



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА УНИВЕРЗИТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

Ненад Д. Петровић

СТРУКТУРНА ОПТИМИЗАЦИЈА РЕШЕТКАСТИХ НОСЕЋИХ КОНСТРУКЦИЈА

докторска дисертација

Крагујевац, 2020.



UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF ENGINEERING

Nenad D. Petrović

STRUCTURAL OPTIMIZATION OF TRUSS STRUCTURES

Doctoral Dissertation

Kragujevac, 2020.

Идентификациона страница докторске дисертације

Аутор
Име и презиме: Ненад Петровић
Датум и место рођења: 13. 02. 1989. год., Крагујевац
Садашње запослење: Асистент
Докторска дисертација
Наслов: Структурна оптимизација решеткастих носећих конструкција
Број страница: 153
Број слика: 93
Број библиографских података: 104
Установа и место где је рад израђен: Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу
Научна област (УДК): 681.8,519.8
Ментор: др Ненад Марјановић, ред. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу
Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 15. 04. 2015. год.
Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: IV-04-390/7 од 09. 07. 2015. год.
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата:
<ol style="list-style-type: none">1. др Ненад Марјановић, ред. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу,2. др Мирослав Живковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу,3. др Весна Марјановић, ванр. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу,4. др Ненад Милорадовић, доцент, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу,5. др Зоран Милојевић, ванр. проф., Факултет техничких наука Универзитета у Новом Саду.
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:
<ol style="list-style-type: none">1. др Ненад Милорадовић, ванр. проф., председник Комисије, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу,2. др Весна Марјановић, ванр. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу,3. др Мирослав Живковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу,4. др Ненад Костић, доцент, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу,5. др Милан Банић, доцент, Машински факултет у Нишу, Универзитет у Нишу
Датум одбране докторске дисертације:

Мојој баба Мирѝ

Апстракт

У овом раду дат је оригинални приступ структурној оптимизацији решеткастих носећих конструкција, који треба да обезбеди практичну применљивост добијених оптималних решења. Разматрана је оптимизација попречних пресека, топологије и облика као и могућност симултане оптимизације ових аспеката. Овом дисертацијом су представљена нова ограничења оптимизације решеткастих конструкција, која нису коришћена у досадашњим истраживањима. Новоуведена ограничења служе томе да се постигну реално изводљиве конструкције. Уведено је ограничење минималне дозвољене дужине елемената, ограничење притиснутих штапова против појаве извијања и ограничење максималног броја различитих попречних пресека. Како би се извршила верификација употребе ових ограничења, развијен је оригинални софтвер који поред употребе нових ограничења омогућава селективну оптимизацију појединачних аспеката или њихових комбинација. У софтверу су решавани проблеми оптимизације стандардних тест примера решетки са 10, 17, 25 и 47 штапова, као и пример кровног решеткастог носача. Поређени су резултати са и без потребе провере на извијање, анализиран је утицај коришћења дискретних, уместо континуалних, променљивих попречних пресека на резултате. Дато је и поређење оптималних маса констрикција за све примере са различитим бројевима различитих попречних пресека како би се приказао утицај избора вредности за ово ограничење. Поред тога, је за све моделе вршено је и поређење укупних спољашњих површина како би се показао утицај оптимизације масе на потребну количину површинске заштите. Конкретним примерима је потврђен квалитет развијеног поступка на основу обимних симулација и анализа. На крају рада су изведени битни закључци и представљене смернице за потенцијални даљи правац истраживања.

Кључне речи: решеткасти носачи, структурна оптимизација, оптимизација попречних пресека, оптимизација топологије, оптимизација облика, извијање, ограничења оптимизације

Abstract

This research presents an original approach to structural optimization of truss structures, which needs to ensure practical applicability of the achieved optimization results. Sizing, topology and shape optimization, as well as the simultaneous optimization of these aspects has been considered here. This dissertation presents new truss optimization constraints which have not been used in research papers to date. The newly established constraints ensure the feasibility of constructing optimized trusses. The new constraints are minimal allowed length of elements, buckling constraints for compression elements, and a maximal number of diverse cross-sections of the entire truss. An original software was developed in order to verify the use of these constraints which also allows for selective optimization of specific aspects or their combination. Optimization problems of standard test examples with 10, 17, 25 and 47 bar trusses as well as a roof truss were solved using the software. Results with and without the use of buckling constraints were compared, as well as the influence of using discrete, instead of continuous, cross-section variables. A comparison of the difference in masses of optimal solutions with different numbers of diverse cross-sections was also given in order to show the impact of choosing a value for this constraint. A comparison of total outer area was given for all optimized models to show the influence of mass optimization on the needed overall surface protection. Using specific examples the quality of the developed approach was determined based on extensive simulations and analyses. At the end of the dissertation important conclusions are stated and new guidelines for future research are given.

Key words: trusses, structural optimization, sizing optimization, topology optimization, shape optimization, buckling, optimization constraints

Списак слика

Слика 2.1 – Решеткасти носач а) начин извођења и б) теоријски модел.	11
Слика 2.2 – Конфигурације са простом троугаоном испуном.	12
Слика 2.3 – Конфигурације са испуном од дијагонала и вертикала.	12
Слика 2.4 – Конфигурације са укрштеним дијагоналама.	13
Слика 2.5 – Конфигурације са К испуном.	13
Слика 2.6 – Конфигурације са комбинованим испунама.	13
Слика 2.7 – Конвенционални поступак конструисања решеткастих носача.	14
Слика 2.8 – Пример прорачуна методом сила.	15
Слика 2.9 – Пример прорачуна методом пресека.	16
Слика 2.10 – Силе у штаповима са а) леве и б) десне стране.	16
Слика 2.11 – Елемент просторне решеткасте конструкције са глобалним и локалним координатним системима.	18
Слика 2.12 – Дужине извијања за различите случајеве ослањања.	20
Слика 3.1 – Еквивалентност оптимизације.	23
Слика 3.2 – Облици а) континуалне, б) дисконтинуалне и в) дистретне функције циља.	24
Слика 3.3 – Визуелизација модела популације.	26
Слика 3.4 – Укрштање у једној тачки.	27
Слика 3.5 – Једноставна мутација једног гена хромозома.	27
Слика 3.6 – Основна структура генетског алгорита са приказаним фазама.	28
Слика 3.7- Општа оптимизација а) параметара, б) топологије и в) облика.	29
Слика 3.8 – а) Почетни модел решеткастог носача и решења добијена структурном оптимизацијом б) попречних пресека, в) топологије и г) облика.	30
Слика 4.1 – Алгоритам рада главних елемената софтвера.	39
Слика 4.2 – Алгоритам глобалног процеса оптимизације у софтверу.	40
Слика 4.3 – Графички приказ повезаности модула у развијеном софтверу.	41
Слика 4.4 – Оператор за креирање попречног пресека у односу на а) геометрију и б) базу профила [93].	43
Слика 4.5 – Оператори за задавање материјала а) параметарски и б) из базе материјала [93].	43
Слика 4.6 – Задавање слепени слободе чворовима ослонаца [93].	44
Слика 4.7 – Задавање оптерећења а) гравитације, б) у чвору и г) по елементу [93].	44

