



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА
УНИВЕРЗИТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

Јелена М. Живковић

**УНАПРЕЂЕЊЕ, ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА И
ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ВЕРИФИКАЦИЈА
НУМЕРИЧКОГ МОДЕЛИРАЊА ОШТЕЋЕЊА И
ЛОМА МЕТАЛА ПРИМЕНОМ ФАЗНОГ
МОДЕЛИРАЊА**

докторска дисертација

Крагујевац, 2022.



UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF ENGINEERING
UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC

Jelena M. Živković

**IMPROVEMENT, IMPLEMENTATION AND
EXPERIMENTAL VERIFICATION OF NUMERICAL
MODELING OF DAMAGE AND FRACTURE OF
METALS USING PHASE-FIELD MODELING**

Doctoral Dissertation

Kragujevac, 2022.

Аутор
Име и презиме: Јелена Живковић
Датум и место рођења: 10.06.1989. год., Крагујевац, Република Србија
Садашње запослење: виши стручни сарадник, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу
Докторска дисертација
Наслов: Унапређење, имплементација и експериментална верификација нумеричког моделирања оштећења и лома метала применом фазног моделирања
Број страница: 117
Број слика: 109
Број библиографских података: 92
Установа и место где је рад израђен: Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу
Научна област (УДК): 621:[531+539.422] Опште машинство; Општа механика. Механика чврстих и крутих тела; Облик лома, микроструктура лома
Ментор: др Владимир Дунић, ванр. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу
Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 09.04.2019.
Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: IV-04-715/8 од 11.09.2019.
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата:
<ol style="list-style-type: none"> 1. др Владимир Дунић, доцент, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу; 2. др Ненад Грујовић, ред. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу; 3. др Гордана Јовичић, ред. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу; 4. др Владимир П. Миловановић, доцент, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу; 5. др Драгослав Шумарац, ред. проф., Грађевински факултет Универзитета у Београду;
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:
<ol style="list-style-type: none"> 1. др Ненад Грујовић, ред. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу; 2. др Гордана Јовичић, ред. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу; 3. др Драган Ракић, ванр. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу; 4. др Владимир П. Миловановић, доцент, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу; 5. др Зијаж Бурзић, научни саветник, Војно-технички институт у Београду;
Датум одбране докторске дисертације:

Захвалност

Користим прилику да издвојим најзначајније особе и компаније које су ми помогле да што квалитетније урадим своју докторску дисертацију.

Најискреније се захваљујем свом ментору др Владимиру Дунићу, ванредном професору, на указаном поверењу, великој помоћи, корисним стручним и животним саветима, стрпљењу и разумевању током израде ове дисертације.

Захваљујем се проф. др Гордани Јовичић на помоћи и успешној сарадњи током свих нивоа студија, као и на корисним сугестијама које су допринеле да ова дисертација буде што квалитетнија. Велику захвалност дугујем др Владимиру Миловановићу, доценту, на несебичној помоћи око експерименталних испитивања, корисним саветима и искреној подршци током студија. Захваљујем се др Драгану Ракићу, ванредном професору, на корисним сугестијама приликом израде дисертације. Захваљујем се и осталим члановима комисије за оцену моје докторске дисертације, проф. др Ненаду Грујовићу и др Зијаху Бурзићу.

Захваљујем се породици Милановић, компанијама MIND Group doo из Лужница и Siemens Mobility doo из Церовца на донираном материјалу и на изради епрувета за испитивање. Велику захвалност дугујем Андреји Радовановићу, проф. др Бранки Јордовић и свим запосленима на IMW институту из Лужница на несебичној помоћи приликом извођења металографских испитивања. Захваљујем се и др Драгану Џунићу, доценту, на помоћи приликом анализе испитиваних узорака на скенирајућем електронском микроскопу.

Захваљујем се проф. др Ненаду Филиповићу на пруженим приликама да у иностранству унапредим своје знање током докторских студија кроз тренинг школе у Италији и на Кипру, као и кроз студијски боравак на Техничком универзитету у Бечу. Захвалност дугујем и проф. др Драгану Адамовићу који ми је свесрдно пружао подршку током свих нивоа студија.

Ову прилику користим да се захвалим и колегама из Центра за инжењерски софтвер и динамичка испитивања најпре на пријатељству, а затим на пријатној радној атмосфери и сарадњи. Посебно бих истакла колегу др Александра Дишића, који нас је нажалост прерано напустио, чије су искуство и савети били од великог значаја.

Највећу захвалност на разумевању и несебичној подршци дугујем мојој породици, оцу Мирославу, мајци Зорици и брату Павлу.

Резиме

Модел фазног поља оштећења (енг. Phase Field Damage Model - PFDM) представља најсавременији вид симулације предвиђања развоја оштећења и прлина у материјалу. У овој дисертацији је модификован фон Мизесов материјални модел за пластичност метала и имплементирана је побољшана варијанта PFDM да би се симулирало жилаво понашање метала. Побољшања која су предложена и имплементирана у оквиру ове докторске дисертације су:

1) нов облик променљиве спрезања пластичности и оштећења која се активира након достизања критичне вредности еквивалентне пластичне деформације;

2) проширење фон Мизесовог модела двоинтервалском функцијом течења која се састоји од перфектне пластичности или линеарног ојачања са проширеном Симовом функцијом ојачања.

Експериментална испитивања једноосним затезањем извршена су на епруветама од легуре алуминијума 5083 и челика S355 у циљу идентификације параметара материјала за верификацију имплементираниог PFDM. Наизменична итеративна шема, мултипликативна декомпозиција градијента деформације и логаритамска мера деформације имплементирани су у софтвер ПАК који ради на принципу методе коначних елемената. Предложена имплементација PFDM је прво верификована на примеру са једним коначним елементом из литературе, а затим су спроведена експериментална испитивања узорака и нумеричка симулација одговарајућих МКЕ модела. Забележено је одлично квалитативно и квантитативно преклапање кривих зависности сила-померање добијених експериментално и нумерички. Предности предложене имплементације PFDM су боља контрола симулације развоја оштећења у конструкцијама направљеним од легуре алуминијума или челика, као и лако проширење постојећег фон Мизесовог модела пластичности.

Кључне речи: моделирање фазног поља оштећења, модификовани модел оштећења, пластичност великих деформација, легура алуминијума 5083, S355 челик, жилав лом, двоинтервалска функција течења

Abstract

Phase-Field Damage Model (PFDM) represents a state-of-the-art simulation tool for predicting damage and crack evolution in materials. This dissertation shows the modification of the von Mises metal plasticity material model and implementation of improved PFDM to simulate ductile behaviour of metallic materials. Proposed and implemented improvements in this thesis are:

- 1) modified variable that couples plasticity and damage and is activated after the critical equivalent plastic strain is reached;
- 2) extension of the von Mises plasticity model by a two-stage yield function consisting of perfect plasticity or linear hardening and extended Simo-type hardening function.

Experimental uniaxial tensile tests were performed using aluminium alloy 5083 and steel S355 specimens to identify the material parameters for verifying the implemented PFDM. The staggered iterative scheme, multiplicative decomposition of the deformation gradient, and logarithmic strain measure are implemented into PAK software based on the finite element method (FEM). Firstly, the proposed PFDM implementation is verified by the “one finite element” example from the literature, and after that, the experimental tests on specimens and numerical simulation of corresponding FE models were performed. Excellent qualitative and quantitative overlapping of the force-displacement curves obtained experimentally and numerically is recorded. Advantages of the proposed PFDM implementation are better control of the simulation of damage evolution in aluminium alloy or steel structures, and a straightforward extension of the existing von Mises plasticity model.

Key words: phase-field damage modeling, modified damage model, large strain plasticity, aluminium alloy 5083, S355 steel, ductile fracture, two-stage yield function

САДРЖАЈ

1	Увод.....	1
1.1	Мотивација.....	1
1.2	Преглед литературе.....	5
1.3	Циљ рада	7
1.4	Методе истраживања.....	9
1.5	Садржај рада.....	10
2	ПРЕГЛЕД И АНАЛИЗА ПОСТОЈЕЋИХ ПРИСТУПА МОДЕЛИРАЊА ЛОМА.....	12
2.1	Дискретни приступ моделирања лома.....	12
2.2	Континуални приступ моделирања лома	13
2.3	Моделирање лома применом фазног поља	14
3	ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ИСПИТИВАЊА	16
3.1	Експериментално испитивање легуре алуминијума 5083 (стања Н111 и Н321)	17
3.2	Експериментално испитивање S355 епрувета	26
4	МОДЕЛИРАЊЕ ЛОМА ПРИМЕНОМ МОДЕЛА ФАЗНОГ ПОЉА ОШТЕЋЕЊА.....	33
5	ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА У МКЕ СОФТВЕР ПАК	39
5.1	Дискретизација коначним елементима.....	39
5.2	Стратегија наизменичног решавања	44
5.3	Модификације променљиве спрезања	45
5.4	Двоинтервалска функција течења са ојачањем.....	49
5.5	Алгоритам интеграције напона за фон Мизесов услов течења за случај великих деформација	50
6	ВЕРИФИКАЦИЈА МОДИФИКОВАНОГ МОДЕЛА ФАЗНОГ ПОЉА ОШТЕЋЕЊА.....	54
6.1	Референтни пример кртог лома за верификацију PFDM	54
6.2	Верификација PFDM експерименталним резултатима	56
6.2.1	Модел коначних елемената и идентификација параметара	56
6.2.2	МКЕ симулација алуминијумских 5083 (стања Н111 и Н321) и челичних S355 епрувета.....	62
6.2.3	Утицај величине корака	74
6.2.4	Утицај густине мреже коначних елемената	76
7	ЗАКЉУЧАК	88
8	ЛИТЕРАТУРА.....	91
9	ДОДАТАК	100
9.1	Одређивање утицаја брзине деформације	100
9.2	Микроструктура узорака алуминијумске легуре 5083	109

ЛИСТА СЛИКА

Слика 1.1 Фазе оштећења и лома конструкције	1
Слика 1.2 Уочене прслине а) на глави првог цилиндра авионског клипног мотора Lycoming IO-360-B1F (Vučetić N. 2020), б) на Sgmns вагону (Milovanović V. 2016)	2
Слика 1.3 Разлика између кртог и жилавог лома	4
Слика 2.1 Разлика између дискретног и континуалног приступа моделирању лома (Seleš K. 2020)	13
Слика 2.2 Пример ширења зоне оштећења са напретком симулације (Borden M.J. 2012).....	14
Слика 3.1 Shimadzu сервохидраулични пулзатор	16
Слика 3.2 Mess & Feinwerktechnik GmbH MFA25 екстензиометар приликом испитивања а) алуминијумске и б) челичне епрувете.....	17
Слика 3.3 Облик и димензије у mm епрувета добијених од алуминијумске легуре 5083 (Dunić V. et al. 2021).....	18
Слика 3.4 Епрувете сечене у правцу ваљања, стање H111, после експерименталног једносног испитивања.....	19
Слика 3.5 Карактер лома алуминијумских епрувета	20
Слика 3.6 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених у правцу ваљања, стање H111	20
Слика 3.7 Епрувете сечене у правцу под углом од 45° у односу на правац ваљања, стање H111, после експерименталног једносног испитивања	21
Слика 3.8 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених у правцу под углом од 45° у односу на правац ваљања, стање H111.....	21
Слика 3.9 Епрувете сечене управно на правац ваљања, стање H111, после експерименталног једносног испитивања.....	22
Слика 3.10 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених управно на правац ваљања, стање H111	22
Слика 3.11 Епрувете сечене у правцу ваљања, стање H321, после експерименталног једносног испитивања.....	23
Слика 3.12 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених у правцу ваљања, стање H321	23
Слика 3.13 Епрувете сечене у правцу под углом од 45° у односу на правац ваљања, стање H321, после експерименталног једносног испитивања	24

Слика 3.14 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених у правцу под углом од 45° у односу на правац ваљања, стање Н321.....	24
Слика 3.15 Епрувете сечене управно на правац ваљања, стање Н321, после експерименталног једноосног испитивања.....	25
Слика 3.16 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених управно на правац ваљања, стање Н321.....	25
Слика 3.17 Епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, после једноосног испитивања.....	26
Слика 3.18 Епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, после једноосног испитивања.....	26
Слика 3.19 Облик и димензије S355 челичних епрувета.....	28
Слика 3.20 S355 челичне епрувете сечене у правцу ваљања после експерименталног испитивања.....	29
Слика 3.21 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних S355 челичних епрувета сечених у правцу ваљања.....	29
Слика 3.22 S355 челичне епрувете сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања после експерименталног испитивања.....	30
Слика 3.23 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних S355 челичних епрувета сечених под углом од 45° у односу на правац ваљања.....	30
Слика 3.24 S355 челичне епрувете сечене под углом од 90° у односу на правац ваљања после експерименталног испитивања.....	31
Слика 3.25 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних S355 челичних епрувета сечених под углом од 90° у односу на правац ваљања.....	31
Слика 3.26 S355 челичне епрувете после експерименталног једноосног испитивања затезањем.....	32
Слика 3.27 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних S355 челичних епрувета за сва три правца сечења.....	32
Слика 4.1 Грета са прслином на средини: фазно поље оштећења а) за оштру прслину и б) за дифузну топологију прслине (Miehe C. et al. 2010a; Molnár G. et al. 2017).....	34
Слика 5.1 Наизменична инкрементална шема решавања поља померања и поља оштећења у МКЕ софтверу.....	45
Слика 5.2 Нова променљива спрезања p (Živković J. et al. 2021) (континуална линија) у односу на еквивалентну пластичну деформацију $\bar{\epsilon}_p$ у поређењу са (Ambati M. et al. 2015b) (испрекидана линија).....	46

Слика 5.3 Дијаграм напона течења σ_y на текућој површи течења и еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ за металне материјале: нова предложена двоинтервалска функција ојачања за симулацију металних материјала са или без појаве константне вредности напона после појаве течења.....	46
Слика 6.1 Тродимензионални хексагонални коначни елемент јединичних димензија са граничним условима и задатим оптерећењем	54
Слика 6.2 Зависност аксијалног напона и аксијалне деформације за пример једног коначног елемента.....	55
Слика 6.3 Зависност оштећења и аксијалне деформације за пример једног коначног елемента	56
Слика 6.4 Мрежа коначних елемената, имперфекција, оптерећење и гранични услови	57
Слика 6.5 Поређење дијаграма стварног и номиналног напона и деформације	58
Слика 6.6 Поређење дијаграма измереног и естимираног односа напон - пластична деформација	60
Слика 6.7 Епрувета алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечена у правцу ваљања са пољем еквивалентне пластичне деформације у критичној зони после експерименталног испитивања.....	63
Слика 6.8 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечену у правцу ваљања	64
Слика 6.9 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечену под углом од 45° у односу на правац ваљања.....	64
Слика 6.10 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечену управно на правац ваљања.....	65
Слика 6.11 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечену у правцу ваљања	65
Слика 6.12 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечену под углом од 45° у односу на правац ваљања.....	66
Слика 6.13 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечену управно на правац ваљања.....	66
Слика 6.14 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за челичну S355 епрувету сечену у правцу ваљања	67
Слика 6.15 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за челичну S355 епрувету сечену под углом од 45° у односу на правац ваљања...	67

Слика 6.16 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за челичну S355 епрувету сечену управно на правац ваљања	68
Слика 6.17 МКЕ резултати симулације Н111 0°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност	69
Слика 6.18 МКЕ резултати симулације Н111 45°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност	70
Слика 6.19 МКЕ резултати симулације Н111 90°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност	70
Слика 6.20 МКЕ резултати симулације Н321 0°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност	71
Слика 6.21 МКЕ резултати симулације Н321 45°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност	71
Слика 6.22 МКЕ резултати симулације Н321 90°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност	72
Слика 6.23 МКЕ резултати симулације S355 0°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност	72
Слика 6.24 МКЕ резултати симулације S355 45°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност	73
Слика 6.25 МКЕ резултати симулације S355 90°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност	73
Слика 6.26 Анализа осетљивости наизменичне шеме на различите величине корака задатог померања за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечену у правцу ваљања	74

Слика 6.27 Анализа осетљивости наизменичне шеме на различите величине корака задатог померања за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечену у правцу ваљања 75

Слика 6.28 Анализа осетљивости наизменичне шеме на различите величине корака задатог померања за челичну S355 епрувету сечену у правцу ваљања..... 75

Слика 6.29 Анализа осетљивости наизменичне шеме на различите величине корака задатог померања за челичну S355 епрувету сечену управно на правац ваљања 76

Слика 6.30 Утицај величине мреже на одзив сила - померање за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечену у правцу ваљања 77

Слика 6.31 Утицај величине мреже на одзив сила - померање за челичну S355 епрувету сечену у правцу ваљања 77

Слика 6.32 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете Н111 0° за а) 9.60mm, б) 9.64mm, в) 9.68mm, г) 9.72mm, д) 9.76mm, ђ) 9.80mm 78

Слика 6.33 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете Н111 45° за а) 11.88mm, б) 11.92mm, в) 11.96mm, г) 12mm, д) 12.04mm, ђ) 12.08mm ... 79

Слика 6.34 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете Н111 90° за а) 10.08mm, б) 10.12mm, в) 10.16mm, г) 10.20mm, д) 10.24mm, ђ) 10.28mm 79

Слика 6.35 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете Н321 0° за а) 6.76mm, б) 6.80mm, в) 6.84mm, г) 6.88mm, д) 6.92mm, ђ) 6.96mm 80

Слика 6.36 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете Н321 45° за а) 11.76mm, б) 11.80mm, в) 11.84mm, г) 11.88mm, д) 11.92mm, ђ) 11.96mm 80

Слика 6.37 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете Н321 90° за а) 8.88mm, б) 8.92mm, в) 8.96mm, г) 9mm, д) 9.04mm, ђ) 9.08mm 81

Слика 6.38 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете S355 0° за а) 15.16mm, б) 15.20mm, в) 15.24mm, г) 15.28mm, д) 15.32mm, ђ) 15.36mm 81

Слика 6.39 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете S355 45° за а) 14.60mm, б) 14.64mm, в) 14.68mm, г) 14.72mm, д) 14.76mm, ђ) 14.80mm 82

- Слика 6.40 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете S355 90° за а) 13.88mm, б) 13.92mm, в) 13.96mm, г) 14 mm, д) 14.04mm, б) 14.08mm .. 82
- Слика 6.41 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H111 0° за а) 9.60mm, б) 9.64mm, в) 9.68mm, г) 9.72mm, д) 9.76mm, б) 9.80mm . 83
- Слика 6.42 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H111 45° за а) 11.88mm, б) 11.92mm, в) 11.96mm, г) 12mm, д) 12.04mm, б) 12.08mm 83
- Слика 6.43 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H111 90° за а) 10.08mm, б) 10.12mm, в) 10.16mm, г) 10.20mm, д) 10.24mm, б) 10.28mm 84
- Слика 6.44 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H321 0° за а) 6.76mm, б) 6.80mm, в) 6.84mm, г) 6.88mm, д) 6.92mm, б) 6.96mm . 84
- Слика 6.45 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H321 45° за а) 11.76mm, б) 11.80mm, в) 11.84mm, г) 11.88mm, д) 11.92mm, б) 11.96mm 85
- Слика 6.46 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H321 90° за а) 8.88mm, б) 8.92mm, в) 8.96mm, г) 9mm, д) 9.04mm, б) 9.08mm 85
- Слика 6.47 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете S355 0° за а) 15.16mm, б) 15.20mm, в) 15.24mm, г) 15.28mm, д) 15.32mm, б) 15.36mm 86
- Слика 6.48 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете S355 45° за а) 14.60mm, б) 14.64mm, в) 14.68mm, г) 14.72mm, д) 14.76mm, б) 14.80mm 86
- Слика 6.49 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете S355 90° за а) 13.88mm, б) 13.92mm, в) 13.96mm, г) 14 mm, д) 14.04mm, б) 14.08mm 87
- Слика 9.1 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 30 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H111, за сва три правца сечења 101

Слика 9.2 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 30 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, за сва три правца сечења	101
Слика 9.3 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 3 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, за сва три правца сечења	102
Слика 9.4 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 3 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, за сва три правца сечења	102
Слика 9.5 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 0.3 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, за сва три правца сечења	103
Слика 9.6 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 0.3 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, за сва три правца сечења	103
Слика 9.7 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 0.03 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, за сва три правца сечења	104
Слика 9.8 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 0.03 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, за сва три правца сечења	104
Слика 9.9 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечене у правцу ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min	105
Слика 9.10 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечене у правцу ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min	106
Слика 9.11 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min	106
Слика 9.12 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min	107
Слика 9.13 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечене управно на правац ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min	107
Слика 9.14 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечене управно на правац ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min	108
Слика 9.15 Машина за аутоматско сечење узорака	109
Слика 9.16 Систем за затапање узорака	110

Слика 9.17 Узорак за СЕМ анализу, 5083, стање Н111, са осом затезања под углом од 45° у односу на правац ваљања	111
Слика 9.18 Површина лома узорка 5083, стање Н111, са осом затезања под углом од 45° у односу на правац ваљања	111
Слика 9.19 Површина узорка 5083, стање Н111, са осом затезања под углом од 45° у односу на правац ваљања, са одабраним тачкама за анализу хемијског састава	112
Слика 9.20 Стање Н111 за епрувету са осом затезања у правцу ваљања, Келеров реагенс (x500, x1000)	113
Слика 9.21 Стање Н111 са осом затезања под углом од 90° у односу на правац ваљања, Келеров реагенс (x500, x1000)	113
Слика 9.22 Стање Н321 за епрувету са осом затезања у правцу ваљања, Келеров реагенс (x200, x500)	114
Слика 9.23 Стање Н321 за осу затезања под углом од 90° у односу на правац ваљања, Келеров реагенс (x200, x500)	114
Слика 9.24 Стање Н111 са осом затезања под углом од а) 0°, б) 90° и в) 45° у односу на правац ваљања, Баркероов реагенс (x100)	115

ЛИСТА ТАБЕЛА

Табела 3.1 Резултати хемијског састава легуре алуминијума 5083 Н111 и 5083 Н321.....	19
Табела 3.2 Хемијски састав испитиваних челичних S355 епрувета	27
Табела 5.1 Њутн-Рапсонова итеративна процедура на нивоу коначног елемента за више поља (Molnár G. et al. 2017; Kojić M. et al. 2005)	48
Табела 6.1 Материјални параметри коришћени за моделирање фазног поља оштећења код епрувета алуминијума 5083, стања Н111 и Н321.....	61
Табела 6.2 Материјални параметри коришћени за моделирање фазног поља оштећења код епрувета челика S355	62
Табела 9.1 Резултати хемијског састава површинског слоја узорка 5083, стање Н111, са осом затезања под углом од 45° у односу на правац ваљања, у 4 одабране тачке	112

ЛИСТА ОЗНАКА

Ознака	Назив
МКЕ	Метод Коначних Елемената
PFDM	Модел фазног поља оштећења (енг. Phase Field Damage Model)
ПАК	Програм за Анализу Конструкција
XFEM	Проширена метода коначних елемената (енг. eXtended Finite Element Method)
CZM	Модел кохезивне зоне (енг. Cohesive Zone Model)
UEL	Потпрограм корисничког коначног елемента (енг. User ELeMent subroutine)
UMAT	Потпрограм корисничког материјалног модела (енг. User MATerial subroutine)
PU метода	Метода јединичне поделе (енг. Partition of Unity method)
EFG	Безмрежна Галеркинова метода (енг. Element-Free Galerkin method)
PLC	Portevin – Le Chatelier ефекат
S	површина прлине
d	променљива фазног поља оштећења
x	координата дуж греде
l_c	карактеристична дужина
γ	густина површинске енергије по јединици запремине
∇	диференцијални (набла) оператор
$\Delta\sigma$	одступање напона који се минимизује
δ	варијација променљиве
V	запремина
A	површина
ψ	густина унутрашње потенцијалне енергије
ψ^E	густина енергије еластичности оштећеног материјала
ψ_0^E	густина енергије еластичности неоштећеног материјала
$\bar{\psi}_0$	део густине унутрашње потенцијалне енергије деформације
ψ^P	густина енергије пластичности
ϕ^S	густина површинске енергије лома
ϕ^P	густина расуте енергије пластичности
W_{int}	унутрашња потенцијална енергија
W_{ext}	спољашња потенцијална енергија
Ψ	укупна унутрашња потенцијална енергија

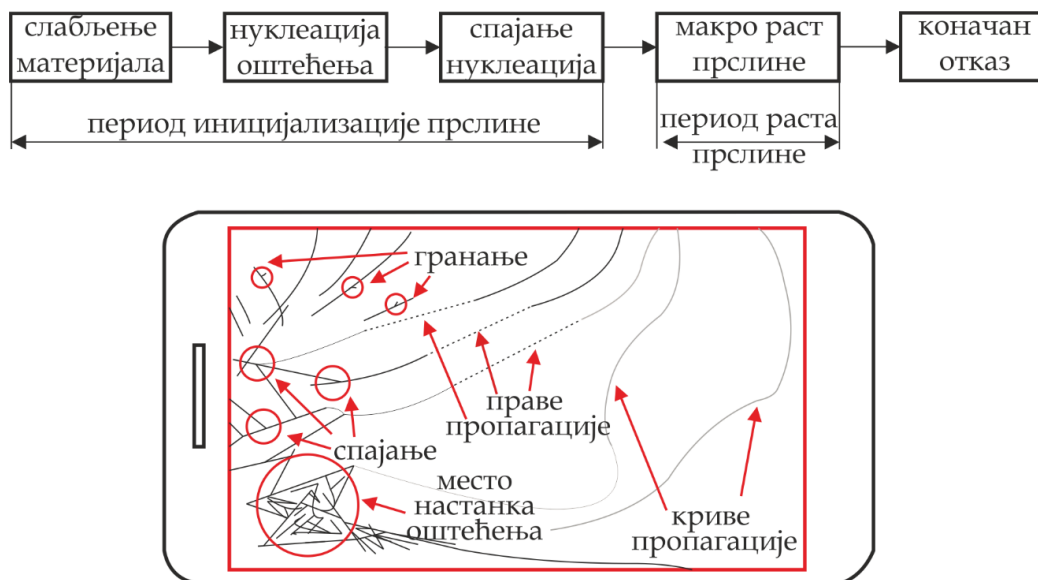
$\boldsymbol{\varepsilon}$	тензор укупне деформације
$\boldsymbol{\varepsilon}_E$	тензор еластичне деформације
$\boldsymbol{\varepsilon}_P$	тензор пластичне деформације
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P$	еквивалентна пластична деформација
g	функција деградације
\mathbf{C}_0	еластични конститутивни тензор четвртог реда
\mathbf{C}^{EP}	еласто-пластична конститутивна матрица
$\boldsymbol{\sigma}$	тензор Кошијевог напона оштећеног материјала
$\boldsymbol{\sigma}_0$	тензор Кошијевог напона неоштећеног материјала
Φ^S	површинска енергија лома
G_c	Грифитова критична брзина ослобађања енергије лома по јединици површине
G_V	критична брзина ослобађања енергије лома по јединичној запремини
σ_{yv}	почетни напон течења
σ_{y0}	напон течења на крају интервала линеарног ојачања
$\sigma_{y0,\infty}$	напон засићења ојачања
n	експонент ојачања
H_0	линеарни модул ојачања
H	модул ојачања
\mathbf{b}	поље запреминских сила по јединици запремине
\mathbf{h}	поље површинских сила по јединици површине
\mathbf{n}	јединична спољашња нормала на површину A
$\bar{\sigma}_{eq}$	еквивалентни напон
p	променљива спрезања оштећења и пластичности
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P^{crit}$	критична еквивалентна пластична деформација
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{P0}$	максимална еквивалентна пластична деформација на крају интервала линеарног ојачања
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P^{fail}$	еквивалентна пластична деформација отказа
σ_y	напон течења тренутне површи течења
\mathbf{S}_E	еластични девијаторски напон
f_y	функција течења
\mathbf{F}	градијент укупне деформације
\mathbf{F}_E	градијент еластичне деформације
\mathbf{F}_P	градијент пластичне деформације
$\bar{\mathbf{b}}_E$	леви Cauchy-Green тензор еластичне деформације
$\bar{\mathbf{h}}_E$	Хенкијева мера деформација
e_m	Средња логаритамска деформација
σ_m	средњи напон
G	модул смицања

c_m	запремински модул
E	Young-ов модул
ν	Poisson-ов коефицијент
t	Време на почетку временског корака
Δt	временски инкремент
$t + \Delta t$	време на крају временског корака
\mathbf{I}	јединични тензор
\mathbf{e}_E	девијаторска еластична деформација
\mathbf{N}^u	интерполациона матрица за померања
\mathbf{N}^d	интерполациона матрица за фазно поље оштећења
\mathbf{B}^u	матрица извода интерполационих функција за померања
\mathbf{B}^d	матрица извода интерполационих функција за фазно поље оштећења
\mathbf{d}	вектор фазног поља оштећења (чворне вредности)
$\boldsymbol{\varepsilon}^d$	деформација оштећења
\mathbf{F}^u	вектор унутрашњих сила у чворовима
\mathbf{R}	вектор спољашњих сила у чворовима
\mathbf{F}^d	вектор унутрашње енергије оштећења
\mathbf{K}^d	тангентна матрица крутости за фазно поље оштећења
\mathbf{K}^u	тангентна матрица крутости за поље померања
\mathbf{U}	вектор померања са чворним вредностима
\mathbf{u}	вектор померања у интеграционој тачки
c_{22}	елемент еластичне матрице \mathbf{C}_0
D	ширина модела KE
$l_1 + l_2$	дужина модела KE
σ	стварни напон
h	стварна деформација
σ_0	номинални напон
ε	номинална деформација
F	сила оптерећења измерена на кидалици
A_0	номинална површина попречног пресека епрувете
l_{g0}	номинална мерна дужина епрувете
Δl_g	Померање измерено екстензиометром

1 Увод

1.1 Мотивација

Приликом пројектовања инжењерских конструкција, пројектанти бирају одговарајуће конструкционе материјале у складу са нормама и стандардима и димензионишу конструкције тако да задовоље могућност излагања свим врстама оптерећења које треба узети у обзир у фази пројектовања, током градње и експлоатације, да би конструкција задовољила захтеве сигурности тако да деформације које се јављају буду у дозвољеном опсегу. Ипак, инжењерске конструкције услед деградације материјала, као и услед хабања током експлоатације, губе своја првобитно пројектована својства, па услед излагања различитим врстама предвиђених, али и непредвиђених оптерећења, долази до појаве оштећења, прлина, па у најгорем случају и лома конструкције ([Živković J. et al. 2021](#)). Такви услови могу да изазову кидане атомских веза на микро нивоу, што може довести до појаве, а касније и развоја оштећења у материјалу. Појава оштећења у конструкцији резултује променом њених механичких особина тако што долази до слабљења материјала, формирања микропрлина које својим груписањем формирају иницијалну макропрлину, а њеним даљим развојем може доћи и до потпуног лома конструкције ([Jovičić G. et al. 2016](#)). На слици 1.1 су приказане фазе од појаве оштећења у материјалу до коначног отказа конструкције.

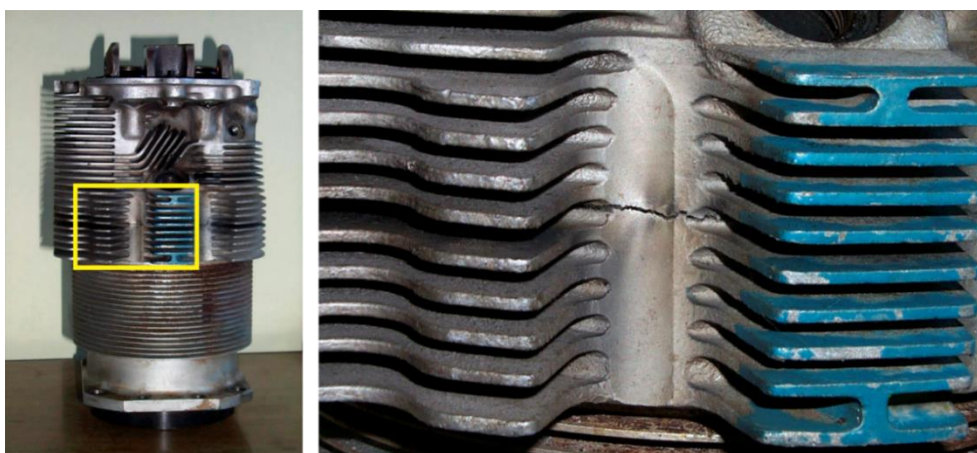


Слика 1.1 Фазе оштећења и лома конструкције

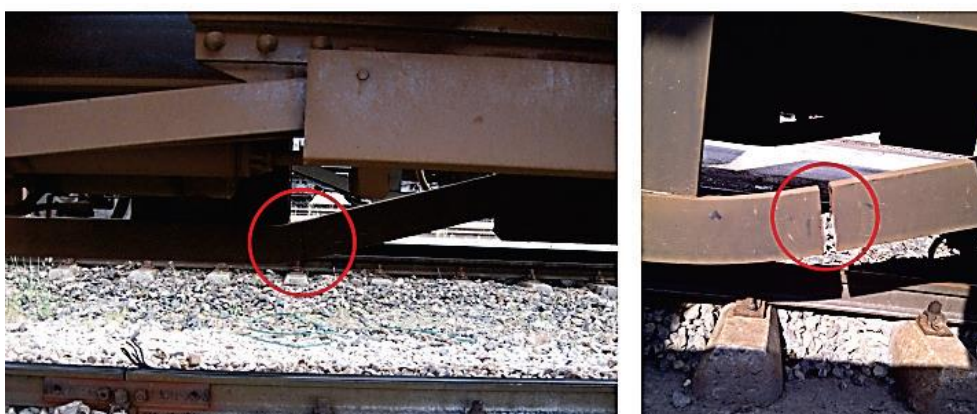
Слабљење и лом материјала су проблеми који не доводе само до материјалних и финансијских губитака узрокованих оштећењима конструкција, већ могу представљати и опасност по околину и људски живот. Такве ситуације се морају предвидети да би се продужио животни век конструкције и да би се повећала сигурност, тако да је превенција појаве оштећења и лома материјала у

раној фази пројектовања конструкције, али и у периоду након почетка експлоатације, као и код санације коришћених конструкција, од великог значаја инжењерима, истраживачима и индустрији. Потребно је понудити поуздана решења која ће омогућити пројектовање нових и проверу постојећих конструкција у којима се могу појавити оштећења.

Такође, потребно је имати поуздано решење за проверу конструкција у којима су већ уочене пррлине, за које би експериментално испитивање интегритета било скупо или неизводљиво, да би се са сигурношћу проценио преостали животни век те конструкције и да би се на време понудила решења за њено даље коришћење. На слици 1.2 су приказани примери постојећих пррлина на глави цилиндра авионског клипног мотора, као и на једном типу вагона, које се могу уочити и на конструкцијама у другим гранама индустрије.



а)



б)

Слика 1.2 Уочене пррлине а) на глави првог цилиндра авионског клипног мотора Lycoming IO-360-B1F ([Vučetić N. 2020](#)), б) на Sgmns вагону ([Milovanović V. 2016](#))

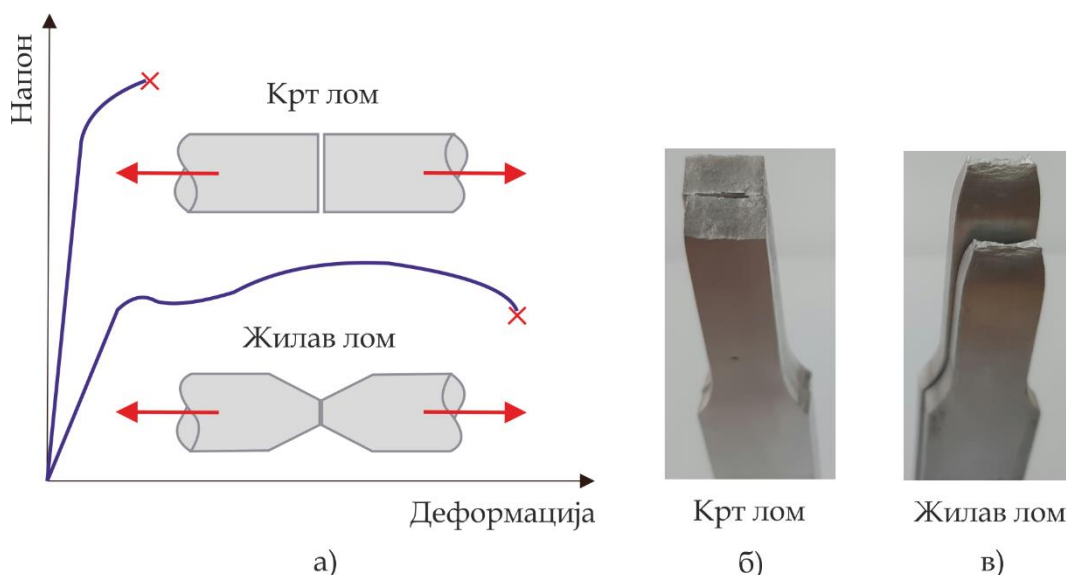
Постојеће конструкције се могу испитивати експерименталним тестовима који су дефинисани у складу са стандардима, нумеричким симулацијама коришћењем софтвера најчешће заснованих на Методи коначних елемената

(МКЕ), као и комбинацијом оба приступа. Због великих трошкова који настају извођењем експерименталних тестова, потребе за поседовањем и/или изнајмљивањем специјалне опреме за испитивање, као и њеним одржавањем, потребе за високо квалификованим особљем које је обучено за такву врсту испитивања, као и врло често потребе за уштедом времена приликом испитивања конструкције, непрестано се ради на развоју различитих нумеричких метода за симулацију појаве оштећења, настанка и ширења прслина, као и појаве и развоја лома у условима оптерећења задатим у зависности од намене конструкције и оне постепено постају примарни метод предвиђања појаве и превенције отказа. Такође, у индустрији постоји стална тежња за оптимизацијом постојећих конструкција у погледу смањења масе и побољшања перформанси. Оптимизација даље доводи до пројектовања делова конструкције сложене геометрије, где се може јавити велика концентрација напона која може да буде узрок појаве оштећења, па је јако битно предвидети и спречити могуће проблеме који могу да настану том приликом. Након одговарајуће валидације, нумеричке симулације допуњују, а некад и у потпуности замењују често скупе и дуготрајне експерименте, смањујући број потребних узорака и прототипова ([Seleš K. 2020](#)).

МКЕ спада у једну од најчешће коришћених нумеричких метода ([Wu J.-Y. et al. 2020b](#)) која се користи за развој софтвера за симулацију понашања конструкција принципом дискретизације геометрије конструкције на поддомене, односно, мање делове једноставне геометрије. Ови делови се називају коначним елементима које дефинише одређени број чворова. Њихов скуп представља мрежу коначних елемената, која се може описати системом алгебарских једначина за дискретне чворне вредности, а њиховим решавањем се добијају вредности променљивих које описују стање конструкције подвргнуте задатим оптерећењем. Између чворова елемената, непознате променљиве поља се углавном апроксимирају помоћу континуалних функција облика, због чега долази до потешкоћа у примени коначних елемената када се јаве дисконтинуитети у пољима. Због тога њихова примена у механици лома представља изазов, јер се у пољу померања могу јавити дисконтинуитети на местима где се налазе прслине и потребно је пратити та дисконтинуална померања дуж непознатих путања прслине. Да би се избегао тај проблем, најчешће се користе приступи редизајна мреже (енг. *remeshing*), где се мрежа коначних елемената мења (најчешће додатно уситњава) после сваке прогресије прслине, да би испратила нови облик скупа који чине дисконтинуитети. Проширена метода коначних елемената (енг. *eXtended Finite Element Method - XFEM*) ([Moes N. et al. 1999](#)) је предложена као алтернатива тој стратегији, јер омогућава симулацију раста прслине без редизајна мреже уз помоћ обогаћивања функција облика дисконтинуитетима.

Механика лома је опсежно проучавана још од истраживања Грифита ([Griffith A.A. 1921](#)) и Ирвина ([Irwin G.R. 1957](#)), који су поставили темељ линеарно еластичне механике лома, и представља важан део механике чврстих тела која претпоставља постојање прслине у материјалу и пружа алате за проналажење квантитативних односа између дужине прслине, отпорности материјала на раст прслине и критеријума ширења прслине. Критеријуми лома су засновани на

процени стања напона и деформација у непосредној близини прслине. Линеарно-еластична механика лома претпоставља да је све до тренутка отказа понашање материјала линеарно-еластично, што представља упрошћавање, јер је ширење прслине проузроковано појавом пластичних деформација у зони лома. Овај приступ је прихватљив у случају када је зона пластичних деформација занемарљиво мала у поређењу са димензијама целе конструкције, што је случај код кртих материјала. Грифит ([Griffith A.A. 1921](#)) је довео у везу потребну енергију која доводи до раскидања атомских веза и густину површинске енергије прслине. Потенцијална енергија тела је зависна од суме енергије еластичне деформације и површинске енергије новоформираних прслина. Ирвин ([Irwin G.R. 1957](#)) је увео концепт брзине ослобађања енергије, чиме је омогућио примену Грифитове теорије и на материјале који имају жилав лом, односно способност да издрже значајније пластичне деформације пре коначног лома. На слици 1.3 приказани су примери кртог и жилавог лома и разлика између њих.



Слика 1.3 Разлика између кртог и жилавог лома

Прслина почиње да се шири када се достигне критична вредност енергије деформације потребна да се генеришу нове површине прслине ([Borden M.J. 2012](#)). Недостатак овог приступа је тај што је могуће предвидети ширење прслине само дуж унапред познате путање. Да би се моделирао начин ширења прслине који не захтева унапред задату путању ширења, неопходни су додатни критеријуми, а код тродимензионалних проблема тај задатак постаје још тежи, услед могуће комплексније геометрије прслине.

У овој дисертацији се проучава метода која отклања овај проблем моделирањем прслине као континуалне промене од неоштећеног до потпуно оштећеног материјала. Модели овог типа се називају модели фазног поља оштећења (енг. Phase-Field Damage Model - PFDM) ([Borden M.J. 2012](#)). Главна карактеристика ових модела је увођење додатне континуалне променљиве поља – параметар фазног поља оштећења, чија вредност описује стање конструкције. На интерфејсу између различитих фаза материјала, параметар глатко

интерполира између вредности додељених различитим фазама избегавајући дисконтинуитете. Ширина дифузне транзитне зоне између различитих фаза материјала се контролише дужинском скалом у моделу, а у случају да она постане инфинитезимална, добија се модел са оштрим прелазом између интерфејса.

1.2 Преглед литературе

Принципи механике лома су опширно разматрани још од радова Грифита ([Griffith A.A. 1921](#)) и Ирвина ([Irwin G.R. 1957](#)) који су увели теорију линеарно еластичне механике лома, па ипак моделирање које предвиђа настанак и ширење прслине у материјалу остаје један од значајнијих изазова у механици чврстих тела, јер феномен стварања прслине током лома у металним конструкцијама представља комплексан процес и велики изазов за нумеричку симулацију.

На основу Грифитове теорије ([Griffith A.A. 1921](#)), раст прслине је повезан са равнотежом између запреминске еластичне енергије и површинске енергије лома кртих материјала, која се може проширити помоћу енергије пластичне деформације и дисипативне енергије пластичности за жилаве материјале ([Alessi R. et al. 2018a](#); [Alessi R. et al. 2018b](#)). До раста прслине долази када постоји довољно енергије за генерисање нових површина прслине. Док овај приступ пружа увид у сам процес лома, алтернативни метод који директно истражује стање напона око врха прслине се показао кориснијим у инжењерској пракси – фактор интензитета напона ([Irwin G.R. 1957](#)). Да би се превазишла ограничења поменутих теорија, Франкфорт и сар. ([Francfort G.A. et al. 1998](#)) су први употребили Грифитов приступ варијационе формулације укључивањем у укупну потенцијалну енергију расипање површинске енергије лома која се јавља приликом формирања прслине на чему је заснована већина PFDM. Тај варијациони приступ су унапредили Бурдин и сар. ([Bourdin B. et al. 2000](#); [Bourdin B. et al. 2008](#)) омогућавајући ефикасну нумеричку примену добијеног система парцијалних диференцијалних једначина, које у потпуности одређују развој прслине у изотропном материјалу, а анизотропна верзија овог модела је дата у ([Amor H. et al. 2009](#)).

Увођење већ постојеће прслине у модел и добро дефинисана путања прслине нису неопходни у PFDM што указује да је такав начин моделирања прслине погодан за нумеричко моделирање лома ([Miehe C. et al. 2010a](#); [Miehe C. et al. 2010b](#); [Ambati M. et al. 2015b](#)). Михе и сарадници су у ([Miehe C. et al. 2010a](#); [Miehe C. et al. 2010b](#)) представили приступ за дифузни лом заснован на PFDM и размотрили су његову нумеричку имплементацију помоћу шеме поделе оператора (енг. *split operator*). Поље локалне историје деформације је дефинисано тако да контролише развој поља прслине. Увели су интуитивну формулацију модела фазног поља оштећења базирану на чистој геометрији, механици континуума и термодинамици, због чега је ближа инжењерима у поређењу са формулацијама предложеним у ([Francfort G.A. et al. 1998](#)). Амбати и сарадници су у ([Ambati M. et al. 2015a](#)) разматрали проблем моделирања фазног

поља оштећења при кртом лому на основу Грифитове теорије. Они су предложили хибридну формулацију наизменичне (енг. staggered) шеме. Молнар и сарадници ([Molnár G. et al. 2017](#)) су такође предложили PFDM за крти лом заснован на варијационом принципу дифузног лома који не зависи од брзине деформације. Поље померања и фазно поље оштећења решавају се одвојено помоћу наизменичног приступа. Променљива фазног поља оштећења раздваја оштећено и неоштећено стање материјала ([Seleš K. et al. 2019a](#)). То је скаларна величина чија је вредност нула за неоштећен, а један за потпуно оштећен материјал ([Molnár G. et al. 2017](#)). Померање и фазно поље оштећења могу да буду спрегнути монолитним (енг. monolithic) или наизменичним (енг. staggered) приступом ([Liu G. et al. 2016](#)). Монолитни приступ израчунава поље померања и фазно поље оштећења истовремено, али због постојања локалних минимума има проблем са конвергенцијом, а наизменични алгоритам захтева добро дефинисан критеријум за заустављање прорачуна ([Ambati M. et al. 2015a](#)).

Да би се развијена теорија применила и у пракси, неки од претходно поменутих аутора су развили одговарајуће алгоритме и имплементирали PFDM у комерцијалне софтвере или софтвере отвореног кода који раде на принципу МКЕ. Имплементација PFDM у комерцијалне софтвере је веома битна, јер пружа лакши приступ овој методологији инжењерима, истраживачима и студентима. Један од најчешће коришћених комерцијалних софтвера у развоју PFDM је Абакус ([Abaqus](#)). У раду ([Msekh M.A. et al. 2015](#)) коришћен је потпрограм корисничког коначног елемента (енг. user element - UEL) са додатним степеном слободе у чвору који представља променљиву фазног поља оштећења и решава систем једначина монолитним приступом. Лиу и сар. ([Liu G. et al. 2016](#)) су користили исти софтвер да истраже оба приступа спрезања модела фазног поља оштећења: и монолитни, и наизменични, уз помоћ потпрограма корисничког материјалног модела (енг. user material - UMAT) и UEL. Азинпур и сар. ([Azinpour E. et al. 2018](#)) разматрали су аналогију између модела температуре и отказа и предложили су обједињену и директну примену PFDM у том софтверу. У раду ([Fang J. et al. 2019](#)) представљена је имплементација PFDM жилавог лома коришћењем итеративне наизменичне шеме. Уз помоћ исте шеме у ([Zhang P. et al. 2018](#)) имплементиран је PFDM за кохезивни лом. Детаљна анализа и поређење имплементација PFDM у софтвер Абакус може се наћи у ([Wu J.-Y. et al. 2020a](#)). Неки од истраживача који су користили мање познате софтвере и поделили своје кодове су Фарел и сар. ([Farrell P. et al. 2017](#)) за статички крти лом и Ли и сар. ([Li T. et al. 2016](#)) за динамички лом, користећи библиотеку FEniCS. Хајстер и сар. ([Heister T. et al. 2015](#)) и Клинсман и сар. ([Klinsmann M. et al. 2015](#)) имплементирали су модел фазног поља оштећења користећи библиотеку deal.II ([Bangerth W. et al. 2016](#)), при чему ([Klinsmann M. et al. 2015](#)) подржава и редизајн мреже.

