, no. 23, pp. 8566–8588, 2009.
- [91] M. Maraldi, L. Molari, and D. Grandi, “A non-isothermal phase-field model for shape memory alloys: Numerical simulations of superelasticity and shape memory effect under stress-controlled conditions,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 23, no. 10, pp. 1083–1092, 2012.
- [92] P. Šittner, Y. Hara, and M. Tokuda, “Experimental study on the thermoelastic martensitic transformation in shape memory alloy polycrystal induced by combined external forces,” *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 26, no. 11, pp. 2923–2935, 1995.
- [93] G. Weber, A. Lush, A. Zavaliangos, and L. Anand, “An objective time-integration procedure for isotropic rate-independent and rate-dependent elastic-plastic constitutive equations,” *International Journal of Plasticity*, vol. 6, no. 6, pp. 701 – 744, 1990.
- [94] P. Thamburaja, *Constitutive equations for superelasticity in crystalline shape-memory alloys*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, October 2002.

# Додатак А

## Поступак интеграције напона

У додатку су презентовани детаљи поступка временске интеграције за феноменолошки конститутивни модел који не зависи од брзине деформације. Са  $t$  је обележно текуће време, где је  $\Delta t$  временски инкремент.

**Задато** :  $\{ {}^t\mathbf{F}, {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{F}, {}^t\xi, {}^t\mathbf{e}_{tr}, {}^tT, {}^{t+\Delta t}T, {}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\mathbf{b}^E \}$

**Потребно** :  $\{ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\Delta t}\xi, {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^E \}$

Кораци поступка рачунања су:

**Корак 1.** Рачунање пробне девијаторске еластичне деформације  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'_*$ :

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}} = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}^T.$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} = (\det {}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{F})^{-\frac{1}{3}} {}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{F} \quad {}^{t+\Delta t}{}_0\bar{\mathbf{F}} = (\det {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{F})^{-\frac{1}{3}} {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{F},$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_*^E = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} {}^t\bar{\mathbf{b}}^E {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}^T.$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'_*{}^E = {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}_*{}^E = \frac{1}{2} \ln {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_*^E = \sum_{k=1}^3 \ln \left( {}^{t+\Delta t}\bar{\lambda}_{k*}{}^E \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_k {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_k,$$

**Корак 2.** Рачунање пробне средње деформације  ${}^{t+\Delta t}e_m$  и термичке деформације  ${}^{t+\Delta t}e_{th}$ :

$${}^{t+\Delta t}e_m = \frac{1}{3} \ln [\det ({}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{F})]$$

$${}^{t+\Delta t}e_{th} = {}^{t+\Delta t}\alpha \Delta T$$

**Корак 3.** Пробна деформација трансформације:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}} = \sum_{k=1}^3 \ln \left( {}^{t+\Delta t}\bar{\lambda}_k \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_k {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}_k,$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr*} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{h} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}^E_*,$$

**Корак 4.** Рачунање пробног девијаторског напона  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_*$  и средњег напона  ${}^{t+\Delta t}\sigma_m$ :

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_* &= 2{}^{t+\Delta t}G {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'_* \\ {}^{t+\Delta t}\sigma_m &= {}^{t+\Delta t}c_m \left( {}^{t+\Delta t}e_m - {}^{t+\Delta t}e_{th} \right), \end{aligned}$$

**Корак 5.** Рачунање функције трансформације  $\Phi$ :

$$\Phi = \begin{cases} H\bar{S} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}\bar{S}^2 \left( \frac{1}{G^M} - \frac{1}{G^A} \right) + 3\sigma_m^2 \left( \frac{1}{c_m^M} - \frac{1}{c_m^A} \right) \right) + 3\sigma_m (\alpha^M - \alpha^A) \Delta T + \\ \quad \rho \Delta s_0 (T - M_s) - \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}; & \dot{\xi} > 0 \\ -\mathbf{S}'_* : {}^t\mathbf{e}_{tr*} \frac{H}{{}^t\bar{e}_{tr}} + 3G\Delta\xi H^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}\bar{S}^2 \left( \frac{1}{G^M} - \frac{1}{G^A} \right) + 3\sigma_m^2 \left( \frac{1}{c_m^M} - \frac{1}{c_m^A} \right) \right) - \\ \quad 3\sigma_m (\alpha^M - \alpha^A) \Delta T - \rho \Delta s_0 (T - A_f) + \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}; & \dot{\xi} < 0 \end{cases}$$