Слика 4.8 – Изглед тренутног најбљег решења у генерацији (изнад) и окружење оптимизационог оператора Galapagos(испод).....	46
Слика 4.9 – Повезивање оператора писаног у Visual Basic језику за креирање променљивих за попречне пресеке елемената код оптимизације са дискретним променљивим.	48
Слика 4.10 – Промена смера сила у штаповима односу на коришћене елементе.	49
Слика 4.11 – Утицај промене позиције чвора на смер сила у штапу.....	50
Слика 4.12 – Илустровани приказ функционисања ограничења максималног броја различитих елемената.....	54
Слика 4.13 – Алгоритам ограничења.	56
Слика 4.14 – Начин селекције типа оптимизације и ограничења	57
.....	57
Слика 4.15 – Изглед софтвера за пример оптимизације носача са 17 штапова.....	59
Слика 4.16 – Изглед блокова за одређивање попречних пресека и ограничења максималног броја различитих профила.	60
Слика 4.17 – Изглед блока за оптимизацију топологије.....	60
Слика 4.18 – Изглед дела блока за оптимизацију облика и одређивање иницијалне конфигурације.	61
Слика 4.19 – Изглед дела блока за ограничење провере приниснузих штапова на извијање.	61
Слика 4.20 – Изглед блока за ограничење минималне дужине штапова.	61
Слика 4.21 – Изглед блока за израчунавање укупне спољашње површине конструкције решеткастог носача.	62
Слика 5.1 – Конфигурација примера носача са 10 штапова.....	64
Слика 5.2 – Изгледи конфигурација решења примера са 10 штапова за оптимизације а) попречног пресека,б) топологије, в)облика,г) попречног пресека и топологије, д) попречног пресека и облика, ђ) топологије и облика и е) комплетне, за случај без провере на извијање.	66
Слика 5.3 – Резултати оптимизације попречних пресека примера са 10 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.	68
Слика 5.4 – Резултати оптимизације а) топологије и б) облика примера са 10 штапова.	69
Слика 5.5 – Резултати оптимизације попречних пресека и топологије примера са 10 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.....	69
Слика 5.6 – Модели оптималних попречних пресека и облика користећи.....	69
а) континуалне и б) дискретне променљиве, примера са 10 штапова.	69
Слика 5.7 – Резултати оптимизације топологије и облика примера са 10 штапова.....	69
Слика 5.8 – Резултати комплетне оптимизације примера са 10 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.....	70

Слика 5.9 – Маса оптималних модела примера са 10 штапова.	70
Слика 5.10 – Спољашње површине оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 10 штапова.	71
Слика 5.11 – Разлика маса оптималних модела у односу на број различитих профила за пример са 10 штапова.	77
Слика 5.12 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројвима различитих профила у односу на решење са само једним истим оптималним профилем за случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречних пресека примера са 10 штапова.	79
Слика 5.13 – Конфигурација примера носача са 17 штапова.	80
Слика 5.14 – Изгледи конфигурација решења примера са 17 штапова за оптимизације а) попречних пресека, б) топологије, в) облика, г) поп. пресека и топологије, д) поп. пресека и облика, њ) топологије и облика и е) комплетне оптимизације, за случај без провере на извијање.	81
Слика 5.15 – Резултати оптимизације попречних пресека примера са 17 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.	84
Слика 5.16 – Резултати оптимизације а) топологије, б) облика за обе врсте променљивих, примера са 17 штапова.	84
Слика 5.17 – Резултати оптимизације попречних пресека и топологије примера са 17 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.	85
Слика 5.18 – Резултати оптимизације попречних пресека и облика користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве, примера са 17 штапова.	85
Слика 5.19 – Резултати оптимизације топологије и облика за обе врсте променљивих примера са 17 штапова.	85
Слика 5.20 – Резултати комплетне оптимизације примера са 17 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.	85
Слика 5.21 – Маса оптималних модела примера са 17 штапова.	86
Слика 5.22 – Спољашње површине оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 17 штапова.	87
Слика 5.23 – Разлика маса оптималних модела у односу на број различитих профила за пример са 17 штапова.	96
Слика 5.24 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројвима различитих профила у односу на решење са само једним истим оптималним профилем за случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречних пресека примера са 17 штапова.	97
Слика 5.25 – Конфигурација примера носача са 25 штапова.	98
Слика 5.26 – Изгледи конфигурација решења примера са 25 штапова за оптимизације а) попречних пресека, б) топологије, в) облика, г) поп. пресека и топологије, д) поп. пресека и облика, њ) топологије и облика и е) комплетне, за случај без провере на извијање. .	100
Слика 5.27 – Резултати оптимизације попречних пресека примера са 25 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.	103

Слика 5.28 – Резултати оптимизације а) топологије, б) облика за обе врсте променљивих, примера са 25 штапова.....	104
Слика 5.29 – Резултати оптимизације попречних пресека и топологије примера са 25 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.....	104
Слика 5.30 – Резултати оптимизације попречних пресека и облика користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве, примера са 25 штапова.	104
Слика 5.31 – Резултати оптимизације топологије и облика за обе врсте променљивих примера са 25 штапова.	105
Слика 5.32 – Резултати комплетне оптимизације примера са 25 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.....	105
Слика 5.33 – Маса оптималних модела примера са 25 штапова.....	106
Слика 5.34 – Спољашње површине оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 25 штапова.....	106
Слика 5.35 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројем профила у односу на оптимум за случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречних пресека примера са 25 штапова.....	112
Слика 5.36 – Разлика маса оптималних модела различитим бројем профила у односу на решење са само једним истим оптималним профилем за случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречних пресека примера са 25 штапова.	113
Слика 5.37 – Конфигурација примера носача са 47 штапова.	116
Слика 5.38 – Решења примера са 47 штапова и дискретним променљивим са провером на извијање а) оптималних попречних пресека, б) оптималног облика и в) оптималних попречних пресека и облика.	118
Слика 5.39 – Маса оптималних модела примера са 47 штапова.....	120
Слика 5.40 – Спољашње површине оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 47 штапова.....	120
Слика 5.41 – Резултујући модел оптимизације попречних пресека и облика према ограничењима из литературе [50].	123
Слика 5.42 – Разлика маса у односу на број различитих профила за пример са 47 штапова.	125
Слика 5.43 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројевима различитих профила у односу на решење са само једним истим оптималним профилем за случајеве оптимизације попречних пресека и комбинације попречних пресека и облика примера са 47 штапова.....	126
Слика 5.44 – Конфигурација примера кровног решеткастог носача.	128
Слика 5.45 – Изгледи модела за случај 1 а) опт. поп. пресека и б) опт. поп. пресека и облика.....	131
Слика 5.46 – Изгледи модела за случај 2 а) опт. поп. пресека и б) опт. поп. пресека и облика.....	131