Употреба PFDM у пластичности метала, али и других материјала, је од суштинске важности за ефикасно моделирање процеса појаве и развоја прслине ([Alessi R. et al. 2018a](#)). Пластичност је повезана са развојем пластичних деформација, док је оштећење повезано са смањењем крутости материјала ([Alessi R. et al. 2014](#)). Допринос расипању (дисипацији) енергије повезан је са пластичним деформацијама ([Alessi R. et al. 2018a](#)). Амбати и сар. су у ([Ambati R.](#)

[et al. 20156](#)) представили модел фазног поља оштећења за симулацију жилавог лома за J2-пластичност материјала, као и појаву, ширење прслине и отказ материјала. Амбати и сар. су у ([Ambati M. et al. 2016](#)) проширили PFDM на режим коначних/великих деформација. Лом се контролише скаларном вредношћу критичне пластичне деформације. Овај модел је омогућио симулацију разних појава као што су појава формирања „врата“ (енг. necking) и лом епрувета правоугаоног попречног пресека, а верификован је експерименталним тестовима на челичним и алуминијумским епруветама равног и кружног облика. Баднава и сар. ([Badnava H. et al. 2017](#)) предложили су спрезање фазног поља оштећења и пластичности која зависи од брзине деформације уз помоћ енергетске функције. Утицај енергије пластичне деформације на ширење прслине дефинисан је граничном променљивом. Михе и сар. ([Miehe C. et al. 2016](#)) представили су варијациону формулацију моделирања фазног поља оштећења при жилавом лому у случају великих деформација. Увели су независне дужинске скале за пластичну зону и прслине да би објективност мреже у посткритичним деловима била загарантована. Панеда и сар. су у ([Pañeda E.M. et al. 2018](#)) представили могућност фазног приступа као погодно решење за предвиђање катастрофалних отказа у корозивним срединама услед лома због прслина потпомогнутих водоником. Ситна мрежа је неопходна за глатку расподелу фазног поља оштећења, што може значајно да повећа „цену“ прорачуна ([Seleš K. et al. 2019a](#)). Џан и сар. ([Zhang X. et al. 2017](#)) истраживали су тачност симулације путање прслине уз помоћ мале дужинске скале, што је довело до нереалног односа сила-померање. Селеш и сар. ([Seleš K. et al. 2019a](#); [Seleš K. et al. 2019b](#)) истражили су и представили критеријум заустављања прорачуна заснован на контроли резидуалне норме у оквиру наизменичне шеме анализе лома. Први су предложили имплементацију итеративне наизменичне шеме фазног поља оштећења у комерцијални софтвер која показује рачунску ефикасност и тачност без утицаја на избор величине инкремента оптерећења. Рибейро и сар. ([Ribeiro J. et al. 2016](#)) су представили могућности Абакусовог пластичног модела оштећења за симулацију експерименталног испитивања S355NR+J2 епрувета. Експериментална верификација PFDM је представљена и у радовима ([Bleyer J. et al. 2018](#); [Nguyen T.T. et al. 2016](#)) на влакнима ојачаним композитима и гипсаном материјалу, респективно.

1.3 Циљ рада

У овој докторској дисертацији биће размотрено моделирање појаве оштећења и лома применом PFDM као континуалне промене од неоштећеног до потпуно оштећеног материјала. Циљ рада и научни допринос ове дисертације се огледа у унапређењу PFDM кроз:

1. реформулацију приступа тако да зависи од ефективних вредности напона и деформација,
2. унапређење везе ефективне пластичне деформације, оштећења и функције деградације,

3. увођење двоинтервалске функције ојачања која омогућава прецизну симулацију понашања специфичних метала,

4. експериментално испитивање понашања алуминијумских и челичних епрувета при настанку лома у циљу верификације реформулисаног и унапређеног PFDM.

Имплементацијом у МКЕ софтвер ПАК (Програм за Анализу Конструкција) ([Kojić M. et al. 2003](#)), који се развија на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, биће омогућено решавање проблема коначних/великих деформација коришћењем нове двоинтервалске функције течења за металне материјале. Коришћењем експериментално добијених резултата биће идентификовани материјални параметри који ће потом бити калибрисани помоћу методе најмањих квадрата за коришћење у нумеричким симулацијама.

Нумеричке симулације ће бити спроведене помоћу тродимензионалних (3Д) модела коначних елемената реалних геометрија експериментално испитаних типова епрувета. Следећи корак после извршених нумеричких симулација је анализа путање раста прслине, као и само поређење дијаграма зависности силе од померања добијених експериментално и нумерички. Предложени приступ примене PFDM и пластичности треба да што тачније представи понашање материјала забележено током експерименталних испитивања. Такође ће се анализирати улога критичног параметра оштећења, величина инкремента задатог оптерећења и утицај густине мреже на процес лома.

У циљу реформулације и унапређења постојећег приступа PFDM при кртом и жиљавом лому за мале и велике деформације, уведене су следеће претпоставке:

1. Ширење прслине се јавља при достизању критичне брзине ослобађања енергије деформације (Грифитова хипотеза о енергији лома).

2. Фазно поље оштећења је описано променљивом оштећења чије су вредности од нула (за неоштећен материјал) до један (за потпуно оштећен материјал).

3. Фазни приступ решавања подразумева спрегу поља померања и фазног поља оштећења.

4. Фазни приступ моделирања подразумева увођење параметра регуларизације који има димензију дужине и који представља ширину регуларизоване прслине.

5. Могуће је користити наизменични приступ за решавање система равнотежних једначина за поље померања и поље оштећења.

6. Укупан градијент деформације се кроз мултипликативну декомпозицију може приказати као производ еластичног и пластичног градијента деформације.

7. Функција деградације крутости у процесу жилагог лома зависи од величине ефективне пластичне деформације.

1.4 Методе истраживања

Научно-истраживачке методе коришћене у сврху израде ове дисертације се могу поделити на нумеричке и експерименталне методе.

МКЕ представља нумеричку методу која је примењена у изради ове дисертације. Нумеричке симулације су извршене у МКЕ софтверском пакету ПАК, који се развија у Центру за инжењерски софтвер и динамичка испитивања на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. Софтверски пакет ПАК омогућава линеарну и нелинеарну статичку и динамичку анализу конструкција, анализу провођења топлоте, интеракције између чврстих тела и флуида, а може се користити и за спрегнуте проблеме, механику лома, механику оштећења и замора, биомеханику, геомеханику, струјање кроз порозне средине, ламинарно и турбулентно струјање флуида. Да би се омогућило моделирање промене крутости материјала, у софтверски пакет ПАК за структурну анализу конструкција имплементиран је реформулисан и унапређен PFDM намењен моделирању и симулацији појаве оштећења, прслина и лома.

У циљу верификације имплементiranог унапређеног приступа PFDM спроведена су експериментална испитивања једноосним затезањем на собној температури у Центру за инжењерски софтвер и динамичка испитивања Факултета инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. Сви експериментални тестови једноосним затезањем су изведени на сервохидрауличном пулзатору EHF-EV101 K3-070-0A (Shimadzu Corporation, Токуо, Јапан) уз коришћење екстензиометра MFA25 (MF Mess- & Feinwerktechnik GmbH, Velbert, Germany) и софтвера за праћење тока испитивања, постпроцесирање и обраду добијених резултата карактеристика испитиваних материјала (напон течења, издужење до лома, затезна чврстоћа, модул еластичности). Епрувете са попречним пресеком у облику правоугаоника за експериментална испитивања затезањем припремљене су у три правца сечења у односу на правац ваљања у компанији Сименс Мобилити (Siemens Mobility doo) Церовац од легуре алуминијума 5083 (стања H111 и H321) и од конструкционог челика S355 у компанији АММ у оквиру Мајнд Групе (MIND Group doo) у Лужницама.

Припрема узорака, металографска испитивања и хемијска анализа изведени су у Институту за материјале и заваривање (IMW) у Лужницама. Хемијски састав испитиваних материјала је анализиран на оптичком емисионом спектрометру SpektroLab LACM12 (SPECTRO Analytical Instruments GmbH, Kleve, Germany). Микроструктура испитаних узорака је посматрана помоћу специјализованог металуршког микроскопа LEICA DM4 M (Leica microsystems, Wetzlar, Germany). Помоћу скенирајућег електронског микроскопа (СЕМ) Desktop Phenom у Центру за трибологију Факултета инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу посматрана је површина лома испитиваних узорака затезањем.

1.5 Садржај рада

У поглављу 2 је дат преглед и анализа постојећих приступа моделирања појаве оштећења, развоја прлина и појаве лома код метала. Описана је разлика између дискретног и континуалног приступа моделирању лома и приказана је предност моделирања лома применом фазног поља оштећења у односу на та два приступа.

У поглављу 3 су представљена експериментална испитивања спроведена у циљу верификације наизменичне итеративне шеме и валидације реформулисаног и унапређеног поступка PFDM. Једноосна испитивања затезањем на сервохидрауличном пулзатору SHIMADZU су извршена за епрувете израђене од легуре алуминијума 5083 у стањима H111 и H321, као и од конструкционог челика средње чврстоће S355. Епрувете за испитивање сва три материјала су сечене у три правца у односу на правац ваљања: под углом од 0° , 45° и 90° . Ови материјали су изабрани због њихове широке примене, нарочито у индустрији шинских возила.

Поглавље 4 садржи детаљан опис PFDM. За примену модела фазног поља оштећења на жилаво понашање материјала, густина унутрашње потенцијалне енергије се посматра као збир густине енергије еластичности, густине енергије пластичности, густине површинске енергије лома и густине расуте енергије пластичности. Представљено је извођење и спрезање водећих равнотежних једначина за PFDM, закона еволуције фазног поља оштећења, закона пластичног течења и ојачања, као и граничних услова Neumann-овог типа.

У поглављу 5 приказана је детаљна имплементација модификованог PFDM у МКЕ софтвер ПАК кроз дискретизацију помоћу стандардних коначних елемената и наизменичну шему спрезања. Приказана су главна побољшања PFDM: модификована променљива спрезања, која узима у обзир утицај оштећења изазваног пластичним деформацијама после постизања максималног напона, као и двоинтервалска функција течења за нумеричку симулацију понашања металних материјала. Та двоинтервалска функција течења обухвата два интервала у зони пластичности: 1) перфектна пластичност или линеарно ојачање и 2) проширена Симова функција течења са ојачањем. На крају поглавља, дат је алгоритам интеграције напона за фон Мизесову пластичност за случај великих деформација заснован на мултипликативној декомпозицији градијента деформације и на природној (логаритамској) мери деформације. Теорија је прилагођена да одговара наизменичној итеративној шеми за решавање померања и фазног поља оштећења.

Поглавље 6 садржи верификацију наизменичне итеративне шеме применом репрезентативног примера са једним коначним елементом доступног у литератури, као и валидацију PFDM и фон Мизесовог услова течења уз помоћ резултата добијених једноосним затезањем S355 челичних и алуминијумских 5083 епрувета (стања H111 и H321). Материјални параметри су идентификовани калибрацијом експериментално добијених дијаграма сила-померање помоћу методе најмањих квадрата, који се даље користе за поређење експерименталних и нумеричких резултата. Поређење криве сила-померање експерименталног

испитивања и резултата симулације дало је одлично квалитативно и квантитативно поклапање, док поље еквивалентне пластичне деформације у поређењу са деформисаном конфигурацијом епрувете даје добре резултате квалитативног поређења. Такође, урађена је анализа утицаја величине корака, као и утицаја густине мреже коначних елемената на добијене резултате.

У поглављу 7 дата су закључна разматрања резултата постигнутих током рада на изради дисертације, као и идеје за могуће правце даљих истраживања.

Поглавље 8 чини преглед коришћене литературе током израде ове докторске дисертације.

Поглавље 9 представља додатак ове дисертације и садржи анализу утицаја брзине деформације приликом испитивања алуминијумских епрувета на карактеристике материјала, као и приказ микроструктуре испитиваних епрувета.

2 Преглед и анализа постојећих приступа моделирања лома

Нумеричке симулације имају кључну улогу у пројектовању конструкција и развоју нових материјала, јер допуњују, а некад и у потпуности могу да замене експерименте, који често могу бити скупи и дуготрајни. Као последица тога развијено је више различитих метода моделирања појаве оштећења, развоја прлина, као и појаве лома. Веома битан корак у МКЕ анализи је направити добар избор теорије која ће бити имплементирана у оквиру коначног елемента или материјалног модела, који ће бити примењен у нумеричкој симулацији. Нумеричке методе моделирања оштећења и лома уопштено се могу поделити у две групе на основу начина на који описују оштећење и лом у конструкцији, на дискретан приступ и континуални приступ.

2.1 Дискретни приступ моделирања лома

Дискретни приступ се заснива на увођењу геометријског дисконтинуитета са оштрим прелазом у поље померања. Линеарно еластична механика лома уведена у радовима ([Griffith A.A. 1921](#); [Irwin G.R. 1957](#)) представља једну од најпознатијих теорија дискретног приступа моделирању лома. Рајс је дефинисао Ј-интеграл као параметар еласто-пластичне механике лома ([Rice J.R. 1968](#)), помоћу чије прорачунате вредности се најчешће предвиђа понашање структуре у којој се јавила прлина. Такође, једна од најзаступљенијих метода за праћење ширења дискретне прлине је модел кохезивне зоне (енг. Cohesive Zone Model - CZM) која је први пут уведена у ([Dugdale D.S. 1960](#); [Barenblatt G.I. 1962](#)) да би се решила сингуларност напона и нелинеарност испред већ постојеће прлине. Недостатак ове методе је то што прлина расте само дуж ивица елемента, тако да се јавља изражена зависност резултата од величине мреже и усмерености коначних елемената током раста прлине ([Chandra N. et al. 2002](#)). Детаљан преглед литературе CZM заједно са њеним предностима и ограничењима је дат у ([Elices M. et al. 2002](#)). Да би се избегла зависност резултата од величине мреже у циљу моделирања произвољне путање раста прлине, развијене су методе које се заснивају на редизајну (промена величине коначних елемената) мреже током прорачуна ([Tradegard A. et al. 1998](#)) или на обогаћивању поља померања дисконтинуитетима коришћењем методе јединичне поделе (енг. Partition of Unity - PU) ([Babuska I. et al. 1997](#)). Најзаступљенија метода заснована на обогаћивању поља померања је Проширена метода коначних елемената (енг. eXtended Finite Element Method - XFEM) ([Moes N. et al. 1999](#); [Dolbow J. et al. 2000](#)) у којој се симулација раста прлине врши уз помоћ обогаћивања функција облика дисконтинуитетима. Ова метода је имплементирана и у софтверски пакет ПАК ([Jovičić G. et al. 2010](#)).

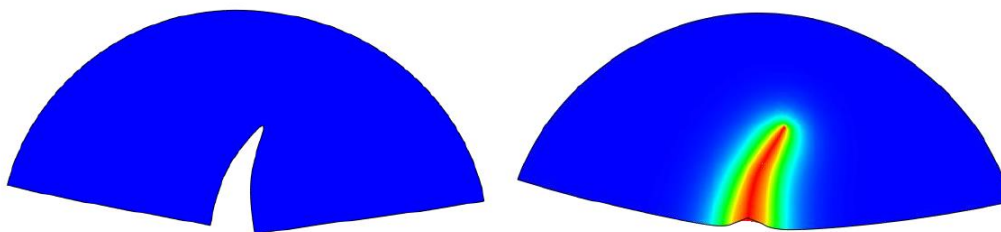
Наведени дискретни приступи моделирању лома су темељно анализирани у поменутих радовима и показало се да успешно моделирају ширење прлине код 2Д проблема. Упркос константном напретку и чињеници да су се показале веома корисним у предвиђању лома, уз неизбежну употребу

додатних критеријума за иницирање, ширење и правац раста прслине, највећи недостатак ових метода је потреба да се прати развој дисконтинуитета током нумеричке симулације. То захтева да у алгоритму постоји провера тренутне и предвиђене путање прслине која треба да одреди тренутак гранања или пресек две прслине. Тај проблем нарочито долази до изражаја при нумеричком моделирању сложених проблема лома какви се очекују у случају 3Д проблема ([Bordas S. et al. 2008](#)).

Последњих година развијене су и бројне безмрежне методе које омогућују моделирање развоја прслина без редизајна мреже, а једна од њих је безмрежна Галеркинова метода (енг. Element-Free Galerkin - EFG) предложена од стране ([Belytschko T. et al. 1994](#); [Belytschko T. et al. 1995](#)). Иако се често користе за моделирање линеарних и нелинеарних проблема раста прслина, ове методе имају неколико недостатака у поређењу са МКЕ, међу којима се највише истичу нумеричка интеграција слабе форме, дуго време прорачуна и нумеричка нестабилност, као што је приказано у ([Babuška I. et al. 2003](#)).

2.2 Континуални приступ моделирања лома

Континуални приступ моделирања оштећења и лома, који се још назива и дифузни или приступ „размазане“ (дистрибуиране) прслине (енг. smeared crack), уместо моделирања дискретне прслине, уводи параметар оштећења на нивоу интеграционе тачке, који преко функције деградације контролише крутост материјала. На слици 2.1 приказана је разлика између дискретног и континуалног приступа моделирању лома.

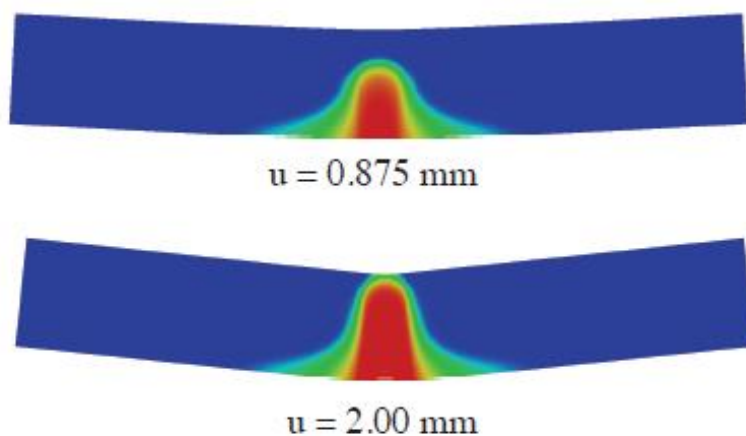


Слика 2.1 Разлика између дискретног и континуалног приступа моделирању лома ([Seleš K. 2020](#))

Предност овог приступа је што не захтева праћење интерфејса дисконтинуитета, јер се вредност параметра оштећења мења континуално дуж домена, па ови модели имају широку примену у симулирању процеса дифузног лома ([Borden M.J. 2012](#)), а детаљан преглед се може наћи у ([de Borst R. 2004a](#)). Да би се превазишао проблем зависности од величине мреже коначних елемената, развијене су теорије побољшане нелокалним градијентом, које уводе дужинску скалу у модел. Један од примера је дат у ([Peerlings R.H.J. et al. 1996](#)) где је представљена формулација градијента за квази-крт лом. У овим теоријама мера

нелокалне деформације је додатна непозната која зависи од мере локалне деформације.

Лоша страна овог приступа је што зона оштећења има тенденцију да се нереално шири у правцу нормалном на правац прслине како симулација напредује, као што је приказано на слици 2.2 ([Borden M.J. 2012](#)). У раду ([Geers M.G.D. et al. 1998](#)) је представљена формулација која решава овај проблем тако што параметар дужинске скале није константан, већ зависи од стања деформације. У раду ([de Borst R. et al. 2004b](#)) је предложено коришћење кохезивних сегмената као начин да се уједине и „размазане“ и дискретне прслине и показано је да овај приступ може да опише прелаз од расутих микро-прслина до доминантне прслине у моделима бетона. Овај други случај, међутим, захтева додатне провере критеријума увођења кохезивних сегмената у модел.



Слика 2.2 Пример ширења зоне оштећења са напретком симулације ([Borden M.J. 2012](#))

2.3 Моделирање лома применом фазног поља

Трећа могућност је алтернативна метода која не уводи дисконтинуитет у поље померања или геометрију, већ се површина лома апроксимира фазом поља (енг. phase-field). Овај приступ подразумева спрегнуто решавање парцијалних диференцијалних једначина поља померања и фазног поља оштећења. Фазно поље оштећења је континуално скаларно поље које приказује стање материјала: неоштећена или оштећена фаза. Овај параметар фазног поља оштећења има сличну улогу као параметар оштећења у континуалним моделима оштећења, који се користи да редукује чврстоћу материјала у области прслине. Развој фазног поља оштећења се дефинише парцијалном диференцијалном једначином која укључује деградацију материјала у функцији енергије деформације посматране конструкције. Овај модел такође укључује параметар дужинске скале који контролише ширину континуалне апроксимације дискретне прслине, а када он тежи нули, онда решење конвергира ка случају дискретне прслине.

Предложени приступ садржи предности и дискретног и континуалног приступа моделирању лома, јер пружа тачно моделирање индивидуалних прслина, а не захтева праћење интерфејса између оштећеног и неоштећеног материјала због тога што параметар оштећења мења вредност континуално дуж домена. Ово значајно поједностављује примену у МКЕ, нарочито код 3Д проблема.

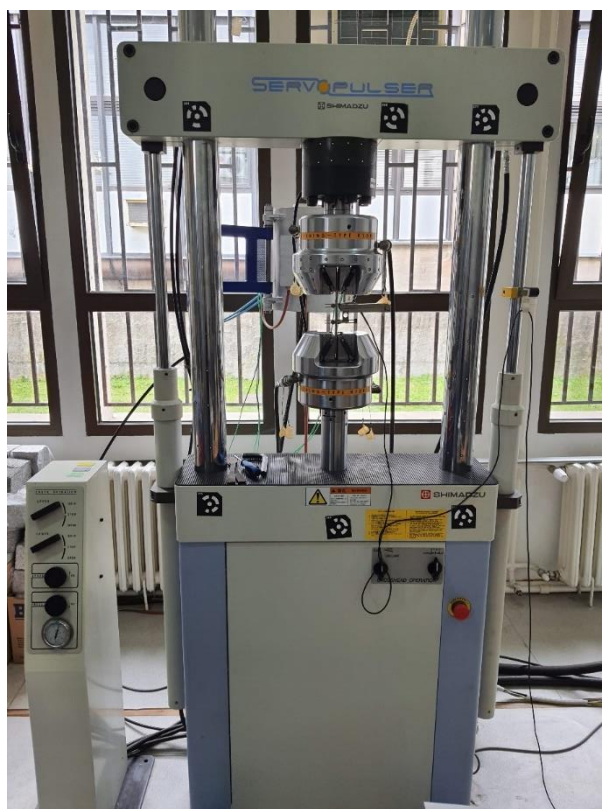
Због своје робусности, моделирање оштећења применом фазног поља оштећења је све популарније и до сада је успешно примењено за моделирање кртог ([Miehe C. et al. 2010a](#); [Miehe C. et al. 2010b](#); [Kuhn C. et al. 2015](#); [Borden M.J. et al. 2014](#); [Vukelic G. et al. 2016](#); [Busby J.S. 2001](#); [Srnc Novak J. et al. 2020](#)) и жилавог ([Miehe C. et al. 2016](#); [Borden M.J. et al. 2016](#); [Seleš K. et al. 2019b](#); [Alessi R. et al. 2018a](#); [Alessi R. et al. 2018b](#); [Ambati M. et al. 2015b](#); [Ambati M. et al. 2016](#); [Dittmann M. et al. 2018](#)) лома код метала. Детаљнији преглед PFDM за крти лом се може наћи у ([Ambati M. et al. 2015a](#)), а за жилав лом у ([Alessi R. et al. 2018](#)). Такође, PFDM се може применити и за моделирање мултифизичких проблема, а неки од њих су: лом настао хидрауличким деловањем ([Miehe C. et al. 2010a](#); [Miehe C. et al. 2010b](#)), лом у порозним медијима ([Cajuhi T. et al. 2018](#); [Miehe C. et al. 2016](#)), термомеханички лом ([Miehe C. et al. 2015](#); [Dittmann M. et al. 2020](#)).

Наведени приступи моделирању фазног поља оштећења код еласто-пластичних материјала се разликују по начину спрезања пластичности и оштећења, избору функција деградације и сл. У овој дисертацији, у поглављима 4 и 5, биће приказана унапређена теорија PFDM која је коришћена и у радовима ([Srnc Novak J. et al. 2020](#); [Alessi R. et al. 2018a](#); [Alessi R. et al. 2018b](#); [Ambati M. et al. 2015b](#); [Ambati M. et al. 2016](#); [Molnár G. et al. 2017](#); [Pañeda E.M. et al. 2018](#); [Seleš K. et al. 2019a](#); [Seleš K. et al. 2019b](#); [Živković J. et al. 2021](#); [Dunić V. et al. 2021](#)).

3 Експериментална испитивања

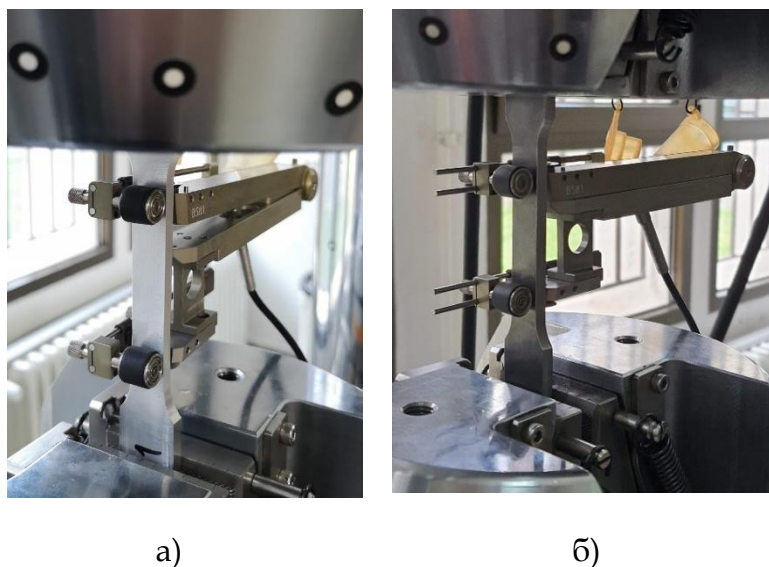
У циљу верификације унапређеног приступа моделирања фазног поља оштећења спроведено је експериментално испитивање понашања метала при настанку оштећења и лома. Једноосним затезањем испитане су материјалне карактеристике легуре алуминијума 5083 (стања H111 и H321) и конструкционог челика S355. Коришћењем експериментално добијених резултата идентификовани су следећи материјални параметри: модул еластичности, издужење до лома, напон течења и затезна чврстоћа. Добијени материјални параметри су калибрисани за коришћење у нумеричким симулацијама.

Сви експериментални тестови изведени су помоћу сервохидрауличног пулзатора - SHIMADZU EHF - EV101K3-070-0A, приказане на слици 3.1, са опсегом силе $\pm 100\text{kN}$ и померања главе $\pm 100\text{mm}$, у Центру за инжењерски софтвер и динамичка испитивања на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу.



Слика 3.1 Shimadzu сервохидраулични пулзатор

За мерење издужења и одређивање Јанговог модула еластичности коришћен је екстензиометар Mess & Feinwerktechnik GmbH MFA25 опсега 50mm, приказан на слици 3.2 приликом испитивања а) алуминијумске и б) челичне епрувете. Такође, коришћен је софтвер за праћење тока испитивања, постпроцесирање и обраду добијених резултата.



Слика 3.2 Mess & Feinwerktechnik GmbH MFA25 екстензиометар приликом испитивања а) алуминијумске и б) челичне епрувете

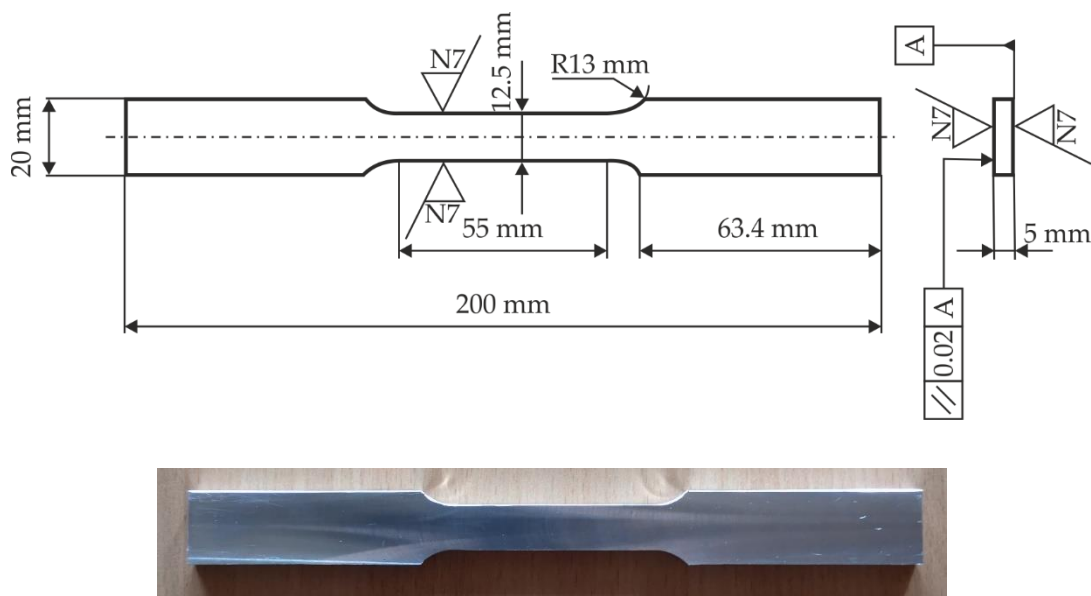
3.1 Експериментално испитивање легуре алуминијума 5083 (стања Н111 и Н321)

Алуминијумска легура 5083 има велику отпорност на корозију, нарочито у морској води, одличну заварљивост, велику јачину и жилавост и користи се у бродоградњи, шинској, аутомобилској и авио индустрији ([Tian N. et al. 2018](#); [Huang K.T. et al. 2011](#); [Bauri R. et al. 2015](#)). Због великог удела Mg, легура 5083 спада у легуре са највећом јачином и апсорбује доста енергије током лома, тако да се користи у конструкцијама које захтевају велику чврстоћу. Максимална количина Mg која може бити задржана у чврстом раствору на собној температури је 1.9 wt. % ([Alii A. 2018](#)), а у овој легури је већа, тако да постоји потенцијална нестабилност која доводи до преципитације дуж граница зрна или равни клизања ([Clausen A.H. et al. 2004](#)). Мана ове алуминијумске легуре је то што је PLC (Portevin - Le Chatelier) ефекат лако уочљив ([Benallal A. et al. 2006](#); [Chatterjee A. et al. 2009](#); [Darowicki K. et al. 2007](#)). Он представља појаву дисконтинуалног попуштања одређених материјала при испитивању на затезање и јавља се само у одређеном опсегу задатих брзина деформације и температура. Као резултат ове појаве различити типови кривих „тестерастог“ облика могу да настану на дијаграму напон-деформација и сваки утиче на механичке особине различито. Запажање у ком опсегу брзине деформације се јавља PLC ефекат је значајно, нарочито код обраде лимова и биће анализирано у додатку ове дисертације, у потпоглављу 9.1.

Епрувете потребне за статичко испитивање једноосним затезањем исечене су из хладно ваљаних плоча алуминијумске легуре 5083 (стања Н111 и Н321) дебљина 8mm у правцу ваљања и у правцима под углом од 90° и 45° у односу на правац ваљања у компанији Сименс Мобилити д.о.о. Церовац у циљу

испитивања потенцијалног анизотропног понашања материјала. Димензије и облик коришћених епрувета приказани су на слици 3.3.

Ознака стања Н даје информацију да је легура алуминијума деформационо ојачана. Први број у ознаци показује да ли је легура термички третирана и, ако јесте, којим поступком. Други број показује апроксимативно колико је легура деформационо ојачана и сваки наредни број дефинише специјалне поступке, варијације стања дефинисаног уз помоћ прва два броја. Н1 ознака представља обраду ограничену на деформационо ојачање и даје информацију да није било накнадних термичких поступака. Н3 представља деформационо ојачање праћено процесом термичке стабилизације, тј. задржавање на умерено повишеној температури да би се особине материјала стабилизовале и да би се избегло омекшавање временом. Н111 представља ознаку за меко стање, хладно ваљаног, жареног и деформационо ојачаног материјала, док Н321 означава деформационо ојачан материјал и стабилизован до $\frac{1}{4}$ тврдог стања. Микроструктура узорака оба стања је анализирана у оквиру додатка ове дисертације, потпоглавље 9.2.



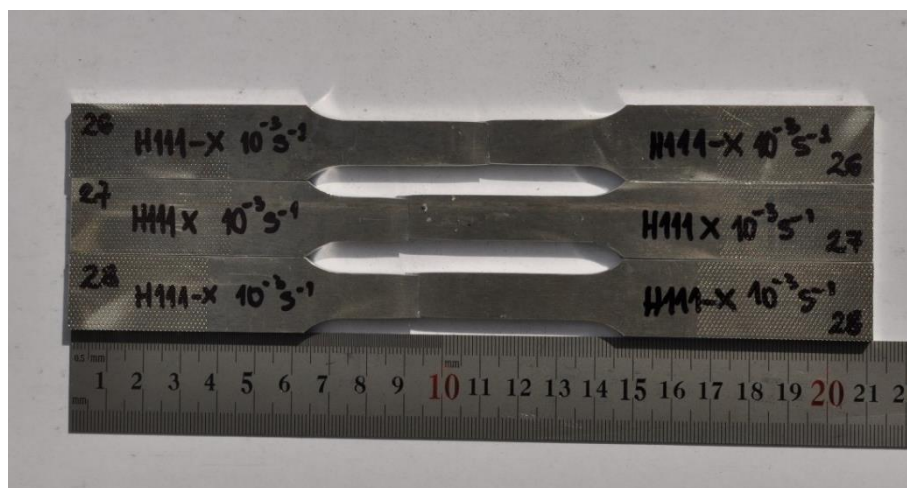
Слика 3.3 Облик и димензије у mm епрувета добијених од алуминијумске легуре 5083 ([Dunić V. et al. 2021](#))

Хемијски састав оба стања легуре алуминијума 5083 из чврстог узорка је испитан методом прописаном стандардом ([SRPS C.A1.011:2004](#)) на оптичко емисионом спектрометру SpektroLab M12 у IMW Институту Лужнице, који представља уређај последње генерације за квантитативну хемијску анализу металних узорака. Вредности добијене хемијским испитивањем дате су у Табели 3.1. Добијене вредности за сваки елемент су у опсегу прописаном поменутиим стандардом за дати материјал.

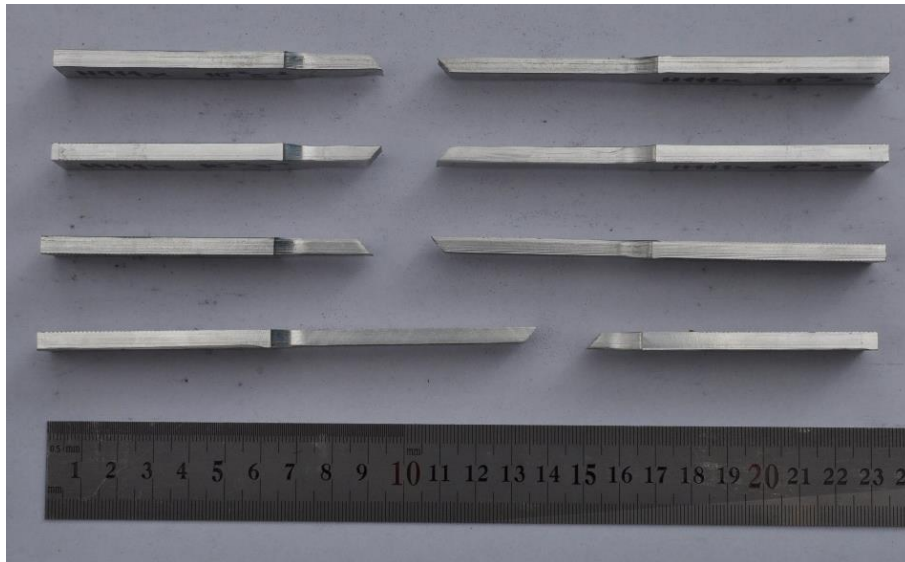
Табела 3.1 Резултати хемијског састава легуре алуминијума 5083 Н111 и 5083 Н321

Елемент	Садржај [%]		
	Al 5083 Н111	Al 5083 Н321	Реф. опсег
Si	0.172	0.121	0.00-0.40
Fe	0.360	0.3	0.00-0.40
Cu	0.036	0.045	0.00-0.10
Mn	0.639	0.901	0.40-1.00
Mg	4.651	4.957	4.00-4.90
Cr	0.074	0.083	0.05-0.25
Zn	0.094	0.011	0.05-0.25
Ti	0.021	0.011	0-0.15

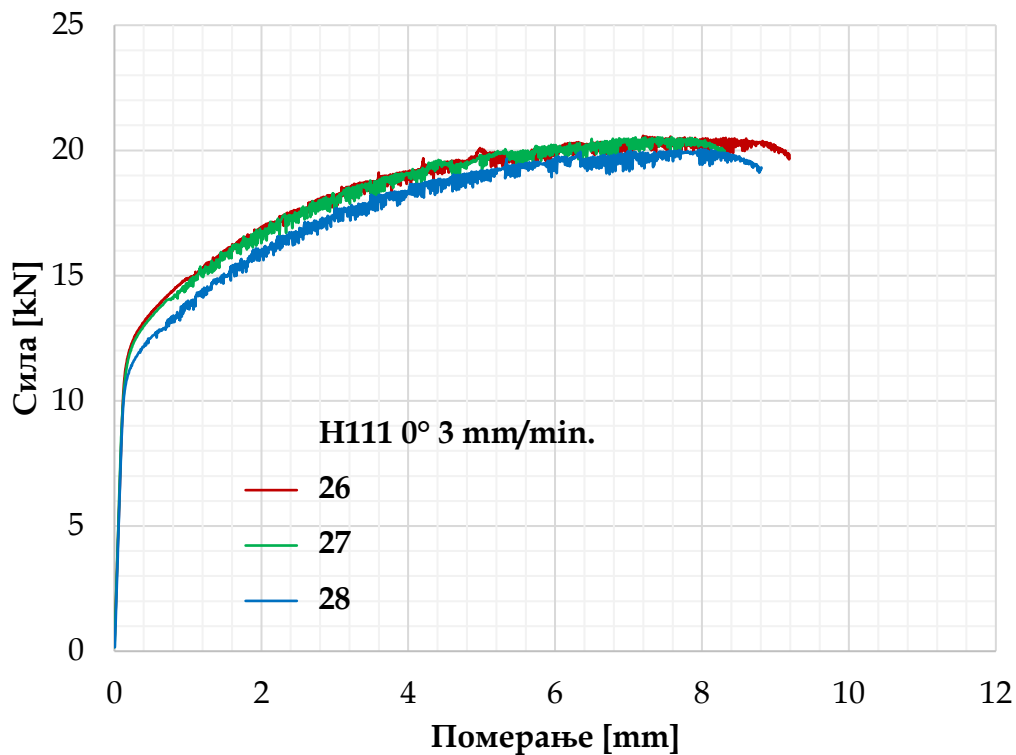
На слици 3.4 су приказане три епрувете сечене у правцу ваљања алуминијумске легуре 5083, стање Н111, после експерименталног испитивања у режиму контроле прираштаја померања константном брзином од 3 mm/min. Слика 3.5 даје увид у карактер лома испитаних алуминијумских епрувета. Забележена је зависност силе од померања и поређење добијених резултата је дато на слици 3.6. Вредности добијене испитивањем епрувете 28 одабране су као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације модификоване PFDM.



Слика 3.4 Епрувете сечене у правцу ваљања, стање Н111, после експерименталног једноосног испитивања



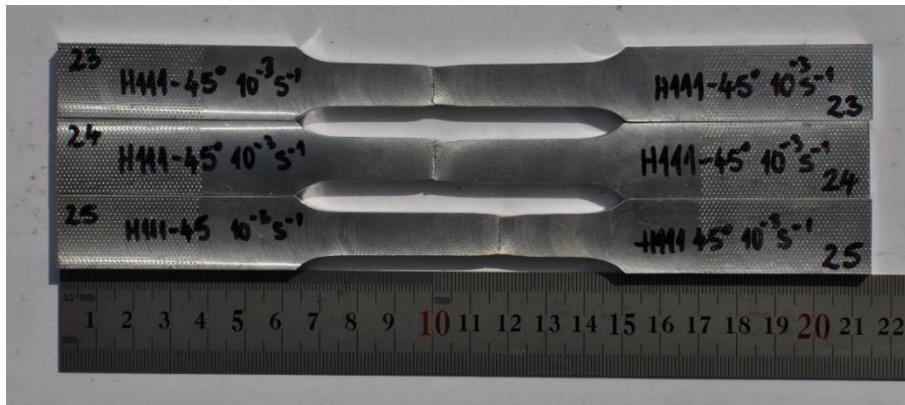
Слика 3.5 Карактер лома алуминијумских епрувета



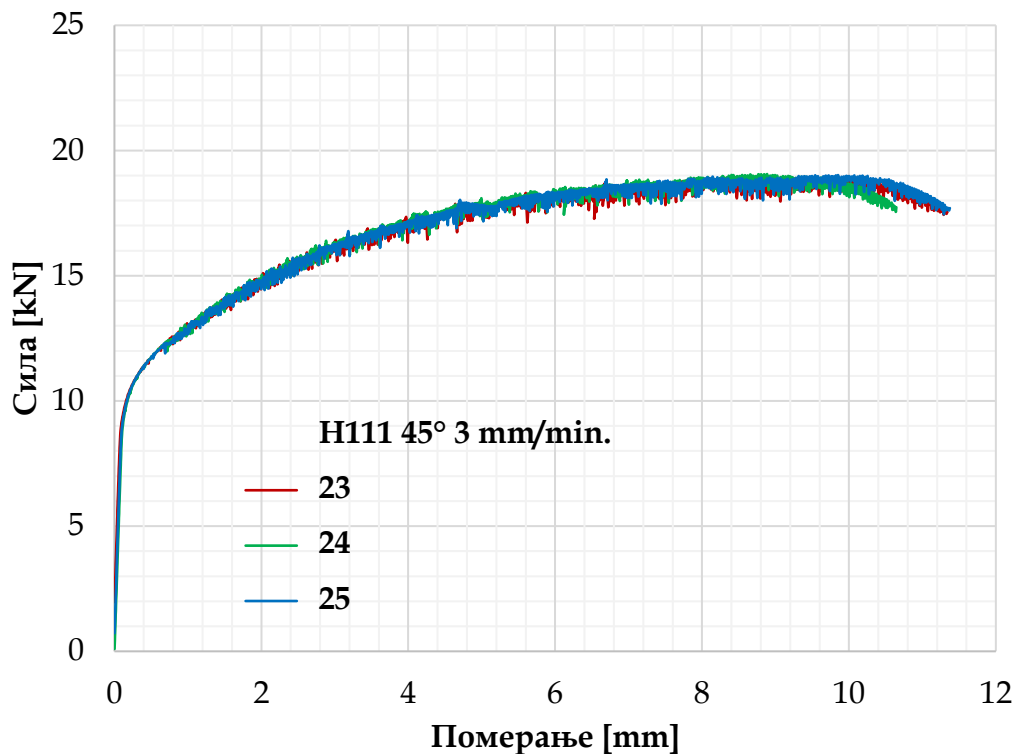
Слика 3.6 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених у правцу ваљања, стање Н111

На слици 3.7 су приказане три епрувете сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања алуминијумске легуре 5083, стање Н111, после испитивања у режиму контроле прираштаја померања константном брзином од 3 mm/min . Забележена је зависност силе од померања и поређење добијених резултата је дато на слици 3.8. Вредности добијене испитивањем епрувете 23 одабране су као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације модификоване PFDM

зато што се њен дијаграм налази између дијаграма добијених испитивањем епрувета 24 и 25.



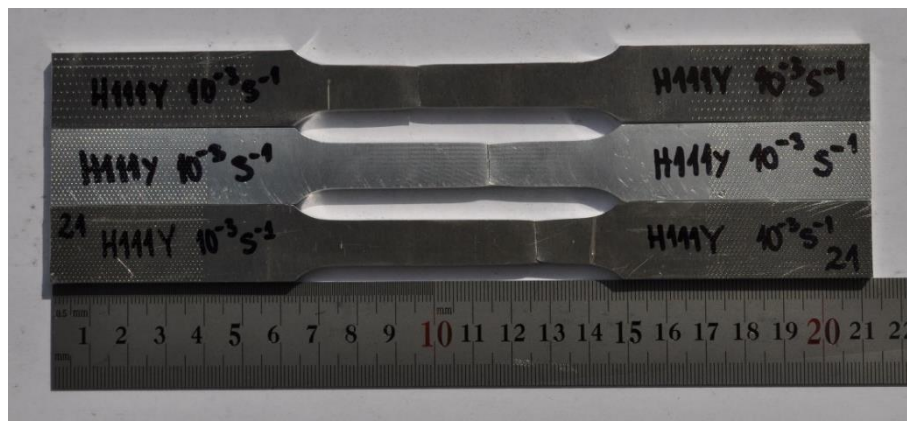
Слика 3.7 Епрувете сечене у правцу под углом од 45° у односу на правац ваљања, стање H111, после експерименталног једносног испитивања



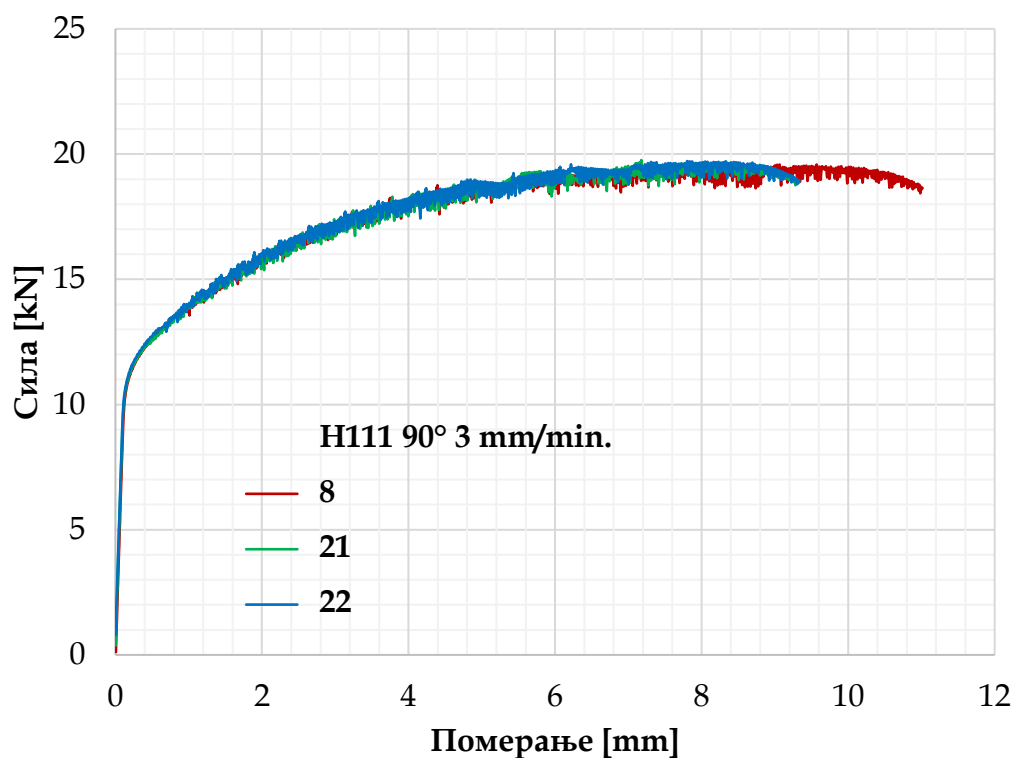
Слика 3.8 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених у правцу под углом од 45° у односу на правац ваљања, стање H111

На слици 3.9 су приказане три епрувете сечене под углом од 90° у односу на правац ваљања алуминијумске легуре 5083, стање H111, после испитивања у режиму контроле прираштаја померања константном брзином од 3 mm/min. Забележена је зависност силе од померања и поређење добијених резултата је дато на слици 3.10. Вредности добијене испитивањем епрувета 21 одабране су као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације PFDM. Епрувета 21 је

имала најмање издужење, али дијаграм односа силе и померања добијен њеним испитивањем налази се између дијаграма добијених за епрувете 8 и 22, тако да су вредности добијене за епрувету 21 одабране као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације унапређене PFDM.



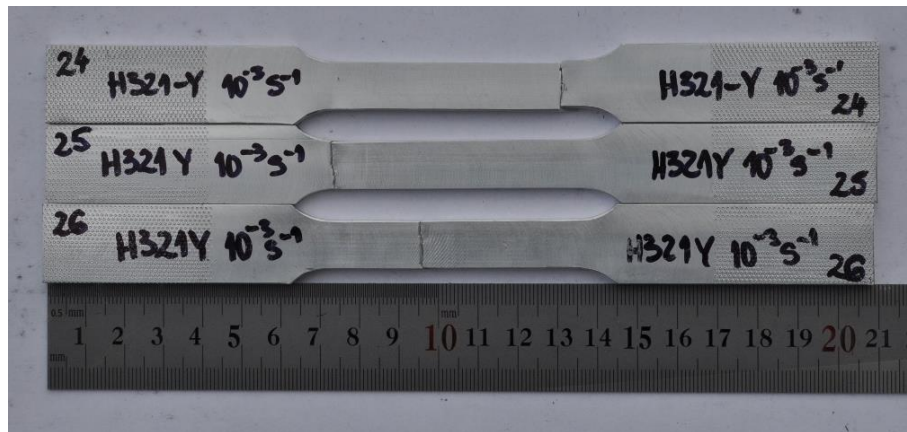
Слика 3.9 Епрувете сечене управно на правац ваљања, стање H111, после експерименталног једноосног испитивања



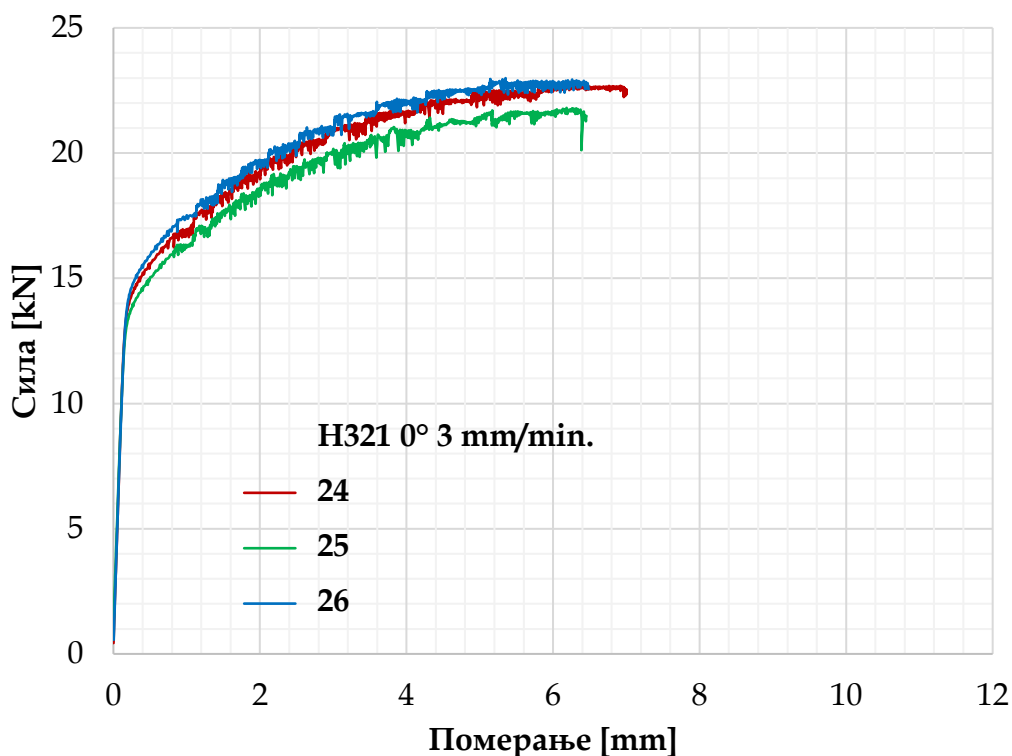
Слика 3.10 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених управно на правац ваљања, стање H111

На слици 3.11 су приказане три епрувете сечене у правцу ваљања алуминијумске легуре 5083, стање H321, после испитивања у режиму контроле прираштаја померања константном брзином од 3 mm/min. Забележена је зависност силе од померања и поређење добијених резултата је дато на слици

3.12. Вредности добијене испитивањем епрувете 26 одабране су као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације модификоване PFDM зато што се једино код те епрувете лом јавио унутар мерног опсега екстензиометра.