**Step 6.** Ако је  ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} \leq tolerance$  онда

$$\Delta\xi = 0$$

Решење је коначно - иди на корак 11.

**Корак 7.** Рачунање инкремента удела мартензита у запремини у итерацији

$${}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} + d^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\Phi^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)}}{\partial \xi} d^{t+\Delta t}\xi^{(k)} \simeq 0$$

$$d^{t+\Delta t}\xi^{(k)} = -\frac{{}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)}}{\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\Phi^{(k)}}{\partial \xi}}$$

**Корак 8.** Ажурирање прираштаја у кораку удела мартензита у запремини и текућег укупног удела мартензита у запремини:

$$\Delta {}^{t+\Delta t}\xi^{(k+1)} = \Delta {}^{t+\Delta t}\xi^{(k)} + d^{t+\Delta t}\xi^{(k)}; \quad {}^{t+\Delta t}\xi = t\xi + \Delta {}^{t+\Delta t}\xi^{(k+1)}$$

**Корак 9.** Ажурирање ефективног девијатора напона:

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathcal{S}} = \begin{cases} {}^{t+\Delta t}\bar{\mathcal{S}}_* - 3{}^{t+\Delta t}GH\Delta^{t+\Delta t}\xi; & \dot{\xi} > 0 \\ \sqrt{{}^{t+\Delta t}\bar{\mathcal{S}}_*^2 - 6{}^{t+\Delta t}GH\Delta^{t+\Delta t}\xi \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_* : {}^t\mathbf{e}_{tr}}{t\bar{e}_{tr}} + 9{}^{t+\Delta t}G^2H^2\Delta^{t+\Delta t}\xi^2}; & \dot{\xi} < 0 \end{cases}$$

Нека је  $k = k + 1$  и иди у корак 5.

**Корак 10.** Девијатор напона на крају корака  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'$ :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}' = \begin{cases} \frac{{}^{t+\Delta t}\bar{\mathcal{S}}}{{}^{t+\Delta t}\bar{\mathcal{S}}_*} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_*; & \dot{\xi} > 0 \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_* - 2{}^{t+\Delta t}GH\Delta^{t+\Delta t}\xi \frac{{}^t\mathbf{e}_{tr}}{t\bar{e}_{tr}}; & \dot{\xi} < 0 \end{cases}.$$

**Корак 11.** Укупан напон  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$  и прираштај деформације трансформације на крају временског корака су дати као:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}' + {}^{t+\Delta t}\sigma_m \mathbf{I}; \quad {}^{t+\Delta t}\Delta \mathbf{e}_{tr} = \begin{cases} \frac{3H\Delta^{t+\Delta t}\xi}{2{}^{t+\Delta t}\bar{\mathcal{S}}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}'_*; & \dot{\xi} > 0 \\ \frac{H\Delta^{t+\Delta t}\xi}{t\bar{e}_{tr}} {}^t\mathbf{e}_{tr}; & \dot{\xi} < 0 \end{cases}.$$

**Корак 12.** Ажурирање левог Коши-Гриновог тензора  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}^E$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}^E = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_*^E (\mathbf{I} - 2\Delta^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr}).$$

**Корак 13.** Ажурирање деформације трансформације на крају временског корака  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr}$ :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{tr} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{h} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}^E,$$

где је:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{h}^E = \frac{1}{2} \ln {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}^E.$$