Слика 5.47 – Изгледи модела за случај 3 а) опт. попр. пресека и б) опт. попр. пресека и облика.....	131
Слика 5.48 – Изгледи модела за случај 4 а) опт. попр. пресека и б) опт. попр. пресека и облика.....	131
Слика 5.49 – Маса аналитичких и оптималних решења у односу на случај.	132
Слика 5.50 – Разлике укупних спољашњих површина у односу на тип решења и случај.	132
Слика 5.51 – Разлика маса оптималних модела у односу на број различитих штапова од оптималног модела без ограниченог броја различитих за случај оптимизације а) попречних пресека и б) попречних пресека и облика.	140
Слика 5.52 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројем профилау односу на аналитичко решење за случајеве оптимизације а) попречних пресека и б) попречних пресека и облика.	140

Списак табела

Табела 4.1 – Унос података за коришћење софтвера.	58
Табела 5.1 – Оптимална решења оптимизације попречних пресека без ограничења на извијање са континуалним променљивим.	64
Табела 5.2 – Оптималне површине попречних пресека и масе у односу на тип оптимизације без провере на извијање примера са 10 штапова	65
Табела 5.3 – Поређење оптималних попречних пресека са континуалним и дискретним променљивим примера са 10 штапова са провером на извијање.	67
Табела 5.4 – Координате чворова за случајеве са оптимизацијом облика који немају проверу на извијање примера са 10 штапова.	68
Табела 5.5 – Координате чворова за случајеве који узимају у обзир оптимизацију облика за пример са 10 штапова.	68
Табела 5.6 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека примера са 10 штапова.	71
Табела 5.7 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека примера са 10 штапова.	72
Табела 5.8 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека и топологије примера са 10 штапова.	72
Табела 5.9 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека и топологије примера са 10 штапова. ...	72
Табела 5.10 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека и облика примера са 10 штапова.	73
Табела 5.11 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека и облика примера са 10 штапова.	73
Табела 5.12 – Координате чворова оптималних решења за у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека и облика примера са 10 штапова.	73
Табела 5.13 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем комплетне оптимизације примера са 10 штапова.	74
Табела 5.14 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила за проблем комплетне оптимизације примера са 10 штапова.	74
Табела 5.15 – Координате чворова оптималних решења за у односу на број различитих профила за проблем комплетне оптимизације примера са 10 штапова.	74
Табела 5.16 – Оптималне површине попречних пресека и масе у односу на тип оптимизације без провере на извијање примера са 17 штапова.	82

Табела 5.17 – Координате чворова за случајеве са оптимизацијом облика који немају проверу на извијање примера са 17 штапова.	82
Табела 5.18 – Поређење оптималних попречних пресека са континуалним и дискретним променљивим примера са 17 штапова.	83
Табела 5.19 – Координате чворова за случајеве који узимају у обзир оптимизацију облика за пример 17 са штапова.	84
Табела 5.20 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека примера са 17 штапова.	87
Табела 5.21 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила примера оптимизације попречних пресека примера са 17 штапова.	88
Табела 5.22 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека и топологије примера са 17 штапова.	88
Табела 5.23 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације поп. пресека и топологије примера са 17 штапова.	89
Табела 5.24 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека и облика примера са 17 штапова.	89
Табела 5.25 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека и облика примера са 17 штапова.	90
Табела 5.26 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за проблем оптимизације попречног пресека и облика са 17 штапова.	91
Табела 5.27 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем комплетне оптимизације примера са 17 штапова.	91
Табела 5.28 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека за проблем комплетне оптимизације примера са 17 штапова.	92
Табела 5.29 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за пример оптимизације попречног пресека и облика са 17 штапова.	93
Табела 5.30 – Поређење оптималних резултата са литературом.	99
Табела 5.31 – Оптималне површине попречних пресека и масе у односу на тип оптимизације без провере на извијање примера са 25 штапова.	101
Табела 5.32 – Координате чворова за случајеве са оптимизацијом облика који немају проверу на извијање примера са 25 штапова.	101
Табела 5.33 – Поређење оптималних попречних пресека са континуалним и дискретним променљивим примера са 25 штапова са провером на извијање.	102
Табела 5.34 – Координате чворова за случајеве који узимају у обзир оптимизацију облика за пример 25 са штапова.	103
Табела 5.35 – Поређење разлика маса у односу на број различитих штапова за пример оптимизације попречних пресека са 25 штапова.	107

Табела 5.36 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека примера оптимизације попречних пресека са 25 штапова.	107
Табела 5.37 – Поређење разлика маса у односу на број различитих штапова за пример оптимизације попречних пресека и топологије са 25 штапова.	107
Табела 5.38 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека примера оптимизације попречних пресека и топологије са 25 штапова.	108
Табела 5.39 – Поређење разлика маса у односу на број различитих штапова за пример оптимизације попречних пресека и облика са 25 штапова.	108
Табела 5.40 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека примера оптимизације попречних пресека и облика са 25 штапова.	108
Табела 5.41 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за пример оптимизације попречног пресека и облика са 25 штапова.	109
Табела 5.42 – Поређење разлика маса у односу на број различитих штапова за пример комплетне оптимизације са 25 штапова.	109
Табела 5.43 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека примера комплетне оптимизације са 25 штапова.	109
Табела 5.44 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за пример комплетне оптимизације са 10 штапова.	110
Табела 5.45 – Координате чворова за случајеве са оптимизацијом облика са провером на извијање примера са 47 штапова.	119
Табела 5.46 – Поређење оптималних попречних пресека и маса са континуалним и дискретним променљивим примера са 47 штапова.	119
Табела 5.47 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека примера са 47 штапова.	121
Табела 5.48 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека примера са 47 штапова.	121
Табела 5.49 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека примера са 47 штапова.	122
Табела 5.50 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека примера са 47 штапова.	122
Табела 5.51 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за пример оптимизације попречног пресека и облика са 47 штапова.	123
Табела 5.52 – Квадратни челични хладно обликовани профили коришћени за пример кровног решеткастог носача и њихови моменти инерција.	127
Табела 5.53 – Координате чворова за оптимална решења попречних пресека и облика у односу на случај.	129