Слика 3.11 Епрувете сечене у правцу ваљања, стање H321, после експерименталног једноосног испитивања



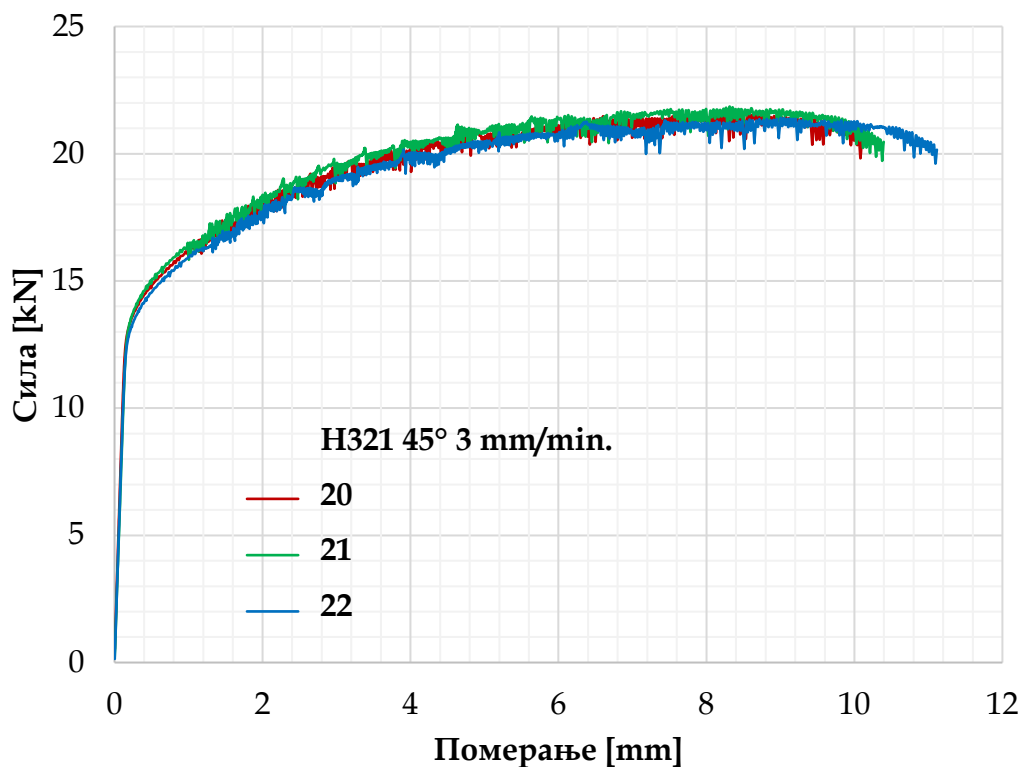
Слика 3.12 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених у правцу ваљања, стање H321

На слици 3.13 су приказане три епрувете сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања алуминијумске легуре 5083, стање H321, после испитивања у режиму контроле прираштаја померања константном брзином од 3 mm/min. Забележена је зависност силе од померања и поређење добијених резултата је

дато на слици 3.14. Вредности добијене испитивањем епрувете 22 одабране су као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације модификоване PFDM.



Слика 3.13 Епрувете сечене у правцу под углом од 45° у односу на правац ваљања, стање H321, после експерименталног једноосног испитивања



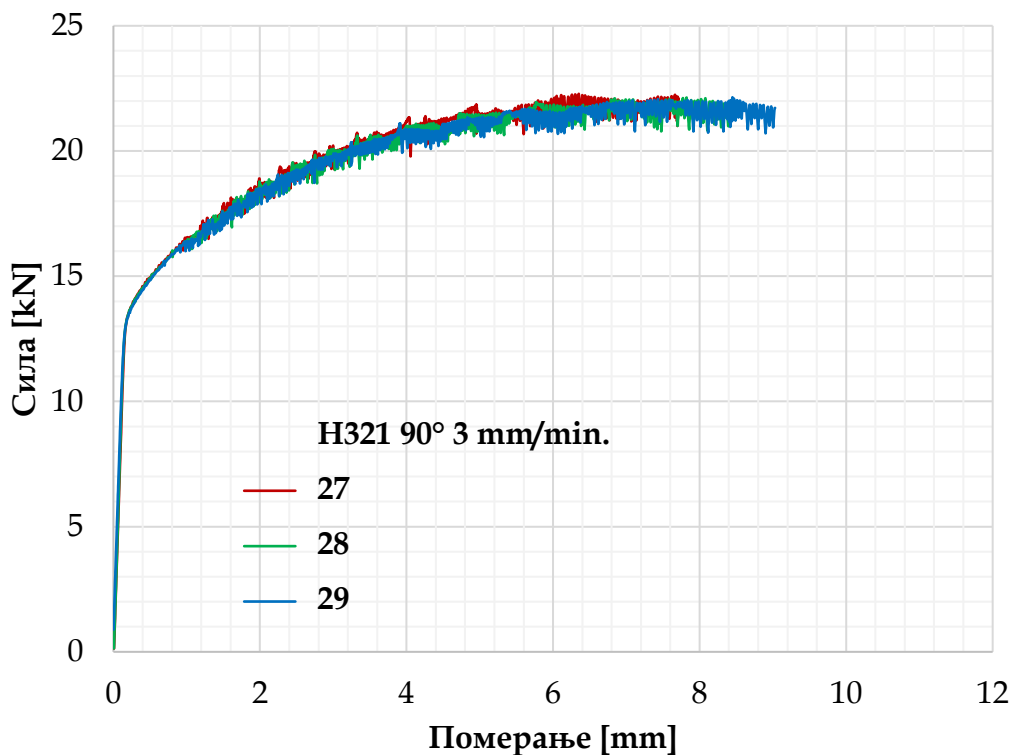
Слика 3.14 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених у правцу под углом од 45° у односу на правац ваљања, стање H321

На слици 3.15 су приказане три епрувете сечене под углом од 90° у односу на правац ваљања алуминијумске легуре 5083, стање H321, после испитивања у режиму контроле прираштаја померања константном брзином од 3 mm/min. Забележена је зависност силе од померања и поређење добијених резултата је

дато на слици 3.16. Вредности добијене испитивањем епрувете 28 одабране су као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације модификоване PFDM зато што се дијаграм добијен њеним испитивањем налази између дијаграма за епрувете 27 и 29.



Слика 3.15 Епрувете сечене управно на правац ваљања, стање Н321, после експерименталног једноосног испитивања

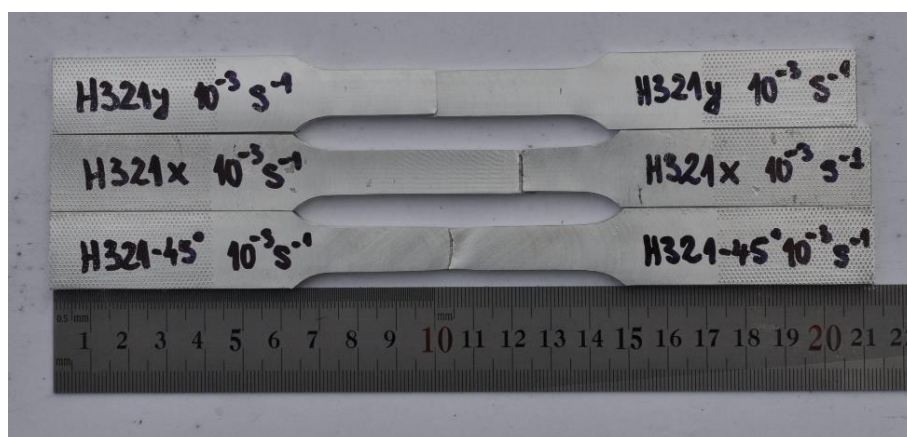


Слика 3.16 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних епрувета сечених управно на правац ваљања, стање Н321

По једна епрувета легуре алуминијума 5083 за стања Н111 и Н321 у сваком правцу сечења је приказана на сликама 3.17 и 3.18 после експерименталног једноосног испитивања затезањем.



Слика 3.17 Епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H111, после једносног испитивања



Слика 3.18 Епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H321, после једносног испитивања

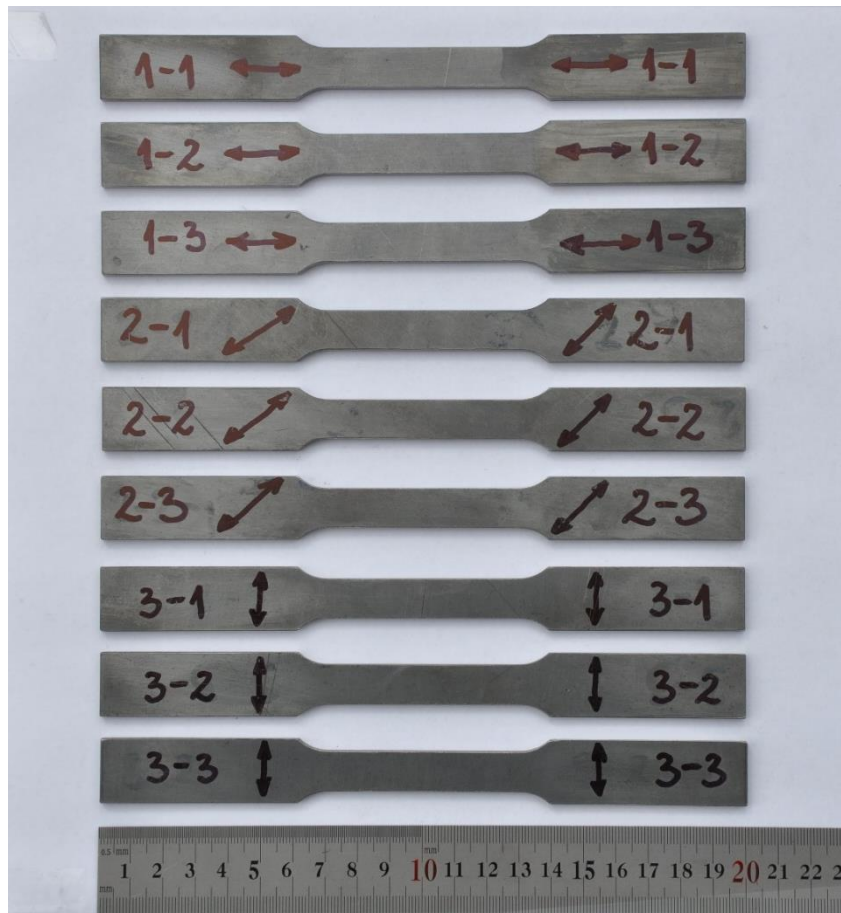
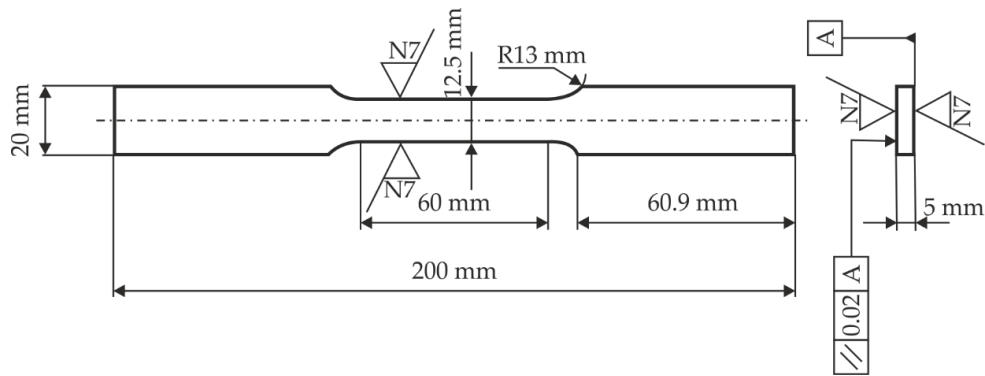
3.2 Експериментално испитивање S355 епрувета

Конструкциони челик S355 има широку примену у инжењерским конструкцијама због добрих механичких својстава, првенствено због добре заварљивости, обрадивости и ниске цене. Такође, код овог челика се јавља константан ниво вредности напона после појаве течења, па је одабран као репрезентативан тип челика за верификацију двоинтервалске функције ојачања. Више аутора ([Ambati M. et al. 2016](#); [Ribeiro J. et al. 2016](#); [Dzioba I. et al. 2019](#)) је користило овај материјал у експерименталним испитивањима и симулацијама лома. У сврху верификације модификованог приступа PFDM, по три епрувете су исечене из челичне S355 плоче у правцу ваљања, под углом од 45° и 90° у односу на правац ваљања. Хемијски састав овог челика испитан је методом прописаном стандардом ([SRPS C.A1.011:2004](#)) на спектрометру SpektroLab M12 у IMW Институту Лужнице и добијене вредности су дате у Табели 3.2.

Испитивања затезањем у статичким условима оптерећивања до лома су спроведена на израђеним епруветама у складу са стандардом ([ASTM E646-00](#)) на собној температури ($23 \pm 5^\circ\text{C}$) у режиму контроле прираштаја померања са константном брзином од 3 mm/min. На слици 3.19 су приказани облик и димензије испитиваних епрувета, као и изглед свих девет епрувета пре испитивања.

Табела 3.2 Хемијски састав испитиваних челичних S355 епрувета

Елемент	Садржај [%]	Реф. опсег
C	0.167	0.00-0.23
Si	0.013	0.00-0.60
Mn	1.454	0.00-1.70
P	0.0081	0.00-0.035
S	0.0076	0.00-0.035
Cr	0.025	0.00-0.34
Ni	0.011	0.00-0.47
Mo	0.002	0.00-0.14
Cu	0.012	0.00-0.60
N	0.008	-
Nb	0.004	-
V	0.002	-
Al	0.035	-
CEV	0.417	0.00-0.47

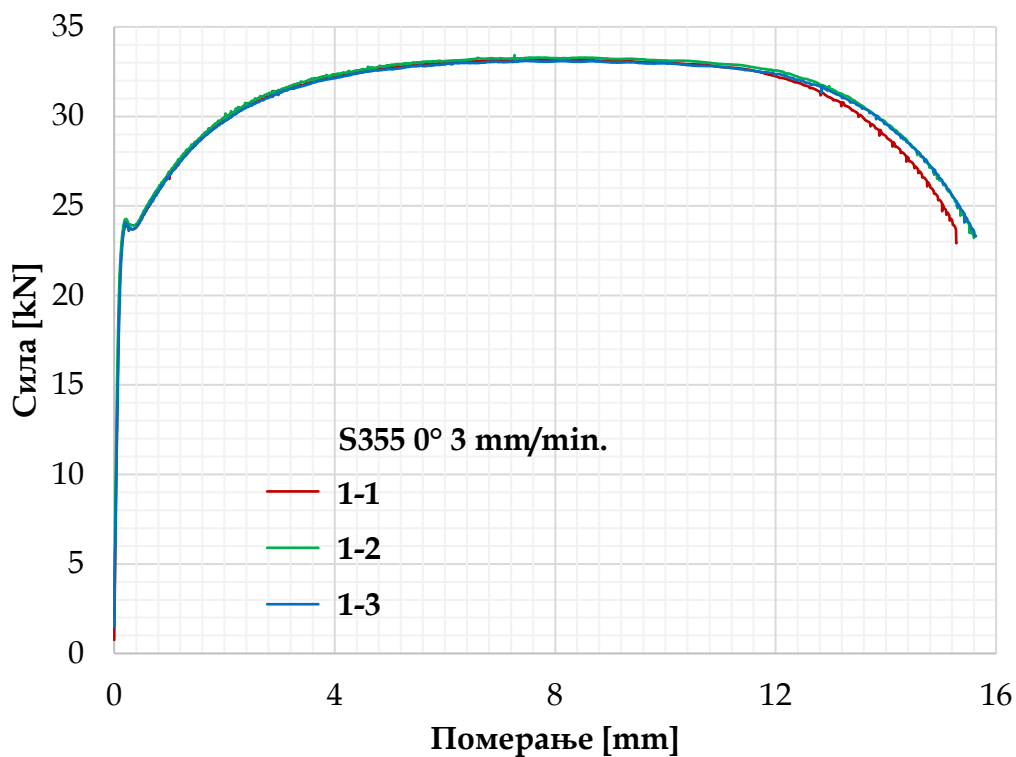


Слика 3.19 Облик и димензије S355 челичних епрувета

На слици 3.20 су приказане епрувете сечене у правцу ваљања после експерименталног испитивања. Забележена је зависност силе од померања и поређење добијених резултата је дато на слици 3.21. Дијаграм односа силе и померања добијен испитивањем епрувете 1-3 налази се између дијаграма добијених за епрувете 1-1 и 1-2, па су вредности добијене за епрувету 1-3 одабране као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације унапређене PFDM.



Слика 3.20 S355 челичне епрувете сечене у правцу ваљања после експерименталног испитивања

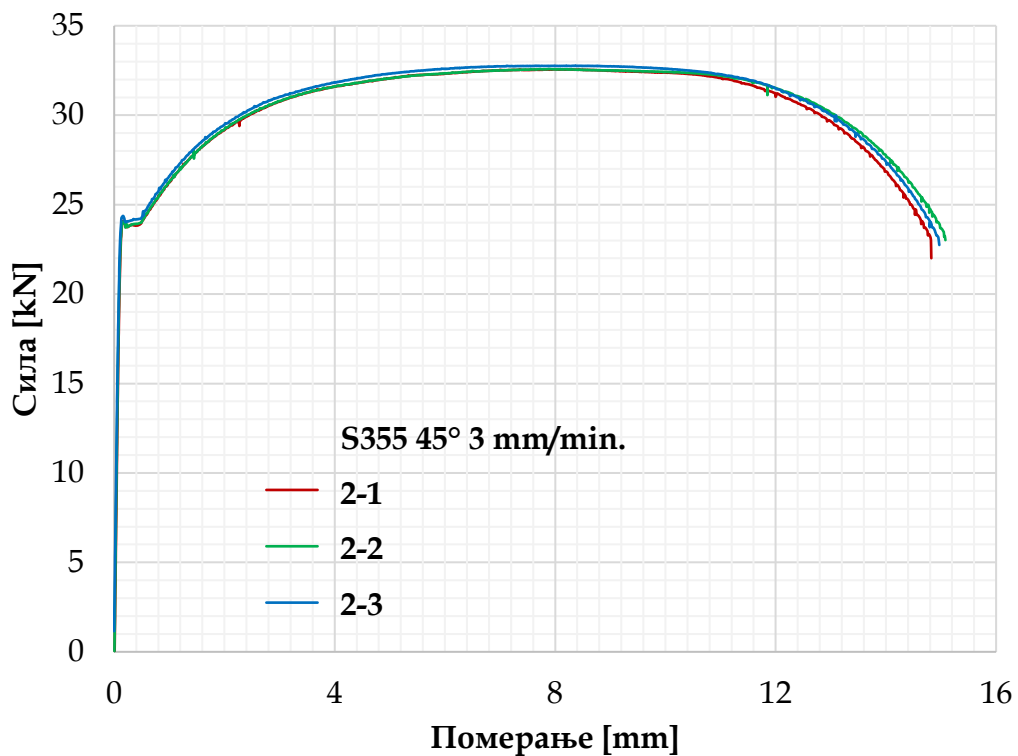


Слика 3.21 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних S355 челичних епрувета сечених у правцу ваљања

На слици 3.22 су приказане епрувете сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања после експерименталног испитивања. Забележена је зависност силе од померања и поређење добијених резултата је дато на слици 3.23. Вредности добијене испитивањем епрувете 2-2 одабране су као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације модификоване PFDM.

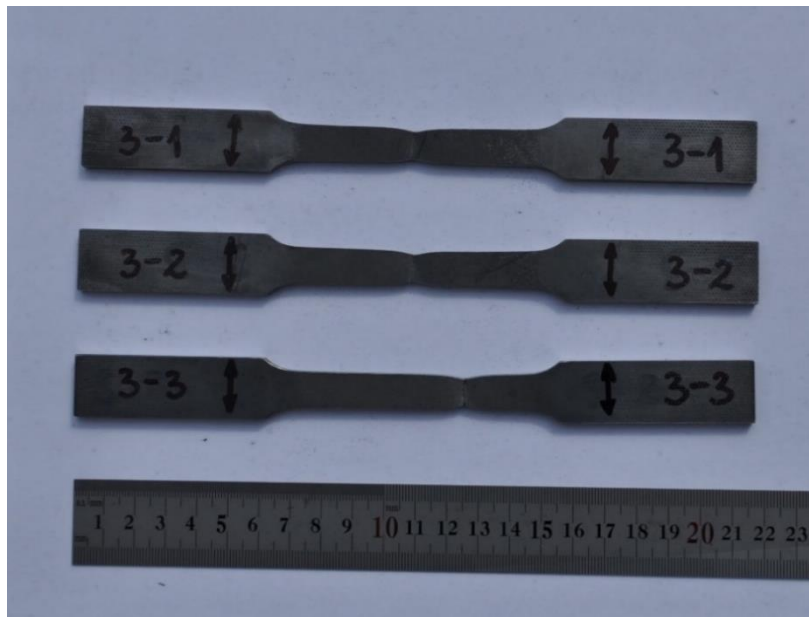


Слика 3.22 S355 челичне епрувете сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања после експерименталног испитивања

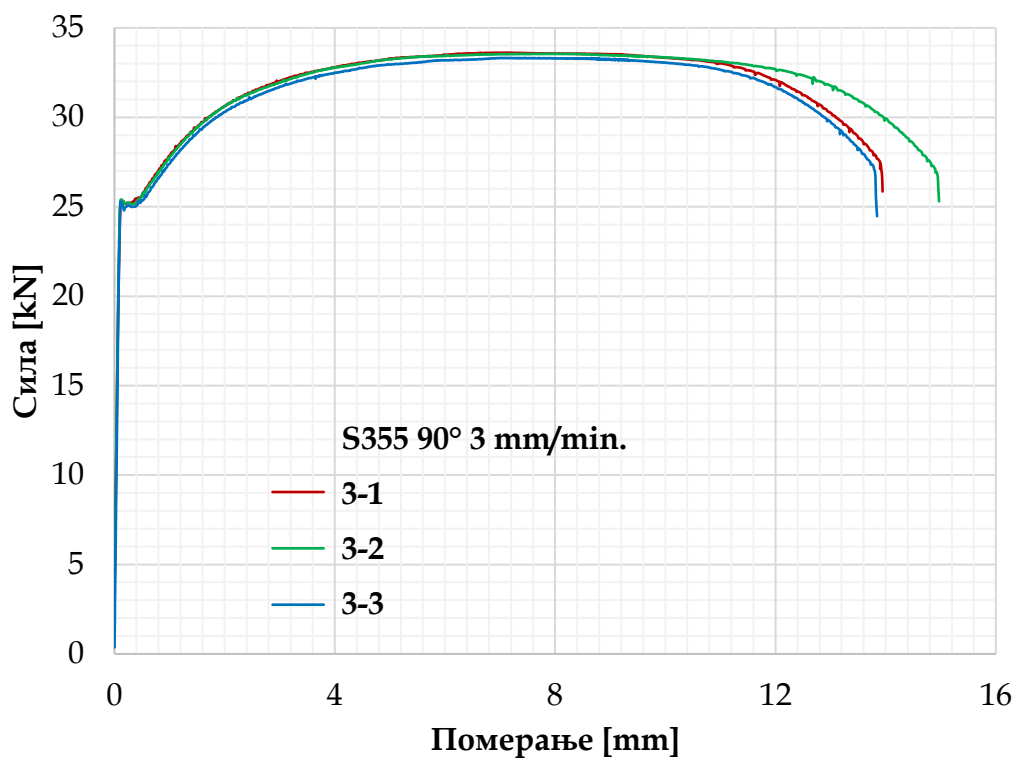


Слика 3.23 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних S355 челичних епрувета сечених под углом од 45° у односу на правац ваљања

На слици 3.24 су приказане епрувете сечене под углом од 90° у односу на правац ваљања после извршеног експерименталног испитивања. Забележена је зависност силе од померања и поређење добијених резултата је дато на слици 3.25. Вредности добијене испитивањем епрувете 3-1 одабране су као репрезентативне за калибрацију у сврху верификације модификоване PFDM.

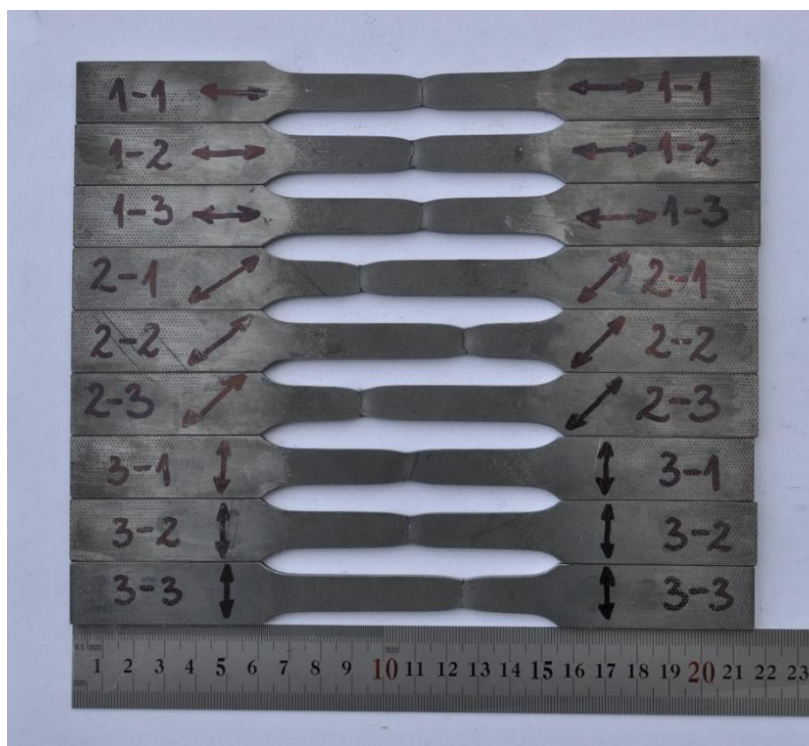


Слика 3.24 S355 челичне епрувете сечене под углом од 90° у односу на правац ваљања после експерименталног испитивања

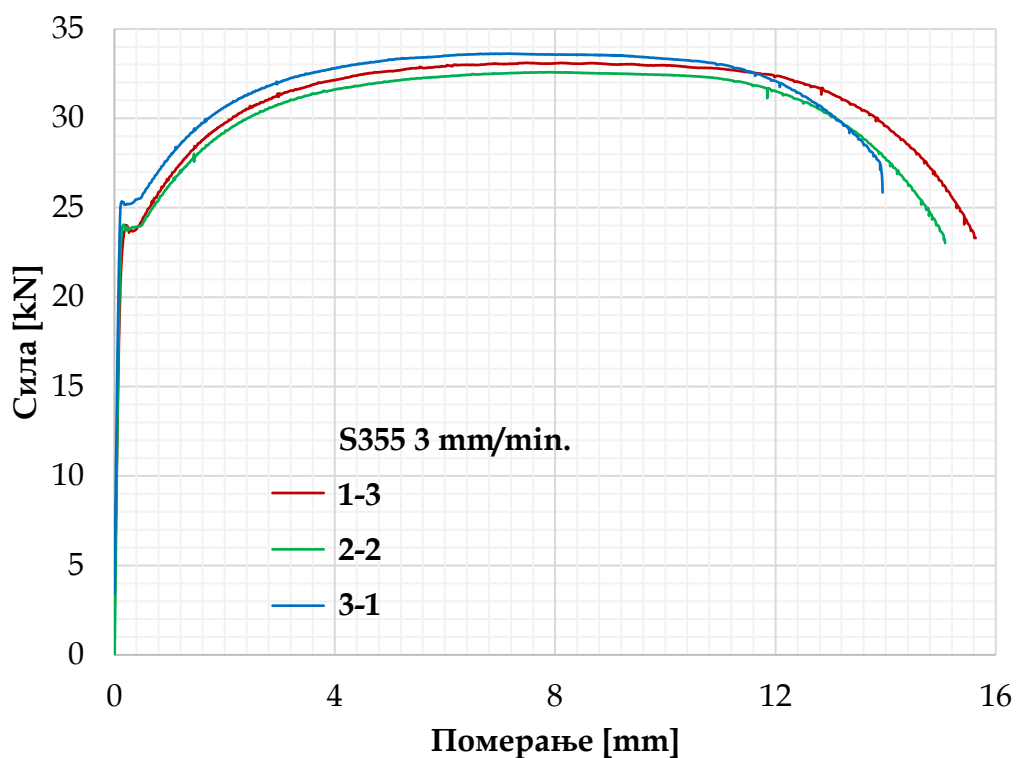


Слика 3.25 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних S355 челичних епрувета сечених под углом од 90° у односу на правац ваљања

На слици 3.26 су приказане све челичне S355 епрувете после експерименталног испитивања. Поређење зavisности силе од померања код епрувета изабраних за калибрацију дато је на слици 3.27.



Слика 3.26 S355 челичне епрувете после експерименталног једноосног испитивања затезањем



Слика 3.27 Дијаграми сила - померање експериментално испитиваних S355 челичних епрувета за сва три правца сечења

4 Моделирање лома применом модела фазног поља оштећења

У овом поглављу су изведене водеће равнотежне једначине за спрезање фазног поља оштећења и пластичности на основу теорије доступне у литератури ([Francfort G.A. et al. 1998](#); [Miehe C. et al. 2010a](#); [Miehe C. et al. 2010b](#); [Molnár G. et al. 2017](#); [Pañeda E.M. et al. 2018](#); [Miehe C. et al. 2015](#); [Bourdin B. et al. 2000](#); [Simo J.C. et al. 1992](#); [Živković J. et al. 2021](#); [Dunić V. et al. 2021](#)) како би се појасниле предложене измене у оквиру ове дисертације. На основу Грифитове теорије, лом се дефинише критеријумом заснованим на равнотежи површинске енергије лома и еластичне енергије ускладиштене у материјалу. Могуће је предвидети почетак лома код постојећих прлина, али нуклеацију и пропацију прлине није могуће предвидети овом теоријом. Два главна приступа за моделирање ширења прлине у конструкцијама су: а) дискретни и б) континуални приступ ([Molnár G. et al. 2017](#)). Континуални приступ посматра прлину као „размазано“ оштећење. Франкфорт и Мариго (Marigo) ([Francfort G.A. et al. 1998](#)) су предложили варијациони модел лома који се заснива на минимизацији функционала енергије за поље померања и дисконтинуални сет прлина. Модел Бурдин и сар. ([Bourdin B. et al. 2000](#)) је регуларизован „размазаном“ прлином увођењем фазног поља оштећења да би се описале потпуно оштећене и неоштећене фазе у материјалу.

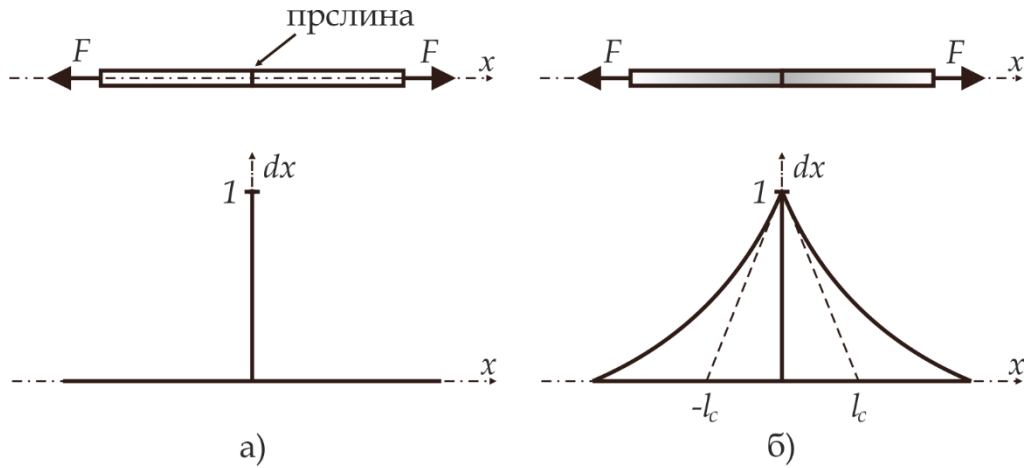
Да би се модел фазног поља оштећења увео као тип дифузне методе за моделирање прлине посматраћемо греду приказану на слици 4.1 са константним попречним пресеком. Променљива фазног поља оштећења d у зависности од координате x дуж греде може бити формулисана као локални дисконтинуитет за топологију оштре прлине, слика 4.1а, у облику ([Miehe C. et al. 2010b](#); [Miehe C. et al. 2010a](#); [Molnár G. et al. 2017](#); [Pañeda E.M. et al. 2018](#)):

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако је } x = 0 \\ 0 & \text{ако је } x \neq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Међутим, за топологију дифузне прлине, оштећење може бити дато као експоненцијална функција у зависности од координате x дуж греде, слика 4.1б, у следећем облику ([Molnár G. et al. 2017](#); [Pañeda E.M. et al. 2018](#)):

$$d(x) = e^{-\frac{|x|}{l_c}}, \quad (4.2)$$

где је l_c карактеристични параметар дужинске скале (карактеристична дужина) и представља ширину дифузне зоне. Ова једначина конвергира у једначину (4.1), када $l_c \rightarrow 0$.



Слика 4.1 Грета са прслином на средини: фазно поље оштећења а) за оштру прслину и б) за дифузну топологију прслине (Miehe C. et al. 2010a; Molnár G. et al. 2017)

На основу Михе и сар. (Miehe C. et al. 2010a) формулације за прслине у једнодимензионалним солидима и проширења регуларизованог функционала за прслине на више-димензијске проблеме, површина прслине $S(d)$ може да се изрази као:

$$S(d) = \int_V \gamma(d, \nabla d) dV, \quad (4.3)$$

где се функција густине површине прслине γ по јединици запремине дефинише као (Miehe C. et al. 2010b; Miehe C. et al. 2010a; Molnár G. et al. 2017; Pañeda E.M. et al. 2018; Miehe C. et al. 2015):

$$\gamma(d, \nabla d) = \frac{d^2}{2l_c} + \frac{l_c}{2} |\nabla d|^2, \quad (4.4)$$

где је ∇ диференцијални (набла) оператор. За примену модела фазног поља оштећења на жилаво понашање материјала, густина унутрашње потенцијалне енергије ψ за жилав лом се посматра као збир густине енергије еластичности $\psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}_E, d)$, густине енергије пластичности $\psi^P(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P, d)$, густине површинске енергије лома $\varphi^S(d)$ и густине расуте енергије пластичности $\varphi^P(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P, d)$ као у (Miehe C. et al. 2016):

$$\psi = \psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}_E, d) + \psi^P(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P, d) + \varphi^S(d) + \varphi^P(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P, d), \quad (4.5)$$

где је $\boldsymbol{\varepsilon}_E$ тензор еластичне деформације и $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P$ је еквивалентна пластична деформација. Сваки члан у једначини (4.5) је дефинисан у наставку. Густина енергије еластичности неоштећеног материјала ψ_0^E се множи са функцијом деградације $g(d)$ да дефинише густину енергије еластичности оштећеног

материјала ψ^E као ([Molnár G. et al. 2017](#); [Miehe C. et al. 2016](#); [Pañeda E.M. et al. 2018](#)):

$$\psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}_E, d) = g(d)\psi_0^E(\boldsymbol{\varepsilon}_E) = g(d)\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_E = g(d)\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (4.6)$$

где је \mathbf{C}_0 еластични конститутивни тензор четвртог реда. Тензор Кошијевог напона оштећеног материјала $\boldsymbol{\sigma}$ је дат као ([Miehe C. et al. 2010a](#)):

$$\boldsymbol{\sigma} = g(d)\boldsymbol{\sigma}_0 = g(d)\mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_E, \quad (4.7)$$

где је $\boldsymbol{\sigma}_0$ тензор Кошијевог напона неоштећеног материјала. Коришћењем једначине (4.3), површинска енергија лома Φ^S на површини прслине S дефинише се као ([Miehe C. et al. 2010b](#); [Miehe C. et al. 2010a](#)):

$$\Phi^S = \int_S G_c dS \approx \int_V G_c \gamma(d, \nabla d) dV = \int_V \varphi^S(d) dV, \quad (4.8)$$

где је густина површинске енергије лома, која се расипа формирањем прслине, дефинисана као:

$$\varphi^S(d) = G_c \gamma(d, \nabla d). \quad (4.9)$$

У једначинама (4.8) и (4.9), G_c је Грифитова критична брзина ослобађања енергије лома по јединици површине, такође позната као жилавост лома (или отпорност на лом) материјала, која се описује као количина енергије потребна за стварање јединичне површине лома ([Bourdin B. et al. 2000](#); [Wu J.-Y. et al. 2020](#)). Густина енергије пластичности за Симово ојачање је ([Miehe C. et al. 2010a](#)):

$$\psi^P(\bar{\varepsilon}_P, d) = g(d)(\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}) \left(\bar{\varepsilon}_P + \frac{1}{n} e^{-n\bar{\varepsilon}_P} \right) + g(d)\frac{1}{2}H\bar{\varepsilon}_P^2, \quad (4.10)$$

где су σ_{yv} почетни напон течења, $\sigma_{y0,\infty}$ напон засићења ојачања, n експонент ојачања и H модул ојачања ([Simo J.C. et al. 1992](#)). Густина расуте енергије пластичности је ([Simo J.C. et al. 1992](#)):

$$\varphi^P(\bar{\varepsilon}_P, d) = g(d)\sigma_{yv}\bar{\varepsilon}_P. \quad (4.11)$$

Коришћењем једначина (4.5), (4.6), (4.9), (4.10) и (4.11) функционал укупне унутрашње потенцијалне енергије Ψ се дефинише као ([Fang J. et al. 2019](#)):

$$\Psi = \int_V \psi dV = \int_V \left\{ g(d)\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \boldsymbol{\sigma}_0 + \psi^P(\bar{\varepsilon}_P, d) + G_V \left[\frac{d^2}{2} + \frac{l_c^2}{2} |\nabla d|^2 \right] + g(d)\sigma_{yv}\bar{\varepsilon}_P \right\} dV, \quad (4.12)$$

где је уведена критична брзина ослобађања енергије лома по јединици запремине као $G_V = G_c/l_c$. Варијација унутрашње потенцијалне енергије

$\delta\Psi = \delta W_{int}$ у једначини (4.12) по еластичној деформацији, оштећењу и еквивалентној пластичној деформацији је дата као (Fang J. et al. 2019):

$$\delta W_{int} = \int_V \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_E + \frac{\partial \Psi}{\partial d} : \delta d + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right) dV, \quad (4.13)$$

где користећи $\boldsymbol{\varepsilon}_E = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p$ и $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$, а за Симову функцију ојачања (Miehe C. et al. 2010a), може се добити (Miehe C. et al. 2016; Fang J. et al. 2019):

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_E + \frac{1}{2} g'(d) \boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \boldsymbol{\sigma}_0 \delta d + g'(d) (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}) \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \frac{1}{n} e^{-n\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \right) \delta d + \right. \\ & + g'(d) \frac{1}{2} H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^2 \delta d + g'(d) \sigma_{yv} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \delta d + G_V [d \delta d + l_c^2 \nabla d \nabla \delta d] + \\ & \left. + \left(-g(d) \boldsymbol{\sigma}_0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} + g(d) (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}) (1 - e^{-n\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}) + g(d) H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + g(d) \sigma_{yv} \right) \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right\} dV \end{aligned} \quad (4.14)$$

где је $\boldsymbol{\varepsilon}$ тензор укупне деформације, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ тензор пластичне деформације, а $g'(d)$ је извод функције деградације $g(d)$ по променљивој фазног поља оштећења d . Варијација спољашње потенцијалне енергије W_{ext} је (Kojić M. et al. 2005):

$$\delta W_{ext} = \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_A \mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{u} dA, \quad (4.15)$$

где је \mathbf{b} поље запреминских сила по јединици запремине, \mathbf{h} је поље површинских сила по јединици површине и \mathbf{u} је вектор померања. Равнотежа унутрашње (4.14) и спољашње (4.15) потенцијалне енергије $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$ за Симову функцију ојачања даје (Fang J. et al. 2019):

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_E + \frac{1}{2} g'(d) \boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \boldsymbol{\sigma}_0 \delta d + g'(d) (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}) \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \frac{1}{n} e^{-n\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \right) \delta d + \right. \\ & + g'(d) \frac{1}{2} H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^2 \delta d + g'(d) \sigma_{yv} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \delta d + G_V [d \delta d + l_c^2 \nabla d \cdot \nabla \delta d] + \\ & \left. + \left(-g(d) \boldsymbol{\sigma}_0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} + g(d) (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}) (1 - e^{-n\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}) + g(d) H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + g(d) \sigma_{yv} \right) \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right\} dV \\ & = \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_A \mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{u} dA \end{aligned} \quad (4.16)$$

Применом извода производа на следећи израз:

$$\nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}] = \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \cdot [\delta \mathbf{u}] = Div[\boldsymbol{\sigma}] \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_E, \quad (4.17)$$

може се изразити први сабирак под интегралом у једначини (4.16) као:

$$\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_E = \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}] - \text{Div}[\boldsymbol{\sigma}] \cdot \delta \mathbf{u}, \quad (4.18)$$

док се следећом трансформацијом:

$$\nabla \cdot [\nabla d \delta d] = \nabla \cdot [\nabla d] \delta d + \nabla d \cdot \nabla [\delta d], \quad (4.19)$$

добија члан у шестом сабирку у једначини (4.16) као:

$$\nabla d \cdot \nabla [\delta d] = \nabla \cdot [\nabla d \delta d] - \nabla \cdot [\nabla d] \delta d = \nabla \cdot [\nabla d \delta d] - \nabla^2 d \delta d. \quad (4.20)$$

Применом једначина (4.18) и (4.20) и коришћењем Гаусове (Gauss) теореме, може се добити ([Miehe C. et al. 2016](#); [Fang J. et al. 2019](#)):

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ -[g'(d)\psi + G_V [d - l_c^2 \nabla^2 d]] \delta d - [\text{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{b}] \cdot \delta \mathbf{u} + \right. \\ & \left. + \left(-g(d) \boldsymbol{\sigma}_0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_P}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P} + g(d) (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}) (1 - e^{-n\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P}) + g(d) H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P + g(d) \sigma_{yv} \right) \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P \right\} dV, \quad (4.21) \\ & + \int_A \{ [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{h}] \cdot \delta \mathbf{u} \} dA + \int_A \{ [G_V l_c^2 \nabla d \cdot \mathbf{n}] \delta d \} dA = 0 \end{aligned}$$

где је \mathbf{n} јединични вектор нормале на површину A , а део густине унутрашње потенцијалне енергије је:

$$\bar{\psi}_0 = \left(\frac{\psi - \varphi^s(d)}{g(d)} \right) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_E : \boldsymbol{\sigma}_0 + (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}) \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P + \frac{1}{n} e^{-n\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P} \right) + \frac{1}{2} H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P^2 + \sigma_{yv} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P. \quad (4.22)$$

Увођењем граничних услова Neumann-овог типа ([Molnár G. et al. 2017](#)):

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{h} = 0, \quad (4.23)$$

$$\nabla d \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.24)$$

из једначине (4.21) изводимо равнотежну једначину ([Fang J. et al. 2019](#)):

$$\text{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{b} = 0, \quad (4.25)$$

као и закон еволуције фазног поља оштећења ([Dunić V. et al. 2021](#)):

$$G_V [d - l_c^2 \nabla^2 d] + g'(d)\psi = 0, \quad (4.26)$$

и закон пластичног течења ([Simo J.C. et al. 1992](#)):

$$\bar{\sigma}_{eq} - \sigma_{yv} - (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}) (1 - e^{-n\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P}) - H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_P = 0, \quad (4.27)$$

где је функција течења $\sigma_y = \sigma_{yv} + (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv})(1 - e^{-n\bar{\epsilon}_p}) + H\bar{\epsilon}_p$, а еквивалентни напон дефинисан као $\bar{\sigma}_{eq} = \sigma_0 : \frac{\partial \epsilon_p}{\partial \bar{\epsilon}_p}$.

Применом принципа МКЕ на формуле (4.25)-(4.27) могу се добити главне једначине коначних елемената које су имплементирани у софтвер ПАК за структурну анализу конструкција.

5 Имплементација у МКЕ софтвер ПАК

У овом одељку је описана дискретизација помоћу стандардних коначних елемената који користе Лагранжеве интерполационе функције, а при извођењу равнотежних једначина коначних елемената је коришћена стандардна Галеркинова метода. Вектор померања чворова \mathbf{U} и вектор вредности фазног поља оштећења у чворовима \mathbf{d} су непознате које треба одредити. Ови коначни елементи су познати као спрегнути коначни елементи са више физичких поља (енг. coupled multifield finite elements) и увелико се примењују у спрегнутим мултифизичким симулацијама.

5.1 Дискретизација коначним елементима

Груписањем чланова једначине (4.16) уз варијацију померања $\delta \mathbf{u}$ и варијацију оштећења δd користећи (4.22), добијамо енергетске равнотежне једначине:

$$\int_V g(d) \boldsymbol{\sigma}_0 : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_E dV = \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_A \mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{u} dA, \quad (5.1)$$

$$\int_V \left\{ g'(d) \bar{\psi}_0 \delta d + G_V [d \delta d + l_c^2 \nabla d \cdot \nabla \delta d] \right\} dV = 0. \quad (5.2)$$

Вектор померања \mathbf{u} у интеграционој тачки рачуна се као ([Kojić M. et al. 2005](#)):

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^u \mathbf{U}, \quad (5.3)$$

где је \mathbf{N}^u матрица интерполационих функција за интерполацију вредности померања у чворовима коначног елемента које се налазе у вектору \mathbf{U} .

Вектор мале деформације $\boldsymbol{\varepsilon}$ у интеграционој тачки се рачуна као ([Molnár G. et al. 2017](#); [Kojić M. et al. 2005](#)):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^u \mathbf{U}, \quad (5.4)$$

где је \mathbf{B}^u (деформација - померање) матрица која садржи изводе интерполационих функција по Декартовим координатама.

Вредност фазног поља оштећења d у интеграционој тачки је описана као ([Molnár G. et al. 2017](#)):

$$d = \mathbf{N}^d \mathbf{d}, \quad (5.5)$$

где је \mathbf{N}^d вектор интерполационих функција за интерполацију вредности фазног поља оштећења у чворовима коначног елемента које су смештене у вектору \mathbf{d} . Локални градијент оштећења ∇d , који ћемо по аналогiji са деформацијама означити као $\boldsymbol{\varepsilon}^d$, је ([Molnár G. et al. 2017](#)):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^d = \nabla d = \mathbf{B}^d \mathbf{d}, \quad (5.6)$$

где је \mathbf{B}^d (градијент оштећења - оштећење) матрица која садржи изводе интерполационих функција по Декартовим координатама.