Табела 5.71 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека случаја 4 кровног решеткастог носача.	137
Табела 5.72 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека и облика случаја 4 кровног решеткастог носача.	138
Табела 5.73 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека и облика случаја 4 кровног решеткастог носача.	138
Табела 5.74 – Координате чворова за оптимална решења попречних пресека и облика за случај 4 у односу на број различитих профила попречних пресека.	138

Садржај

1. Увод	1
1.1 Историја проблема оптимизације решеткастих носача	1
1.2 Преглед истраживања	2
1.3 Публиковани резултати	6
1.4 Предмет рада	7
1.5 Мотивација и циљеви рада	8
1.6 Хипотезе	8
1.7 Структура рада	9
2. Конвенционални приступ конструисању решеткастих конструкција	11
2.1 Конструисање решеткастих конструкција	11
2.2 Аналитичке методе прорачуна	15
2.3 Нумеричке методе прорачуна	17
2.4 Извијање притиснутих штапова	18
3. Структурна оптимизација	22
3.1 Оптимизација	22
3.1.1 Методе оптимизације	25
3.2 Структурна оптимизација решеткастих носача	28
3.2.1 Оптимизација попречних пресека	31
3.2.2 Оптимизација топологије	32
3.2.3 Оптимизација облика	32
3.3 Новоуведена ограничења структурне оптимизације решеткастих носача	33

3.3.1	Ограничење минималне дозвољене дужине штапа	33
3.3.2	Ограничење притиснутих штапова против извијања	33
3.3.3	Ограничење броја различитих попречних пресека	34
3.4	Имплементација структурне оптимизације.....	35
4.	Развој софтвера за оптимизацију решеткастих конструкција	37
4.1	Параметризација модела	41
4.2	Анализа модела методом коначних елемената	45
4.3	Оптимизација појединачних аспеката модела	45
4.3.1	Оптимизација попречних пресека	47
4.3.2	Оптимизација топологије	48
4.3.3	Оптимизација облика	49
4.3.4	Оптимизација више аспеката	50
4.4	Ограничења	51
4.4.1	Максимално померање чворова	51
4.4.2	Максимални дозвољени напон	51
4.4.3	Провера притиснутих штапова на извијање	52
4.4.4	Минимална дужина штапа	53
4.4.5	Максималан број различитих попречних пресека	53
4.5	Укупна спољашња површина конструкције	55
4.6	Оптимизација поступка рада софтвера	55
4.7	Коришћење софтвера	57
5.	Примери и анализа резултата	63
5.1	Носач са 10 штапова	63
5.1.1	Верификација	64
5.1.2	Резултати	65

5.1.3	Анализа резултата	75
5.2	Носач са 17 штапова	80
5.2.1	Верификација	80
5.2.2	Резултати	81
5.2.3	Анализа резултата	93
5.3	Носач са 25 штапова	98
5.3.1.	Верификација	99
5.3.2	Резултати	99
5.3.3	Анализа резултата	110
5.4	Носач са 47 штапова	115
5.4.1	Верификација	117
5.4.2	Резултати	118
5.4.3	Анализа резултата	123
5.5	Кровни решеткасти носач	127
5.5.1	Резултати	129
5.5.2	Анализа резултата	138
6.	Закључак	141
	Литература	146

1. Увод

Решеткасте носеће конструкције, често назване решеткасти носачи, једне су од најзаступљенијих носећих конструкција у изради мостова, кранова, авиона, робота и свемирских летилица. Ове конструкције су комплексне структуре сачињене од једноставних елемената (штапова) који су спојени на крајевима, а оптерећују се искључиво у спојевима (чворовима). Настали су из потребе за добијањем носача уз минималан утрошак материјала. Са становишта утрошка материјала, решеткасти носачи су повољнији од других, саћастих и пуних [1]. Овакве конструкције се на разне начине примењују код мостова, торњева, кровова, дизалица, али и у многим другим индустријама. Имплементација оптимизације приликом конструисања решеткастих носећих конструкција полако узима маха у привреди у последњих пар деценија. Највећа препрека примени ове технологије за добијање коначних решења је адекватно математичко представљање свих захтева које ове конструкције морају да задовоље како би се обезбедила њихова безбедна употреба. Још једна од препрека је до недавно била проблем способности рачунара да савлада тако сложен проблем.

1.1 Историја проблема оптимизације решеткастих носача

Решеткасте дрвене конструкције су коришћене за изградњу примитивних кућа још у бронзано доба, око 2500 година пре нове ере. Кровне решеткасте конструкције од дрвета су нашле велику примену у старој Грчкој. У средњовековној техници и архитектури оне су биле широко коришћене у различите сврхе. Прву забележену скицу могуће употребе решеткастих конструкција за изградњу мостова нацртао је Леонардо Да Винчи. Паладио је у својој публикацији „*I quattro libri dell'architettura*“ (Четири књиге о архитектури) из 1570. године дао планове дрвених решеткастих конструкција и први их увео у модерну мостоградњу [2]. Према [3], Галилео Галилеј је био први научник који се бавио истраживањем оптимизације структура [4]. Бернули, Лагранж и Навије су се такође бавили налажењем најбољих облика за структурне елементе који би задовољили тражене захтеве.

Од зачећа ове области па до XX века, када су дефинисане методе оптимизације и извршена њихова класификација, решавање оптимизационих проблема се сводило на аналитичко прорачунавање и искуство. Са применом рачунара другом половином XX века, научно- истраживачки развој почиње нагло да напредује. Компјутерски подржано конструисање, (енг. *Computer Aided Design* или *CAD*) и нумеричке методе прорачуна конструкција су омогућиле развој у свим областима инжењерства. Оптимизационе методе је сада било могуће применити на комплекснијим примерима и то са великим бројем итерација. Спајањем компјутерски подржаног конструисања и оптимизационих

метода, оптимизација решеткастих конструкција постаје нумерички процес којим је могуће добити решења знатно брже и лакше него пре.

Постоје бројна истраживања у области оптимизације решеткастих конструкција. Прва истраживања су почела у *XVII* веку, а значајни напредак у области је дошао са појавом рачунара у другој половини *XX* века. Овај вишевековни развој је довео до великог напретка у области и направио истраживачки простор који није било могуће истраживати пре појаве рачунара и напредних оптимизационих метода. Последњих година је главни фокус у оптимизацији решеткастих конструкција био примена нових оптимизационих метода на установљеним тест примерима. Стандардни тест примери су направљени тако да представљају типове проблема, пре него практичне проблеме, са идејом да ако је могуће решити такав тип оптимизационог проблема, биће могуће решити исти тип проблема на практичном примеру. Тест примери се деле на раванске (са 10, 15, 17, 18, 20, 22, 39, 47, ... штапова) и комплекснијих просторне проблеме (са 25, 45, 52, 72, 200, ... штапова). Сложеност проблема генерално расте са порастом броја штапова и типом оптимизације (аспеката конструкције) који се оптимизују као и бројем и типом ограничења која се примењују.

Оптимизацијом аспеката конструкције, долази се до решења са бољим карактеристикама, мањом масом, односно једноставнијих за израду. Како је смањење масе веома важно у свим областима технике, очекивана је његова важност и у области овде обрађених конструкција. У највећој мери, уштеда масе утиче и на смањење трошкова конструкције, утрошеног материјала и транспорта.

1.2 Преглед истраживања

Истраживања у области оптимизације решеткастих конструкција се, у одосу на тип оптимизације, деле на проблеме оптимизације попречних пресека, оптимизације комбинације топологије и попречних пресека (познате и непознате конфигурације), оптимизације комбинације облика и попречних пресека и секвенцијалне или симултане оптимизације свих аспеката конструкције. Структура прегледа истраживања је направљена према овој подели.

Најзаступљенији проблем у литератури у области решеткастих конструкција је оптимизација попречних пресека конструкције са циљем минимизације масе. Он се у литератури може наћи као проблем са континуалним и дискретним променљивим попречних пресека.

Аутори у [5] су употребом генетског алгоритма оптимизовали попречне пресеке примера решеткастог носача са 10 штапова у циљу смањења масе. Према њиховим резултатима, закључили су да постоје елементи конструкције који се могу изузети из будућих прорачуна, јер оптималне вредности попречних пресека тих штапова теже нули и имају мала оптерећења. У следећем за ову тезу битном раду [6] приказана је примена *алгоритма accelerated multi-gravitational search* на примерима оптимизације континуалних променљивих попречних пресека.

У [7] коришћена је нова варијанта „*Harmony Search*“ алгоритма користили за оптимизацију попречних пресека решеткастих носача на примерима са 10, 15, 25, 52, 72 и 200 штапова. Употребом дискретних променљивих попречних пресека, аутори су

успели да новом методом добију бољу конвергенцију и мање масе од радова са којима су поредили своје резултате. С друге стране рад [8] приказује резултате коришћења *TLBO* (*teaching-learning-based optimization*) оптимизационе методе на проблемима решеткастих конструкција и њену предност у односу на друге методе. Доказивање је вршено на стандардним тест примерима са 10, 25, 72 и 200 штапова без провере на извијање са дискретним променљивим попречних пресека. Такође се може видети да су у [9] коришћене континуалне променљиве за оптимизацију само попречних пресека хибридом две хеуристичке методе на 6 типичних примера решеткастих конструкција из литературе.

Даље, у раду [10] је коришћен генетски алгоритам за оптимизацију попречних пресека решеткастих конструкција, али уз употребу дискретне и континуалне променљиве. Како би смањили време претраге код ових проблема, аутори су представили метод смањења поља претраге „*restricted range approach*“ који је драстично смањило потребно време за добијање решења. У [11] представљена је представили могућност примене адаптивног генетског алгоритма на практичне проблеме оптимизације попречних пресека решеткастих конструкција.

Аристотелис (*Aristotelis*) и остали у раду [12] дају преглед и поређење резултата метахеуристичких алгоритама за оптимизацију попречних пресека решеткастих конструкција. На примерима са 10, 17, 18, 25 и 200 штапова извршене су оптимизације коришћењем метода стандардног генетског алгоритма „*Standard Genetic Algorithm*“ (*SGA*), хибридног генетског алгоритма „*Hybrid Genetic Algorithm*“, (*HE*), побољшаног роја честица „*Enhanced Particle Swarm Optimization*“ (*EPSO*), колоније пчела „*Artificial Bee Colony*“ (*ABC*), диференцијалне еволуције „*Differential Evolution*“ (*DE*) и симулације жарења „*Simulated Annealing*“ (*SA*). Као што се може видети, многи радови се баве проблемима само оптимизације попречних пресека решеткастих конструкција [13-24]. Разлике у масама оптималних модела су добијени различитим хеуристичким методама или њиховом хибридизацијом, док се резултати оптимизације стандардних модела веома мало разликују, што је заправо и било интересантно аутору овог рада.

Поред оптимизације попречних пресека истраживачи су покушавали да постигну оптималне конфигурације топологије решеткастих конструкција. Алтернативни начини повезивања елемената доводе до другачије слике сила у конструкцији, самим тим до прерасподеле напона и потребе за новим димензионисањем. Један од првих пронађених резултата из области тополошке оптимизације је представљен 1968. године у [25] који се данас посматра као феномен услед ограничења локалног напона и извијања. Наиме, аутори овог рада су приказали да се оптимизацијом редувантне решетке (где су направљене све могуће везе између свих чворова елементима) са више напонских ограничења (на затезање и притисак) и више случајева оптерећења, прекомерна маса се може умањити ако се дозволи брисање неких делова (елемената) решетке. Овакво оптимално решење није било могуће постићи до тада традиционалним методама оптимизације.

Како би се побољшали резултати оптимизације решеткастих конструкција истраживања су проширена на секвенцијално оптимизовање два аспекта конструкције,

најчешће топологије и попречних пресека, а затим уз развој хардвера и на симултану оптимизацију два параметра.

Радом [26] приказан је приступ генетском програмирању за симултану оптимизацију попречних пресека и топологије решеткастих носача. Аутори су поред резултата оптималних попречних пресека и изгледа топологије дали и напонска стања у свим штаповима резултата као и померања чворова услед деформације. Међутим, Мадах (*Madah*) и Амир (*Amir*) су у [27] додавали несавршености моделу како би проверили глобалне нестабилности услед извијања. Ово је рађено са циљем елиминисања провере на извијање према Ојлеру тиме што би се користиле геометријске нелинеарне анализе. Развој ове анализе треба да доведе до решења у мањем броју итерација од оптимизације која користи динамичка ограничења за извијање. Ипак, недостатак овог приступа је креирање несавршености у моделу коју је потребно унапред дефинисати у односу на конкретан пример, као и то да овај приступ проверава само глобално извијање конструкције, али не и појединачне елементе. Аутори у раду [28] су вршили оптимизацију топологије и попречних пресека користећи свој развијени алгоритам и посматрајући извијање као статично ограничење и у овом случају је то рађено како би се вршила динамичка провера сопствених фреквенција модела у свакој итерацији. Мора се напоменути да је у претходним годинама је у области оптимизације комбинације топологије и попречних пресека објављено још пуно резултата [29-32] који се заснивају на побољшању метода и могућности имплементације статичких и динамичких ограничења у математичке моделе. Примена провере на извијање код решавања оптимизационих проблема на овај начин је урађена и у радовима [33-35], где је коришћено ограничење на извијање према Ојлеровом обрасцу.