Интерполационе матрице за померања \mathbf{N}^u и оштећења \mathbf{N}^d , као и матрице извода интерполационих функција по Декартовим координатама за померања \mathbf{B}^u и оштећења \mathbf{B}^d , за 3Д и 2Д коначне елементе, су ([Molnár G. et al. 2017](#)):

- за 3Д коначне елементе

$$\mathbf{N}^u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{B}^u = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & N_{8,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & N_{8,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & N_{8,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & \dots & \dots & \dots & N_{8,y} & N_{8,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & \dots & \dots & \dots & 0 & N_{8,z} & N_{8,y} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & \dots & \dots & \dots & N_{8,z} & 0 & N_{8,x} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{N}^d = [N_1 \dots N_8], \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B}^d = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{8,x} \\ N_{1,y} & \dots & N_{8,y} \\ N_{1,z} & \dots & N_{8,z} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

- за 2Д коначне елементе

$$\mathbf{N}^u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & \dots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{B}^u = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \dots & \dots & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \dots & \dots & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & \dots & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{N}^d = [N_1 \dots N_4], \quad (5.13)$$

$$\mathbf{B}^d = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{4,x} \\ N_{1,y} & \dots & N_{4,y} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Варијацију поља померања \mathbf{u} (5.3) и варијацију поља оштећења d (5.5), можемо да напишемо као :

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}^u \delta \mathbf{U}, \quad (5.15)$$

$$\delta d = \mathbf{N}^d \delta \mathbf{d}. \quad (5.16)$$

Варијацију мале деформације $\boldsymbol{\varepsilon}$ (5.4) и варијацију градијента оштећења ∇d (5.6), можемо да напишемо као:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^u \delta \mathbf{U}, \quad (5.17)$$

$$\nabla \delta d = \mathbf{B}^d \delta \mathbf{d}. \quad (5.18)$$

Заменом (5.15) и (5.17) у (5.1), као и (5.16) и (5.18) у (5.2), добијамо:

$$\delta \mathbf{U}^T (\mathbf{F}^u - \mathbf{R}) = 0, \quad (5.19)$$

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{F}^d = 0, \quad (5.20)$$

где је \mathbf{F}^u вектор унутрашњих сила у чворовима, \mathbf{R} вектор спољашњих сила у чворовима и \mathbf{F}^d део унутрашње потенцијалне енергије повезане са оштећењима у чворовима. За произвољне варијације вектора померања $\delta \mathbf{U}$ и оштећења $\delta \mathbf{d}$ у чворовима, из једначина (5.19) и (5.20) добијају се равнотежне једначине коначних елемената

$$\mathbf{F}^u = \mathbf{R}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{F}^d = \mathbf{0}, \quad (5.22)$$

односно

$$\int_V g(d) \mathbf{B}^{uT} \boldsymbol{\sigma}_0 dV = \int_V \mathbf{N}^{uT} \mathbf{b} dV + \int_A \mathbf{N}^{uT} \mathbf{h} dA, \quad (5.23)$$

$$\int_V \left\{ \mathbf{N}^{dT} g'(d) \bar{\psi}_0 + G_V \left[\mathbf{N}^{dT} d + \mathbf{B}^{dT} l_c^2 \nabla d \right] \right\} dV = 0. \quad (5.24)$$

Једначине (5.21) и (5.22), односно (5.23) и (5.24), су нелинеарне функције померања и оштећења које се у опшем случају не могу решити директно већ се решавају инкрементално. Претпоставимо да имамо позната решења у тренутку t , а да тражимо решења у тренутку $t + \Delta t$, где Δt представља временски корак или корак оптерећења. Сматрамо да су спољашње силе независне од деформација и да су познате у сваком временском кораку. Можемо да их пишемо као ([Kojić M. et al. 2005](#))

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} = {}^t \mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}, \quad (5.25)$$

где су ${}^t\mathbf{R}$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ спољашње силе на почетку и на крају временског корака, а $\Delta\mathbf{R}$ прираштај спољашњих сила у кораку. Решавањем нелинеарног система једначина (5.21) и (5.22) у тренутку $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}, \quad (5.26)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^d = \mathbf{0}, \quad (5.27)$$

добијају се прираштаји померања $\Delta\mathbf{U}$ и оштећења $\Delta\mathbf{d}$ у чворовима, на основу којих се рачунају укупна померања ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ и оштећења ${}^{t+\Delta t}\mathbf{d}$ на крају корака, као

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}, \quad (5.28)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{d} = {}^t\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}, \quad (5.29)$$

где сматрамо да су позната померања ${}^t\mathbf{U}$ и оштећења ${}^t\mathbf{d}$ са почетка корака. Да би једначине (5.26) и (5.27) могле да се реше, врши се њихова линеаризација развојем у Тејлоров ред вектора унутрашњих сила ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u$ и вектора унутрашње енергије оштећења ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^d$ као

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u \approx {}^t\mathbf{F}^u + \frac{\partial {}^t\mathbf{F}^u}{\partial {}^t\mathbf{U}} \Delta\mathbf{U}^{(1)} + \frac{\partial {}^t\mathbf{F}^u}{\partial {}^t\mathbf{d}} \Delta\mathbf{d}^{(1)}, \quad (5.30)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^d \approx {}^t\mathbf{F}^d + \frac{\partial {}^t\mathbf{F}^d}{\partial {}^t\mathbf{U}} \Delta\mathbf{U}^{(1)} + \frac{\partial {}^t\mathbf{F}^d}{\partial {}^t\mathbf{d}} \Delta\mathbf{d}^{(1)}, \quad (5.31)$$

где су $\Delta\mathbf{U}^{(1)}$ прва апроксимација инкремента померања и $\Delta\mathbf{d}^{(1)}$ прва апроксимација инкремента оштећења. Заменом (5.30) у (5.26) и (5.31) у (5.27), добијамо систем спрегнутих једначина

$$\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}^{uu} & {}^t\mathbf{K}^{ud} \\ {}^t\mathbf{K}^{du} & {}^t\mathbf{K}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{U}^{(1)} \\ \Delta\mathbf{d}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}^u \\ -{}^t\mathbf{F}^d \end{Bmatrix}, \quad (5.32)$$

где су подматрице тангентне матрице крутости

$${}^t\mathbf{K}^{uu} = \frac{\partial {}^t\mathbf{F}^u}{\partial {}^t\mathbf{U}} = \int_V g({}^t d) \mathbf{B}^{uT} {}^t\mathbf{C}_0 \mathbf{B}^u dV, \quad (5.33)$$

$${}^t\mathbf{K}^{ud} = \frac{\partial {}^t\mathbf{F}^u}{\partial {}^t\mathbf{d}} = \int_V g'({}^t d) \mathbf{B}^{uT} {}^t\boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{N}^d dV, \quad (5.34)$$

$${}^t\mathbf{K}^{du} = \frac{\partial {}^t\mathbf{F}^d}{\partial {}^t\mathbf{U}} = \int_V g'({}^t d) \mathbf{N}^{dT} {}^t\boldsymbol{\sigma}_0^T \mathbf{B}^u dV, \quad (5.35)$$

$${}^t\mathbf{K}^{dd} = \frac{\partial {}^t\mathbf{F}^d}{\partial {}^t\mathbf{d}} = \int_V \left\{ \left[g''({}^t d) {}^t\bar{\psi}_0 + G_V \right] \mathbf{N}^{dT} \mathbf{N}^d + G_V l_c^2 \mathbf{B}^{dT} \mathbf{B}^d \right\} dV, \quad (5.36)$$

док су вектори спољашњих сила, унутрашњих сила и енергије оштећења

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = \int_V \mathbf{N}^{uT} {}^{t+\Delta t}\mathbf{b} dV + \int_A \mathbf{N}^{uT} {}^{t+\Delta t}\mathbf{h} dA, \quad (5.37)$$

$${}^t\mathbf{F}^u = \int_V g({}^t d) \mathbf{B}^{uT} {}^t\boldsymbol{\sigma}_0 dV, \quad (5.38)$$

$${}^t\mathbf{F}^d = \int_V \left\{ \mathbf{N}^{dT} g'({}^t d) {}^t\bar{\psi}_0 + G_V \left[\mathbf{N}^{dT} {}^t d + \mathbf{B}^{dT} l_c^2 \nabla {}^t d \right] \right\} dV. \quad (5.39)$$

Применом Њутн-Рапсонове (Newton-Raphson) итеративне процедуре ([Kojić M. et al. 2005](#)) на решавање спрегнутог система нелинеарних једначина (5.32) добија се

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{uu(i-1)} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{ud(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{du(i-1)} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{dd(i-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{d}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)} \\ -{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{d(i-1)} \end{Bmatrix}, \quad (5.40)$$

где индекс (i) означава број итерације. После сваке итерације рачуна се укупно померање и оштећење као

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}, \quad (5.41)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{d}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{d}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{d}^{(i)}. \quad (5.42)$$

Поље померања \mathbf{u} и фазно поље оштећења d у спрегнутом систему једначина (4.25) и (4.26) сада се могу решавати истовремено једначином (5.40) као потпуно спрегнута монолитна поља. Треба напоменути да горњи систем једначина не гарантује иреверзибилност еволуције фазног поља прслине,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{d} \geq {}^t\mathbf{d}. \quad (5.43)$$

У монолитном приступу, ограничење (5.43) може бити приближно остварено увођењем пеналти услова у једначину фазног поља прслине (5.24) како је описано у ([Miehe C. et al 2010](#)). Тај приступ подразумева увођење додатних параметара у модел. Такође, монолитни модел може да има проблема са конвергенцијом у случајевима када је присутно нестабилно ширење прслине. Када прслина почне да расте, поље напона се знатно мења због нових деградација у матрици крутости у једначини (5.40). Зато монолитни имплицитни модел решавања не успева увек да пронађе стабилно решење равнотежне једначине.

Да би се претходни проблеми превазишли, у раду ће бити коришћен наизменични приступ који је једноставнији за имплементацију.

5.2 Стратегија наизменичног решавања

Да би се добио стабилан имплицитни модел решавања поља померања \mathbf{u} и фазног поља оштећења d у спрегнутом систему једначина (4.25) и (4.26), они се могу решавати одвојено као секвенцијално спрегнута поља, где се фазно поље оштећења и поље померања ажурирају наизменично. То се постиже увођењем историје поља густине унутрашње потенцијалне енергије ${}^t\bar{\psi}_0$ која се ажурира на крају корака само ако је новоизрачуната ${}^{t+\Delta t}\bar{\psi}_0$ већа од претходне са почетка корака:

$${}^{t+\Delta t}\bar{\psi}_0 = \begin{cases} {}^{t+\Delta t}\psi_0^E; & {}^{t+\Delta t}\psi_0^E > {}^t\bar{\psi}_0 \\ {}^t\bar{\psi}_0; & {}^{t+\Delta t}\psi_0^E \leq {}^t\bar{\psi}_0 \end{cases}. \quad (5.44)$$

Израчунавање историје поља тренутне густине унутрашње потенцијалне енергије је главна идеја за алгоритамску поделу спрегнутих једначина. Оно повезује фазно поље оштећења и поље померања у наизменичној шеми, обезбеђује иреверзибилност еволуције фазе прслине (5.43) и за разлику од монолитног приступа нису потребни додатни параметри. Применом уведених услова ([Miehe C. et al. 2010b](#)), једначина (5.40) своди се на

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{uu(i-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{dd(i-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{U}^{(i)} \\ \Delta\mathbf{d}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)} \\ -{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{d(i-1)} \end{Bmatrix}, \quad (5.45)$$

где су подматрице тангентне матрице крутости (5.33) и (5.36) сада

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{uu(i-1)} = \int_V g({}^t d) \mathbf{B}^{uT} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}_0^{(i-1)} \mathbf{B}^u dV, \quad (5.46)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{dd(i-1)} = \int_V \left[g''({}^{t+\Delta t} d^{(i-1)}) {}^t\bar{\psi}_0 + G_V \right] \mathbf{N}^{dT} \mathbf{N}^d + G_V l_c^2 \mathbf{B}^{dT} \mathbf{B}^d \Big] dV, \quad (5.47)$$

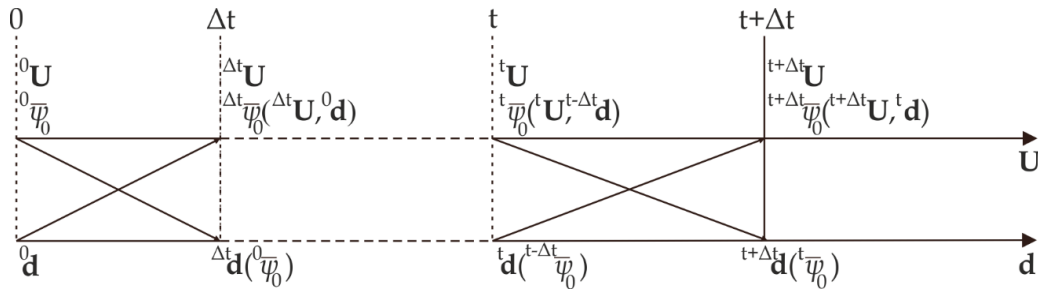
док су вектори унутрашњих сила (5.38) и енергије оштећења (5.39)

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)} = \int_V g({}^t d) \mathbf{B}^{uT} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_0^{(i-1)} dV, \quad (5.48)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{d(i-1)} = \int_V \left\{ \mathbf{N}^{dT} g'({}^{t+\Delta t} d^{(i-1)}) {}^t\bar{\psi}_0 + G_V \left[\mathbf{N}^{dT} {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)} + \mathbf{B}^{dT} l_c^2 \nabla {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)} \right] \right\} dV. \quad (5.49)$$

Из наведених једначина јасно се види суштина наизменичног приступа који се састоји у томе да се при итеративном израчунавању једначина (5.46) и (5.48) у кораку $t + \Delta t$ у свим итерацијама користи вредност оштећења ${}^t d$ са краја претходног корака, док се при итеративном израчунавању једначина (5.47) и (5.49) у кораку $t + \Delta t$ у свим итерацијама користи густина потенцијалне енергије

${}^t\bar{\psi}_0$ са краја претходног корака. Наизменична инкрементална шема решавања поља померања и поља оштећења приказана је алгоритамски на слици 5.1.



Слика 5.1 Наизменична инкрементална шема решавања поља померања и поља оштећења у МКЕ софтверу

5.3 Модификације променљиве спрезања

Функција деградације и њен извод по d су предложени од стране Амбатија и сар. ([Ambati M. et al. 2015b](#)) за моделирање фазног поља оштећења код жилавог лома као:

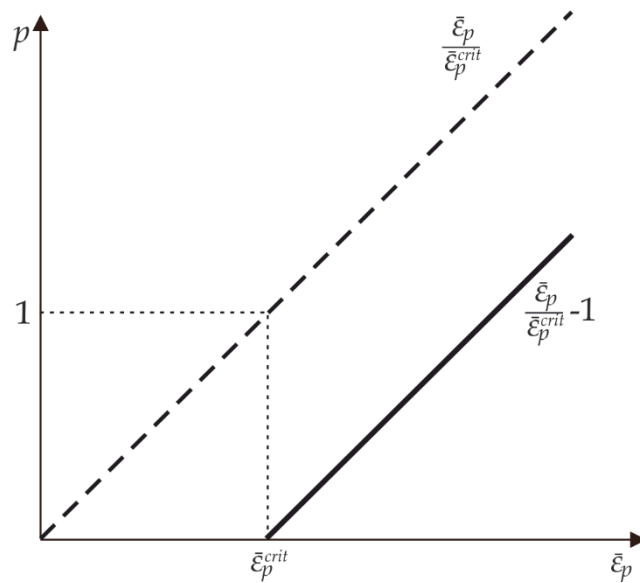
$$g(d) = (1-d)^{2p} \quad , \quad (5.50)$$

$$g'(d) = -2p(1-d)^{2p-1} \quad , \quad (5.51)$$

$$g''(d) = 2p(2p-1)(1-d)^{2p-2} \quad , \quad (5.52)$$

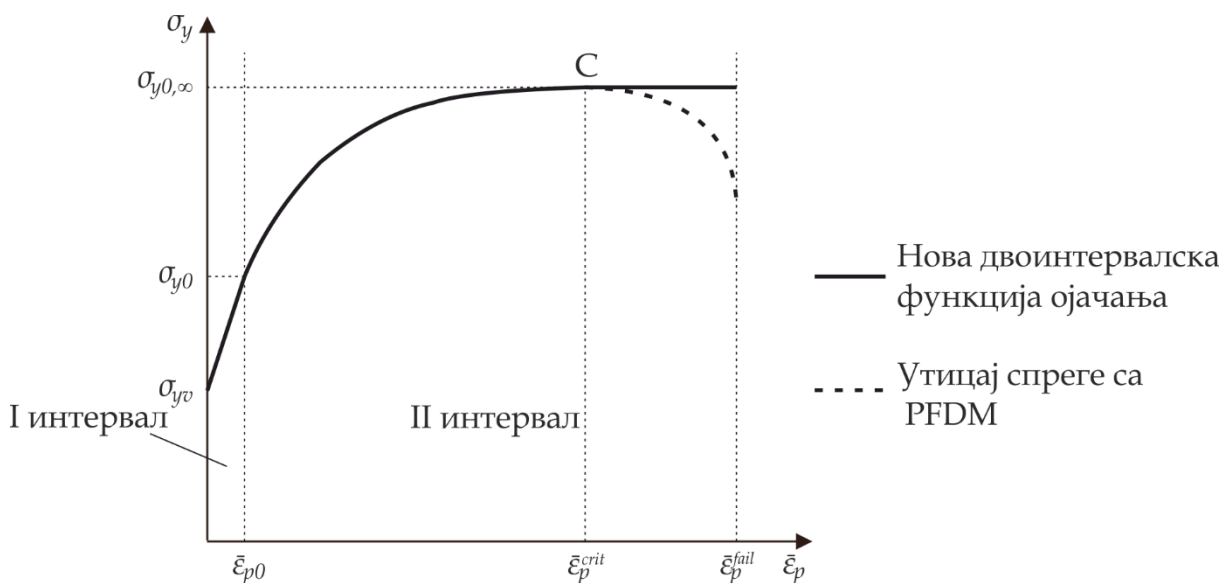
где је p променљива спрезања оштећења и пластичности. Иста функција деградације у једначинама (5.50) до (5.52) може да се искористи за крти лом ако је $p = 1$, што ће бити урађено за пример једног елемента у потпоглављу 6.1.

Променљива спрезања може бити дефинисана тако да зависи од критичне вредности еквивалентне пластичне деформације $\bar{\varepsilon}_p^{crit}$ ([Ambati M. et al. 2015b](#)). У оквиру ове дисертације биће модификован приступ Амбати и сар. ([Ambati M. et al. 2015b](#)) јер се сматра да је материјал неоштећен све док еквивалентна пластична деформација не достигне критичну вредност $\bar{\varepsilon}_p = \bar{\varepsilon}_p^{crit}$ ([Živković J. et al. 2021](#)), слика 5.2.



Слика 5.2 Нова променљива спрезања p (Živković J. et al. 2021) (континуална линија) у односу на еквивалентну пластичну деформацију $\bar{\epsilon}_p$ у поређењу са (Ambati M. et al. 2015b) (испрекидана линија)

Критична вредност еквивалентне пластичне деформације може да се уочи на експерименталној кривој напон-деформација када напон почне да опада, тачка С, слика 5.3.



Слика 5.3 Дијаграм напона течења σ_y на текућој површи течења и еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ за металне материјале: нова предложена двоинтервалска функција ојачања за симулацију металних материјала са или без појаве константне вредности напона после појаве течења

У критичној тачки С, материјал се може сматрати оштећеним због пластичних деформација и активира се променљива спрезања оштећења и

пластичности p . Дакле, променљива спрезања p може да се дефинише за еквивалентну пластичну деформацију, као што је дато на слици 5.2, следећом функцијом ([Živković J. et al. 2021](#); [Dunić V. et al. 2021](#)):

$$p = \begin{cases} 0 & ; \frac{\bar{\varepsilon}_p}{\varepsilon_p^{crit}} < 1 \\ \frac{\bar{\varepsilon}_p}{\varepsilon_p^{crit}} - 1 & ; \frac{\bar{\varepsilon}_p}{\varepsilon_p^{crit}} \geq 1 \end{cases}. \quad (5.53)$$

Густина унутрашње потенцијалне енергије деформације ${}^{t+\Delta t}\bar{\psi}_0$ (5.44), сматра се густином енергије еластичне деформације ${}^{t+\Delta t}\psi_0^E$ дате једначином (4.6), јер се утицај пластичности узима у обзир преко променљиве спрезања ${}^{t+\Delta t}p$ дате једначином (5.53), као ([Ambati M. et al. 2016](#)). Заменом израза (5.50) до (5.52) у једначине (5.46) до (5.49) добијају се коначне подматрице тангентне матрице крутости

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{uu(i-1)} = \int_V (1 - {}^t d)^{2^{t+\Delta t} p^{(i-1)}} \mathbf{B}^{uT} {}^{t+\Delta t} \mathbf{C}_0^{(i-1)} \mathbf{B}^u dV, \quad (5.54)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{dd(i-1)} = \int_V \left\{ \left[2^t p (2^t p - 1) (1 - {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)})^{2^t p - 2} {}^t \bar{\psi}_0 + G_V \right] \mathbf{N}^{dT} \mathbf{N}^d + G_V l_c^2 \mathbf{B}^{dT} \mathbf{B}^d \right\} dV, \quad (5.55)$$

као и вектори унутрашњих сила и енергије оштећења

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)} = \int_V (1 - {}^t d)^{2^{t+\Delta t} p^{(i-1)}} \mathbf{B}^{uT} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}_0^{(i-1)} dV, \quad (5.56)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{d(i-1)} = \int_V \left\{ -\mathbf{N}^{dT} 2^t p (1 - {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)})^{2^t p - 1} {}^t \bar{\psi}_0 + G_V \left[\mathbf{N}^{dT} {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)} + \mathbf{B}^{dT} l_c^2 \nabla {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)} \right] \right\} dV. \quad (5.57)$$

У табели 5.1 је приказан Њутн-Рапсонов итеративни поступак са критеријумом конвергенције и детаљима имплементације.

Табела 5.1 Нутн-Рапсонова итеративна процедура на нивоу коначног елемента за више поља (Molnár G. et al. 2017; Kojić M. et al. 2005)

Улазни подаци: E, ν, l_c, G_V

А. Почетни услови на структурном нивоу за инкремент Δt

- померање - оштећење - спољашње силе

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(0)} = {}^t \mathbf{U} \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{d}^{(0)} = {}^t \mathbf{d} \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} = \int_V (\mathbf{N}^u)^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} dV + \int_A (\mathbf{N}^u)^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{h} dA$$

В. Итерација на структурном нивоу

$i = 0$

$i = i + 1$

С. Петља по интеграционим тачкама

Матрице деформација-померање \mathbf{B}^u и градијент оштећења-оштећење \mathbf{B}^d

Оштећење ${}^{t+\Delta t} d^{(i-1)} = \mathbf{N}^d {}^{t+\Delta t} \mathbf{d}^{(i-1)}$, градијент оштећења $\nabla {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)} = \mathbf{B}^d {}^{t+\Delta t} \mathbf{d}^{(i-1)}$;

Модел пластичности – велике деформације - Потпоглавље 5.5

(интеграција напона ${}^{t+\Delta t} \sigma_0^{(i-1)}$, еласто-пластична конститутивна матрица ${}^{t+\Delta t} \mathbf{C}_{EP}^{(i-1)}$, \rightarrow

унутрашња потенцијална енергија ${}^{t+\Delta t} \bar{\psi}_0$, променљива спрезања ${}^{t+\Delta t} p$)

Вектори унутрашњих сила и енергије оштећења

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{u(i-1)} = \int_V (1 - {}^t d)^{2^{t+\Delta t} p^{(i-1)}} \mathbf{B}^{uT} {}^{t+\Delta t} \sigma_0^{(i-1)} dV,$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{d(i-1)} = \int_V \left\{ \left[G_V {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)} - 2^t p (1 - {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)})^{2^t p - 1} {}^t \bar{\psi}_0 \right] \mathbf{N}^{dT} + G_V l_c^2 \mathbf{B}^{dT} \nabla {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)} \right\} dV$$

Подматрице тангентне матрице крутости

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{uu(i-1)} = \int_V (1 - {}^t d)^{2^{t+\Delta t} p^{(i-1)}} \mathbf{B}^{uT} {}^{t+\Delta t} \mathbf{C}_{EP}^{(i-1)} \mathbf{B}^u dV,$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{dd(i-1)} = \int_V \left\{ \left[G_V + 2^t p (2^t p - 1) (1 - {}^{t+\Delta t} d^{(i-1)})^{2^t p - 2} {}^t \bar{\psi}_0 \right] \mathbf{N}^{dT} \mathbf{N}^d + G_V l_c^2 \mathbf{B}^{dT} \mathbf{B}^d \right\} dV$$

Инкремент померања и оштећења, ажурирање померања и оштећења

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{uu(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{u(i-1)}; \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{dd(i-1)} \Delta \mathbf{d}^{(i)} = - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{d(i-1)}$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}; \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{d}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{d}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{d}^{(i)}$$

Ако критеријуми конвергенције $\frac{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{u(i)}\|}{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{u(1)}\|} \leq tol$ и $\frac{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{d(i)}\|}{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{d(1)}\|} \leq tol$ нису

испуњени, иди на корак В, а ако јесу иди на следећи временски корак А.

5.4 Двоинтервалска функција течења са ојачањем

За симулацију понашања металних материјала код којих се јавља интервал са константном или линеарно променљивом вредношћу напона после појаве течења, као што је случај код неких челика или алуминијума, проширена двоинтервалска функција течења је неопходна да би се описао идеализован одговор дат на слици 5.3 (пуна линија). У првом интервалу се јавља течење, вредност пластичне деформације расте док је вредност напона константна или расте линеарно, што је дефинисано линеарним параметром ојачања H_0 . Уколико је $H_0 = 0$, у првом интервалу ћемо имати перфектну пластичност (примењиво за неке челике као S355), док за вредности $H_0 > 0$ се јавља линеарно ојачање (примењиво код неких алуминијумских легура). У другом интервалу напон расте нелинеарно према Симовој функцији ојачања која је дефинисана једначином (4.27), док не достигне напон zasiћења ојачања (максимални напон течења) $\sigma_{y0,\infty}$. После достизања максималне вредности напон почиње да опада услед утицаја модела фазног поља оштећења на материјал (испрекидана линија). Да би се симулирало описано понашање усваја се линеарно ојачање за први интервал оптерећења (${}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p < \bar{\epsilon}_{p0}$) све док се не достигне гранична вредност еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_{p0}$. Услов течења је дат у следећем облику (Kojić M. et al. 2005):

$${}^{t+\Delta t}f_y = {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}_{eq} - {}^{t+\Delta t}\sigma_y \leq 0, \quad (5.58)$$

док је напон течења дефинисан на основу једначине (4.27) као:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_y = \begin{cases} \sigma_{yv} + H_0 {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p & ; {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p < \bar{\epsilon}_{p0} \\ \sigma_{y0} + (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{y0}) \left(1 - e^{-n({}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p - \bar{\epsilon}_{p0})} \right) + H({}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p - \bar{\epsilon}_{p0}) & ; {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p \geq \bar{\epsilon}_{p0} \end{cases}, \quad (5.59)$$

где је

$$\sigma_{y0} = \sigma_{yv} + H_0 \bar{\epsilon}_{p0}. \quad (5.60)$$

Комплетна двоинтервалска функција течења приказана на слици 5.3 пуном линијом, може бити дефинисана следећом једначином:

$${}^{t+\Delta t}f_y = \begin{cases} {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}_{eq} - [\sigma_{yv} + H_0 {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p] & ; {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p < \bar{\epsilon}_{p0} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}_{eq} - \left[\sigma_{y0} + (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{y0}) \left(1 - e^{-n({}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p - \bar{\epsilon}_{p0})} \right) + H({}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p - \bar{\epsilon}_{p0}) \right] & ; {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}_p \geq \bar{\epsilon}_{p0} \end{cases}. \quad (5.61)$$

Уколико је функција течења (5.61) мања од нуле, решење је еластично. Уколико услов није испуњен, прираштај еквивалентне пластичне деформације $\Delta\bar{\epsilon}_p$ одређује се решавањем функције $f_y(\Delta\bar{\epsilon}_p) = 0$ у итеративном Њутн-Рапсоновом поступку датом у алгоритму интеграције напона у потпоглављу 5.5.

Када се израчуна вредност еквивалентне пластичне деформације ${}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p$ са задатом тачношћу, онда девијаторски тензор напона, тензор укупног напона, тензор еластичне деформације и еласто-пластична конститутивна матрица морају бити ажурирани.

5.5 Алгоритам интеграције напона за фон Мизесов услов течења за случај великих деформација

У овом одељку је дат преглед добро познатог алгоритма интеграције напона за фон Мизесову пластичност при великим деформацијама са додатком два нова корака 11 и 12 која су неопходна за решавање PFDM водеће једначине дате у (4.26). Вредности енергије еластичне деформације ${}^{t+\Delta t}\psi_0^E$ и променљиве спрезања ${}^{t+\Delta t}p$ израчунавају се на нивоу интеграционе тачке. Девијаторски део деформације се може добити мултипликативном декомпозицијом градијента деформације ([Kojić M. et al. 2005](#)):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_E {}^t\mathbf{F}_P, \quad (5.62)$$

где су ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_E$ и ${}^t\mathbf{F}_P$ градијенти еластичне и пластичне деформације, респективно. Градијент еластичне деформације може бити растављен и на модификован девијаторски и запремински део као ([Kojić M. et al. 2005](#)):

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}_E = \left| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_E \right|^{\frac{1}{3}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_E, \quad (5.63)$$

па еластични леви Коши-Гринов (Cauchy-Green) тензор деформације $\bar{\mathbf{b}}_E = \bar{\mathbf{F}}_E \bar{\mathbf{F}}_E^T$ може бити израчунат као ([Kojić M. et al. 2005](#); [Dunić V. et al. 2016](#)):

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_E = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}_E {}^t\bar{\mathbf{b}}_E {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}_E^T. \quad (5.64)$$

Девијаторска еластична деформација ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_E$ може бити израчуната помоћу Хенкијеве (Hencky) мере деформације ${}^{t+\Delta t}\mathbf{h}_E$ као ([Kojić M. et al. 2005](#); [Dunić V. et al. 2016](#)):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_E = {}^{t+\Delta t}\mathbf{h}_E = \frac{1}{2} \ln {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_E, \quad (5.65)$$

и средња логаритамска деформација ${}^{t+\Delta t}e_m$ у том случају је ([Kojić M. et al. 2005](#); [Dunić V. et al. 2016](#)):

$${}^{t+\Delta t}e_m = \frac{1}{3} \ln \left| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \right|. \quad (5.66)$$

Тензор укупног напона може бити разложен на девијаторски ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_E$ и запремински део ${}^{t+\Delta t}\sigma_m \mathbf{I}$ као (Kojić M. et al. 2005):

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_0 = {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_E + {}^{t+\Delta t}\sigma_m \mathbf{I}, \quad (5.67)$$

где је \mathbf{I} јединични тензор. Еластични девијаторски напон се може дефинисати као (Kojić M. et al. 2005):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_E = 2G {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_E, \quad (5.68)$$

и средњи напон је (Kojić M. et al. 2005):

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m = c_m {}^{t+\Delta t}e_m, \quad (5.69)$$

где су смичући и запремински модул:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad c_m = \frac{E}{1-2\nu}, \quad (5.70)$$

где је E Јангов модул и ν је Поасонов коефицијент.

Детаљан алгоритам фон Мизесове пластичности за случај великих деформација је приказан у наставку (Kojić M. et al. 2005; Živković M. 2006):

t - време на почетку временског корака; Δt - временски инкремент; $t + \Delta t$ - време на крају временског корака

1. Познате величине:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}, {}^t\mathbf{F}, {}^t\bar{\mathbf{b}}_E, {}^t\bar{\psi}_0, {}^t\bar{\varepsilon}_p, E, \nu, \sigma_{y0}, \sigma_{y0,\infty}, n, H_0, H, \bar{\varepsilon}_p^{crit}, \bar{\varepsilon}_{p0}$$

2. Почетни услови (сачувати на нивоу интеграционе тачке)

$${}^{t+\Delta t}d^{(0)} = {}^t d; \quad {}^{t+\Delta t}\bar{\psi}_0^{(0)} = {}^t\bar{\psi}_0; \quad {}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p^{(0)} = {}^t\bar{\varepsilon}_p$$

3. Израчунати пробну еластичну девијаторску деформацију:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} {}^t\mathbf{F} \rightarrow {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} {}^t\mathbf{F}^{-1}$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} = \left| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \right|^{-\frac{1}{3}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_E^* = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} {}^t\bar{\mathbf{b}}_E {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}^T$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_E^* = \frac{1}{2} \ln {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{b}}_E^*$$

$${}^{t+\Delta t}e_m = \frac{1}{3} \ln \left| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \right|$$

4. Пробни еластични девијаторски напон

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E^* = 2G {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}_E^*, \quad \text{где је } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

5. Провера течења

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{eq}^* &= \sqrt{\frac{3}{2}} \| {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E^* \|; \\ \sigma_{y0} &= \sigma_{yv} + H_0 \bar{\varepsilon}_{p0} \\ {}^t \sigma_y &= \begin{cases} \sigma_{yv} + H_0 {}^t \bar{\varepsilon}_p & ; {}^t \bar{\varepsilon}_p < \bar{\varepsilon}_{p0} \\ \sigma_{y0} + (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{y0}) \left(1 - e^{-n({}^t \bar{\varepsilon}_p - \bar{\varepsilon}_{p0})} \right) + H({}^t \bar{\varepsilon}_p - \bar{\varepsilon}_{p0}) & ; {}^t \bar{\varepsilon}_p \geq \bar{\varepsilon}_{p0} \end{cases} \\ {}^{t+\Delta t} f_y^* &= {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{eq}^* - {}^t \sigma_y \leq 0 \end{aligned}$$

Уколико је услов испуњен, решење је ${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E = {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E^*$ и $\Delta \bar{\varepsilon}_p = 0$, иди на 7.

6. Израчунавање инкремента еквивалентне пластичне деформације $\Delta \bar{\varepsilon}_p$ решавањем функције ${}^{t+\Delta t} f_y(\Delta \bar{\varepsilon}_p) = 0$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \bar{\varepsilon}_p &= {}^t \bar{\varepsilon}_p + \Delta \bar{\varepsilon}_p; \\ {}^{t+\Delta t} \sigma_y &= \begin{cases} \sigma_{yv} + H_0 {}^{t+\Delta t} \bar{\varepsilon}_p & ; {}^{t+\Delta t} \bar{\varepsilon}_p < \bar{\varepsilon}_{p0} \\ \sigma_{y0} + (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{y0}) \left(1 - e^{-n({}^{t+\Delta t} \bar{\varepsilon}_p - \bar{\varepsilon}_{p0})} \right) + H({}^{t+\Delta t} \bar{\varepsilon}_p - \bar{\varepsilon}_{p0}) & ; {}^{t+\Delta t} \bar{\varepsilon}_p \geq \bar{\varepsilon}_{p0} \end{cases}; \\ \Delta \lambda &= \frac{3}{2} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_p}{{}^{t+\Delta t} \sigma_y}; \end{aligned}$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E = \frac{{}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E^*}{1 + 2G\Delta\lambda}; \quad {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \| {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E \|^$$

$$f_y(\Delta \bar{\varepsilon}_p) = |{}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{eq} - {}^{t+\Delta t} \sigma_y| > tol \text{ иди на корак 6.}$$

7. Ажурирање левог Коши-Гриновог тензора деформације:

$${}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{b}}_E = \frac{1}{G} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E + {}^{t+\Delta t} e_m \mathbf{I}$$

8. Средњи напон и укупни напон:

$${}^{t+\Delta t} \sigma_m = c_m {}^{t+\Delta t} e_m; \quad {}^{t+\Delta t} \sigma_0 = {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E + {}^{t+\Delta t} \sigma_m \mathbf{I}; \quad c_m = \frac{E}{1-2\nu}$$

9. Израчунавање еластичне девијаторске деформације:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}_E = \frac{{}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_E}{2G}$$

10. Укупна еластична деформација:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_E = {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_E + {}^{t+\Delta t}e_m \mathbf{I}$$

11. (НОВИ КОРАК) Енергија деформације:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\psi_0^E &= \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \mathbf{C}_0 : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_E = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_E^T : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_E + {}^{t+\Delta t}\sigma_m \mathbf{I}) : ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_E + {}^{t+\Delta t}e_m \mathbf{I}) = \\ &= \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_E + {}^{t+\Delta t}\sigma_m \mathbf{I}) : \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_E}{2G} + \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_m \mathbf{I}}{c_m} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2G} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_E : {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_E + \frac{3}{{}^{t+\Delta t}c_m} \sigma_m^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}_{eq}^2}{3G} + \frac{3}{{}^{t+\Delta t}c_m} \sigma_m^2 \right) \end{aligned}$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\psi}_0 = \begin{cases} {}^{t+\Delta t}\psi_0^E; & {}^{t+\Delta t}\psi_0^E > {}^t\bar{\psi}_0 \\ {}^t\bar{\psi}_0; & {}^{t+\Delta t}\psi_0^E \leq {}^t\bar{\psi}_0 \end{cases}$$

12. Променљива спрежања:

$${}^{t+\Delta t}p = \begin{cases} 0 & ; \frac{{}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_p^{crit}} < 1 \\ \frac{{}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_p^{crit}} - 1 & ; \frac{{}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_p^{crit}} \geq 1 \end{cases}$$

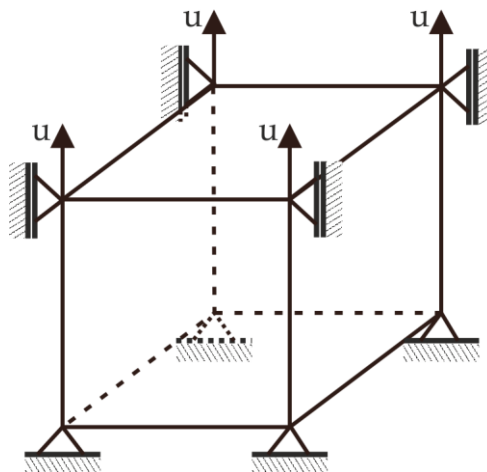
13. Израчунати еласто-пластичну конститутивну матрицу: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{EP}$

14. Врати: ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_0$, ${}^{t+\Delta t}\bar{\psi}_0$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{EP}$, ${}^{t+\Delta t}p$

6 Верификација модификованог модела фазног поља оштећења

6.1 Референтни пример кртог лома за верификацију PFDM

Молнар и Гравуил су у ([Molnár G. et al. 2017](#)) предложили најједноставнији модел за проблем кртог лома који може да се искористи да се верификује и разуме предложена наизменична итеративна шема из потпоглавља 5.2 за спрезање фазног поља оштећења и поља померања. Модел се састоји од једног тродимензионалног хексагоналног коначног елемента јединичних димензија $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}$ који је приказан на слици 6.1. Чворови на доњој страни коначног елемента су ограничени у сва три правца, док је горњим чворовима дозвољено само вертикално померање. Оптерећење је задато у режиму контроле померања у 1000 временских корака до укупног померања од 0.1 mm .



Слика 6.1 Тродимензионални хексагонални коначни елемент јединичних димензија са граничним условима и задатим оптерећењем

Параметри који су неопходни за симулацију кртог лома су преузети из литературе ([Busby J.S. 2001](#)) и износе: Јангов модул $E = 210 \text{ GPa}$, Поасонов коефицијент $\nu = 0.3$, критична брзина ослобађања енергије $G_V = 5 \cdot 10^{-2} \text{ GPa}$ и карактеристични параметар дужинске скале $l_c = 0.1 \text{ mm}$. Параметри материјала за пластичност су довољно велики да материјал буде у еластичној области, док је вредност променљиве спрезања $p = 1$ да би симулирала крти лом ([Busby J.S. 2001](#)).

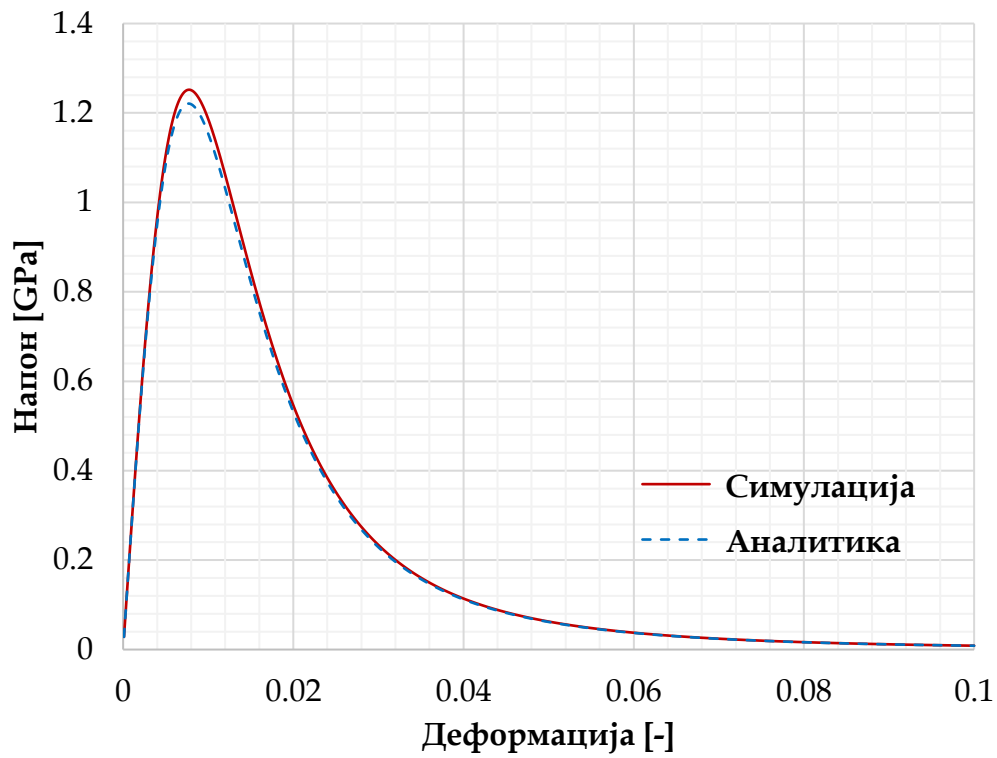
Аналитичке везе напона σ и деформације ε , као и оштећења d и деформације ε , дате су као ([Busby J.S. 2001](#)):

$$c_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (6.1)$$

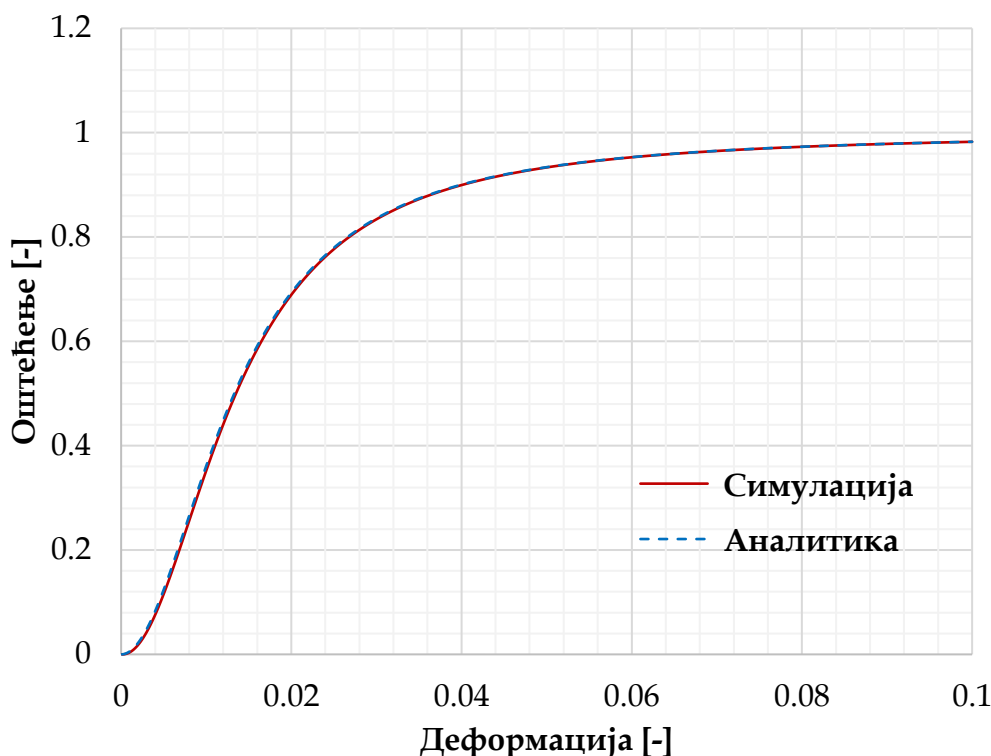
$$d = \frac{\varepsilon^2 c_{22}}{G_V + \varepsilon^2 c_{22}}, \quad (6.2)$$

$$\sigma = (1-d)^2 c_{22} \varepsilon, \quad (6.3)$$

где је c_{22} елемент еластичне матрице C_0 .



Слика 6.2 Зависност аксијалног напона и аксијалне деформације за пример једног коначног елемента



Слика 6.3 Зависност оштећења и аксијалне деформације за пример једног коначног елемента

Добијени резултати су квантитативно упоређени са аналитичким резултатима ([Busby J.S. 2001](#)). Поређење дато на сликама 6.2 и 6.3 потврђује функционалност предложене итеративне шеме и њену тачност.

6.2 Верификација PFDM експерименталним резултатима

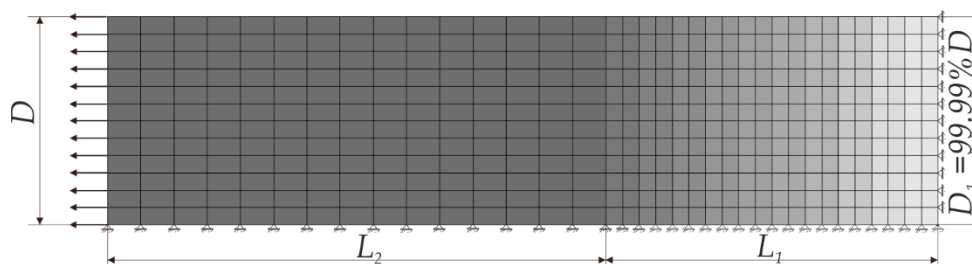
У циљу верификације спреге модификованог PFDM и алгоритма фон Мизесовог услова течења дате у ([Živković J. et al. 2021](#)), као и предложене модификације двоинтервалске функције ојачања за симулацију епрувета алуминијумске легуре 5083 у ([Dunić V. et al. 2021](#)), извршене су нумеричке симулације коришћењем МКЕ модела са граничним условима, оптерећењима и димензијама које одговарају експерименталним испитивањима челичних и алуминијумских епрувета.

6.2.1 Модел коначних елемената и идентификација параметара

Тродимензионални модел коначних елемената је направљен за раван део епрувете који се поклапа са дужином екстензиометра (50 mm), у складу са димензијама епрувете. Посматрани део епрувете има три равни симетрије, тако да је могуће задати одговарајуће граничне услове и моделирати само једну осмину мерног дела епрувете. Димензије модела коначних елемената су 25 mm x 6.25 mm x 2.5 mm. Геометријска имперфекција неопходна да изазове процес

локализације пластичне деформације задата је као линеарно сужење ширине и дебљине епрувете у износу од 0.01% у зони 10 mm (L_1) од средине епрувете, где се очекује појава „врата“ и представљена је различитом скалом сиве боје на слици 6.4. Имперфекција представља веома малу грешку на епрувети која може настати током процеса производње, а која је један од фактора одговорних за иницирање појаве прслине у материјалу током експерименталних испитивања. Гранични услови укључују ограничење чворова у равнина симетрије у правцу нормалном на раван којој припадају. Једноосно затежуће оптерећење је задато у чворовима горње површине модела, кроз различите прираштаје померања да би се одредио утицај корака на добијене резултате који ће бити приказани у потпоглављу 6.2.3. У првом случају, који је приказан у потпоглављу 6.2.2, на модел коначних елемената је примењено затежуће оптерећење на чворовима горње површине помоћу инкремента померања од 0.02 mm у 350 корака.

Дискретизација модела извршена је стандардним осмочворним хексаедарским коначним елементима. У зони где се очекује сужење мрежа је додатно уситњена. Прво је испитивана мрежа коначних елемената у којој је величина елемента била 1 mm, а затим је у зони где се очекује сужење мрежа додатно уситњена, где је величина елемента дуж епрувете била 0.5mm (зона L_1 на слици 6.4) и та мрежа је коришћена за нумеричке симулације приказане у потпоглављу 6.2.2. Елементи у прва два реда мреже коначних елемената су додатно уситњени у циљу анализе утицаја густине мреже на резултате прорачуна и резултати су приказани у потпоглављу 6.2.4.



Слика 6.4 Мрежа коначних елемената, имперфекција, оптерећење и гранични услови

Фон Мизесов конститутивни модел за пластичност метала, који је спрегнут са PFDM, у случају великих деформација узима у обзир однос стварног напона и стварне деформације, и њихове вредности су израчунате коришћењем резултата добијених експерименталним испитивањем.

Номинални напон σ_0 и номинална деформација ε су израчунати као:

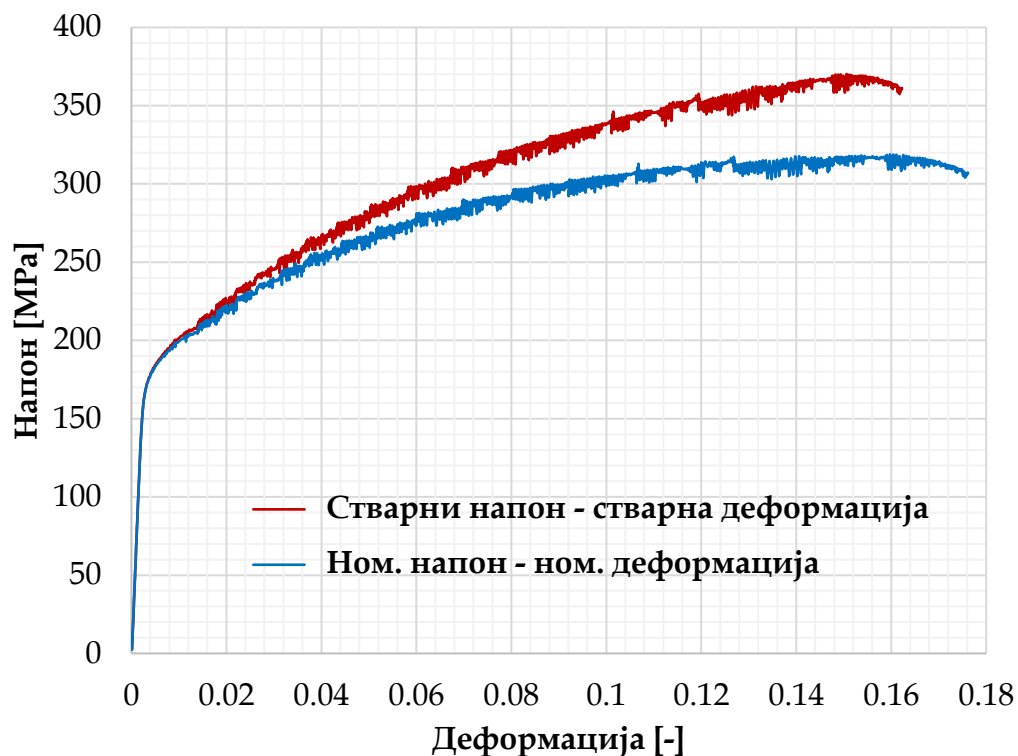
$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l_g}{l_{g0}}, \quad (6.4)$$

где је F сила оптерећења измерена на сервохидрауличном пулзатору, A_0 номинална површина попречног пресека епрувете, Δl_g померање измерено

екстензиомером и l_{g0} је номинална мерна дужина. Стварни напон σ и стварна деформација h су онда израчунати као:

$$\sigma = \sigma_0(1 + \varepsilon), \quad h = \ln(1 + \varepsilon). \quad (6.5)$$

На слици 6.5 је дат упоредни приказ дијаграма који представљају односе стварни напон - стварна деформација и номинални напон - номинална деформација за резултате добијене експерименталним испитивањем епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечене дуж правца ваљања.