Међутим, у случају да иницијална топологија није позната, проблеми оптимизације се решавају и постављањем чворова у матрице унутар предвиђеног простора за конструкцију. Оваква решења се налазе најчешће само у литератури пошто је практично извођење проблематично за сложене конструкције. Тополошка оптимизација са симултаном оптимизацијом попречних пресека рађена у [36] даје резултате мање масе коришћењем система повезивања могућих места чворова у штапове. Сви проблеми су постављени у структури решетке од 21x9 чворова, од којих је сваки повезан са својим најближим чворовима (668 потенцијалних штапова и 189 потенцијалних чворова). Закључак је да различити случајеви оптерећења дају веома различите резултате. Овакав приступ коришћења мрежа чворова као основног модела за оптимизацију топологије и попречних пресека се јавља и у радовима [37-45].

Оптимизација која узима у обзир искључиво облик се тешко налази у литератури, јер се њом без промене попречних пресека тешко добија значајно смањење масе. Постоје радови као што је [46] који се баве креирањем алгоритма за конструисање ових структура без циља смањења масе. Кавех (*Kaveh*) и Кајатазад (*Khayatazad*) у [47] су симултано оптимизовали аспекте попречних пресека и облика решеткастих носача користећи нову оптимизациону методу (*ray optimization*), те је ту коришћена провера на извијање у односу на виткост штапа према Америчком стандарду (*American Institute of Steel Construction (AISC) - Manual of Steel Construction Allowable Stress Design*) [48]. Резултати добијени за стандардне тест примере са 37, 72, 120 и 200 штапова упоредиви су са резултатима добијеним стандардним оптимизационим методама из литературе. Може се наћи да је проблем оптимизације попречних пресека и облика је у раду [49]

решаван коришћењем различитих варијација методе роја честица, наиме: „*particle swarm optimization*“ (*PSO*), „*Cellular particle swarm optimization*“ (*CPSO*) и „*Sequential cellular particle swarm optimization*“ (*SCPSO*). Аутори рада [50] су користили интегрисану методу роја честица (*iPSO*) за симултану оптимизацију попречних пресека и облика на стандардним примерима са 15, 18, 25, 39 и 47 штапова и та метода даје приметна побољшања у одосу на друге методе коришћене за ове примере. У [51] аутори су користили способности *PSO* алгоритма да испитују оптималне вредности оптимизације попречних пресека и облика. У литератури се често јавља проблем симултане оптимизације облика и попречних пресека [52-56] ови радови немају експлицитна ограничења дужина елемената

Како би се структура подвргла оптимизацији сва три аспекта, било је неопходно развити математичке моделе и методе, тако да се омогући извођење на рачунарима тог времена. Међутим, хардверска ограничења самим почетком XXI века постављала су истраживачима додатне проблеме јер је било потребно наћи начин да се у разумном временском року и са расположивом количином меморије дође до задовољавајућег решења. Први покушаји у овом смислу су се заснивали на секвентном приступу а тек је са повећањем процесорске моћи и меморијских капацитета је било могуће извести симултану оптимизацију сва три аспекта једноставнијих конструкција уз упрошћене математичке формулације модела.

Један од најранијих примера симултане оптимизације попречних пресека, топологије и облика приказан је у раду [57]. Овде су аутори су користили генетски алгоритам за проналажење оптимума и нашли више решења истог проблема мошта различитих топологија, а то је било могуће коришћењем комбинованог енкодирања (*mixed encoding representation*) који је регулисао дужину хромозома у алгоритму како би се избегли проблеми у мутацији и укрштању.

На пример, Рахами (*Rahami*) и остали су у свом раду [58] извели симултану оптимизацију свих аспеката конструкције решеткастих носача на примерима са 10, 15, 18 и 25 штапова користећи генетски алгоритам. Како би се смањила комплексност проблема, аутори су користили методу сила за прорачун, чиме су смањили улазне податке и време прорачуна. Међутим, овде се само код примера са 18 штапова користи провера притиснутих штапова на извијање.

Током овог истраживања примећено је да [59] показује могућност развијања софтвера за решавање проблема оптимизације решеткастих конструкција у *MATLAB* софтверу имплементацијом методе коначних елемената и генетског алгоритма. Развој њиховог софтвера је заснован на унапређењу рада генетског алгоритма за потребе овог типа оптимизације и доказан је на примерима оптимизације попречних пресека уз коментар да је могуће развити софтвер за симултану оптимизацију свих аспеката конструкције. Оптимизација је доказана на примеру са 10 штапова (у раду дат као пример са 11) који даје конкурентне резултате, али не и боље од осталих који се могу наћи у литератури. Поред овог примера, примена је показана и на оригиналним примерима које није могуће поредити са литературом, а ограничења су била само на максимални напон и померање чворова услед деформације. Код аутора [60] дато је поређење резултата симултане оптимизације свих аспеката конструкције за примере са 15, 25, 39, 45 и 47 штапова, при чему је коришћена метода потпуно оптерећеног модела

заснованог на еволуционој стратегији „Fully Stressed Design based on Evolution Strategy“ (FSD-ES).

У [61] направљено је поређење појединачних оптимизација аспеката попречних пресека, топологије и облика, секвентних оптимизацијама комбинација: прво топологије па попречних пресека, затим прво попречних пресека па топологије и онда облика; прво топологије па облика па попречних пресека и на крају симултану оптимизацију сва три. Резултати показују далеко боље резултате симултане оптимизације од свих осталих, али са најдужим временом до постизања резултата. У већини приказаних случајева оптимизација само попречних пресека је дала приближну масу методама које су користиле секвентни приступ. Дегертекин (*Degertekin*) и остали су у [62] вршили оптимизацију решеткастих носећих конструкција користећи Џаја (*Jaya*) алгоритам. Овде је вршена оптимизација попречних пресека примера са 200, 942 и 1938 штапова, а симултана оптимизација попречних пресека и облика је рађена за примере са 25, 45 и 47 штапова са континуалним променљивим. Упрошћена оптимизација топологије са заокруживањем континуалних променљивих попречних пресека у резултатима на прве веће из дискретног сета је примењена на примере са 25 и 47 штапова. У раду аутори тврде да је симултана оптимизација сва три аспекта конструкције тешко изводљива и изузетно захтевна, али рад приказује велике предности у коришћењу нове методе у смислу брзине конвергенције и оптимума. Још један од добрих резултата у имплементацији симултане оптимизације свих аспеката конструкције решетке је у [63], где су аутори елиминисали неадекватна тополошка решења увођењем провере матрице крутости.

Практични примери структурне оптимизације решеткастих конструкција се ређе јављају у литератури. Аутори у [64] су практично применили симултану оптимизацију свих аспеката конструкције на примеру једног типа решеткастог носача далековода са циљем минимизације масе. Како би упростили проблем оптимизација је рађена по сегментима конструкције, подножја, главног тела носача и бочних носача. Кровне решеткасте конструкције се такође могу наћи у литератури у радовима [65-67], где је тражена минимална маса конструкције. За комплексније примере са великим бројем штапова су у радовима [52, 68-70] предложена ограничења која су примењена на проблемима од 10 до више стотина елемената како би се доказала њихова валидност у употреби.

1.3 Публиковани резултати

Делови резултата овог доктората, као и резултати добијени у току развоја оригиналног софтвера су публиковани у претходним годинама како би се извршила верификација постигнутих резултата од стране научне заједнице. Први резултати добијени коришћењем оригиналног софтвера у раним фазама развоја су публиковани у [71], чиме је верификован рад модула за оптимизацију и омогућен даљи развој софтвера како би се вршила оптимизација на примерима решеткастих носача. У раду [72] су приказани резултати оптимизације попречних пресека са континуалним променљивим за примере са 10, 17 и 25 штапова. Резултати су били упоредиви са онима из литературе за исте примере чиме је потврђена способност развијеног модула за оптимизацију

попречних пресека да постигне конкуренте резултате. Први резултати оптимизације попречних пресека, топологије и облика као и све њихове комбинације са употребом уведеног ограничења притиснутих штапова против појаве извијања, дати су у [73]. Ту су решења поређена са резултатима из литературе који користе континуалне попречне пресека на стандардном примеру са 10 штапова. Поређења резултата са и без употребе провере на извијање је приказана у раду [74]. Резултати оптимизације попречних пресека без провере на извијање су поређени са резултатима добијеним у софтверу и извршена је провера модела из литературе на извијање, а тиме је приказано да сва решења добијена без ограничења притиснутих штапова на извијање, имају штапове који не задовољавају ово ограничење. Оваква провера је урађена и за оптимизацију свих аспеката конструкције на примерима са 17 и 25 штапова у [75] и [76], датим редоследом. Разлика између резултата добијених са коришћењем континуалних и дискретних променљивих попречних пресека су публиковани у [77] и [78] са употребом ограничења притиснутих штапова против појаве извијања.

Даљи правац развоја у овој области мора додатно да приближи оптималне моделе употреби у реалним условима. То ће обухватити употребу прорачуна према различитим стандардима. Поред тога, имплементација провере динамичких сила услед ветра и земљотреса, као и провере сопствених фреквенција је следећи је корак у развоју оптимизације решеткастих конструкција. Тренутно, ове провере се врше само на резултујућим моделима због потребе обраде енормне количине података.

1.4 Предмет рада

Највећи допринос у области оптимизације решеткастих конструкција долази са развојем хеуристичких оптимизационих метода. Овим методама се итеративно покушава побољшање предложеног решења у складу са мером квалитета. Хеуристичке методе могу де претражују велики простор могућих решења са малом количином информација у циљу налажења оптималног или решења блиског оптимуму уз разумно (ефикасно) коришћење компјутерских ресурса. У последње три деценије са порастом процесорске моћи и повећањем доступности рачунара, дошло је до велике експанзије у области оптимизационих метода и њихове примене.

Оптимизација решеткастих конструкција је веома ксложена и још увек није у потпуности истражена област, али већ налази примену у решавању реалних проблема. Како би се оптимизација решеткастих конструкција користила за добијање коначних конструкција, спремних за извођење, потребно је још усавршавања у овој области. Поред великог развоја у области оптимизације решеткастих носећих конструкција, практична ограничења и симултана оптимизација свих аспеката конструкције (комплетна оптимизација димензија, топологије и облика конструкције) још нису адекватно истражена. Велики проблем и даље представља обрада огромне количине улазних података, што је разлог зашто се комплетна симултана оптимизација свих аспеката решеткасте конструкције ретко јавља у литератури и то углавном на најједноставнијим примерима.

1.5 Мотивација и циљеви рада

Ова дисертација има два основна циља. Први је да идентификује проблеме структурне оптимизације решеткастих конструкција. Други је да предложи, развије и докаже могућност интеграције практичних ограничења у оптимизацију свих аспеката решеткасте конструкције. Мотивација за постављање ових циљева је да се изнађу што реалнија решења оптимизацијом. Уштеде масе које је могуће добити коришћењем оптимизације доводе до уштеда и других фактора конструкције. Мања маса доприноси смањеним трошковима не само материјала, већ и транспорта. Лакши носачи који садрже мањи број лакших елемената такође доприносе смањењу времена потребног за извођење једне такве конструкције. Ако се циљеви успешно изведу, конструкције добијене оптимизацијом са математичким моделима који су прилагођени радним условима и прописима, као и здравој инжењерској логици, неће захтевати додатне провере и измене како би задовољиле услове рада носача. Овај успех има и велики научни значај тиме што отвара простор за развој методологије, ограничења и метода коришћених ограничења које би давале најповољније резултате.

1.6 Хипотезе

У складу са горенаведеним циљевима, постављене су следеће хипотезе, како би се кроз њихову разраду и евентуалном верификацију постигао реалан допринос у области оптимизације решеткастих конструкција.

Прва хипотеза

Могуће је минимизовати масу, цену и број елемената без нарушавања носивости решеткастог носача. Такође је могуће и аутоматизовати процес њиховог конструисања, чиме се убрзава време добијања решења и смањује или елиминише грешка. Овако је омогућено и праћење побољшања оптималног решења у односу на полазно аналитичко решење како би се обезбедило интерактивно доношење одлука.

Друга хипотеза

Структурна оптимизација појединачних аспеката конструкције (попречних пресека, топологије и облика) даје боље резултате од аналитичких решења. Симултаном оптимизацијом два од три аспекта се постижу мање масе него при оптимизацији само једног од два коришћена аспекта. Оваква оптимизација која оптимизује сва три аспекта конструкције симултано (оптимизација попречних пресека, топологије и облика) даје најмању масу у поређењу са оптимизацијом осталих аспеката и њихових комбинација.

Трећа хипотеза

Примена практичних ограничења, као што су минималне дужине елемената и динамичких ограничења притиснутих штапова против појаве извијања, дају другачије конфигурације оптималних решења у односу на моделе који немају ова ограничења и веће су масе. Оптимални модели, као што су неки из

литературе, не задовољавају услове извијања и самим тим нису применљиви у пракси. Употреба дискретних променљивих за оптимизацију попречних пресека даје рална решења која су изводљива у пракси.