Слика 6.5 Поређење дијаграма стварног и номиналног напона и деформације

Материјални параметри функције ојачања и параметри фазног поља општећења неопходни за нумеричку симулацију челичних и алуминијумских епрувета су: E [МПа] - Јангов модул, ν [-] - Поасонов коефицијент, σ_{yv} [МПа] - напон течења на почетку првог интервала (слика 5.3), σ_{y0} [МПа] - напон на почетку другог интервала, $\sigma_{y0,\infty}$ [МПа] - напон засићења ојачања, H [МПа] - модул ојачања, n [-] - експонент ојачања, G_V [МПа] - брзина ослобађања енергије лома, l_c [mm] - карактеристична дужина, $\bar{\varepsilon}_p^{crit}$ - критична еквивалентна пластична деформација, $\bar{\varepsilon}_{p0}$ - максимална еквивалентна пластична деформација на крају интервала перфектне пластичности код челика или на крају интервала линеарног ојачања код алуминијума, H_0 [МПа] - линеарни модул ојачања код алуминијума. Већина материјалних параметара може бити одређена анализом криве стварни напон - стварна деформација, слика 6.5, али неки од њих морају

бити добијени из процеса калибрације фитовањем дијаграма ојачања или извођењем нумеричких симулација и поређењем са експерименталним резултатима. У табелама 6.1 и 6.2 приказани су материјални параметри, заједно са параметрима фазног поља оштећења, коришћени у нумеричким симулацијама алуминијумских и челичних епрувета.

Израчуната вредност напона течења за оба интервала приказана на слици 5.3 добија се на следећи начин:

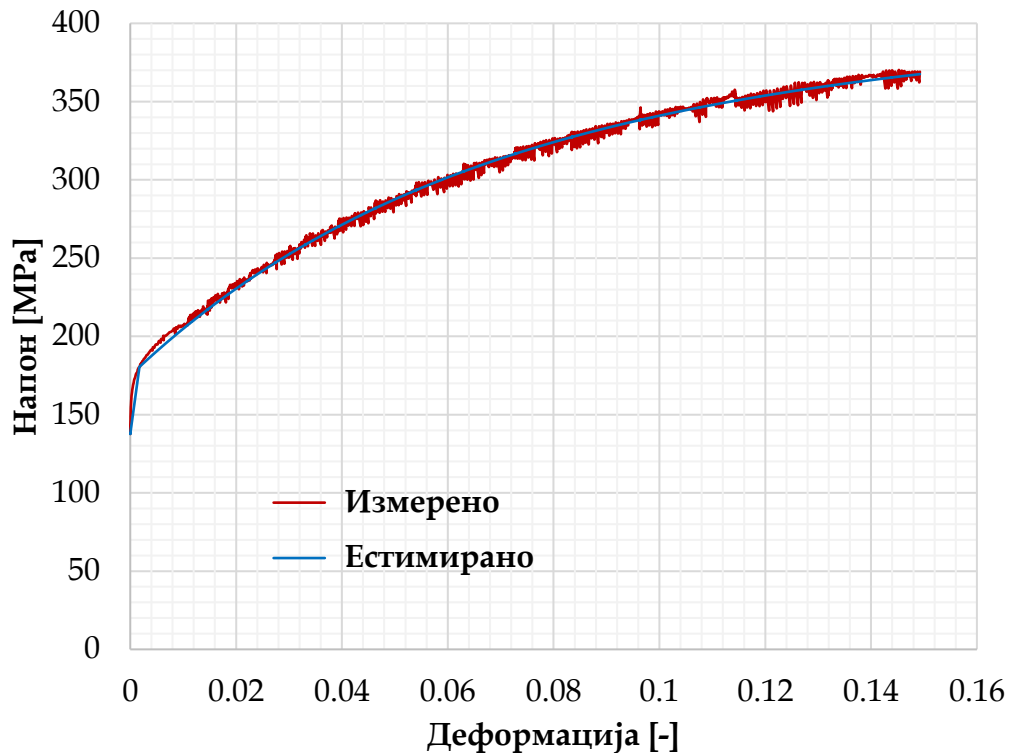
$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_{yv} + H_0 \bar{\epsilon}_p & ; \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_{p0} \\ \sigma_{y0} + (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{y0})(1 - e^{-n(\bar{\epsilon}_p - \bar{\epsilon}_{p0})}) + H(\bar{\epsilon}_p - \bar{\epsilon}_{p0}) & ; \bar{\epsilon} \geq \bar{\epsilon}_{p0} \end{cases}, \quad (6.6)$$

где је вредност израчунаог напона на крају првог интервала дата у (5.60). Из овог израза можемо добити вредност линеарног модула ојачања као

$$H_0 = \frac{\sigma_{y0} - \sigma_{yv}}{\bar{\epsilon}_{p0}}, \quad (6.7)$$

при чему су вредности за σ_{y0} и $\bar{\epsilon}_{p0}$ очитане са дијаграма стварни напон - стварна деформација на граници између првог и другог интервала, односно на почетку Симове функције ојачања, а σ_{yv} представља напон течења на почетку првог интервала. Код челика је H_0 приближно једнако 0 јер први интервал одговара перфектној пластичности.

Вредност параметра $\sigma_{y0,\infty}$ представља максималну вредност измереног напона на кидалици, а вредност пластичне деформације у том тренутку се усваја као вредност параметра критичне еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p^{crit}$, слика 5.3.



Слика 6.6 Поређење дијаграма измереног и естимираног односа напон - пластична деформација

Вредности материјалних параметара H и n добијају се фитовањем дијаграма помоћу методе најмањих квадрата која представља једну од метода за одређивање минималног одступања ([Rakić D. 2014](#)). Фитовање кривих је извршено у складу са изразом (6.8) тако да збир квадрата разлике измерених вредности напона σ_y^* и израчунатих вредности σ_y које описују површ течења буде минималан, слика 6.6:

$$\Delta\sigma^2 = (\sigma_y^* - \sigma_y)^2 \rightarrow \Delta\sigma_{\min}, \quad (6.8)$$

где $\Delta\sigma$ представља одступање вредности σ_y^* и σ_y које треба минимизовати. Вредности параметара n и H за које је добијено најмање одступање се користе за нумеричку симулацију.

Почетне вредности параметара фазног поља оштећења (G_v, l_c) су усвојене из литературе, а након тога су калибрисане итеративним процесом извођења симулације и поређењем добијених резултата са експерименталним одзивом.

Табела 6.1 Материјални параметри коришћени за моделирање фазног поља оштећења код епрувета алуминијума 5083, стања Н111 и Н321

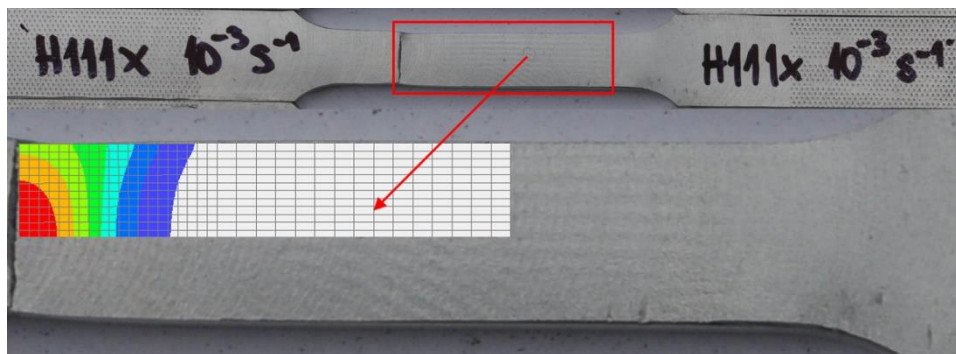
Материјални параметри	Алуминијум					
	Н111			Н321		
	0°	45°	90°	0°	45°	90°
E [MPa]	69001	72739	72739	70150	68889	72133
ν [-]	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33
σ_{yv} [MPa]	137.63	158.78	163.22	200.599	171.915	206.65
$\sigma_{y0,\infty}$ [MPa]	370.25	368.59	370.34	412.889	404.019	414.93
H [MPa]	103.26	73.116	98.761	146.174	102.92	95.63
n [-]	16.0	12.35	14.9	20.3	14	18.1
G_V [MPa]	5.663	7.173	6	2.55	7.935	3.273
l_c [mm]	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$\bar{\epsilon}_p^{crit}$	0.14	0.17	0.15	0.11	0.18	0.14
$\bar{\epsilon}_{p0}$	0.0017	0.0042	0.0034	0.0019	0.0033	0.0025
H_0 [MPa]	24642	4911	7530	19817	13223	8820

Табела 6.2 Материјални параметри коришћени за моделирање фазног поља оштећења код епрувета челика S355

Материјални параметри	Челик		
	S355		
	0°	45°	90°
E [MPa]	190080	199356	196286
ν [-]	0.3	0.3	0.3
σ_{yv} [MPa]	382.86	385.389	405.201
$\sigma_{y0,\infty}$ [MPa]	642.747	626.823	642.109
H [MPa]	0	0	0
n [-]	15.9	15.8	16.4
G_V [MPa]	9.617	9.099	8.778
l_c [mm]	0.01	0.01	0.01
$\bar{\epsilon}_p^{crit}$	0.21	0.20	0.19
$\bar{\epsilon}_{p0}$	0.0051	0.0072	0.0044
H_0 [MPa]	0.00	0.00	0.00

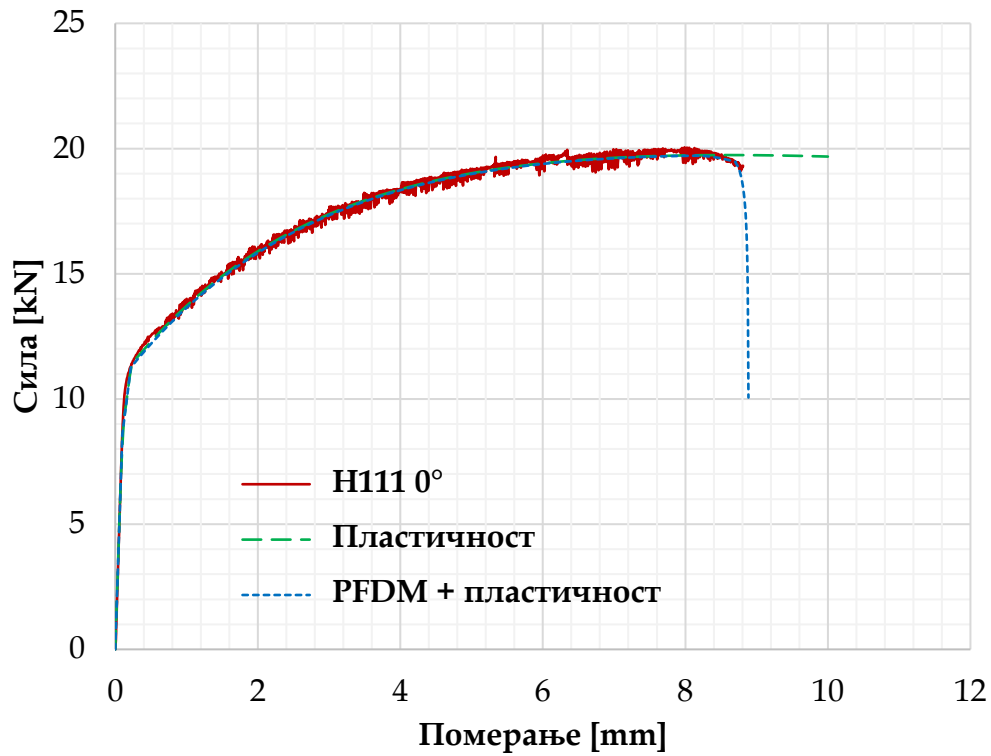
6.2.2 МКЕ симулација алуминијумских 5083 (стања Н111 и Н321) и челичних S355 епрувета

На слици 6.7 приказана је епрувета алуминијумске легуре 5083 у стању Н111 после експерименталног испитивања заједно са пољем еквивалентне пластичне деформације добијеним нумеричком симулацијом модификоване PFDM. Дистрибуција поља еквивалентне пластичне деформације квалитативно симулира деформисану конфигурацију експериментално добијених деформација. Поље еквивалентне пластичне деформације добијено симулацијом спрезања фазног поља оштећења и пластичности је локализовано у зони где се јавља лом.

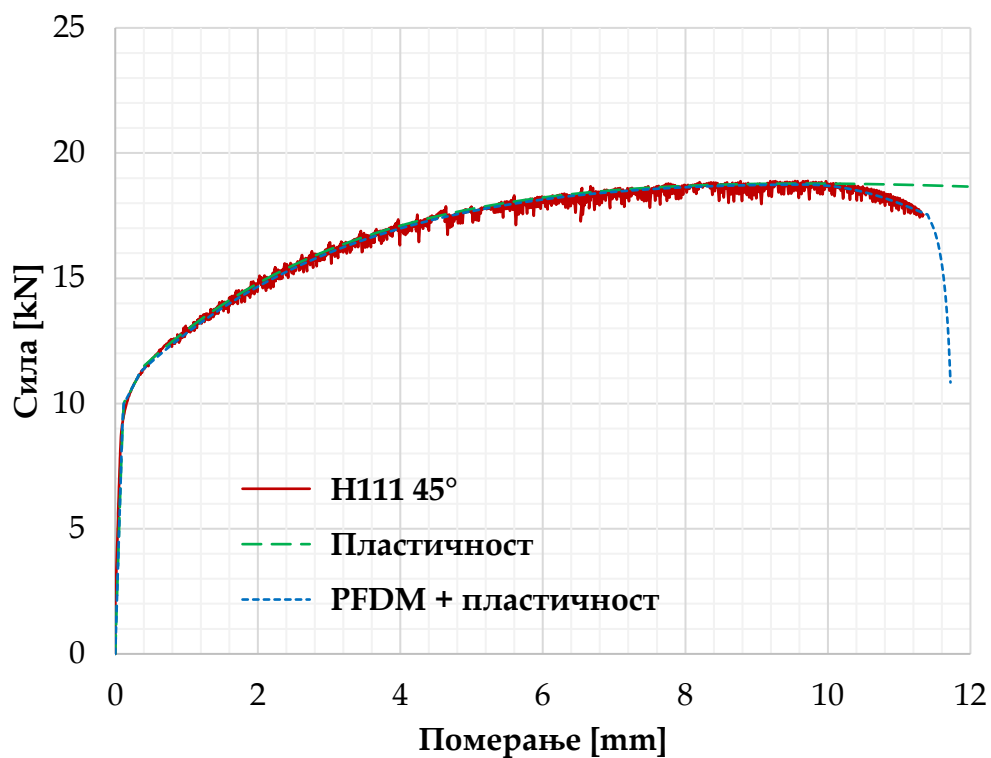


Слика 6.7 Епрувета алуминијумске легуре 5083, стање H111, сечена у правцу ваљања са пољем еквивалентне пластичне деформације у критичној зони после експерименталног испитивања

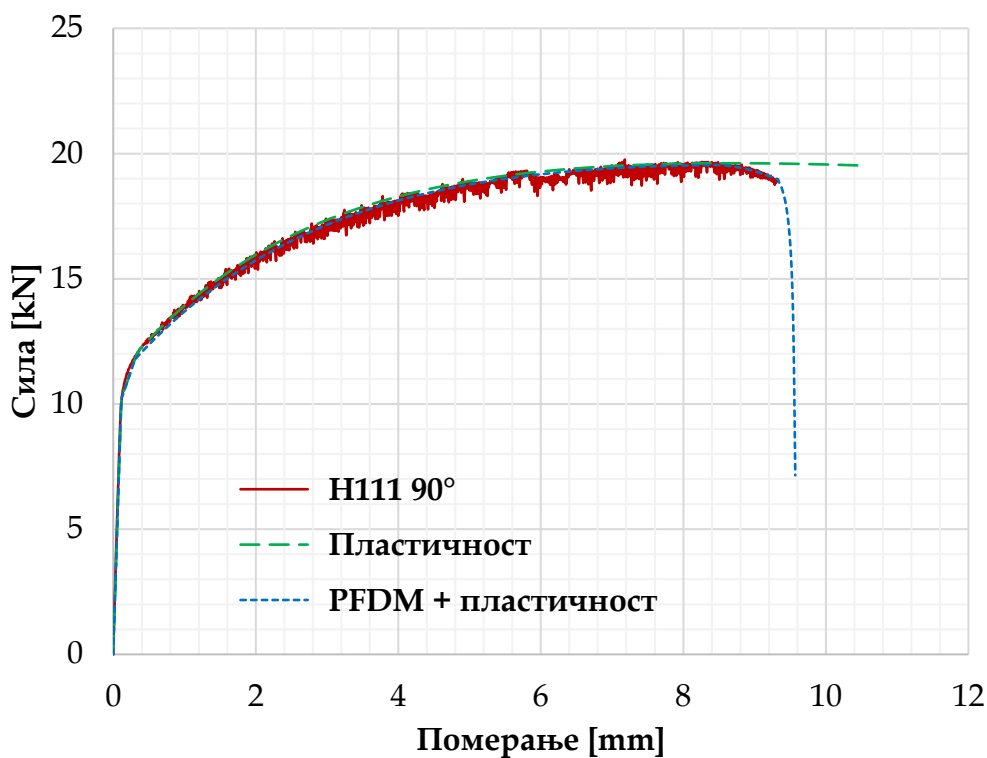
Поређење дијаграма односа силе и померања добијених експериментално и нумерички за сва три правца сечења епрувета алуминијумске легуре 5083, за стања H111 и H321, као и челичних S355 епрувета, дато је на сликама 6.8 - 6.16. Извршене су две различите врсте нумеричких симулација: 1. „чист“ фон Мизесов услов течења и 2. спрега модификоване PFDM и пластичности. Може се приметити да „чист“ фон Мизесов услов течења (на дијаграмима означен као „Пластичност“) не може да испрати понашање материјала забележено експериментално после достизања вредности максималне силе, односно понашање које представља резултат деградације материјала. Коришћењем PFDM приступа и предложене модификоване променљиве спрезања p , утицај развоја пластичне деформације се активира после тренутка у ком сила достигне максималну вредност, односно, када њена вредност почне да опада. Вредност променљиве спрезања p линеарно расте, а истовремено вредност силе почиње да опада све до лома епрувете, самим тим крива означена као „PFDM + пластичност“ може у потпуности да испрати експериментално понашање материјала. Поређењем прорачунског времена потребног за симулацију „чисте“ пластичности и „PFDM + пластичности“ добијено је да прорачун PFDM траје приближно 70% дуже у односу на симулацију „чисте“ пластичности, што се може сматрати прихватљивом разликом.



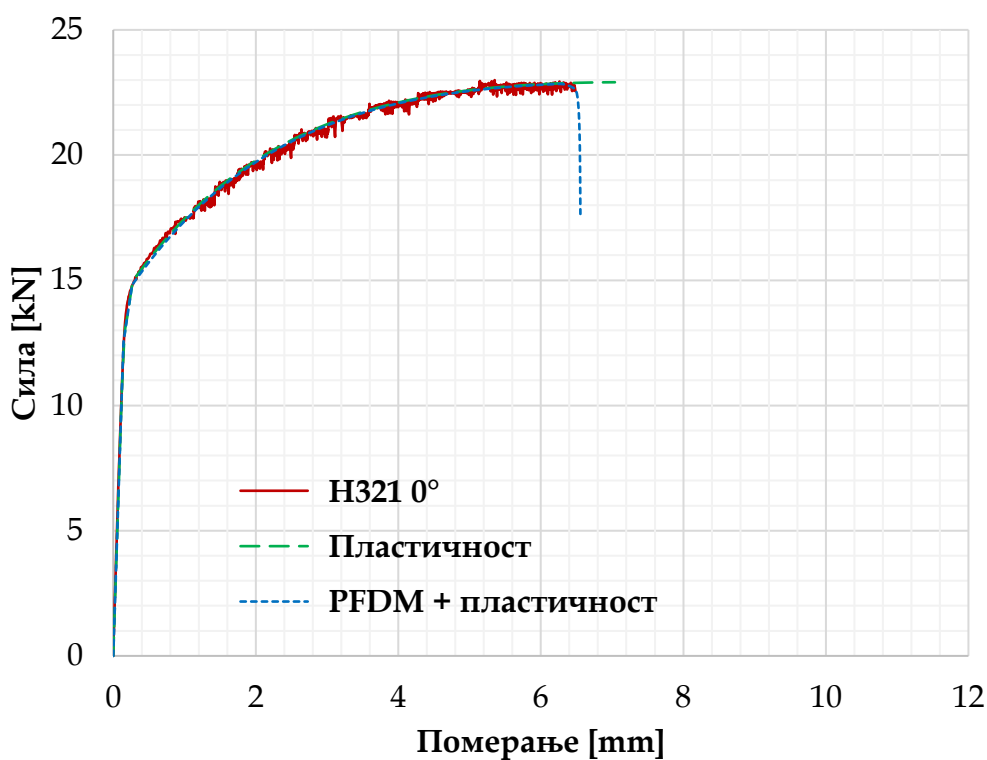
Слика 6.8 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање H111, сечену у правцу ваљања



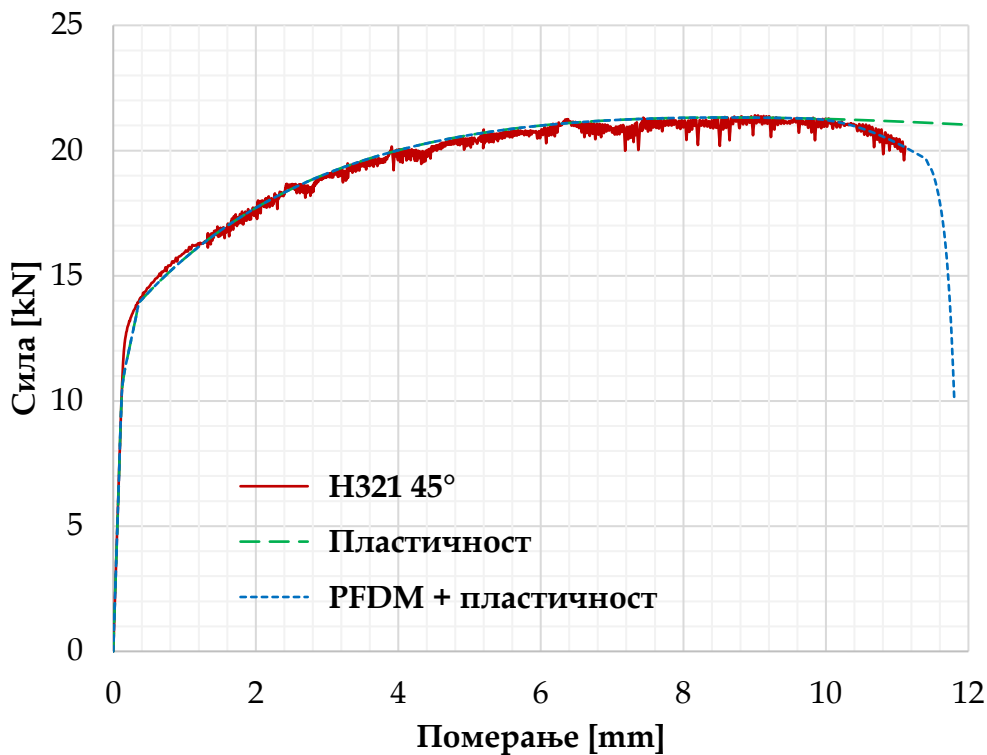
Слика 6.9 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање H111, сечену под углом од 45° у односу на правац ваљања



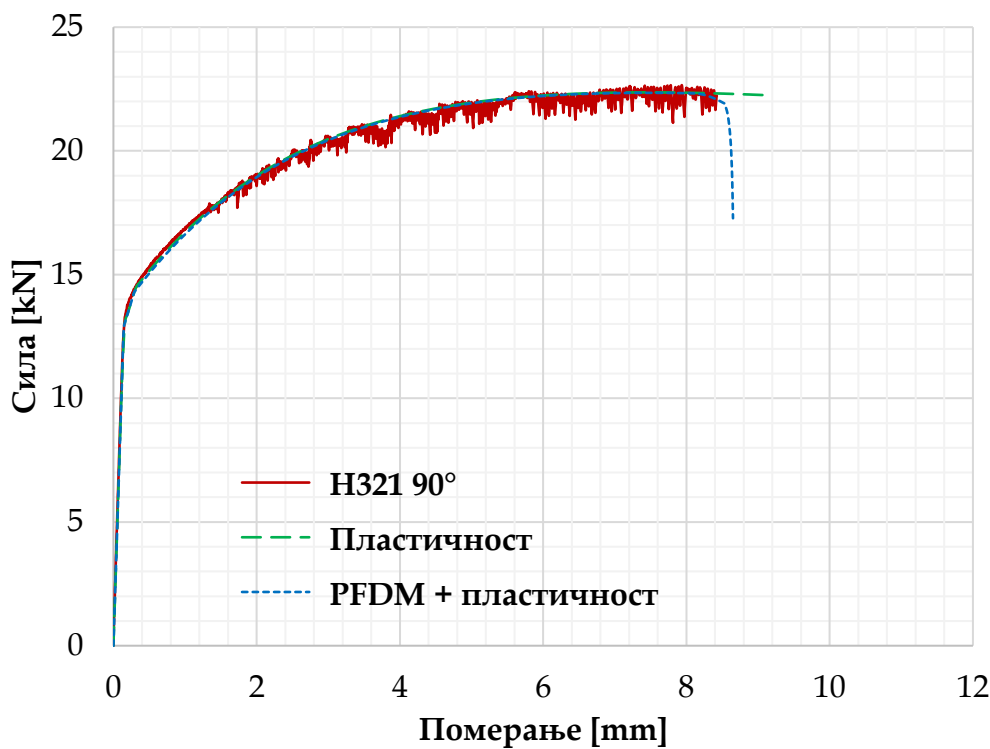
Слика 6.10 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање H111, сечену управно на правац ваљања



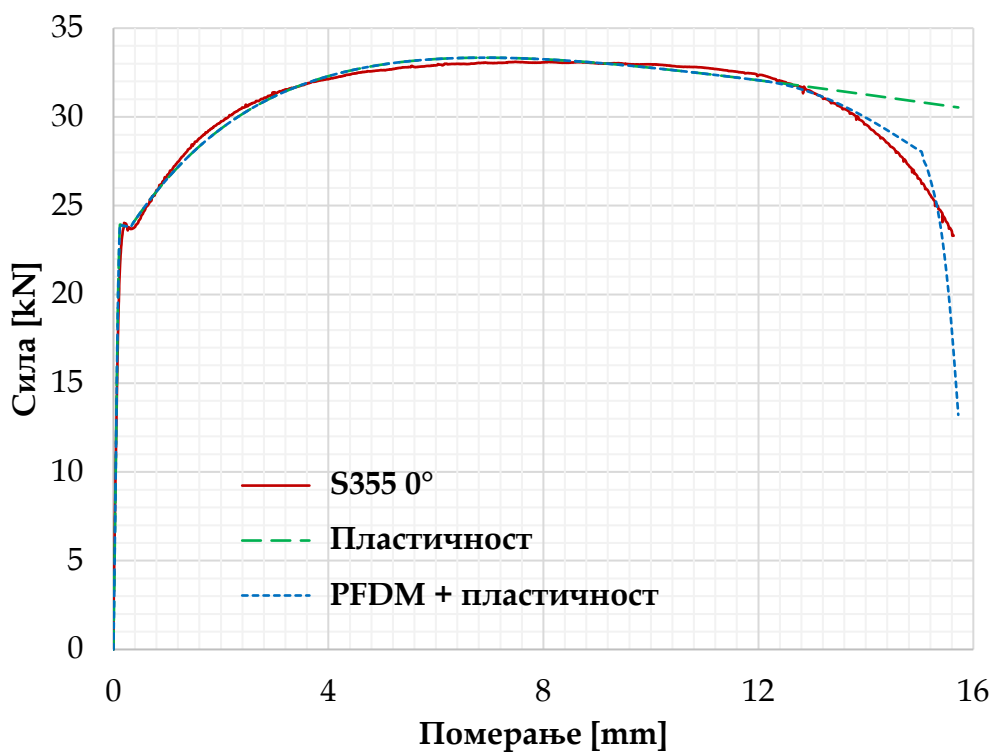
Слика 6.11 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање H321, сечену у правцу ваљања



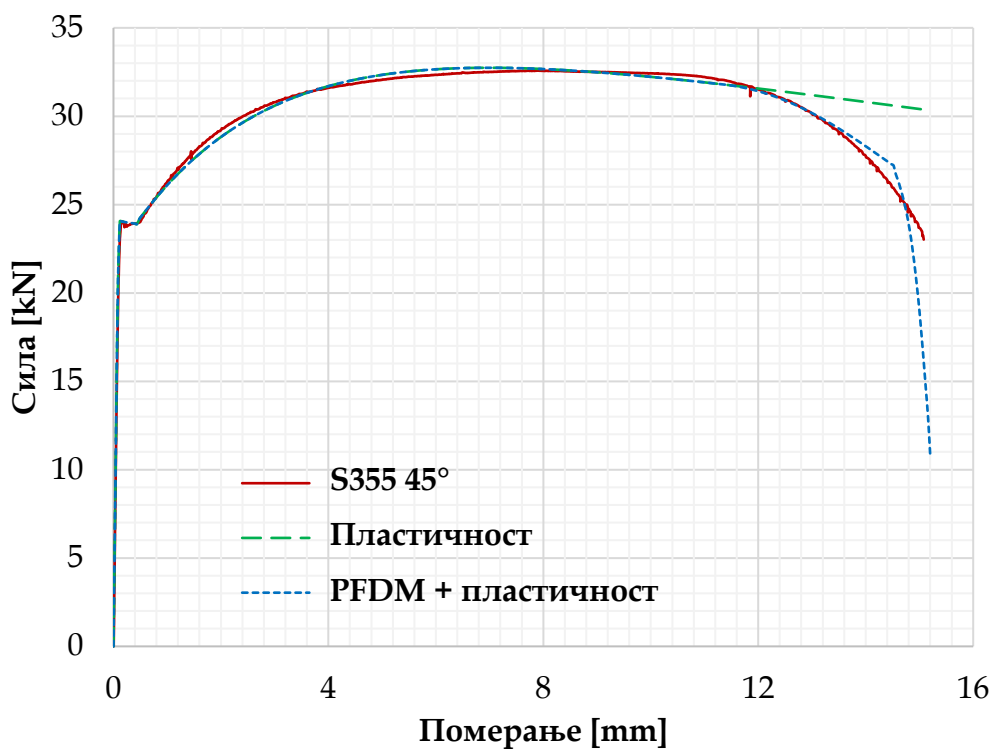
Слика 6.12 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечену под углом од 45° у односу на правац ваљања



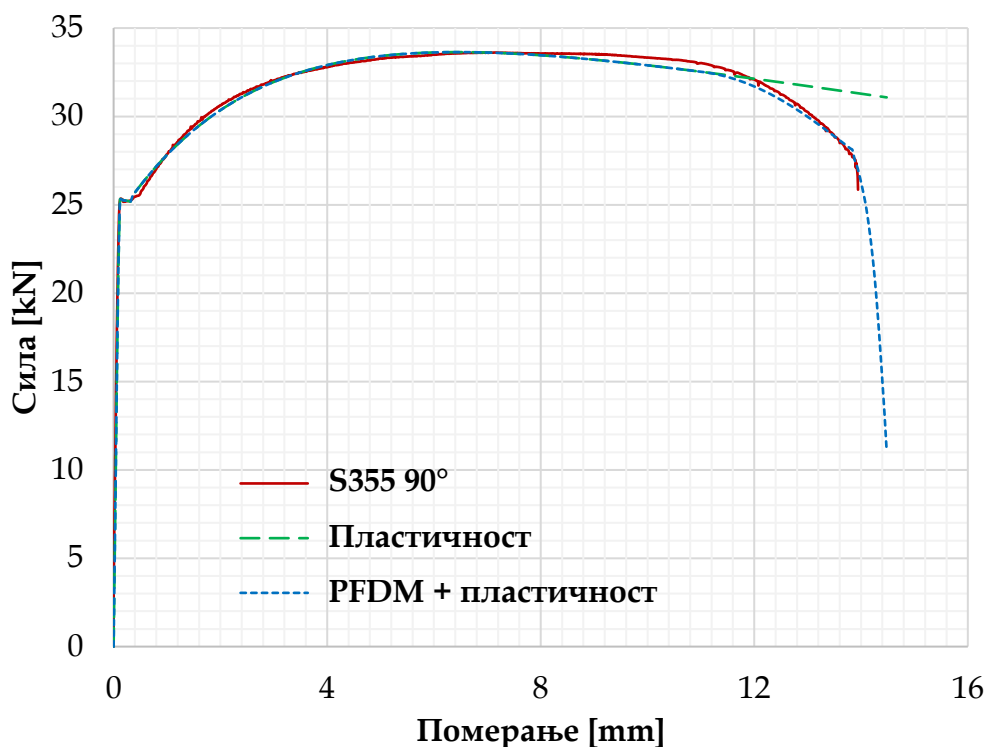
Слика 6.13 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечену управно на правац ваљања



Слика 6.14 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за челичну S355 епрувету сечену у правцу ваљања



Слика 6.15 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за челичну S355 епрувету сечену под углом од 45° у односу на правац ваљања

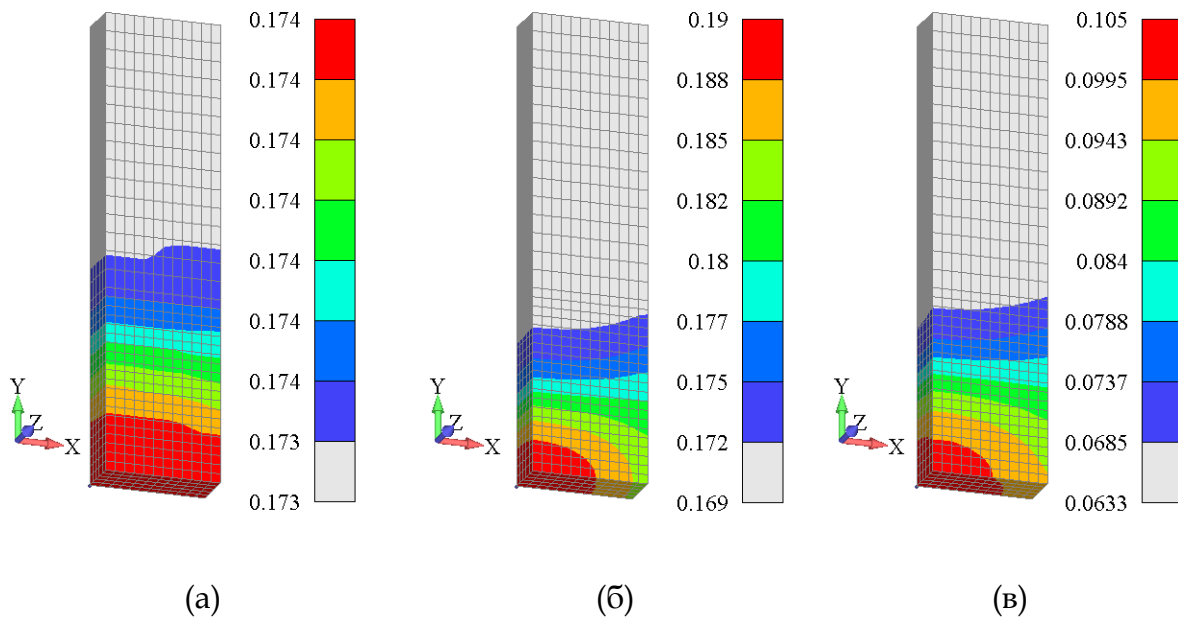


Слика 6.16 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за челичну S355 епрувету сечену управно на правац ваљања

Дијаграми добијени нумеричком симулацијом помоћу PFDM и експерименталним испитивањем се генерално добро поклапају, иако нумерички резултати не могу да симулирају „тестераст“ изглед дијаграма добијених експериментално приликом испитивања алуминијумских епрувета, слике 6.8 - 6.13. Снимање експерименталних резултата на сервохидрауличном пулзатору траје све док се изненада не деси лом епрувете, а резултати нумеричке симулације су добијени квазистатичком анализом која приказује могуће понашање материјала и након тачке у којој се десио лом током експеримента, па су из тог разлога нумерички дијаграми дужи. У случају мање брзине деформације и софистицираније мерне опреме вероватно би било могуће снимити експериментални одзив који је сличан нумеричким резултатима. Значај овог поређења је кључан и за симулацију, и за експерименте у будућем раду.

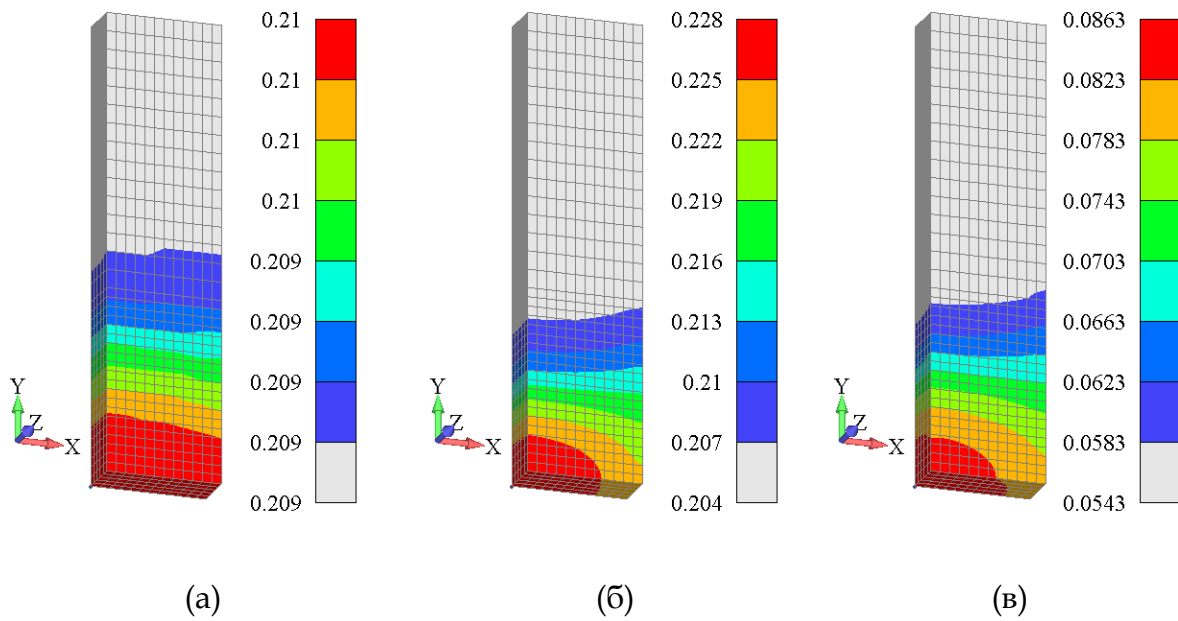
Зависност између поља оштећења и поља еквивалентне пластичне деформације добијених симулацијом PFDM, слика 6.17, води до закључка да је појава оштећења водећи узрок лома епрувете. Поље еквивалентне пластичне деформације за „чисту“ пластичност без фазног поља оштећења (слика 6.17а) и PFDM симулација (слика 6.17б) су дате да покажу утицај поља оштећења на локализацију пластичних деформација. На слици 6.17а, поље пластичне деформације је дистрибуирано дуж модела, са минималном разликом између минималне и максималне вредности што не сугерише место зоне лома. Са друге стране, дистрибуција поља оштећења дата на слици 6.17в одговара пољу еквивалентне пластичне деформације са слике 6.17б, тако да се може посматрати као генератор процеса лома. Сличан карактер поља оштећења и поља

еквивалентне пластичне деформације на сликама 6.17б и 6.17в је резултат зависности функције деградације крутости (5.50) и променљиве спрезања (5.53) која зависи од вредности еквивалентне пластичне деформације. Променљива спрезања p је одговорна за примећену корелацију.

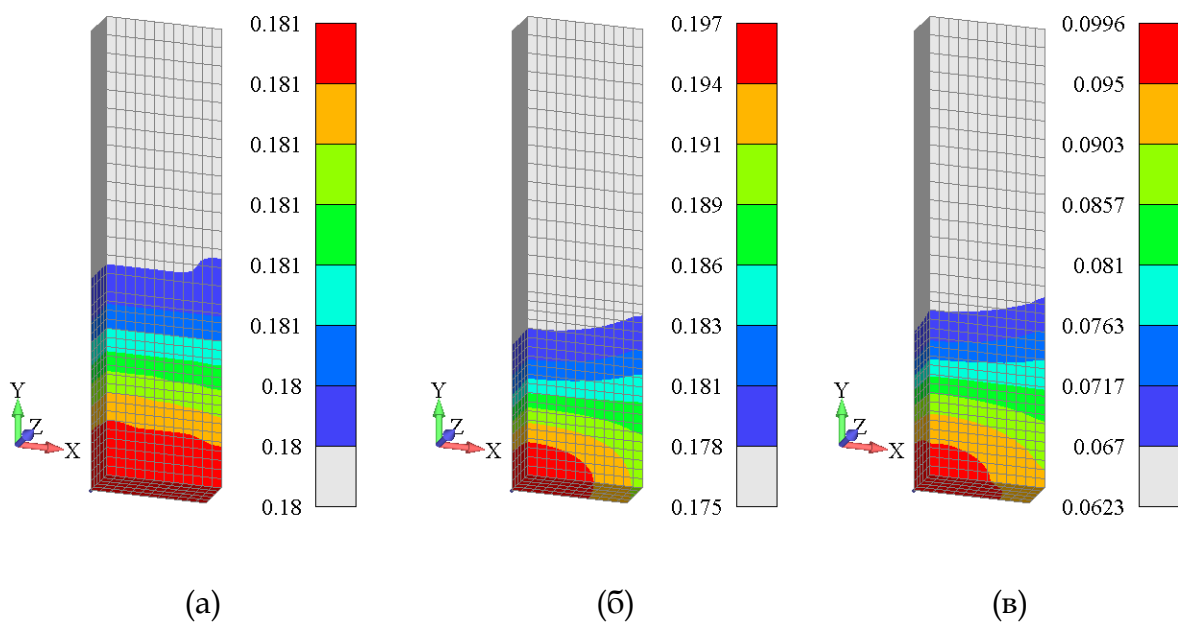


Слика 6.17 МКЕ резултати симулације H111 0°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност

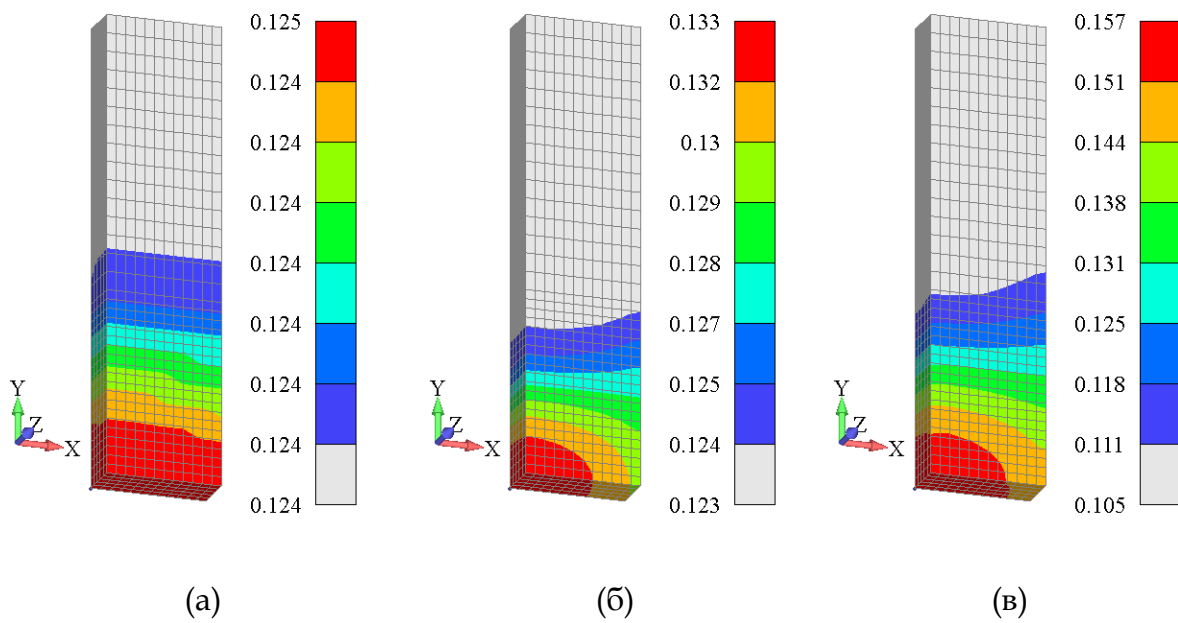
На сликама 6.18 - 6.25 је приказано поље еквивалентне пластичне деформације за „чисту“ пластичност без фазног поља оштећења, заједно са пољем оштећења и пољем еквивалентне пластичне деформације добијених коришћењем PFDM за све остале испитане случајеве. Зависност која се јавља између поља оштећења и поља еквивалентне пластичне деформације добијених симулацијом PFDM је иста као што је објашњено за случај приказан на слици 6.17.



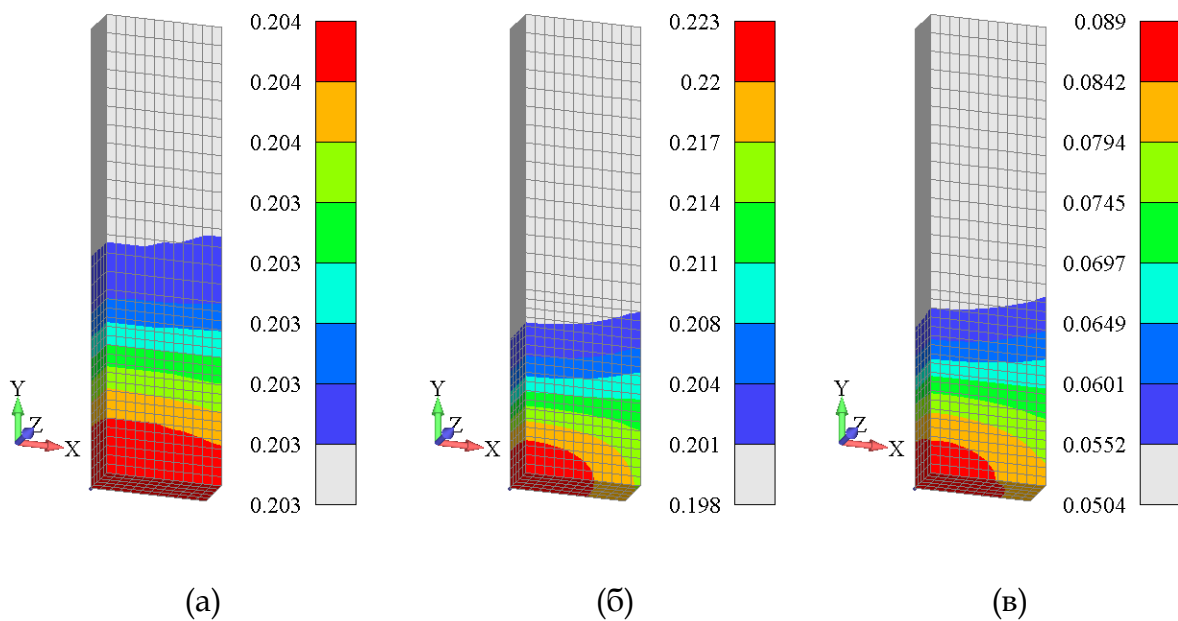
Слика 6.18 МКЕ резултати симулације N111 45°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност



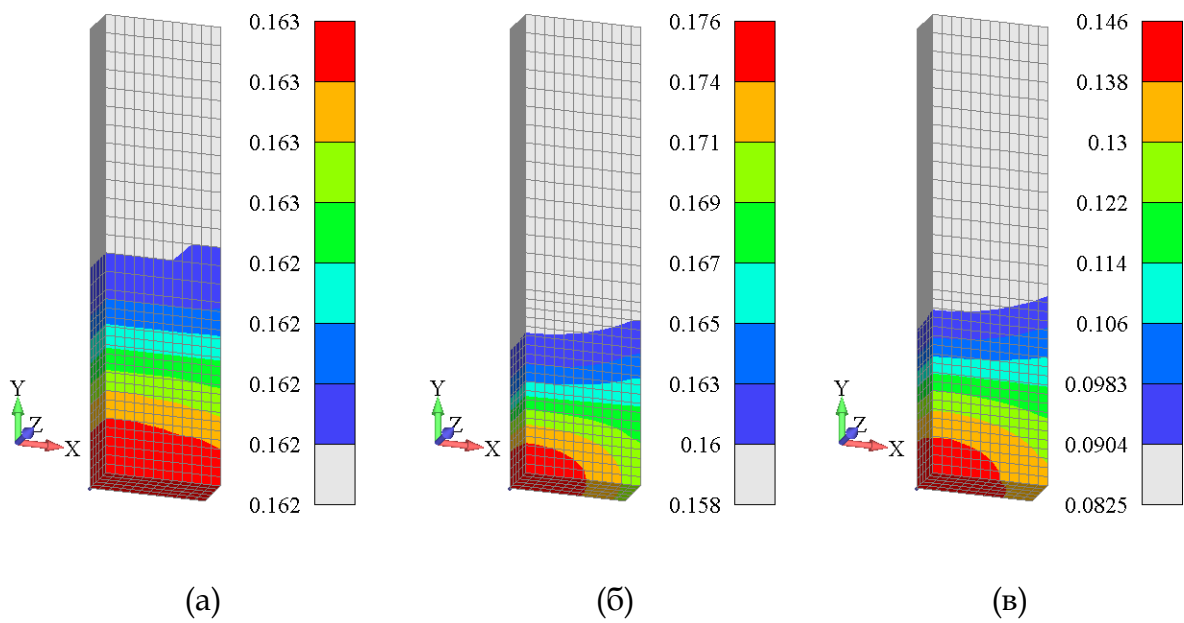
Слика 6.19 МКЕ резултати симулације N111 90°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност



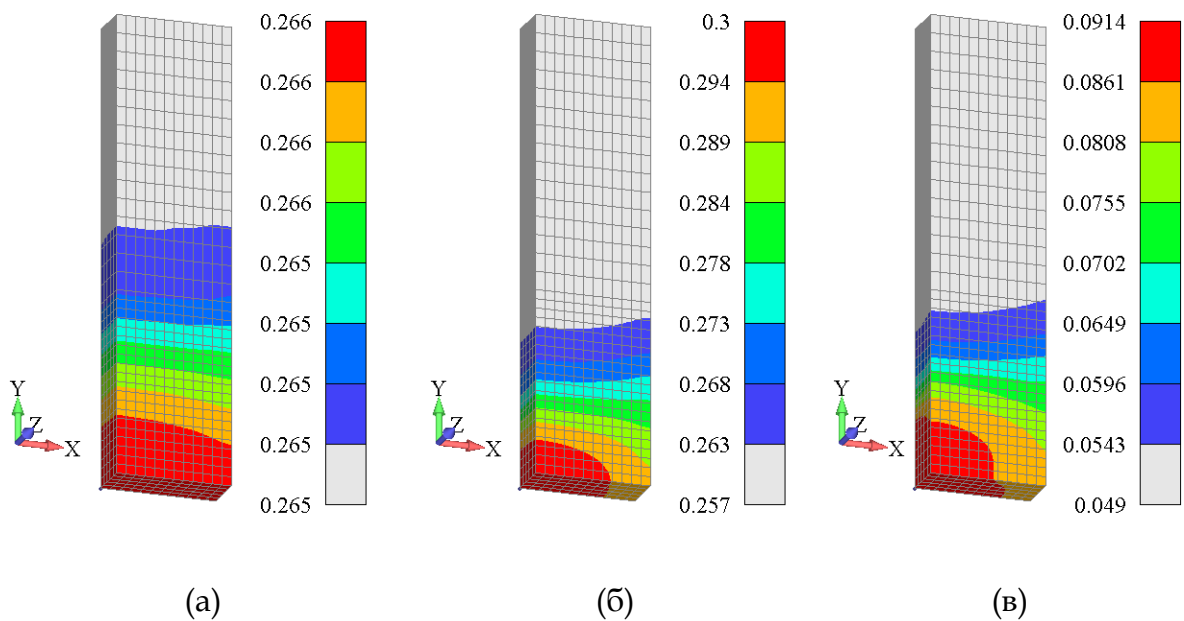
Слика 6.20 МКЕ резултати симулације Н321 0°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност



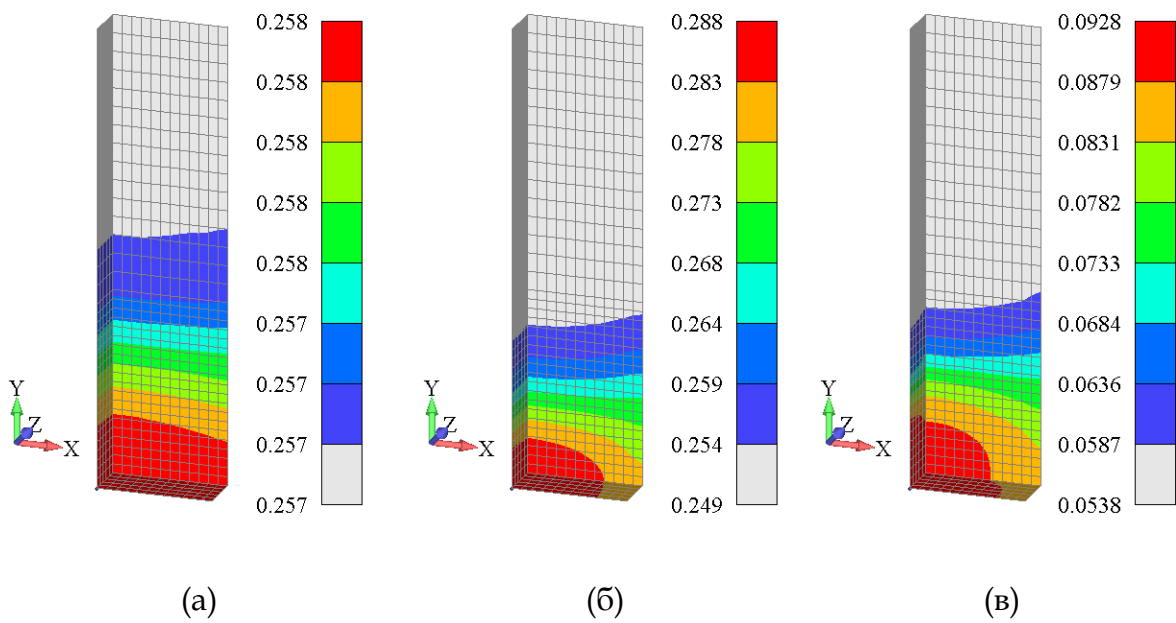
Слика 6.21 МКЕ резултати симулације Н321 45°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност



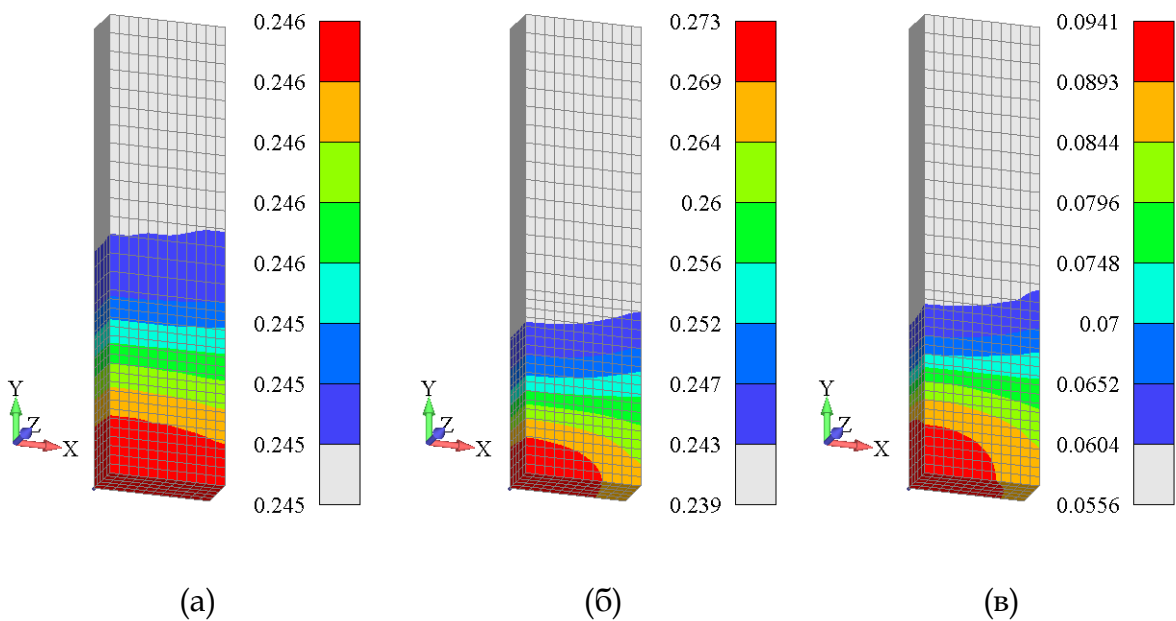
Слика 6.22 МКЕ резултати симулације H321 90°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност



Слика 6.23 МКЕ резултати симулације S355 0°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност



Слика 6.24 МКЕ резултати симулације S355 45°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност

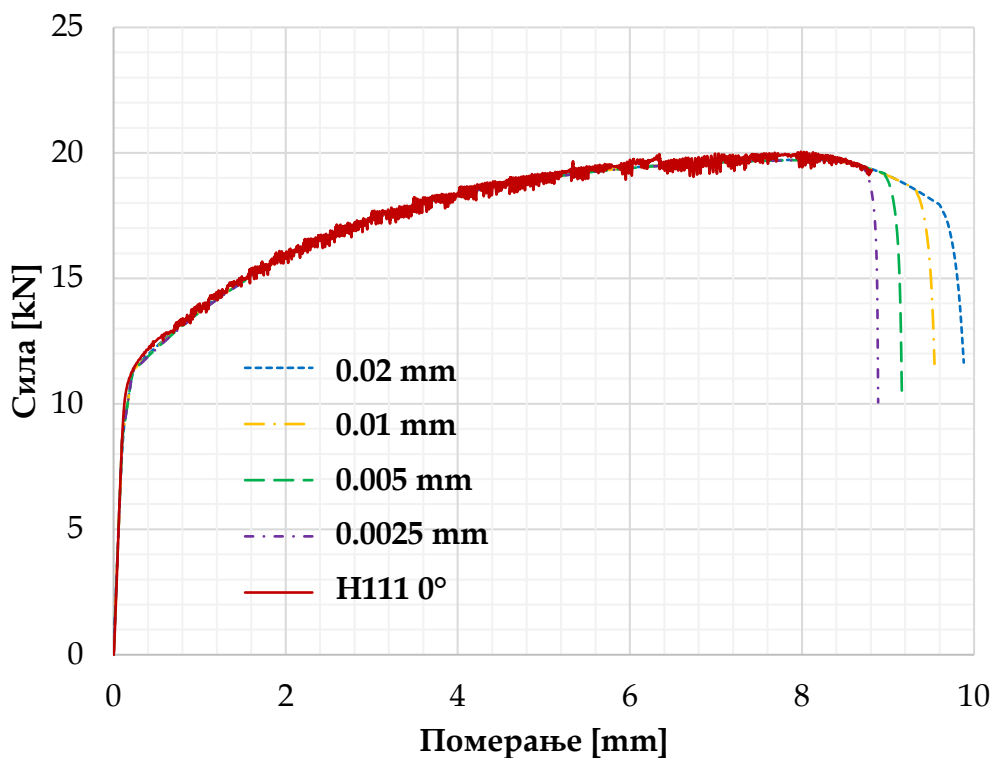


Слика 6.25 МКЕ резултати симулације S355 90°: а) Поље ефективне пластичне деформације - пластичност, б) Поље ефективне пластичне деформације – PFDM и пластичност и в) Поље оштећења – PFDM и пластичност

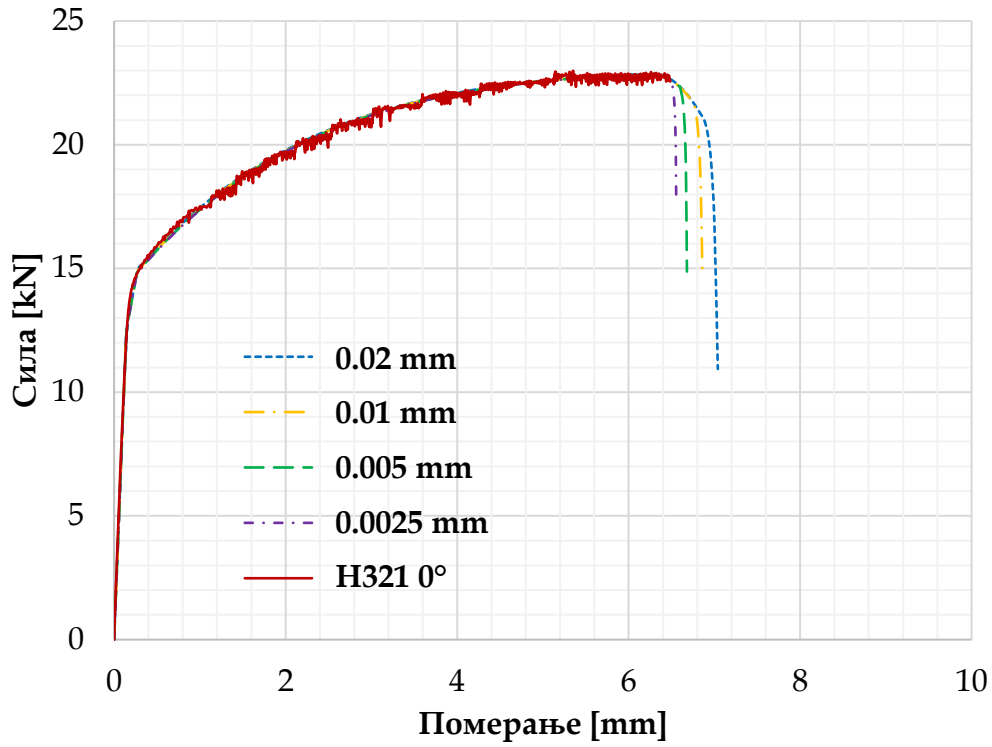
6.2.3 Утицај величине корака

Као што је показано у ([Shishvan S. et al. 2021](#)) наизменична шема није безусловно стабилна. Експериментални резултати су добијени коришћењем екстензиометра и сервохидрауличног пулзатора и у тренутку појаве лома епрувете снимање резултата се прекида. Са друге стране, резултати добијени симулацијом дају могуће понашање материјала и после тачке кидања епрувете. Из тог разлога је испитиван утицај величине корака задатог померања на добијени резултат нумеричком симулацијом и поређење са експерименталном кривом је дато на сликама 6.26 - 6.29 за случајеве 5083 Н111 0°, 5083 Н321 0°, S355 0° и S355 90°.

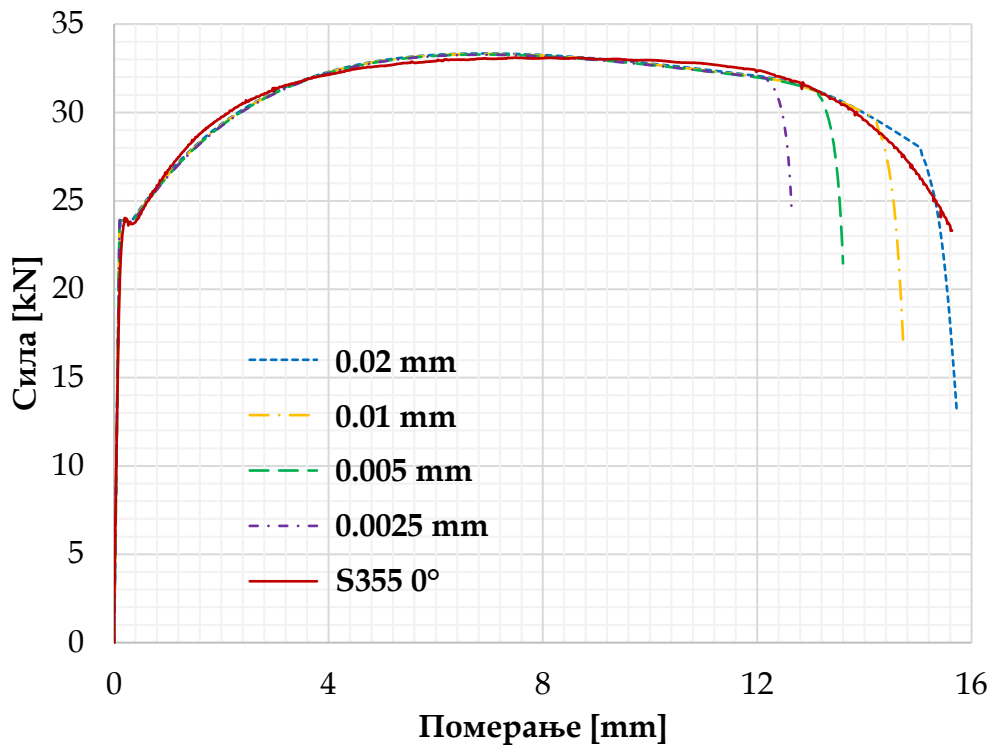
Може се приметити да резултат добијен нумеричком симулацијом у зони омекшавања материјала зависи од величине корака, тако да део после тачке пуцања епрувете треба занемарити. Резултати одзива сила - померање се разликују у зони омекшавања за примере дате у ([Shishvan S. et al. 2021](#)), што је верификовано и на примерима из овог рада.



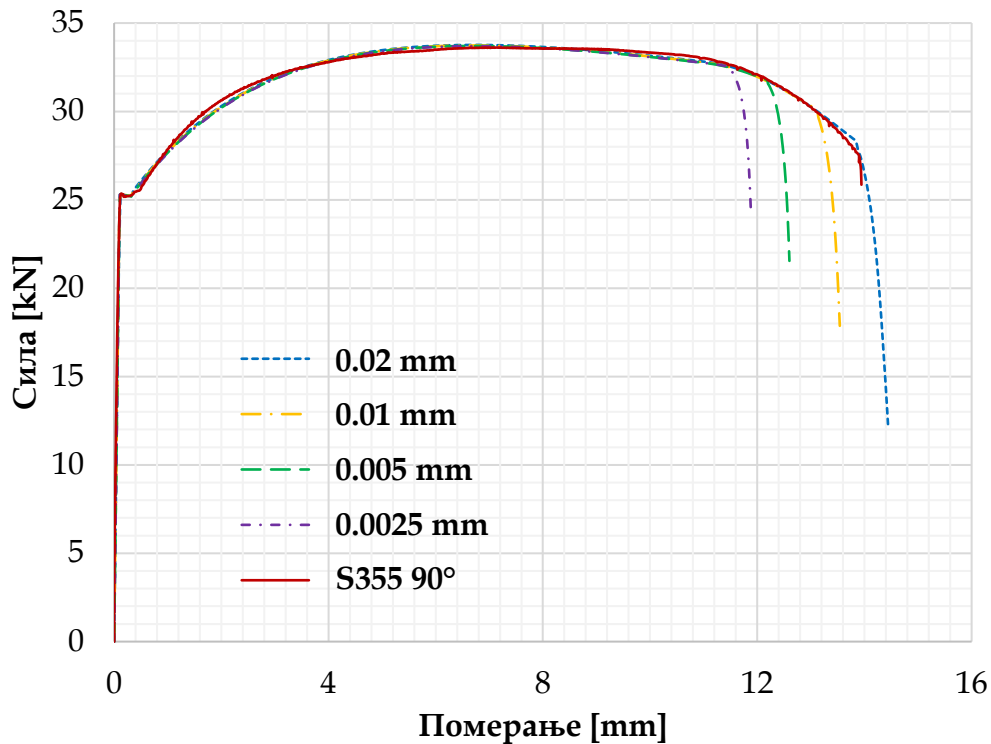
Слика 6.26 Анализа осетљивости наизменичне шеме на различите величине корака задатог померања за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечену у правцу ваљања



Слика 6.27 Анализа осетљивости наизменичне шеме на различите величине корака задатог померања за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање H321, сечену у правцу ваљања



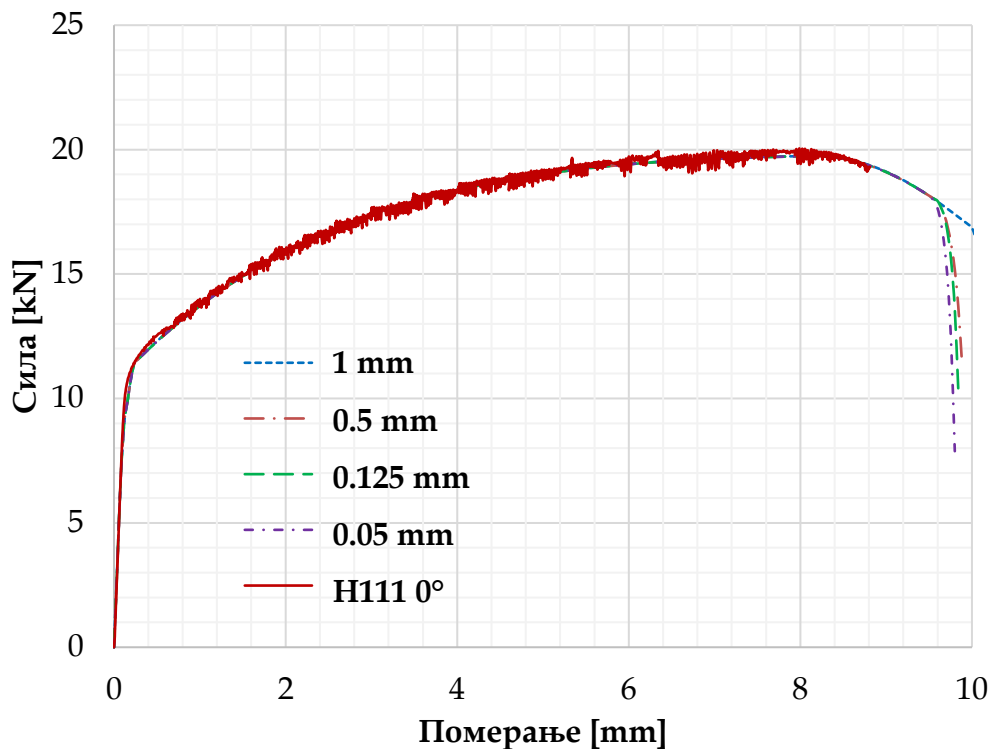
Слика 6.28 Анализа осетљивости наизменичне шеме на различите величине корака задатог померања за челичну S355 епрувету сечену у правцу ваљања



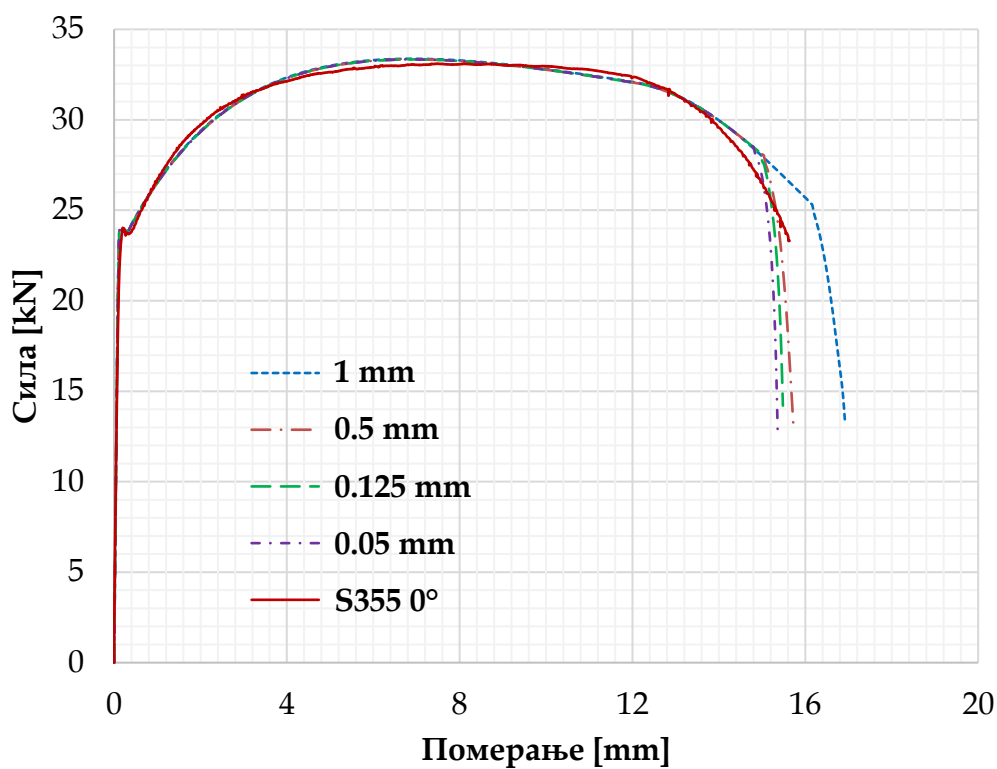
Слика 6.29 Анализа осетљивости наизменичне шеме на различите величине корака задатог померања за челичну S355 епрувету сечену управно на правац ваљања

6.2.4 Утицај густине мреже коначних елемената

Димензија елемента грубе мреже коначних елемената дуж стране епрувете је 0.5 mm. Ова мрежа је коришћена у претходним симулацијама да би се показало да се добро поклапање одзива сила - померање добијених нумерички и експериментално може добити чак и за грубе мреже. Међутим, уколико желимо да симулирамо развој фазног поља оштећења са покретним интерфејсом, мрежа коначних елемената мора бити додатно уситњена у зони у којој се очекује појава прслине. Димензије прва два реда елемената (1 mm дужине епрувете) смањене су 4 пута у правцу дужине за средњу густину мреже (дужина елемента - 0.125 mm), док је за најситнију мрежу смањена 10 пута (дужина елемента - 0.05 mm). Одзиви сила - померање за исте материјалне параметре дате у табелама 6.1 и 6.2 приказани су на сликама 6.30 и 6.31, где се може приметити да ситнија мрежа даје „мекши“ одговор у посткритичној зони, као што је наведено у ([Ambati M. et al. 20156](#)).

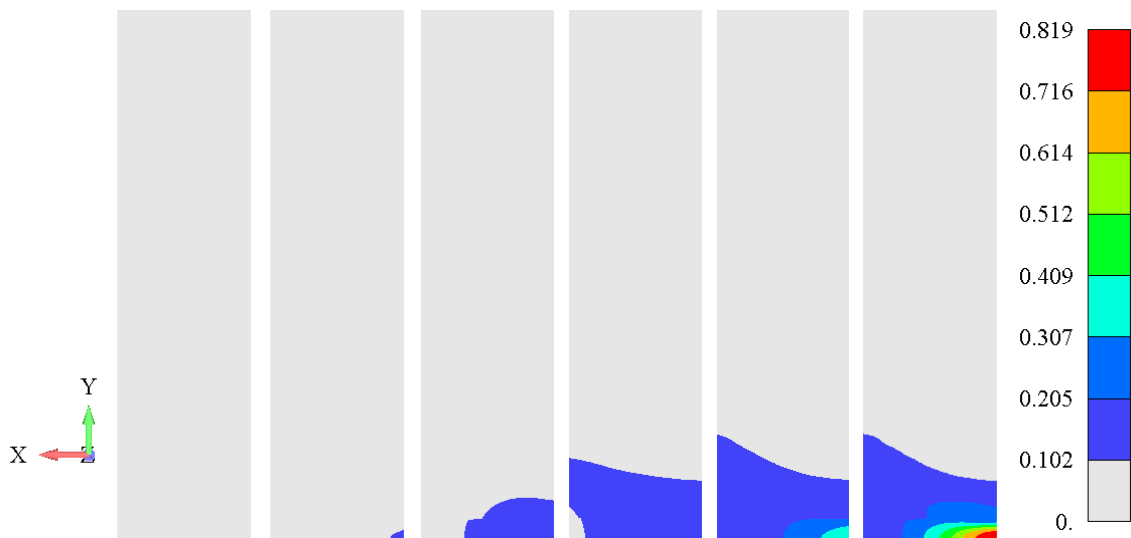


Слика 6.30 Утицај величине мреже на одзив сила - померање за епрувету алуминијумске легуре 5083, стање H111, сечену у правцу ваљања

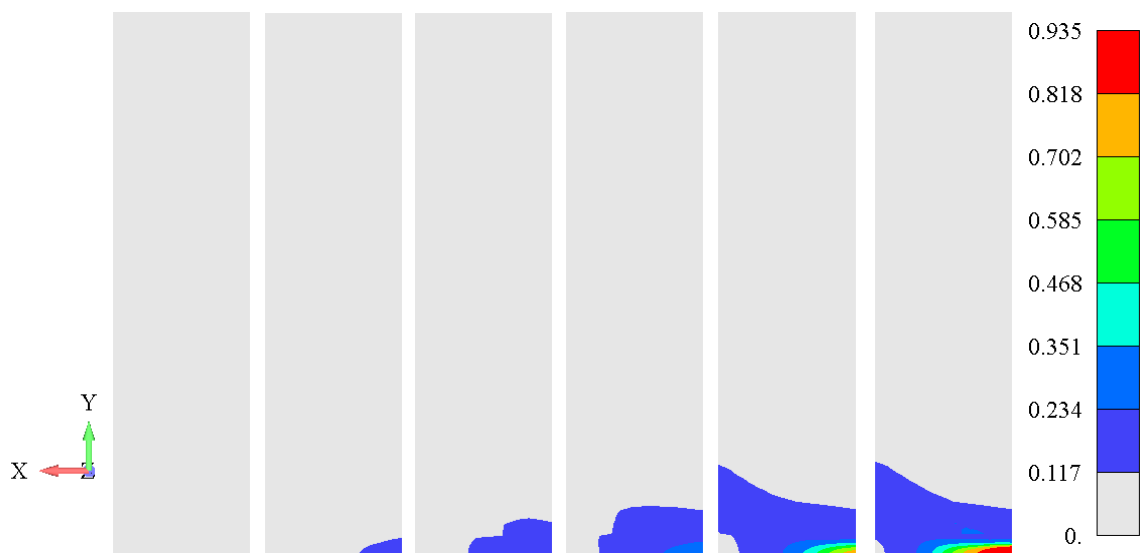


Слика 6.31 Утицај величине мреже на одзив сила - померање за челичну S355 епрувету сечену у правцу ваљања

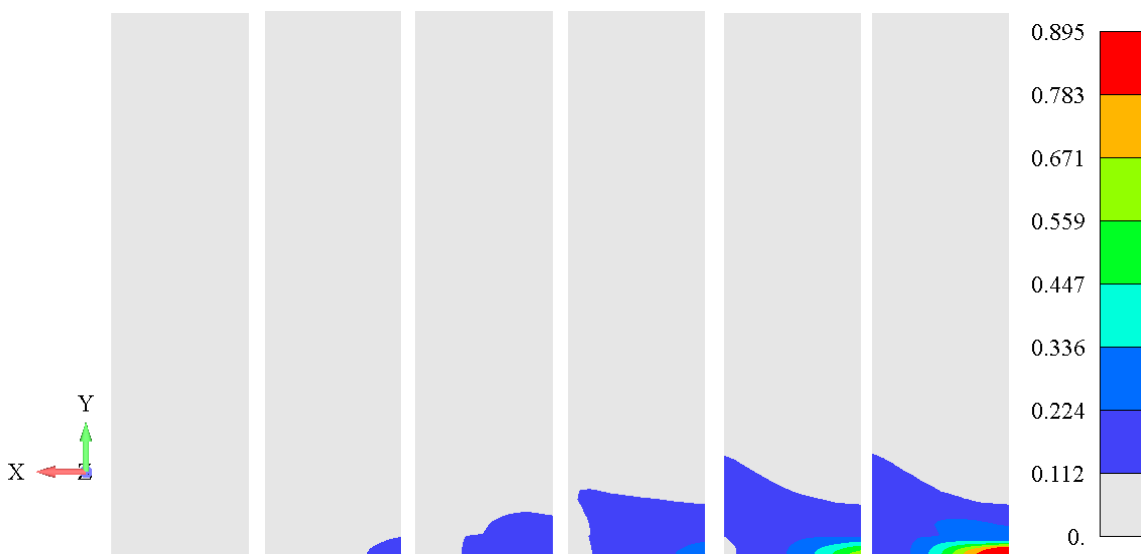
Развој поља оштећења за посткритично понашање је дато на сликама 6.32 - 6.40 као и развој поља еквивалентне пластичне деформације на сликама 6.41 - 6.49 за случај најситније мреже за све примере експериментално испитаних епрувета. Као што се може приметити, и поље оштећења и поље еквивалентне пластичне деформације развијају се у зони епрувете где се јављају прслине. Поље оштећења се развија у зони епрувете где се јавља „врат“ све до вредности која одржава стабилност прорачунског алгоритма. За даљу симулацију после појаве лома, неопходно је применити „умирање“ елемената, што је у плану будућег истраживања.



Слика 6.32 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете H111 0° за а) 9.60mm, б) 9.64mm, в) 9.68mm, г) 9.72mm, д) 9.76mm, е) 9.80mm



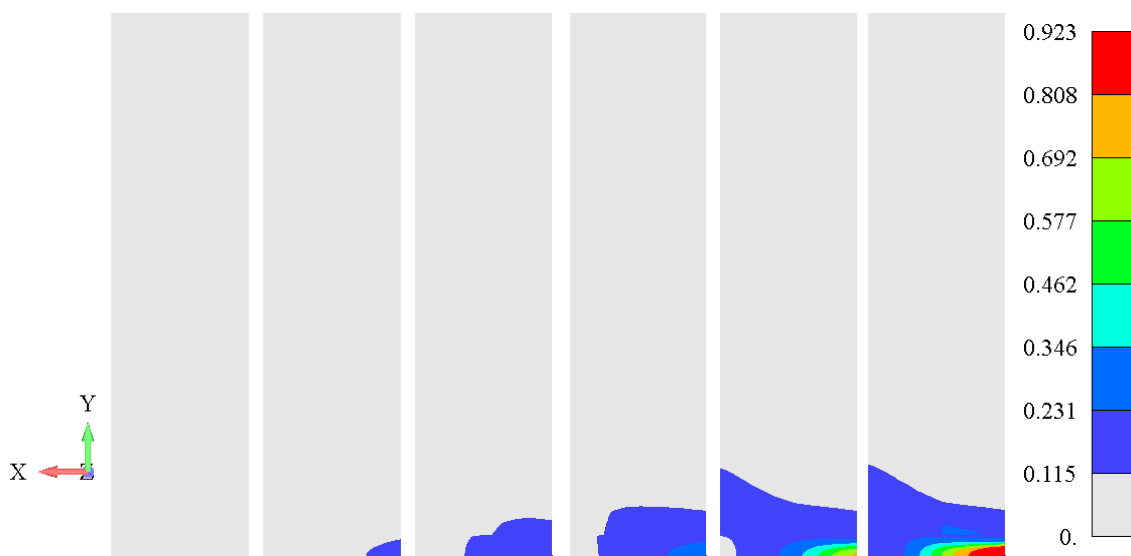
Слика 6.33 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете Н111 45° за а) 11.88mm, б) 11.92mm, в) 11.96mm, г) 12mm, д) 12.04mm, ђ) 12.08mm



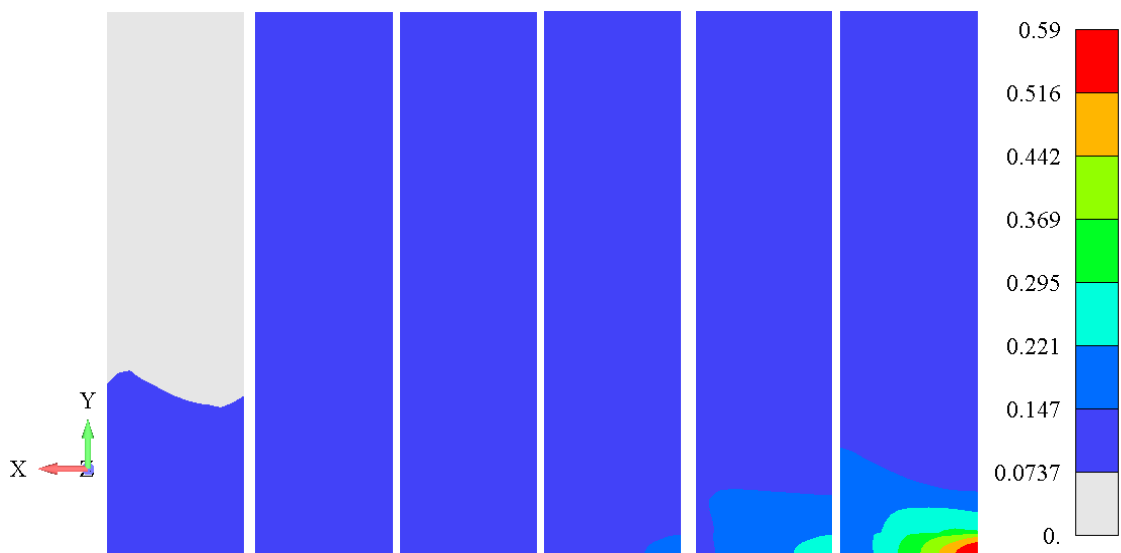
Слика 6.34 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете Н111 90° за а) 10.08mm, б) 10.12mm, в) 10.16mm, г) 10.20mm, д) 10.24mm, ђ) 10.28mm



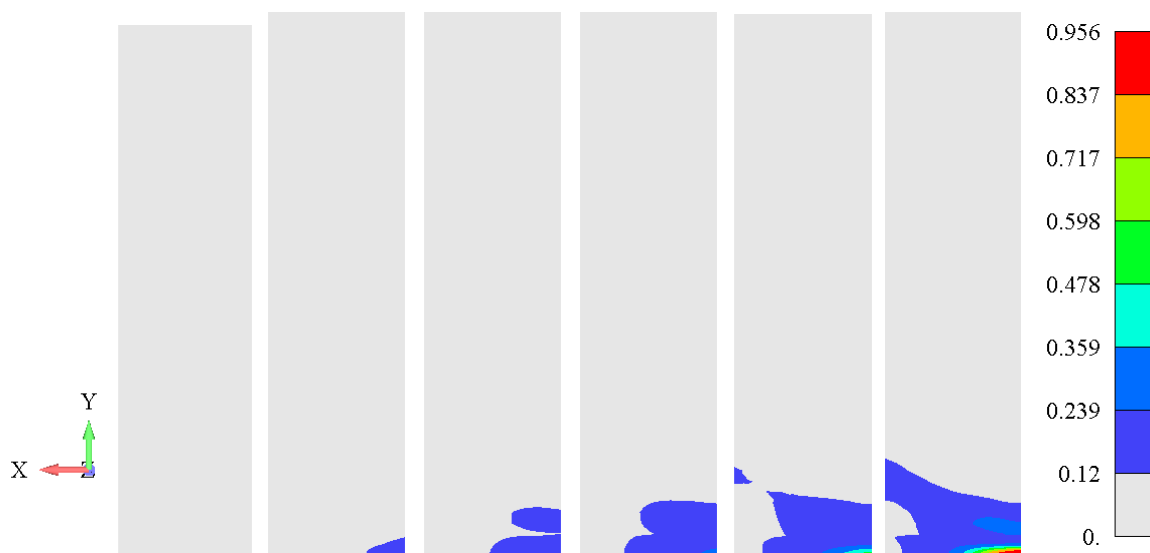
Слика 6.35 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете H321 0° за а) 6.76mm, б) 6.80mm, в) 6.84mm, г) 6.88mm, д) 6.92mm, ђ) 6.96mm



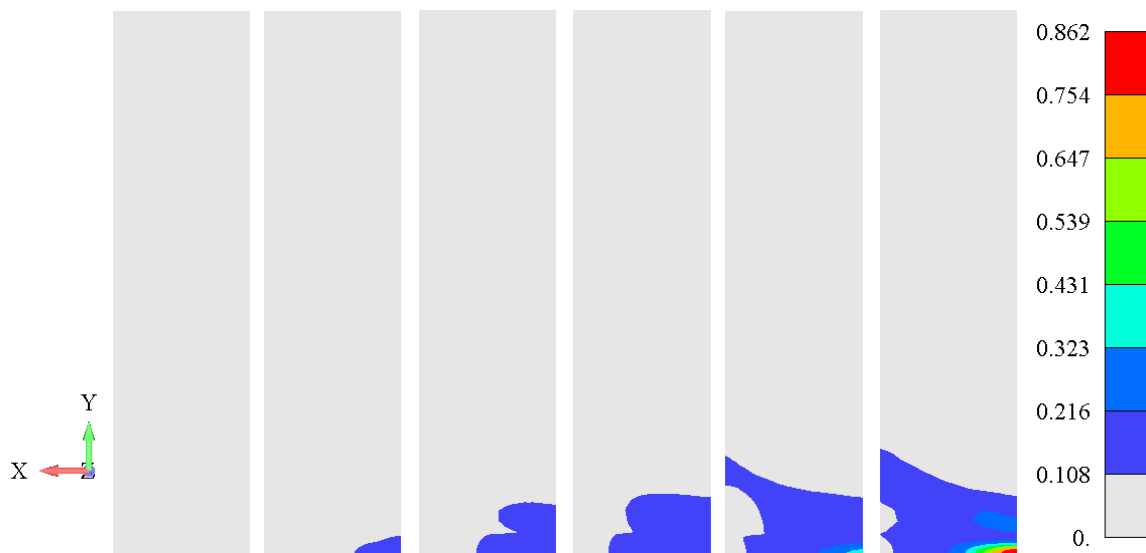
Слика 6.36 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете H321 45° за а) 11.76mm, б) 11.80mm, в) 11.84mm, г) 11.88mm, д) 11.92mm, ђ) 11.96mm



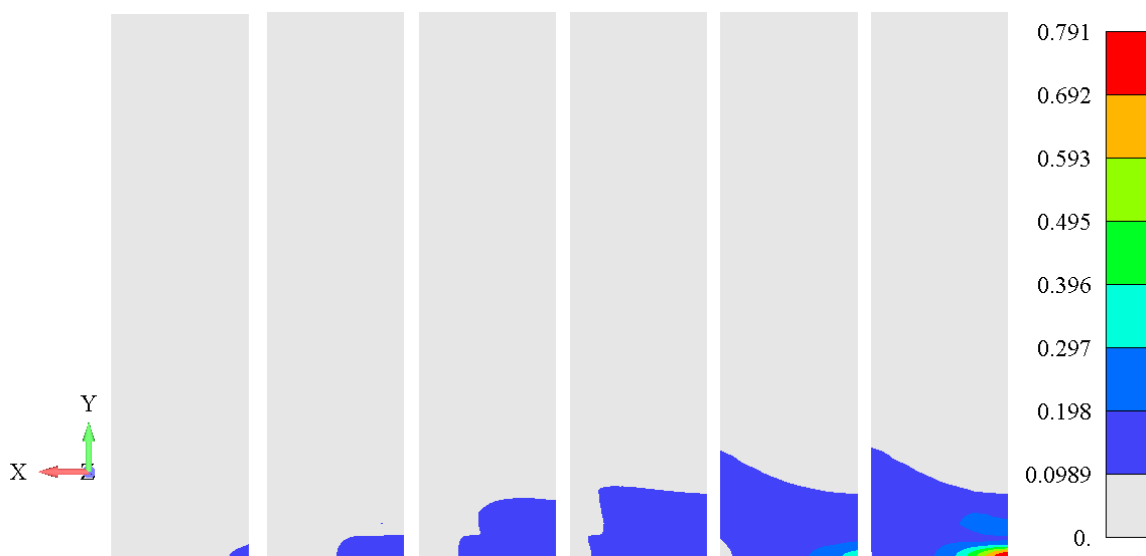
Слика 6.37 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете Н321 90° за а) 8.88mm, б) 8.92mm, в) 8.96mm, г) 9mm, д) 9.04mm, е) 9.08mm



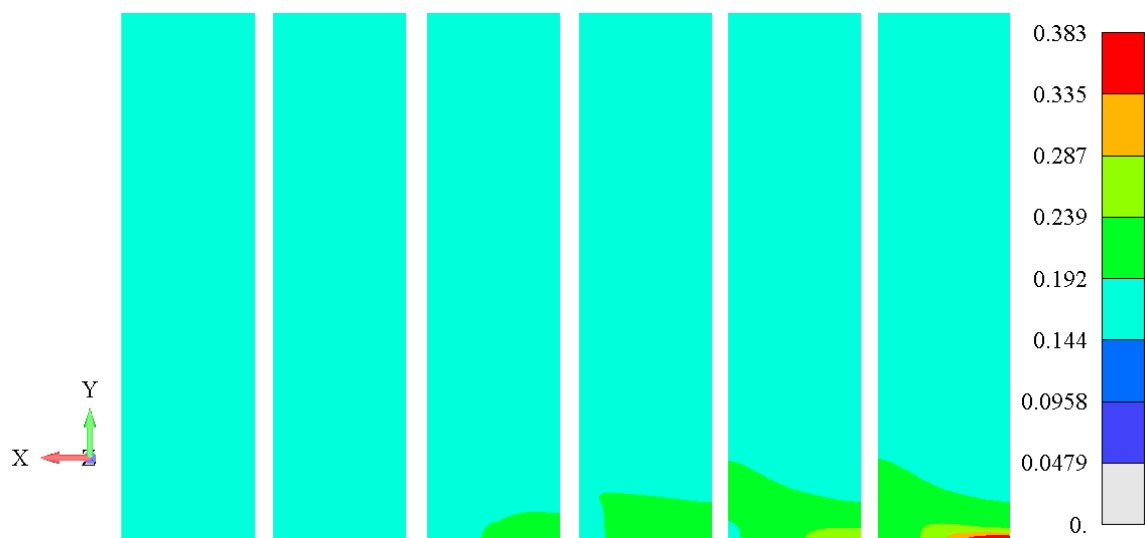
Слика 6.38 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете S355 0° за а) 15.16mm, б) 15.20mm, в) 15.24mm, г) 15.28mm, д) 15.32mm, е) 15.36mm



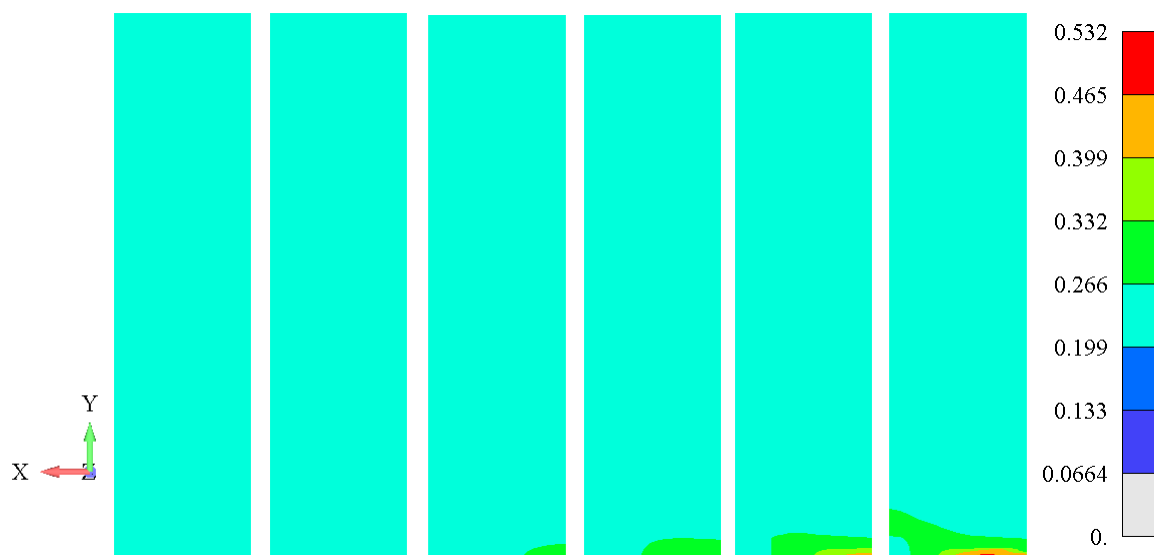
Слика 6.39 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете S355 45° за а) 14.60mm, б) 14.64mm, в) 14.68mm, г) 14.72mm, д) 14.76mm, е) 14.80mm



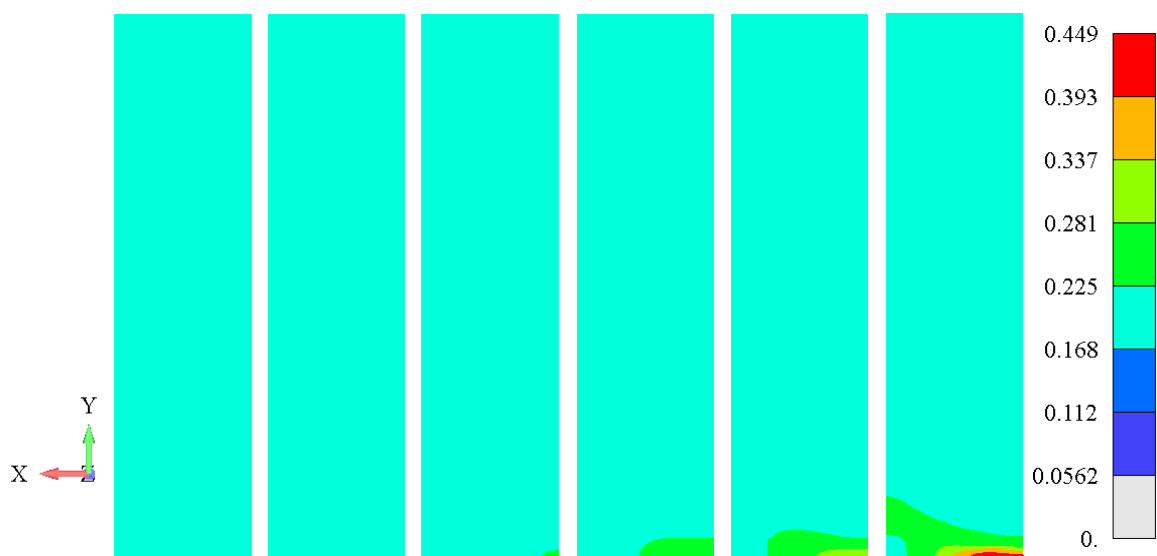
Слика 6.40 Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете S355 90° за а) 13.88mm, б) 13.92mm, в) 13.96mm, г) 14 mm, д) 14.04mm, е) 14.08mm



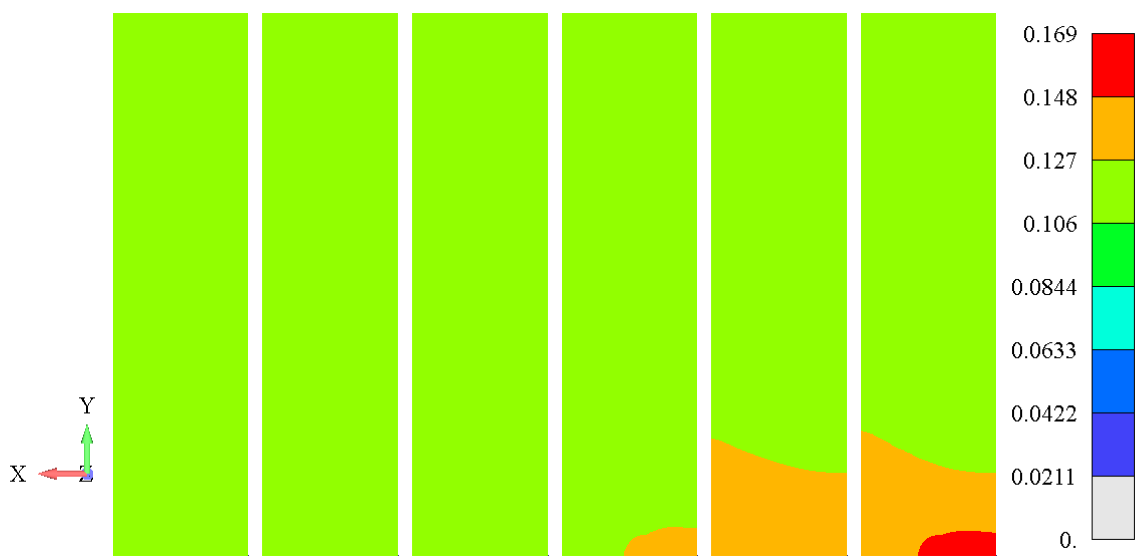
Слика 6.41 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H111 0° за а) 9.60mm, б) 9.64mm, в) 9.68mm, г) 9.72mm, д) 9.76mm, е) 9.80mm



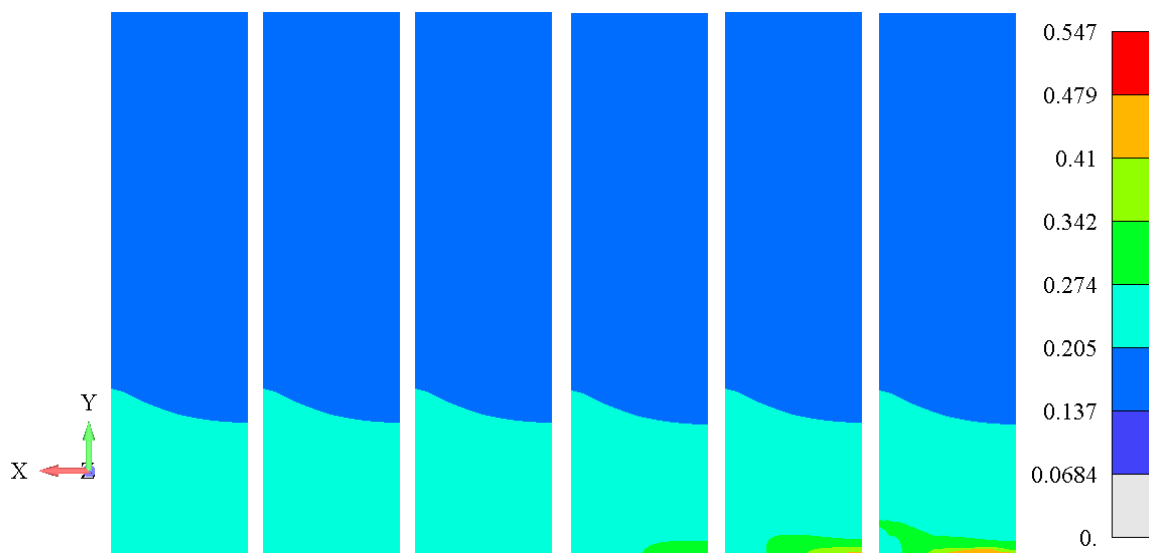
Слика 6.42 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H111 45° за а) 11.88mm, б) 11.92mm, в) 11.96mm, г) 12mm, д) 12.04mm, е) 12.08mm



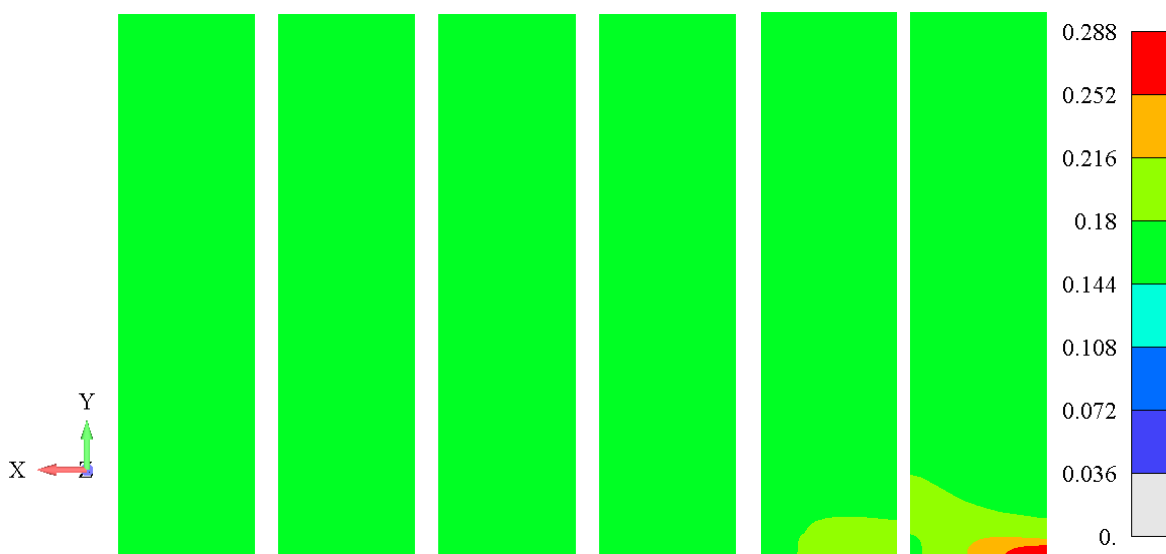
Слика 6.43 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете Н111 90° за а) 10.08mm, б) 10.12mm, в) 10.16mm, г) 10.20mm, д) 10.24mm, е) 10.28mm



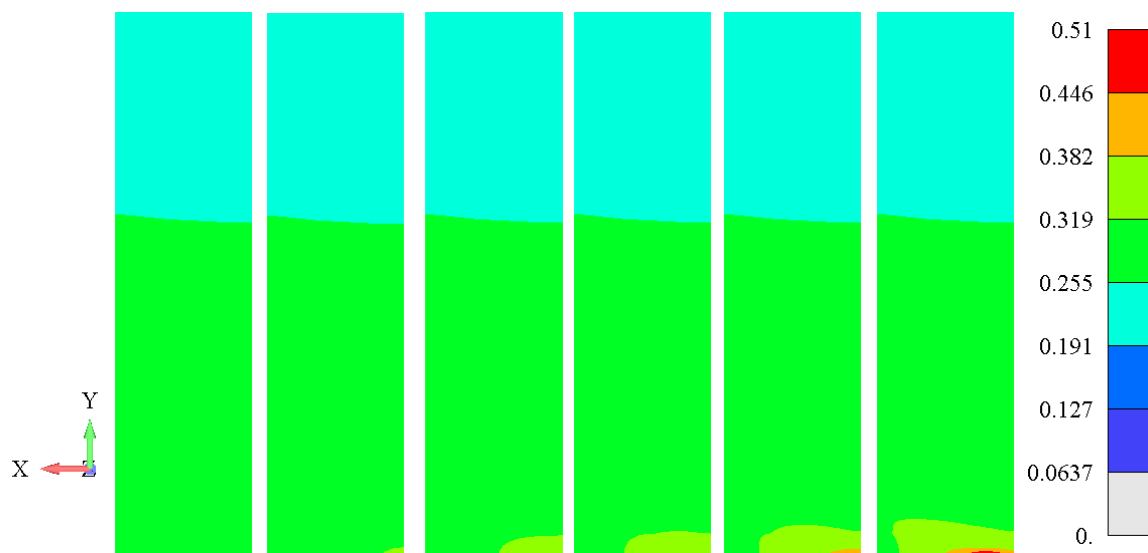
Слика 6.44Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете Н321 0° за а) 6.76mm, б) 6.80mm, в) 6.84mm, г) 6.88mm, д) 6.92mm, е) 6.96mm



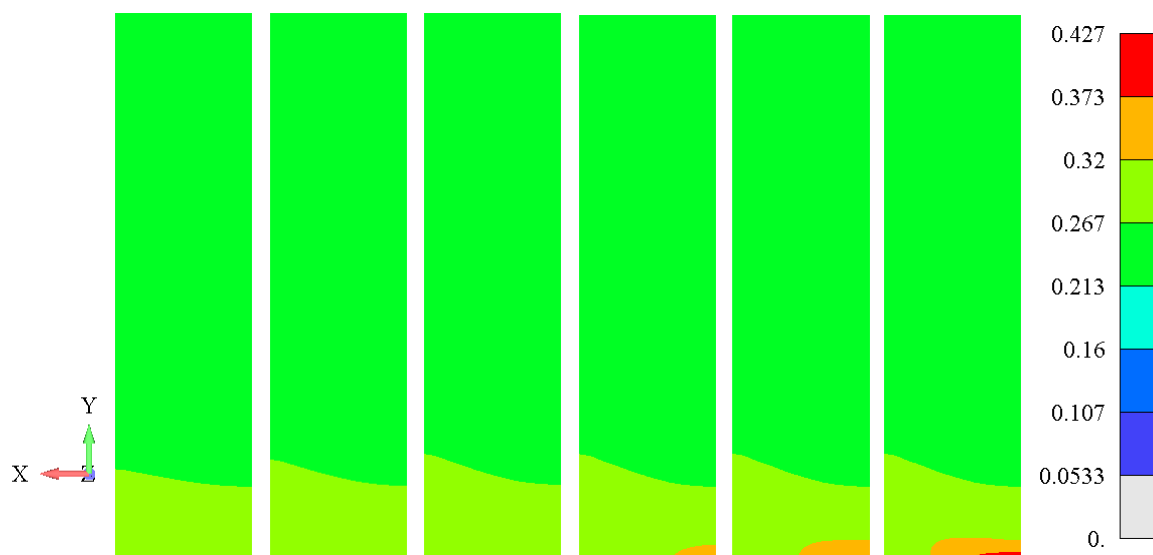
Слика 6.45 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H321 45° за а) 11.76mm, б) 11.80mm, в) 11.84mm, г) 11.88mm, д) 11.92mm, е) 11.96mm



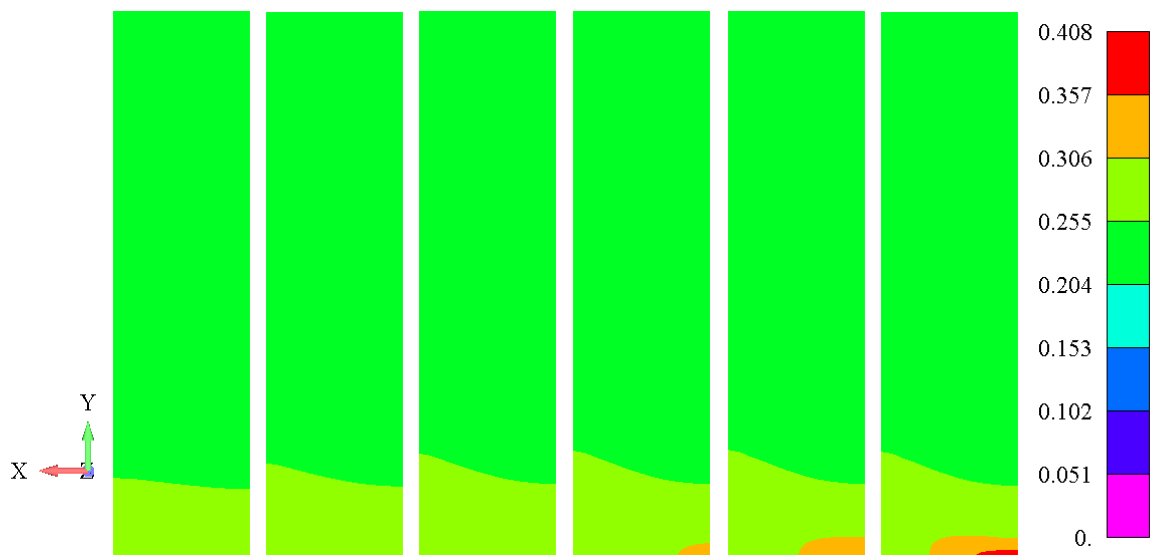
Слика 6.46 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете H321 90° за а) 8.88mm, б) 8.92mm, в) 8.96mm, г) 9mm, д) 9.04mm, е) 9.08mm



Слика 6.47 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете S355 0° за а) 15.16mm, б) 15.20mm, в) 15.24mm, г) 15.28mm, д) 15.32mm, е) 15.36mm



Слика 6.48 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете S355 45° за а) 14.60mm, б) 14.64mm, в) 14.68mm, г) 14.72mm, д) 14.76mm, е) 14.80mm



Слика 6.49 Развој поља еквивалентне пластичне деформације $\bar{\epsilon}_p$ у посткритичној зони за померање горње површине епрувете S355 90° за а) 13.88mm, б) 13.92mm, в) 13.96mm, г) 14 mm, д) 14.04mm, е) 14.08mm

7 Закључак

Предвиђање и спречавање појаве отказа у конструкцијама у фази пројектовања, али и у фази израде и експлоатације, важан је део инжењерства, што се може постићи нумеричким МКЕ симулацијама које постепено постају примарна метода у овој области. Развој поуздане нумеричке методе за анализу оштећења и лома, пресудна је за процену интегритета, поузданости и века трајања компонената у савременим конструкцијама, али и самих конструкција у целини.

Најчешће коришћене методе нумеричког моделирања појаве оштећења, прслина и лома уводе прслину као оштар геометријски дисконтинуитет. Поред додатних критеријума за иницирање, правац ширења и смер раста прслине потребних у дискретним методама моделирања, велики проблем настаје и код нумеричког праћења дисконтинуитета прслина, што нарочито може бити сложено код 3Д проблема. Континуални приступ моделирању прслина представља алтернативу, уводећи параметар оштећења који утиче на крутост материјала и релаксацију напона повезаних са стварањем прслина. PFDM за жилав лом је једна од најактуелнијих метода у прорачунској механици чврстих тела јер даје предност у односу на постојеће поступке моделирања оштећења и лома код којих се прслина моделира као геометријски дисконтинуитет.

Међу најзаступљенијим материјалима у шинској индустрији су конструкциони челик S355 и легура алуминијума 5083, па су епрувете направљене баш од ових материјала експериментално испитане једноосним затезањем на сервохидрауличном пулзатору у циљу верификације унапређеног приступа PFDM представљеног у овој дисертацији. Добијени резултати зависности сила - померање и напон - деформација коришћени су за идентификацију параметара потребних за нумеричку симулацију. Такође, на основу експерименталних резултата предложена је модификација функције ојачања тако да одговара одзиву испитиваних материјала. Примећено је да се код челика S355 после појаве течења јавља интервал са константном вредношћу напона (перфектна пластичност), а у случају алуминијумске легуре 5083 вредност напона линеарно расте у том интервалу (линеарно ојачање). У другом интервалу код оба материјала напон расте нелинеарно док не достигне максималну вредност, после чега напон почиње да опада услед утицаја оштећења на материјал. На основу тих резултата, предложена је проширена двоинтервалска функција течења да би се описао идеализован одговор тих материјала. Алгоритми унапређеног приступа PFDM су развијени и имплементирани у МКЕ софтвер ПАК развијен на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу.

Да би се контролисао почетак развоја поља оштећења, модификована је променљива спрезања између пластичне деформације и поља оштећења тако да почиње линеарно да расте од тренутка достизања критичне вредности еквивалентне пластичне деформације, односно, сматра се да је материјал неоштећен све док еквивалентна пластична деформација не достигне критичну вредност.

Усвојена је стратегија наизменичног решавања поља померања и фазног поља оштећења као секвенцијално спрегнутих поља у циљу добијања стабилног модела за имплицитну интеграцију напона. То је постигнуто увођењем историје поља густине унутрашње потенцијалне енергије која се ажурира на крају корака само ако је новоизрачуната густина већа од претходне, што обезбеђује иреверзибилност еволуције фазе прслине.

Унапређење се односи и на мултипликативну декомпозицију градијента деформације на еластичан и пластичан део у односу на тренутну конфигурацију и логаритамске деформације ради решавања проблема великих деформација.

Главне разлике и предности предложене методе су могућности за контролу: а) почетка ојачавања после завршетка првог интервала са константним нивоом напона/линеарним ојачањем после појаве течења и б) покретање развоја фазног поља оштећења услед развоја пластичне деформације.

Имплементација модификоване двоинтервалске функције ојачања је прво верификована референтним примером из литературе за један коначни елемент за случај кртог лома. Исти резултати су добијени и за однос напон - деформација, као и за однос оштећење - деформација. У даљим нумеричким симулацијама коришћени су модели коначних елемената реалне геометрије и димензија епрувета испитаних у оквиру ове дисертације. Експериментално забележени одзиви односа сила - померање упоређени су са МКЕ симулацијама уз помоћ предложене модификоване PFDM и постигнути су одлични резултати, чиме је предложена модификација верификована са претпоставком хомогености материјала. У складу са понашањем испитиваног материјала и условима оптерећења, модел је успешно репродуковао жилав лом при симулацији статичког једноосног затезања. Приказани су и резултати добијени нумеричком симулацијом „чистог“ фон Мизесовог услова течења, где се могло уочити да тај нумерички модел не може да испрати понашање материјала после достизања максималне вредности напона које је добијено експериментом.

Експериментални резултати су добијени коришћењем екстензиометра и сервохидрауличног пулзатора и у тренутку појаве лома епрувете, снимање резултата се прекида. Са друге стране, резултати добијени симулацијом дају могуће понашање материјала и после тачке кидања епрувете. Из тог разлога је испитиван утицај величине корака задатог померања на добијени резултат нумеричком симулацијом. Примећено је да резултат добијен нумеричком симулацијом у зони омекшавања материјала зависи од величине корака задатог померања, тако да је прави избор величине корака задатог померања јако важан за постизање прецизних резултата.

Примећена зависност између поља оштећења и поља еквивалентне пластичне деформације добијених симулацијом PFDM води до закључка да је појава оштећења водећи узрок лома епрувете. Такође, представљене су промене поља еквивалентне пластичне деформације и фазе поља оштећења и може се видети да зона максималне пластичне деформације квалитативно одговара главној деформисаној зони експериментално испитиваних епрувета. Поље

оштећења се развија у зони епрувете где се јавља „врат“ све до вредности која одржава стабилност прорачунског алгоритма. За даљу симулацију после појаве лома, неопходно је применити тзв. „умирање“ елемената, што је у плану будућег истраживања.

Будући правци истраживања укључују и унапређење PFDM за симулирање појаве оштећења код анизотропних и хетерогених материјала, као и за 2Д проблеме. Треба проширити примену предложене PFDM и на неметалне материјале. Један од недостатака PFDM је дуге време прорачуна у поређењу са другим континуалним приступима моделирању оштећења, а оно у некој мери може бити умањено увођењем редизајна мреже током прорачуна, што може бити још један део даљег тока истраживања. Такође, треба модификовати предложену PFDM за симулацију појаве оштећења услед замора материјала.

Модификације PFDM представљене у овој дисертацији ће омогућити бољу контролу над симулацијом иницирања и развоја оштећења и могућност симулације различитих врста металних материјала у инжењерској пракси.

8 Литература

Abaqus 6.14-1 (2014) Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA.

Alessi, R., Ambati, M., Gerasimov, T., Vidoli, S., De Lorenzis, L. (2018)a Comparison of Phase-Field Models of Fracture Coupled with Plasticity. In: Oñate, E., Peric, D., de Souza Neto, E., Chiumenti, M., (eds) *Advances in Computational Plasticity. Computational Methods in Applied Sciences*, Springer, Cham., vol 46, pp. 1–21, doi:10.1007/978-3-319-60885-3_1.

Alessi, R., Marigo, J.-J., Maurini, C., Vidoli, S. (2018)b Coupling damage and plasticity for a phase-field regularisation of brittle, cohesive and ductile fracture: One-dimensional examples. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol 149, pp. 559–576, doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.05.047.

Alessi, R., Marigo, J.-J., Vidoli, S. (2014) Gradient Damage Models Coupled with Plasticity and Nucleation of Cohesive Cracks. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol 214, pp. 575–615, doi:10.1007/s00205-014-0763-8.

Alil, A. (2018) *Struktura i svojstva višeslojnih Al-Mg traka dobijenih hladnim valjanjem*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Tehnološko-metalurški fakultet, Beograd, Srbija.

Amor, H., Marigo, J.J., Maurini, C. (2009) Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact: Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol 57(8), pp. 1209–1229, doi:10.1016/j.jmps.2009.04.011.

Ambati, M., Kruse, R., De Lorenzis, L. (2016) A phase-field model for ductile fracture at finite strains and its experimental verification. *Computational Mechanics*, vol 57(1), pp. 149–167, doi:10.1007/s00466-015-1225-3.

Ambati, M., Gerasimov, T., De Lorenzis, L. (2015)a A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics*, vol 55, pp. 383–405, doi:10.1007/s00466-014-1109-y.

Ambati, M., Gerasimov, T., De Lorenzis, L. (2015)b Phase-field modeling of ductile fracture. *Computational Mechanics*, vol 55, pp. 1017–1040, doi:10.1007/s00466-015-1151-4.

ASTM: E646-00. Standard Test Method for Tensile Strain-Hardening Exponents (n-Values) of Metallic Sheet Materials.

Azinpour, E., Ferreira, J. P. S., Parente, M. P. L., Cesar de Sa, J. (2018) A simple and unified implementation of phase field and gradient damage models. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, vol 5, article number 15, doi:10.1186/s40323-018-0106-7.

Babuška, I., Banerjee, U., Osborn, J.E. (2003) Survey of meshless and generalized finite element methods: A unified approach. *Acta Numerica*, vol 12, pp. 1-125, doi:10.1017/S0962492902000090.

Babuska, I., Melenk, J.M. (1997) The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 40(4), pp. 727-758, doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19970228)40:4<727::AID-NME86>3.0.CO;2-N.

Badnava, H., Etemadi, E., Msekh, M.A. (2017) A Phase Field Model for Rate-Dependent Ductile Fracture. *Metals*, vol 7(5), pp. 180, doi:10.3390/met7050180.

Bangerth, W., Davydov, D., Heister, T., Heltai, L., Kanschat, G., Kronbichler, M., Maier, M., Turcksin, B., Wells, D. (2016) The deal.II Library, Version 8.4. *Journal of Numerical Mathematics*, vol 24(3), pp. 135-141, doi:10.1515/jnma-2016-1045.

Barenblatt, G.I. (1962) The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, vol 7, pp. 55-129, doi:10.1016/S0065-2156(08)70121-2.

Bauri, R., Yadav, D., Kumar, C. N. S., Balaji, B. (2015) Tungsten particle reinforced Al 5083 composite with high strength and ductility. *Materials Science and Engineering: A*, vol 620, pp. 67-75, doi:10.1016/j.msea.2014.09.108.

Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1995) Crack-propagation by element-free Galerkin methods. *Engineering Fracture Mechanics*, vol 51(2), pp. 295-315, doi:10.1016/0013-7944(94)00153-9.

Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994) Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 37(2), pp. 229-256, doi:10.1002/nme.1620370205.

Benallal, A., Berstad, T., Borvik, T., Clausen, A.H., Hopperstad, O.S. (2006) Dynamic strain aging and related instabilities: experimental, theoretical and numerical aspects. *The European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol 25(3), pp. 397-424, doi:10.1016/j.euromechsol.2005.10.007.

Bleyer, J., Alessi, R. (2018) Phase-field modeling of anisotropic brittle fracture including several damage mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 336, pp. 213-236, doi:10.1016/j.cma.2018.03.012.

Bordas, S., Rabczuk, T., Zi, G. (2008) Three-dimensional crack initiation, propagation, branching and junction in non-linear materials by an extended meshfree method without asymptotic enrichment. *Engineering Fracture Mechanics*, vol 75(5), pp. 943–960, doi:10.1016/j.engfracmech.2007.05.010.

Borden, M.J., Hughes, T.J.R., Landis, C.M., Anvari, A., Lee, I.J. (2016) A phase-field formulation for fracture in ductile materials: Finite deformation balance law derivation, plastic degradation, and stress triaxiality effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 312, pp. 130–166, doi: 10.1016/j.cma.2016.09.005.

Borden, M.J., Hughes, T.J.R., Landis, C.M., Verhoosel, C.V. (2014) A higher-order phase-field model for brittle fracture: Formulation and analysis within the isogeometric analysis framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 273, pp. 100–118, doi:10.1016/j.cma.2014.01.016.

Borden, M.J. (2012) Isogeometric analysis of phase-field models for dynamic brittle and ductile fracture. PhD dissertation, The University of Texas at Austin.

de Borst, R. (2004)a Damage, material instabilities, and failure. In: Stein, E., de Borst, R., Hughes, T.J.R., (eds) *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Volume 2: Solids and Structures, John Wiley & Sons, Ltd., pp. 335–373, doi: 10.1002/0470091355.ecm035.

de Borst, R., Remmers, J.J.C., Needleman, A., Abellan, M.-A. (2004)b Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol 28(7-8), pp. 583-607, doi:10.1002/nag.374.

Bourdin, B., Francfort, G.A., Marigo, J.J. (2008) The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, vol 91, pp. 5-148, doi:10.1007/s10659-007-9107-3.

Bourdin, B., Francfort, G.A., Marigo, J.-J. (2000) Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol 48(4), pp. 797–826, doi:10.1016/S0022-5096(99)00028-9.

Busby, J.S. (2001) Characterizing failures in design activity. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, vol 10, pp. 1417–1424, doi:10.1243/0954405011519196.

Cajuhi, T., Sanavia, L., De Lorenzis, L. (2018) Phase-field modeling of fracture in variably saturated porous media. *Computational Mechanics*, vol 61(3), pp. 299-318, doi:10.1007/s00466-017-1459-3.

Chandra, N., Li, H., Shet, C., Ghonem, H. (2002) Some issues in the application of cohesive zone models for metal-ceramic interfaces. *International*

Journal of Solids and Structures, vol 39(10), pp. 2827-2855, doi:10.1016/S0020-7683(02)00149-X.

Chatterjee, A., Sarkar, A., Barat, P., Mukherjee, P., Gayathri N. (2009) Character of the deformation bands in the (A + B) regime of the Portevin-Le Chatelier effect in Al-2.5%Mg alloy. Materials Science and Engineering: A, vol 508(1-2), pp. 156-160, doi:10.1016/j.msea.2008.12.030.

Clausen, A.H., Borvik, T., Hopperstad, O.S., Benallal, A. (2004) Flow and fracture characteristics of aluminium alloy AA5083-H116 as function of strain rate, temperature and triaxiality. Materials Science and Engineering: A, vol 364(1-2), pp. 260-272, doi:10.1016/j.msea.2003.08.027.

Darowicki, K., Orlikowski, J. (2007) Impedance analysis of Portevin-Le Chatelier effect on aluminium alloy. Electrochimica Acta, vol 52(12), pp. 4043-4052, doi:10.1016/j.electacta.2006.11.022.

Dittmann, M., Aldakheel, F., Schulte, J., Schmidt, F., Kruger, M., Wriggers, P., Hesch, C. (2020) Phase-field modeling of porous-ductile fracture in non-linear thermo-elasto-plastic solids. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 361, pp. 112730, doi:10.1016/j.cma.2019.112730.

Dittmann, M., Aldakheel, F., Schulte, J., Wriggers, P., Hesch, C. (2018) Variational phase-field formulation of non-linear ductile fracture. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 342, pp. 71-94, doi:10.1016/j.cma.2018.07.029.

Dolbow, J., Moes, N., Belytschko, T. (2000) Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. Finite Elements in Analysis and Design, vol 36(3-4), pp. 235-260, doi:10.1016/S0168-874X(00)00035-4.

Dugdale, D.S. (1960) Yielding of steel sheets containing slits. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol 8(2), pp. 100-104, doi:10.1016/0022-5096(60)90013-2.

Dunić, V., Zivkovic, J., Milovanovic, V., Pavlovic, A., Radovanovic, A., Zivkovic, M. (2021) Two-Intervals Hardening Function in a Phase-Field Damage Model for the Simulation of Aluminum Alloy Ductile Behavior. Metals, vol 11(11), pp. 1685, doi:10.3390/met11111685.

Dunić, V., Busarac, N., Slavković, V., Rosić, B., Niekamp, R., Matthies, H., Slavković, R., Živković, M. (2016) A thermo-mechanically coupled finite strain model considering inelastic heat generation. Continuum Mechanics and Thermodynamics, vol 28, pp. 993-1007, doi:10.1007/s00161-015-0442-5.

Dzioba, I., Lipiec, S. (2019) Fracture Mechanisms of S355 Steel - Experimental Research, FEM Simulation and SEM Observation. *Materials*, vol 12(23), pp. 3959, doi:10.3390/ma12233959.

Elices, M., Guinea, G.V., Gomez, J., Planas, J. (2002) The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. *Engineering Fracture Mechanics*, vol 69(2), pp. 137-163, doi:10.1016/S0013-7944(01)00083-2.

Fang, J., Wu, C., Li, J., Liu, Q., Wu, C., Sun, G., Li, Q. (2019) Phase field fracture in elasto-plastic solids: Variational formulation for multi-surface plasticity and effects of plastic yield surfaces and hardening. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol 156, pp. 382-396, doi:10.1016/j.ijmecsci.2019.03.012.

Farrell, P., Maurini, C. (2017) Linear and nonlinear solvers for variational phase-field models of brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 109(5), pp. 648-667, doi:10.1002/nme.5300.

Francfort, G.A., Marigo, J.-J. (1998) Revisiting brittle fractures as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol 46, pp. 1319-1342, doi:10.1016/S0022-5096(98)00034-9.

Geers, M.G.D., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., Peerlings, R.H.J. (1998) Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 160(1-2), pp. 133-153, doi:10.1016/S0045-7825(98)80011-X.

Griffith, A.A. (1921) The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, vol 221, pp. 163-198, doi: 10.1098/rsta.1921.0006.

Heister, T., Wheeler, M.F., Wick, T. (2015) A primal-dual active set method and predictor-corrector mesh adaptivity for computing fracture propagation using a phase-field approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. vol 290, pp. 466-495, doi:10.1016/j.cma.2015.03.009.

Huang, K.T., Lui, T.S., Chen, L.H. (2011) Effect of microstructural feature on the tensile properties and vibration fracture resistance of friction stirred 5083 Alloy. *Journal of Alloys and Compounds*, vol 509(27), pp. 7466-7472, doi:10.1016/j.jallcom.2011.04.080.

Irwin, G.R. (1957) Analysis of Stresses and Strains Near the End of Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, vol 24(3), pp. 361-364, doi:10.1115/1.4011547.

Jovičić, G., Živković, M. (2016) Integritet i vek konstrukcija. Univerzitet u Kragujevcu, Fakultet inženjerskih nauka, Kragujevac, Srbija.

Jovičić, G., Živković, M., Jovičić, N., Milovanović, D., Sedmak, A. (2010) Improvement of algorithm for numerical crack modelling. *Archive of civil and mechanical engineering*, vol 10(3), pp. 19-35, ISSN 1644-9665.

Klinsmann, M., Rosato, D., Kamlah, M., McMeeking, R.M. (2015) An assessment of the phase field formulation for crack growth. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 294, pp. 313–330, doi:10.1016/j.cma.2015.06.009.

Kojić, M., Bathe, K.J. (2005) *Inelastic Analysis of Solids and Structures*. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, ISBN:978-3-540-26507-8.

Kojić, M., Slavkovic, R., Zivkovic, M., Grujovic, N. (2003) User manual for PAK-finite element program for linear and nonlinear structural analysis and heat transfer, University of Kragujevac, Faculty of Engineering, Kragujevac.

Kuhn, C., Schuter, A., Muller, R. (2015) On degradation functions in phase field fracture models. *Computational Materials Science*, vol 108(Pt. B), pp. 374–384, doi:10.1016/j.commatsci.2015.05.034.

Li, T., Marigo, J.-J., Guilbaud, D., Potapov, S. (2016) Gradient damage modeling of brittle fracture in an explicit dynamics context. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 108(11), pp. 1381–1405, doi:10.1002/nme.5262.

Liu, G., Li, Q., Msekh, M., Zuo, Z. (2016) Abaqus implementation of monolithic and staggered schemes for quasi-static and dynamic fracture phase-field model. *Computational Materials Science*, vol 121, pp. 35–47, doi:10.1016/j.commatsci.2016.04.009.

Miehe, C., Aldakheel, F., Raina, A. (2016) Phase field modeling of ductile fracture at finite strains: A variational gradient-extended plasticity-damage theory. *International Journal of Plasticity*, vol 84, pp. 1–32, doi:10.1016/j.ijplas.2016.04.011.

Miehe, C., Schänzel, L.-M., Ulmer, H. (2015) Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part I. Balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 294, pp. 449–485, doi:10.1016/j.cma.2014.11.016.

Miehe, C., Welschinger, F., Hofacker, M. (2010)a Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: variational principles and multi-field FE

implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 83, pp. 1273–1311, doi:10.1002/nme.2861.

Miehe, C., Hofacker, M., Welschinger, F. (2010) A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 199(45-48), pp. 2765–2778, doi:10.1016/j.cma.2010.04.011.

Milovanović, V. (2016) Razvoj metodologije za eksperimentalnu i numeričku procenu integriteta nosećih delova vagonске konstrukcije izloženih cikličnom dinamičkom opterećenju. *Doktorка disertacija, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, Kragujevac, Srbija.*

Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T. (1999) A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 46 (1), pp. 131-150, doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J.

Molnár, G., Gravouil, A. (2017) 2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol 130, pp. 27–38, doi:10.1016/j.finel.2017.03.002.

Msekh, M.A., Sargado, J.M., Jamshidian, M., Areias, P.M., Rabczuk, T. (2015) Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture. *Computational Materials Science*, vol 96, pp. 472-484, doi:10.1016/j.commatsci.2014.05.071.

Nguyen, T.T., Yvonnet, J., Bornert, M., Chateau, C., Sab, K., Romani, R., Le Roy, R. (2016) On the choice of parameters in the phase field method for simulating crack initiation with experimental validation. *International Journal of Fracture*, vol 197, pp. 213-226, doi:10.1007/s10704-016-0082-1.

Pañeda, E.M., Golahmar, A., Niordson, C.F. (2018) A phase field formulation for hydrogen assisted cracking. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 342, pp. 742–761, doi:10.1016/j.cma.2018.07.021.

Peerlings, R.H.J., De Borst, R., Brekelmands, W.A.M., De Vree, J.H.P (1996) Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 39(19), pp. 3391–3403, doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19961015)39:19<3391::AID-NME7>3.0.CO;2-D.

Rakić, D. (2014) Razvoj i primena materijalnih modela poroznih medija u statičkoj i dinamičkoj analizi nasutih brana. *Doktorка disertacija, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, Kragujevac, Srbija.*

Ribeiro, J., Santiago, A., Rigueiro, C. (2016) Damage model calibration and application for S355 steel. *Procedia Structural Integrity*, vol 2, pp. 656–663, doi:10.1016/j.prostr.2016.06.085.

Rice, J.R. (1968) A path independent integral and approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol 35, pp. 379–386, doi: 10.1115/1.3601206.

Seleš, K. (2020) Numeircal phase-field modeling of damage in heterogeneous materials, Doctoral thesis, University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Zagreb, Croatia.

Seleš, K., Lesičar, T., Tonković, Z., Sorić, J. (2019)a A residual control staggered solution scheme for the phase-field modeling of brittle fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, vol 205, pp. 370–386, doi:10.1016/j.engfracmech.2018.09.027.

Seleš, K., Jurčević, A., Tonković, Z., Sorić, J. (2019)b Crack propagation prediction in heterogeneous microstructure using an efficient phase-field algorithm. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol 100, pp. 289–297, doi:10.1016/j.tafmec.2019.01.022.

Simo, J.C., Miehe, C. (1992) Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 98, pp. 41–104, doi:10.1016/0045-7825(92)90170-O.

Shishvan, S., Assadpour-asl, S., Pañeda, E.M. (2021) A mechanism-based gradient damage model for metallic fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, vol 255, pp. 107927, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.04908>.

Srnec Novak, J., De Bona, F., Benasciutti, D. (2020) Benchmarks for Accelerated Cyclic Plasticity Models with Finite Elements. *Metals*, vol 10(6), pp. 781, doi: 10.3390/met10060781.

SRPS C.A1.011:2004. Methods of chemical analyses - Optical emission spectrometric method with spark excitation for quantitative chemical analyses of pig iron, cast iron, low-alloyed steels, high-alloyed steels, aluminium alloys and copper alloys.

Tian, N., Wang, G., Zhou, Y., Liu, K., Zhao, G., Zuo, L. (2018) Study of the Portevin-Le Chatelier (PLC) Characteristics of a 5083 Aluminum Alloy Sheet in Two Heat Treatment States. *Materials*, vol 11(9), pp. 1533, doi:10.3390/ma11091533.

Tradegard, A., Nilsson, F., Ostlund, S. (1998) FEM-remeshing technique applied to crack growth problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 160(1-2), pp. 115-131, doi:10.1016/S0045-7825(97)00287-9.

Trahair, N.S., Bradford, M.A., Nethercot, D., Gardner, L. (2008) *The behaviour and design of steel structures to EC3*, 4th ed.; Taylor & Francis: Oxford, UK, ISBN 0-203-93593-4.

Vučetić, N. (2020) Razvoj metodologije za procjenu integriteta vazdušno hlađenog avionskog klipnog motora izloženog visokocikličnom mehaničkom i termičkom opterećenju. *Doktorska disertacija*, Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, Kragujevac, Srbija.

Vukelić, G., Brnić, J. (2016) Predicted Fracture Behavior of Shaft Steels with Improved Corrosion Resistance. *Metals*, vol 6(2), pp. 40, doi:10.3390/met6020040.

Wu, J.-Y., Huang, Y.L. (2020) Comprehensive implementations of phase-field damage models in Abaqus. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol 106, pp. 102440, doi:10.1016/j.tafmec.2019.102440.

Wu, J.-Y., Nguyen, V.P., Nguyen, C.T., Sutula, D., Sinaie, S., Bordas, S. (2020) Chapter One – Phase-field modeling of fracture. In *Advances in Applied Mechanics*; Bordas, S., Balint, D., Eds.; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands; vol 53, pp. 1-183, doi:10.1016/bs.aams.2019.08.001.

Xu, X.-P., Needleman, A. (1994) Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol 42(9), pp. 1397 - 1434, doi:10.1016/0022-5096(94)90003-5.

Živković, J., Dunić, V., Milovanović, V., Pavlović, A., Živković, M. (2021) A Modified Phase-Field Damage Model for Metal Plasticity at Finite Strains: Numerical Development and Experimental Validation. *Metals* vol 11(1), pp. 47, doi:10.3390/met11010047.

Živković, M. (2006) *Nelinearna analiza konstrukcija*. Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet, Kragujevac, Srbija, ISBN:86-80581-59-3.

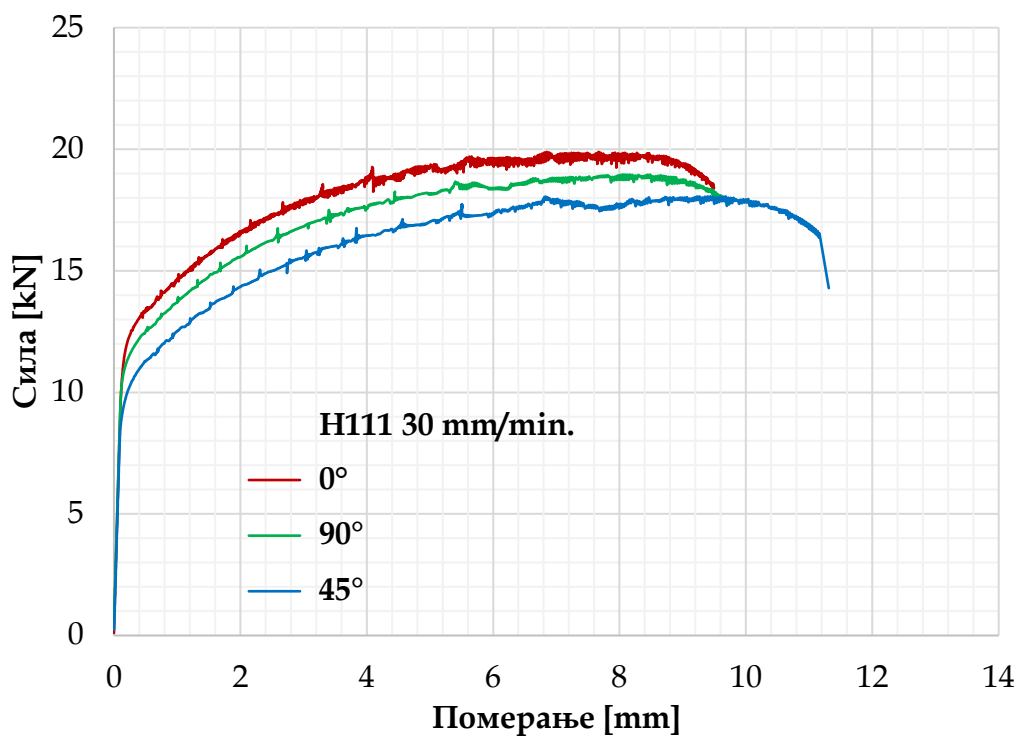
Zhang, P., Hu, X.F., Wang, X.Y., Yao, W.A. (2018) An iteration scheme for phase field model for cohesive fracture and its implementation in Abaqus. *Engineering Fracture Mechanics*, vol 204, pp. 268-287, doi:10.1016/j.engfracmech.2018.10.006.

Zhang, X., Vignes, C., Sloan, S.W., Sheng, D. (2017) Numerical evaluation of the phase-field model for brittle fracture with emphasis on the length scale. *Computational Mechanics*, vol 59(5), pp. 737-752, doi:10.1007/s00466-017-1373-8.

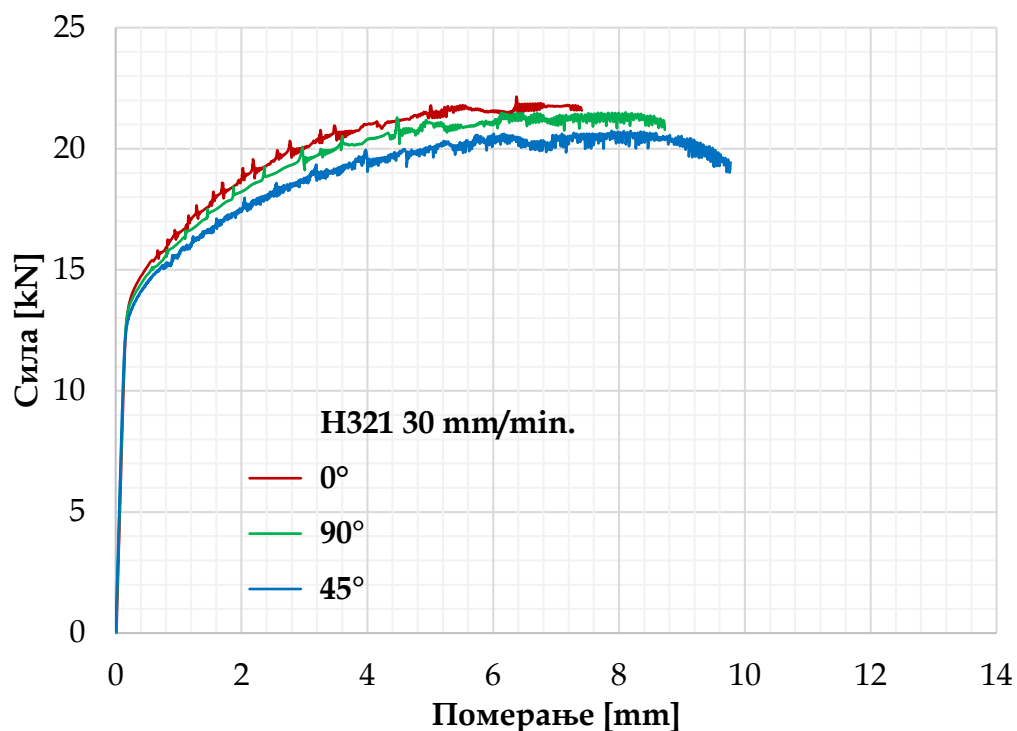
9 Додатак

9.1 Одређивање утицаја брзине деформације

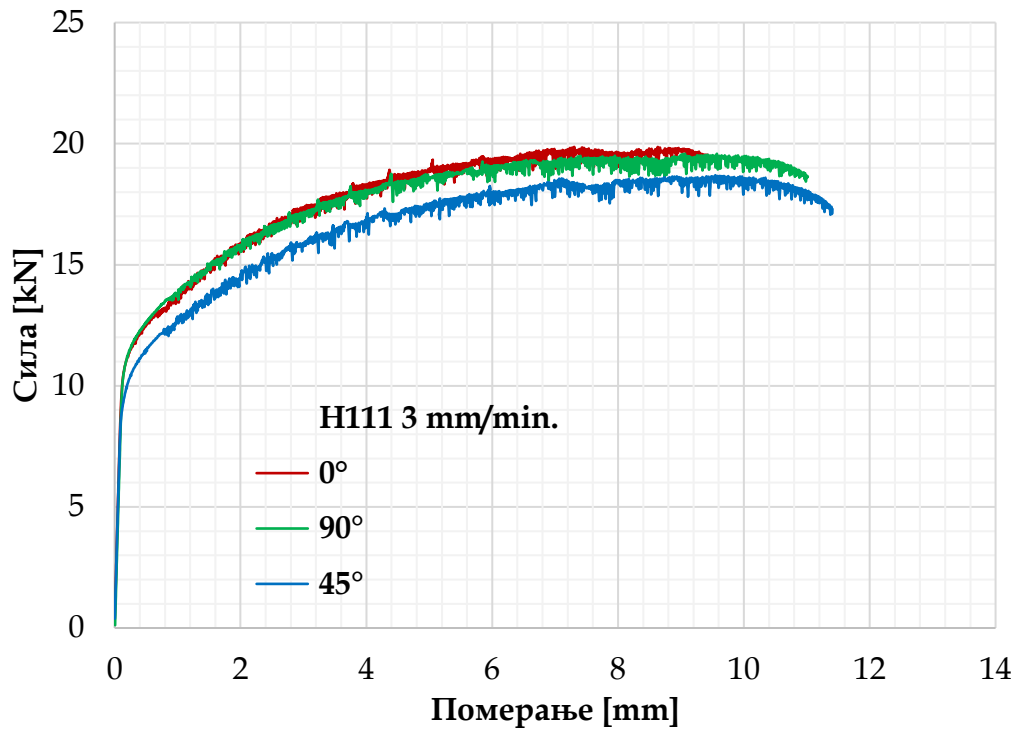
Приликом испитивања епрувета легуре алуминијума 5083 једноосним затезањем примећени су дисконтинуитети на добијеним дијаграмима односа сила - померање. Ти дисконтинуитети представљају наизменично повећање и смањење оптерећења и та појава се назива PLC ефекат. У циљу одређивања утицаја брзине деформације на PLC ефекат извршени су тестови једноосним затезањем на епруветама легуре алуминијума 5083, стања Н111 и Н321, за све правце сечења при различитим брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min. Добијени одзиви сила - померање су забележени и поређење добијених резултата је дато на сликама 9.1-9.8.



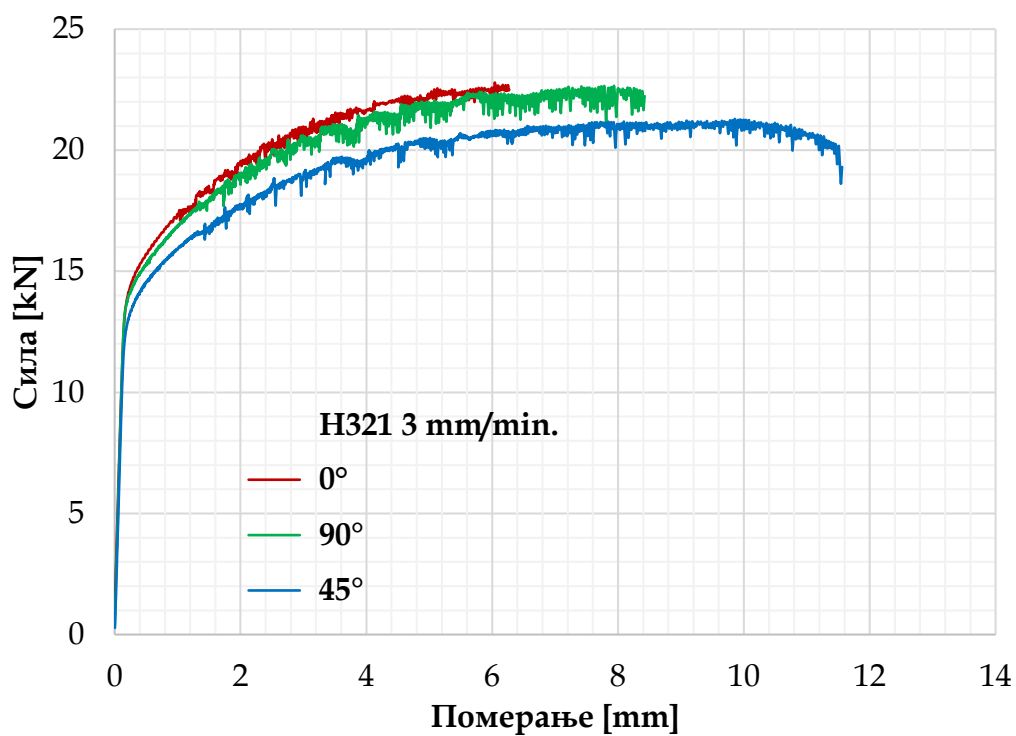
Слика 9.1 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 30 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H111, за сва три правца сечења



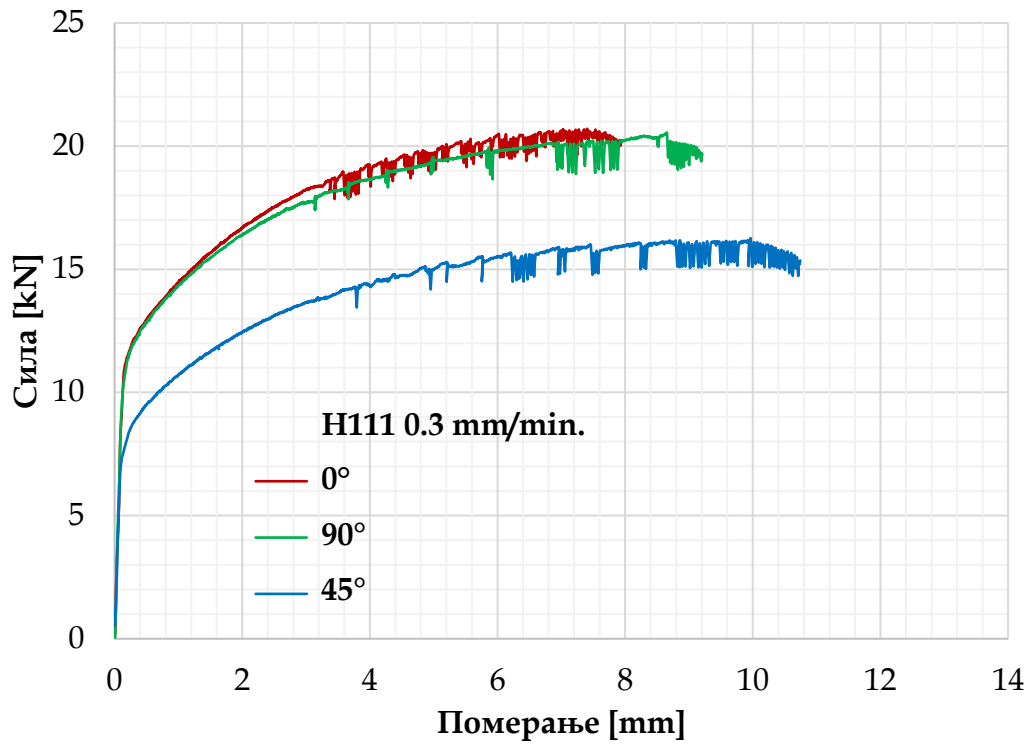
Слика 9.2 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 30 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H321, за сва три правца сечења



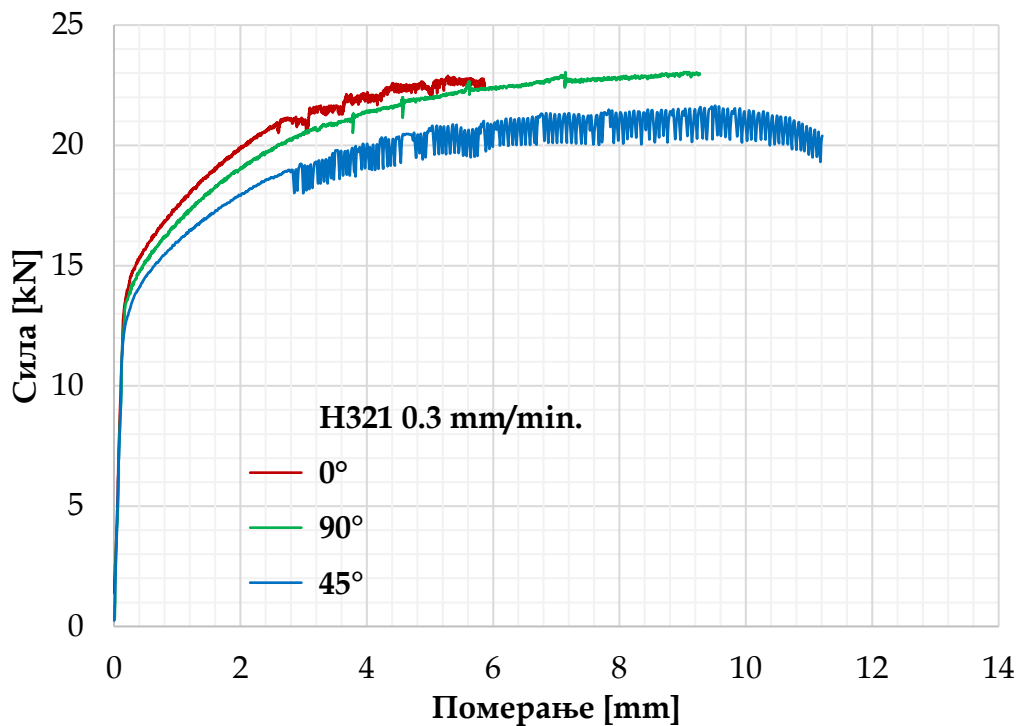
Слика 9.3 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 3 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H111, за сва три правца сечења



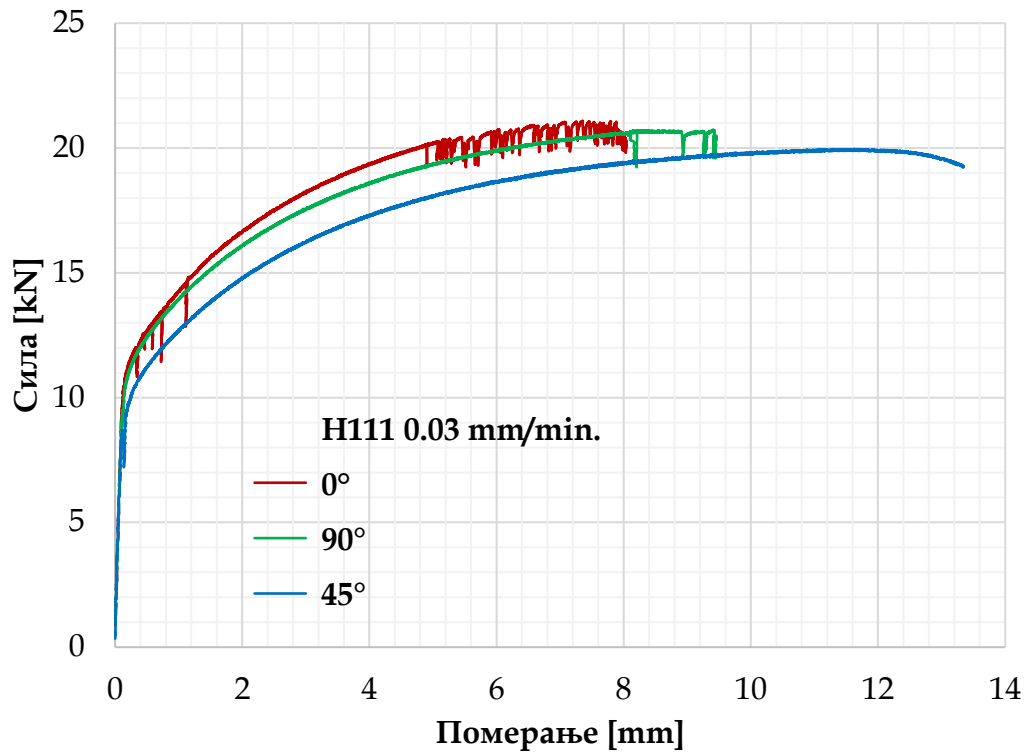
Слика 9.4 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 3 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H321, за сва три правца сечења



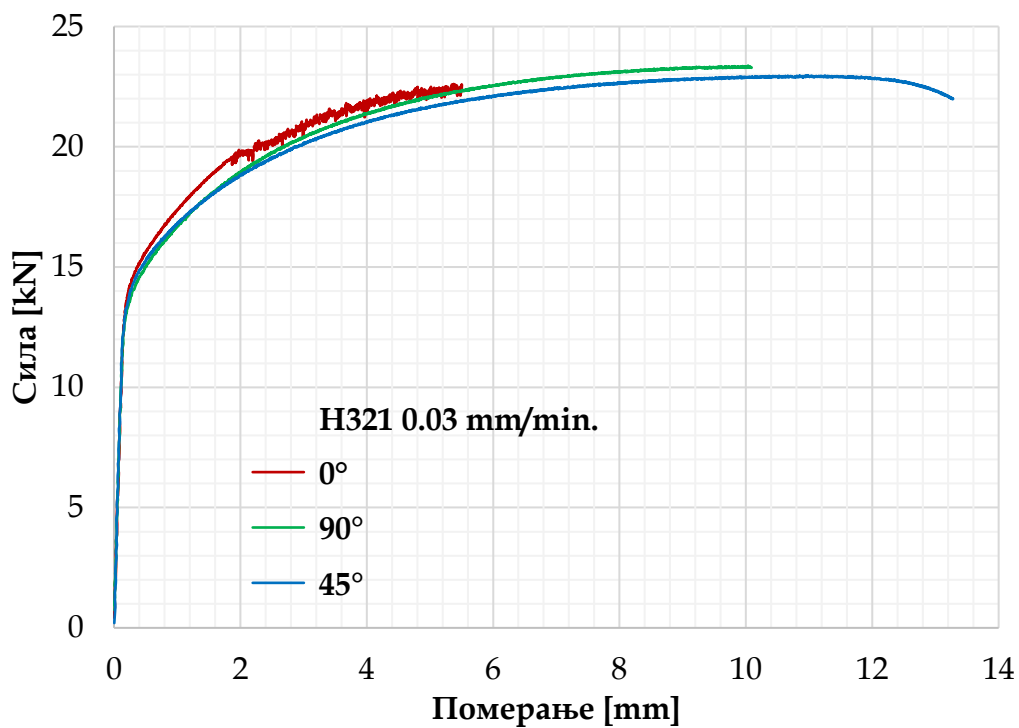
Слика 9.5 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 0.3 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H111, за сва три правца сечења



Слика 9.6 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 0.3 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H321, за сва три правца сечења



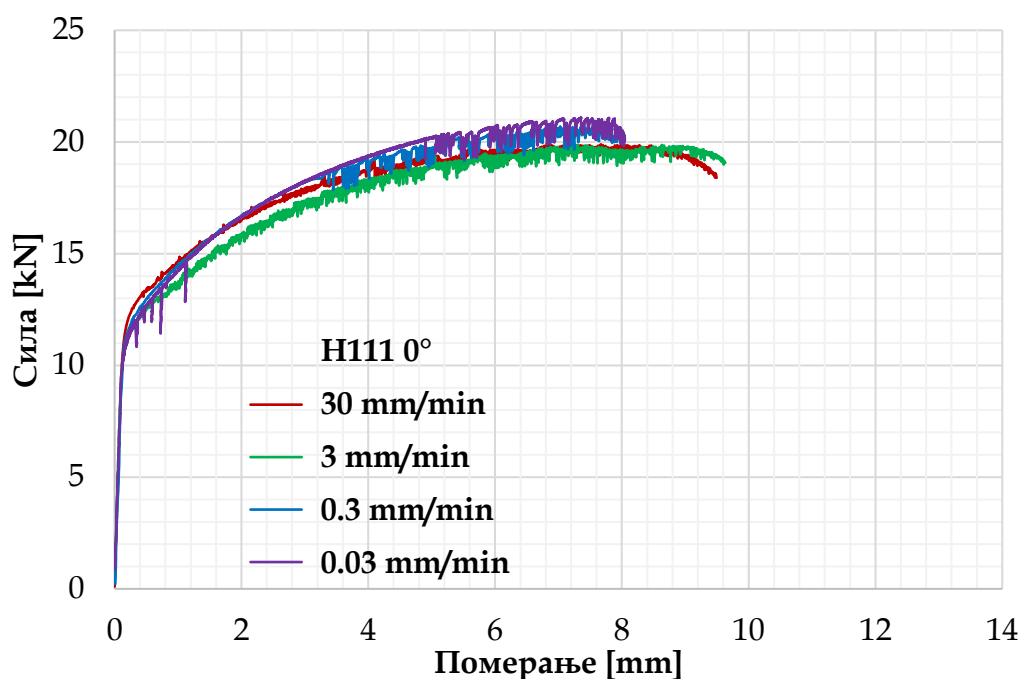
Слика 9.7 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 0.03 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, за сва три правца сечења



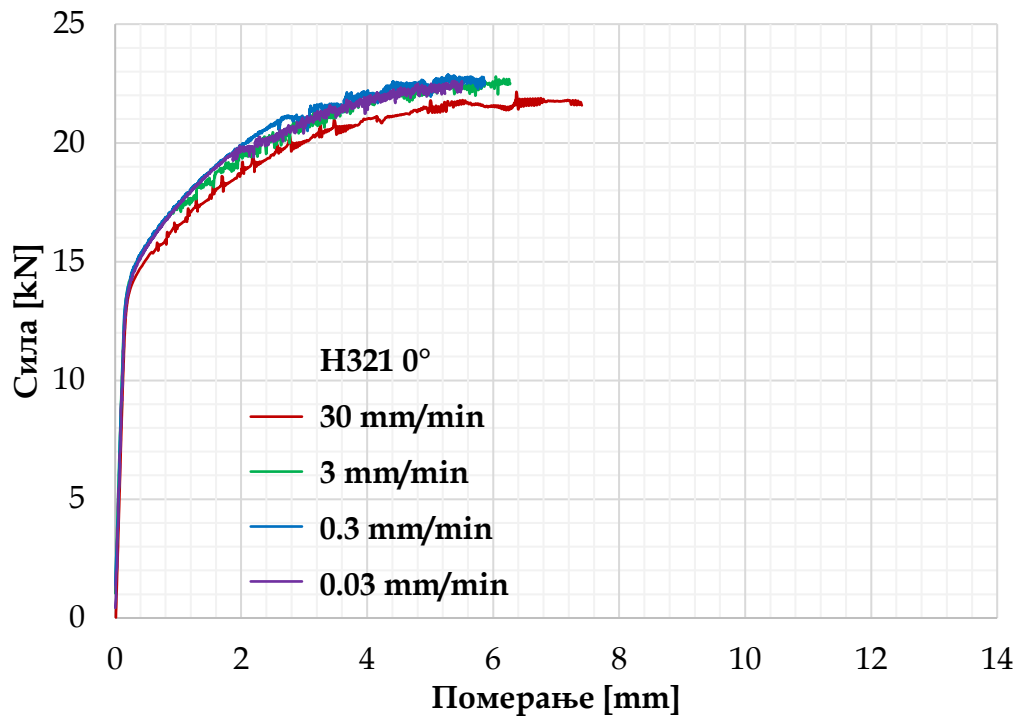
Слика 9.8 Упоредни дијаграми сила - померање при константној брзини деформације 0.03 mm/min за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, за сва три правца сечења

Када се упореде примери са једнаким брзинама деформације са слика 9.1-9.8 може се уочити да испитане епрувете стања Н321 имају већу јачину у односу на испитане епрувете стања Н111. Код оба стања највећа сила је постигнута испитивањем епрувета сечених у правцу ваљања материјала, а најмања у правцу под углом од 45° у односу на правац ваљања. Епрувете оба стања сечене у правцу ваљања имају најмање издужење, а највеће оне сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања, што се може уочити и са слика 3.17 и 3.18. Примећује се и да за исту брзину деформације PLC ефекат углавном има исти облик за сва три правца сечења узорака код оба стања испитиване алуминијумске легуре.

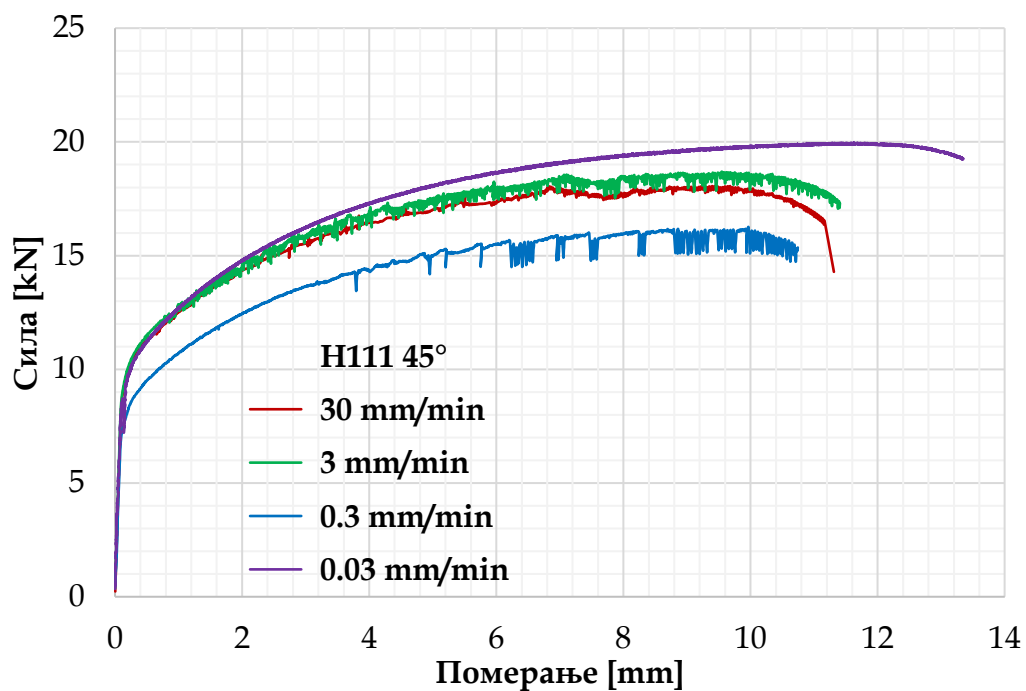
На сликама 9.9-9.14 приказани су упоредни дијаграми односа силе и померања за појединачне правце сечења епрувета алуминијумске легуре 5083, стања Н111 и Н321, при различитим брзинама деформације.



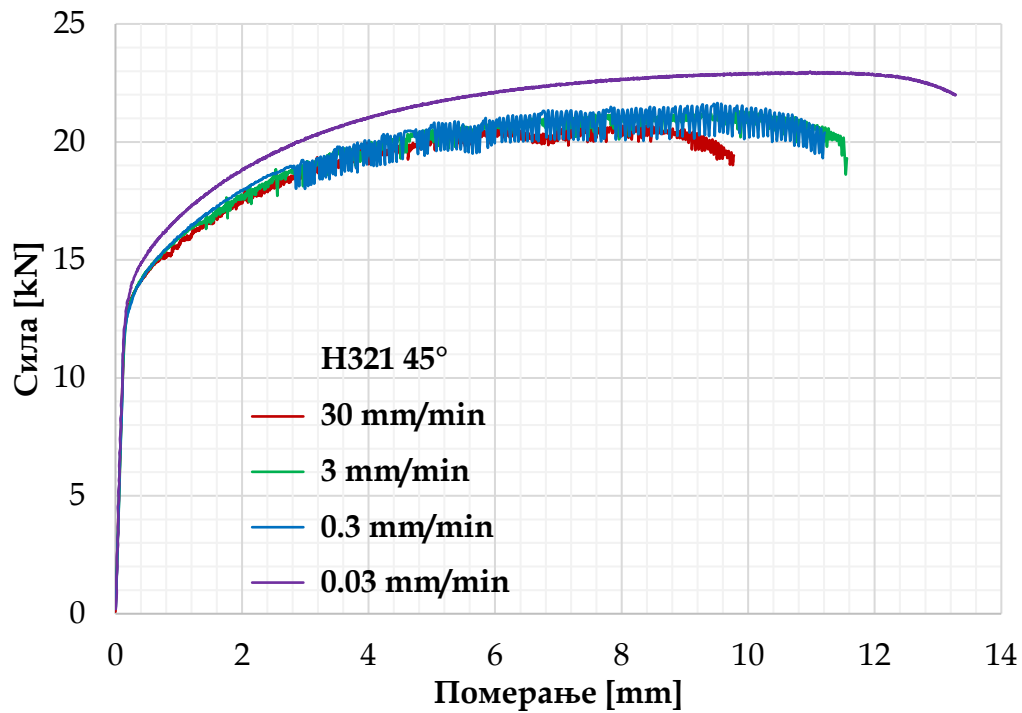
Слика 9.9 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стања Н111, сечене у правцу ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min



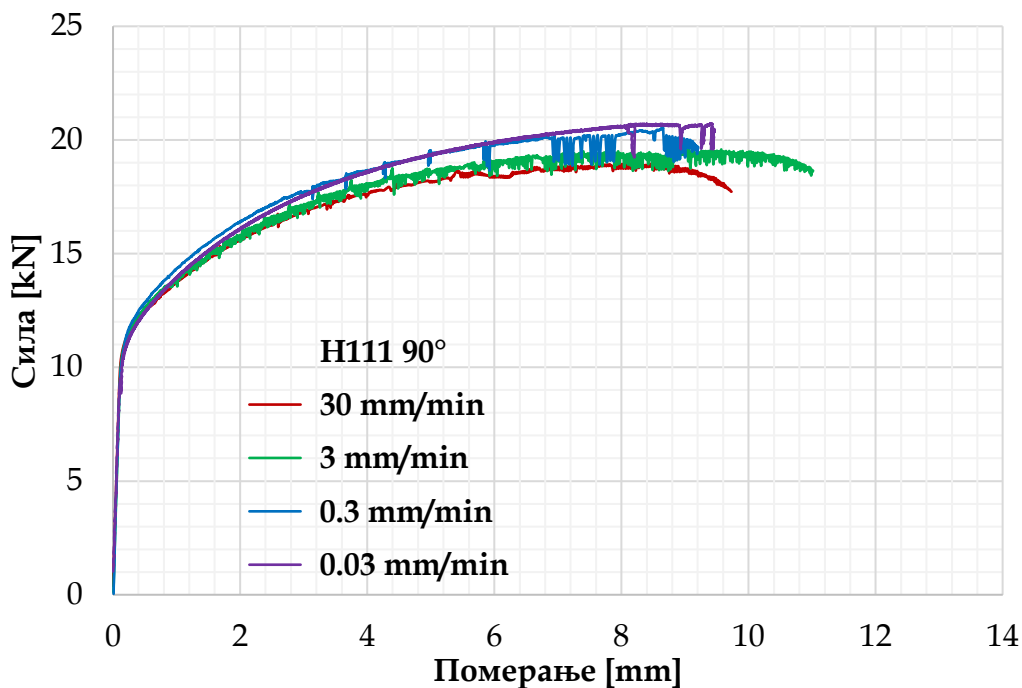
Слика 9.10 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H321, сечене у правцу ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min



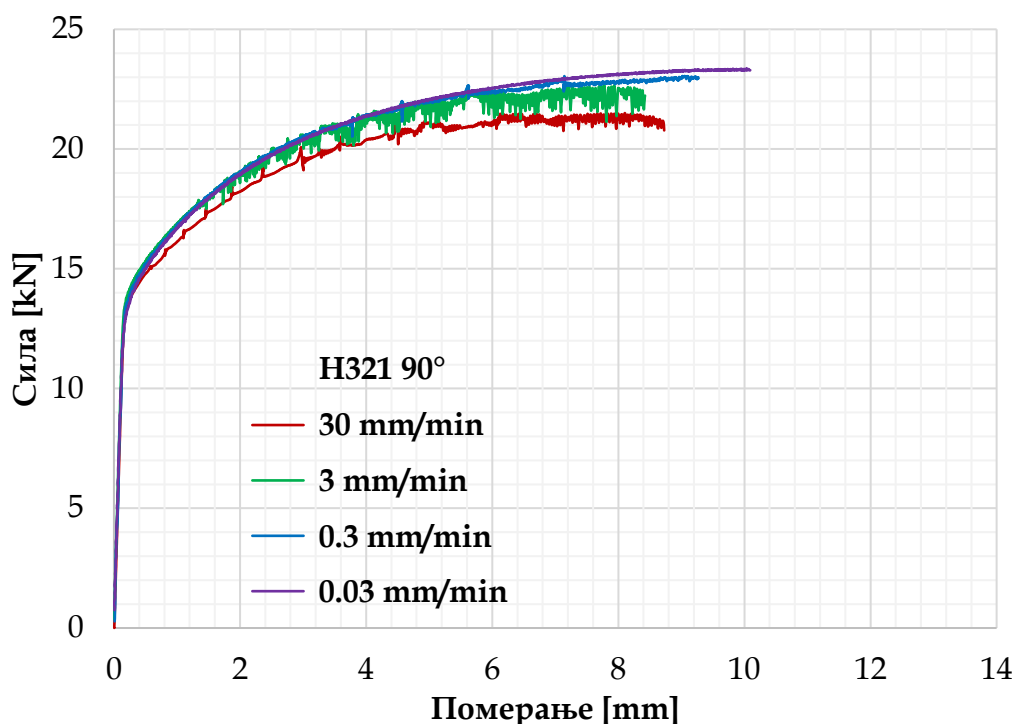
Слика 9.11 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H111, сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min



Слика 9.12 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н321, сечене под углом од 45° у односу на правац ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min



Слика 9.13 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање Н111, сечене управно на правац ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min



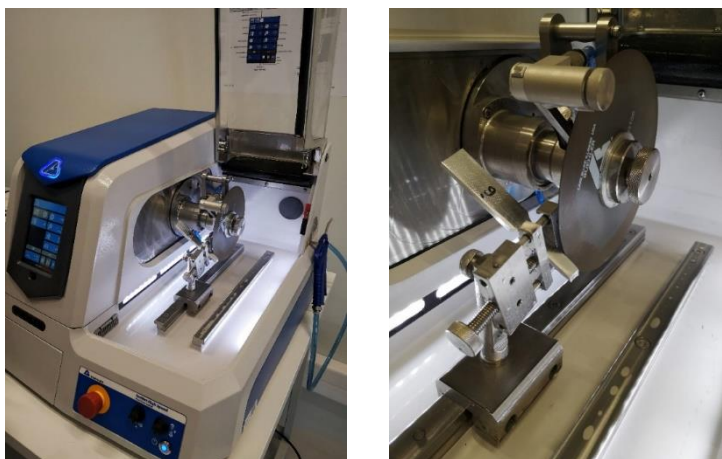
Слика 9.14 Упоредни дијаграми сила - померање за епрувете алуминијумске легуре 5083, стање H321, сечене управно на правац ваљања при брзинама деформације 30, 3, 0.3 и 0.03 mm/min

Са слика 9.9-9.14 може се уочити да су вредности напона течења и затезне чврстоће највеће за најмању брзину деформације - 0.03 mm/min. Тестерастички облик криве се није појавио само код епрувета испитиваних једноосним затезањем брзином од 0.03 mm/min сечених под углом од 45° за оба стања, и под углом од 90° за стање H321. Може се закључити да брзина дифузије велике концентрације Mg растворених атома у решетки алуминијума на собној температури може да достигне брзину мобилних дислокација током целог процеса деформације затезањем због довољне количине времена за Mg атоме да се дифузно крећу при брзини деформације 0.03 mm/min. Када је брзина деформације мања, формира се атмосфера Mg атома која омета дислокације да наставе да се крећу и то је главни разлог појаве ојачавања деформацијом код алуминијумске легуре 5083 испитиване затезањем на собној температури. Дифузија Mg супституцијских атома није могла да постигне брзину мобилних дислокација када се брзина деформације повећала са 0.03 на 30 mm/min због недостатка времена да Mg атоми формирају атмосферу која ће ометати кретање мобилних дислокација, па вредности затезне чврстоће опадају монотонно са повећањем брзине деформације. Концентрација растворених Mg атома у H321 је већа него у H111, па је степен ометеног кретања дислокација и способност ојачавања обрадом већа у H321, тако да је то главни разлог зашто је вредност затезне чврстоће H321 при различитим брзинама деформације била већа у односу на H111.

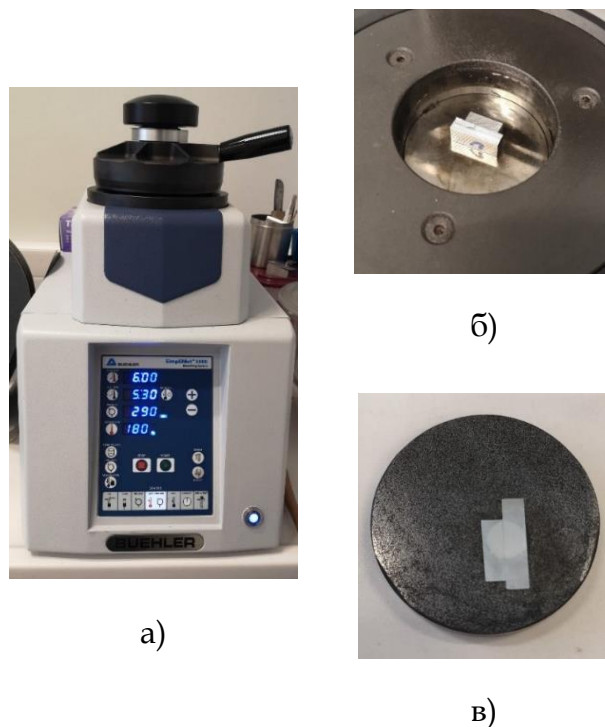
9.2 Микроструктура узорака алуминијумске легуре 5083

У закључним разматрањима ове дисертације је наведено да ће један од праваца будућих истраживања бити и унапређење PFDM за симулирање појаве општећења код хетерогених материјала. Такви хетерогени модели узимају у обзир промене у материјалу на микро нивоу, па је детаљна анализа микроструктуре материјала чије понашање желимо да симулирамо неопходна.

Техничко-технолошка припрема узорака за анализу микроструктура легура је спроведена на IMW Институту у Лужницама. Сечење узорака претходи полирању и брушењу и одрађено је на машини за аутоматско сечење са додатком абразива приказаној на слици 9.15, што омогућава смањење деформација површине узорака при сечењу. Исечени узорци се затапају и припремају за полирање и брушење на аутоматској машини да би били спремни за металографска испитивања. Процес затапања узорака је приказан на слици 9.16. Узорци су после механичког брушења и полирања нагризани Баркеровим и Келеровим реагенсом у циљу одређивања граница зрна. Нагрижени део једног од узорака Баркеровим реагенсом је кружног облика и може се видети на слици 9.16в.



Слика 9.15 Машина за аутоматско сечење узорака



Слика 9.16 Систем за затпање узорака

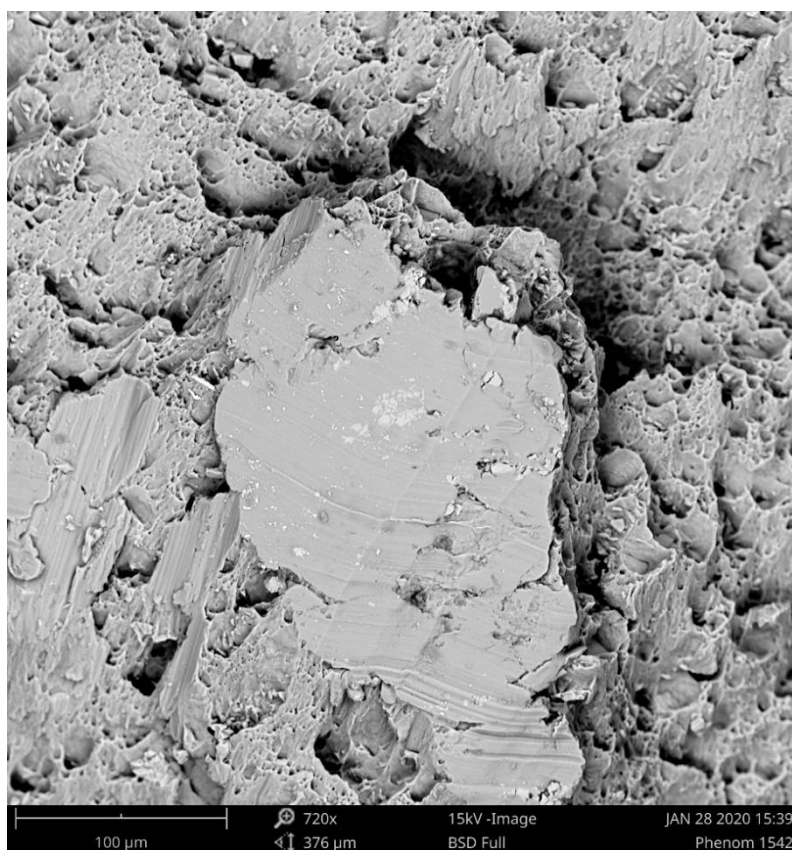
Узорци припремљени за металографска испитивања посматрани су у IMW Институту Лужнице уз помоћ LEICA DM4 M специјализованог металуршког микроскопа са увећањем до $\times 2000$.

Бринел (енг. Brinell) тест тврдоће материјала је спроведен пре и после испитивања једноосним затезањем на уређају Echo LAB HB 625 Z на IMW Институту Лужнице. Тврдоћа по Бринелу представља однос силе утискивања куглице и површине отиска који она направи на површини материјала чија се тврдоћа испитује. Мерење је извршено помоћу челичне куглице пречника 2.5 mm која се утискује у површину силом утискивања од 62.5 kg током 20 секунди. Тврдоћа материјала пре испитивања затезањем је била око 79 HB, а после затезања око 98 HB, 107 HB и 104 HB за епрувете сечене тако да им је оса затезања под углом 0° , 45° и 90° у односу на правац ваљања плоче, респективно.

Површина лома испитиваних узорака затезањем је посматрана уз помоћ скенирајућег електронског микроскопа (SEM) Desktop Phenom у Центру за трибологију Факултета инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. На слици 9.17 је приказан узорак за анализу епрувете стања H111 са осом затезања под углом 45° у односу на правац ваљања плоче, а на слици 9.18 површина лома тог узорка. У централном делу слике 9.18 уочава се равна површина која је под правим углом у односу на правац затезућег оптерећења којем је епрувета била подвргнута, што одговара површини кртог лома. Такође, око те равне површине уочавају се издужене јамице које се јављају код жилавог лома, тако да је лом посматраног узорка мешовитог карактера.

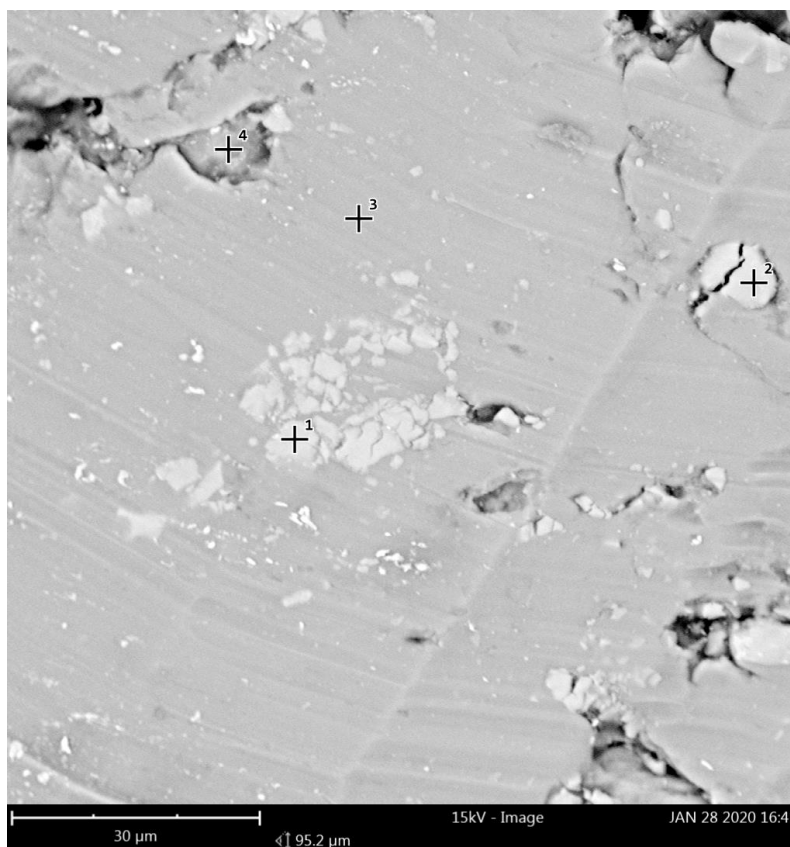


Слика 9.17 Узорак за СЕМ анализу, 5083, стање Н111, са осом затезања под углом од 45° у односу на правац ваљања



Слика 9.18 Површина лоба узорка 5083, стање Н111, са осом затезања под углом од 45° у односу на правац ваљања

Уз помоћ СЕМ-а одређен је хемијски састав одређених тачака површинског слоја посматраног узорка алуминијумске легуре 5083, стање Н111, за правац сечења под углом од 45° у односу на правац ваљања. Одабране тачке су приказане на слици 9.19, а добијени резултати су дати у табели 9.1.

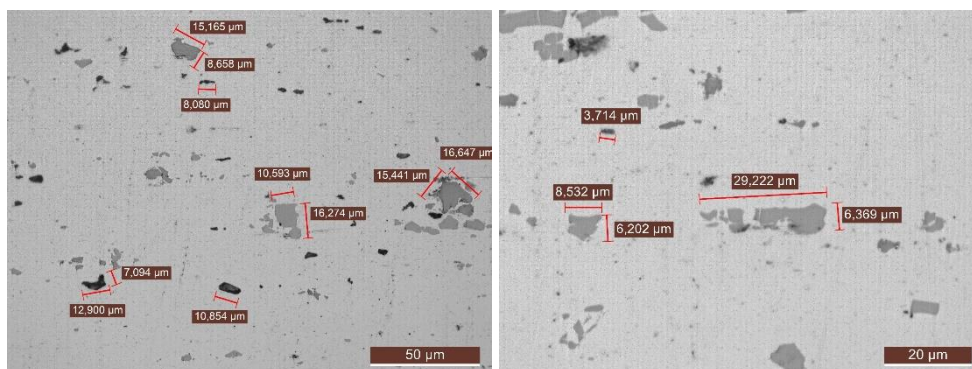


Слика 9.19 Површина узорка 5083, стање Н111, са осом затезања под углом од 45° у односу на правац ваљања, са одабраним тачкама за анализу хемијског састава

Табела 9.1 Резултати хемијског састава површинског слоја узорка 5083, стање Н111, са осом затезања под углом од 45° у односу на правац ваљања, у 4 одабране тачке

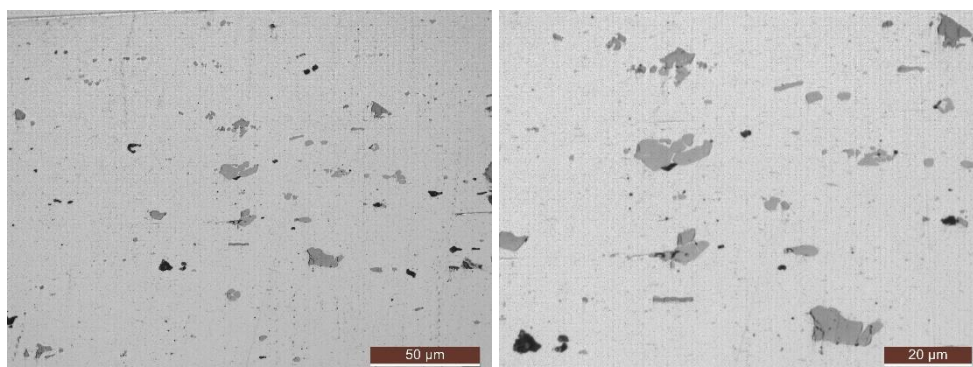
Елемент	Садржај [%]			
	1.	2.	3.	4.
Al	75.7	72.2	95.5	95.6
Fe	16.1	18.1	-	-
Mn	8.2	9.7	-	-
Mg	-	-	4.5	4.4

На слици 9.20 је дат приказ узорка нагриженог у Келеровом реагенсу помоћу оптичког микроскопа за стање Н111 за правац ваљања при увећањима x500 и x1000, заједно са димензијама уочених фаза.



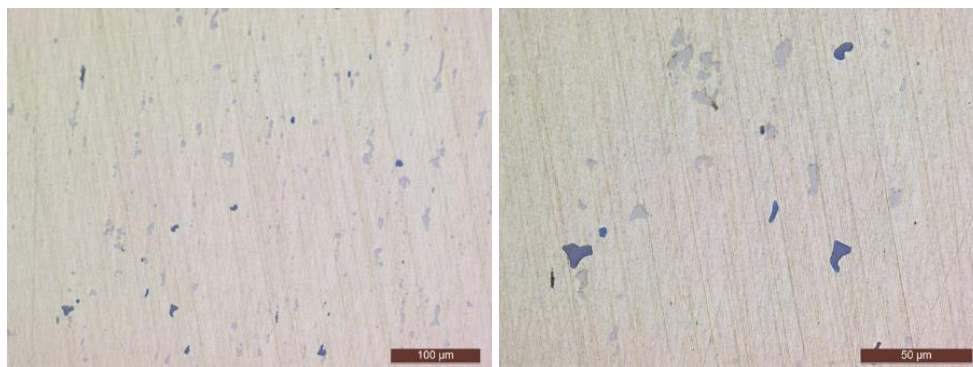
Слика 9.20 Стање H111 за епрувету са осом затезања у правцу ваљања, Келеров реагенс (x500, x1000)

На слици 9.21 је дат приказ узорка нагриженог у Келеровом реагенсу помоћу оптичког микроскопа за стање H111 за правац сечења под углом 90° у односу на правац ваљања при увећањима x500 и x1000. Интерметалне фазе су равномерно распоређене по пресеку и разликују се две врсте интерметалних фаза. На основу добијених резултата хемијског састава одређених тачака на површини узорка H111, светло сиве крте честице највероватније представљају $(Fe,Mn)Al_6$ фазу. Са слике 9.21 се може видети да та фаза количински преовладава и изразито је грубља у односу на тамно сиву фазу која је највероватније Mg_2Si .

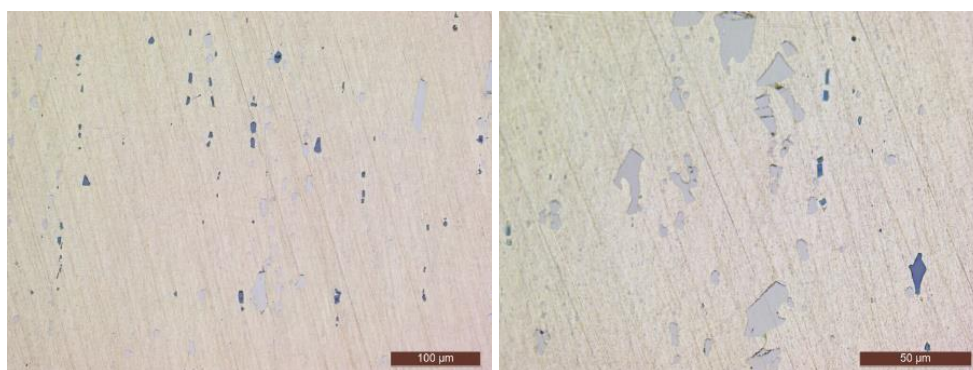


Слика 9.21 Стање H111 са осом затезања под углом од 90° у односу на правац ваљања, Келеров реагенс (x500, x1000)

На слици 9.22 је дат приказ узорка нагриженог у Келеровом реагенсу помоћу оптичког микроскопа за стање H321 за правац ваљања, а за правац сечења под углом од 90° у односу на правац ваљања је дат на слици 9.23 при увећањима x200 и x500. Примећују се ситне интерметалне фазе поређане по нивовима у правцу ваљања и разликују се две врсте интерметалних фаза.

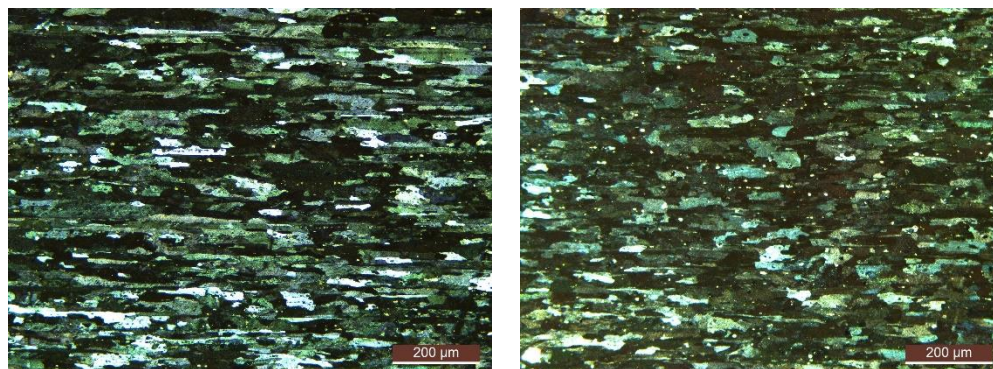


Слика 9.22 Стање H321 за епрувету са осом затезања у правцу ваљања, Келеров реагенс (x200, x500)



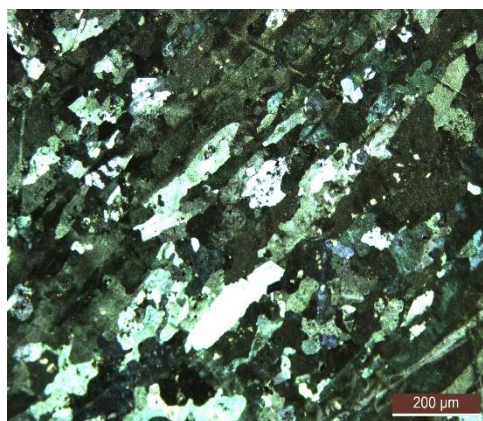
Слика 9.23 Стање H321 за осу затезања под углом од 90° у односу на правац ваљања, Келеров реагенс (x200, x500)

На слици 9.24 је дат приказ узорака нагрижених у Баркеровом реагенсу помоћу оптичког микроскопа за стање H111 за сва три правца са увећањем x100. Уочава се мешавина полигоналних и издужених зрна и њихово усмерење у односу на правац ваљања.



а)

б)



в)

Слика 9.24 Стање H111 са осом затезања под углом од а) 0° , б) 90° и в) 45° у односу на правац ваљања, Баркеров реагенс ($\times 100$)

Биографија кандидата

Јелена Живковић је рођена 10. јуна 1989. године у Крагујевцу, Република Србија. Основну школу „Мома Станојловић“ у Крагујевцу завршила је 2004. године као ђак генерације и носилац Вукове дипломе. Школовање је наставила у Првој крагујевачкој гимназији, природно-математички смер, где је матурирала 2008. године са одличним успехом.

Основне академске студије на Машинском факултету у Крагујевцу, у току студија промењено име у Факултет инжењерских наука, уписала је 2008. године, а завршила 2011. године на смеру за Примењену механику и аутоматско управљање са просечном оценом у току студија 9.57 (девет и 57/100). Завршни рад под називом „Анализа тачности проширене методе коначних елемената“ под менторством проф. др Гордане Јовичић одбранила је са оценом 10. После завршетка основних академских студија, 2011. године уписује мастер академске студије на Факултету инжењерских наука, смер за Примењену механику и аутоматско управљање, које завршава 2013. године са просечном оценом 9,88 (девет и 88/100). Мастер рад под називом „Развој нумеричког модела Ј-интеграла у еласто-пластичној механици лома применом методе еквивалентног домена интеграције“ под менторством проф. др Гордане Јовичић одбранила је са оценом 10. Током основних и мастер студија била је стипендиста Министарства просвете, науке и технолошког развоја и Фонда за младе таленте Министарства омладине и спорта.

Докторске академске студије уписује школске 2013/2014. године на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. Положила је све предмете предвиђене планом и програмом са просечном оценом 10. Под менторством проф. др Владимира Дунића започиње истраживање на пољу механике оштећења из ког је настала идеја за тему докторске дисертације „Унапређење, имплементација и експериментална верификација нумеричког моделирања оштећења и лома метала применом фазног моделирања“. Тему докторске дисертације је пријавила 09.04.2019. године на катедри за Примењену механику и аутоматско управљање Факултета инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. Одлуком Већа за техничко-технолошке науке IV-04-715/8 одржаног 11.09.2019. године тема докторске дисертације је одобрена.

На Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу запослена је као истраживач-сарадник од јануара 2014. године на пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије TR32036 „Развој софтвера за решавање спрегнутих мултифизичких проблема“, а тренутно ради у звању виши стручни сарадник. У наставним активностима на Факултету инжењерских наука ангажована је на предметима Механика 1 (2014-), Механика 2 (2014-2015) и Механика 3 (2014-).

Током свог истраживања објавила је преко 30 научних радова у научно-стручним часописима и на међународним и домаћим конференцијама као аутор или коаутор. Учествовала је на две тренинг школе „From nano- to macro-

biomaterials (design, processing, characterization, modelling) and applications to stem cells regenerative orthopaedic and dental medicine” у оквиру COST пројекта NAMABIO, које су одржане 2013. у Италији и 2014. године на Кипру. Као КММ-VIN стипендиста боравила је месец дана 2015. године на Институту за механику материјала и конструкција, Технички универзитет у Бечу, Аустрија. Боравила је шест месеци на Департману за конструкције и геотехничко инжењерство, Sapienza Универзитет у Риму, Италија, у оквиру Erasmus+ међународног програма кредитне мобилности.

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Јелена М. Живковић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

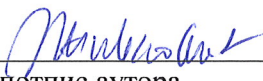
Унапређење, имплементација и експериментална верификација
нумеричког моделирања оштећења и лома метала применом фазног
моделирања

која је одбрањена на Факултету инжењерских наука
Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу _____, 5.4.2022. године,



потпис аутора

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Јелена М. Живковић,

дозвољавам

не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Унапређење, имплементација и експериментална верификација
нумеричког моделирања оштећења и лома метала применом фазног
моделирања

која је одбрањена на Факултету инжењерских наука

Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

дозвољавам

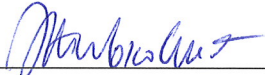
не дозвољавам¹

¹ Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

- 1) Ауторство
- 2) Ауторство - делити под истим условима
- 3) Ауторство - без прерада
- 4) Ауторство - некомерцијално
- 5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима
- 6) Ауторство - некомерцијално - без прерада²

У Крагујевцу _____, 5.4.2022. године,



потпис аутора

² Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: <http://creativecommons.org.rs/>