Четврта хипотеза

Структурна оптимизација решеткастих носача која узима у обзир оптимизацију попречних пресека, најчешће даје решења са непрактично великим бројем различитих профила попречних пресека штапова. Додавањем ограничења броја могућих различитих профила попречних пресека, могуће је добити практично применљиве моделе са прихватљивим бројем различитих профила. Оптимална решења ограничена на три или четири различита попречна пресека, за случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречних пресека, имају већу масу од оптималних решења која нису ограничена бројем различитих елемената. Напомиње се важност ставке да ова разлика у маси треба да буде прихватљива због изводљивости, рационална и економски оправдана ако је мање масе од аналиитичког решења.

Пета хипотеза

Укупна спољашња површина оптималних решеткастих конструкција нема директну корелацију са смањењем масе. То једино не важи за оптимизацију попречних пресека, у случају када се користе искључиво пуни попречни пресеци.

1.7 Структура рада

Ова теза је структурирана тако да се састоји од шест поглавља, укључујући и ово, уводно поглавље.

Дакле, у првом поглављу дат је основни увод у област решеткастих конструкција, предмет рада, кратак осврт на развој области решеткастих конструкција и њихове оптимизације, представљени су циљеви, постављене хипотезе и приказана структура дисертације као и преглед значајнијих истраживања из области оптимизације решеткастих конструкција, подељен према аспектима конструкције који се оптимизују, а публикована су претходних година, чиме се потврђује њена релевантност. Дат је и преглед публикованих резултата који су настали у току израде ове тезе, као и предлог даљих истраживања, што ће представљати следећи корак у научно-истраживачком раду аутора.

У другом поглављу је разматран конвенционални приступ конструисања решеткастих носача. Објашњене су методе аналитичког прорачуна као и нумеричке методе које се користе у прарачуну. Извијање притиснутих штапова је издвојено као важан елемент прорачуна који се не налази често у литератури о оптимизацији решеткастих конструкција, а релевантан је у димензионисању штапова носача. На

основу овог конвенционалног приступа је постављен оптимизациони проблем минимизације масе решеткастих носећих конструкција.

У трећем поглављу су дефинисане основе рада коришћене оптимизационе методе. Приказан је проблем структурне оптимизације решеткастих конструкција са циљем минимизације масе. Размотрена је оптимизација конкретних аспеката конструкције (попречних пресека, топологије и облика). У овом поглављу су дефинисана и новоуведена практична оптимизациона ограничења. То су ограничења минималне дозвољене дужине штапа, ограничења притиснутих елемената на извијање и ограничења броја различитих попречних пресека које је могуће користити за дату конструкцију.

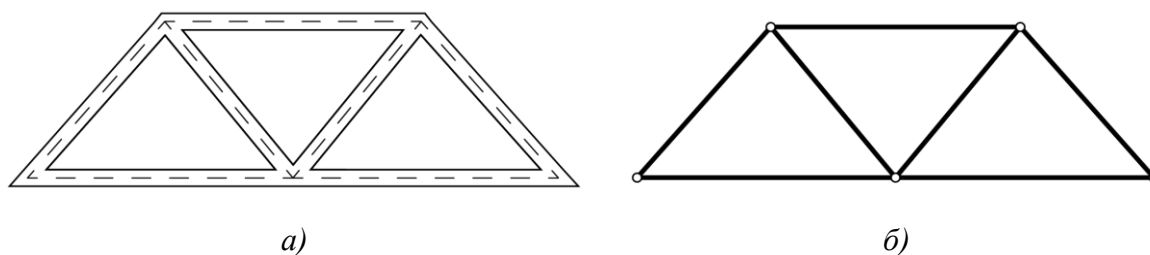
Како би се извршила имплементација структурне оптимизације према задатим хипотезама, у четвртном поглављу је представљен развијени софтвер за оптимизацију решеткастих конструкција. Софтвер се ослања на употребу постојећих метода за структурну анализу и оптимизационе методе за оригинални сложени математички модел који узима у обзир реална ограничења. Дефинисан је и начин параметризације модела као и примена визуелног програмирања. Детаљно је објашњен начин на који софтвер врши оптимизацију према конкретним аспектима конструкције појединачно, као и како се врши њихова симултана оптимизација. У софтвер су уведена и стандардна ограничења минималног померања чворова услед деформације и максимални дозвољени напон. Имплементација новоуведених ограничења је такође дата уз кратке инструкције за употребу софтвера.

У петом поглављу развијени софтвер је примењен на четири стандардна примера из литературе који се најчешће користе (примери са 10, 17, 25 и 47 штапова). Поред примера из литературе софтвер са новим ограничењима је примењен и на једном практичном примеру кровног решеткастог носача у четири могућа тополошка случаја. Овај пример се разликује од примера из литературе тиме што користи шупље попречне пресеке. За примере чија решења постоје у литератури, дата је верификација рада софтвера поређењем резултата. Такође је за сваки пример дата и детаљна анализа решења на крају решења сваког од примера.

У шестом поглављу приказан је преглед постигнутих резултата. Поређени су резултати са постављеним циљевима и установљена је потреба за даљим истраживањем у области. На основу постигнутих резултата изведена је верификација хипотеза којима је могуће дефинисати допринос постигнут овим истраживањем. На самом крају извучени су битни закључци и дат је предлог за даљи развој у области оптимизације решеткастих конструкција.

2. Конвенционални приступ конструисању решеткастих конструкција

Решеткасти носачи, или решеткасте носеће конструкције, су структуре које се састоје од повезаних штапова, најчешће везаних у троугаоне облике. Теоријски, штапови су повезани зглобно без утицаја трења, док су у реалном извођењу круто везани (слика 2.1), мада постоје и случајеви када су везани зглобно. Решеткасти носачи имају велику носивост у односу на масу. Један од разлога за то јесте да, када је носач оптерећен само у местима чворова, штапови су изложени само притискајућим или затежућим нормалним силама. Други разлог је што је троугао најједноставнија, стабилна, структура у две димензије [79]. Елементи носача такође захтевају веома малу количину обраде. Једина обрада је на местима спојева елемената.



Слика 2.1 – Решеткасти носач а) начин извођења и б) теоријски модел.

Како би се извршила провера носивости ових конструкција, мора се извршити структурна анализа конструкције. Основни задатак структурне анализе конструкције јесте одређивање напонског стања у конструкцији услед оптерећења која делују на њу. Методе структурне анализе конструкције деле се на аналитичке, нумеричке и експерименталне. Аналитичке методе се примењују код елементарних проблема где је могуће наћи решења у затвореном облику, док се реалне структуре у пракси прорачунавају нумеричким методама. Експерименталне методе се врше на изведеним конструкцијама и често се користе као верификација нумеричких резултата када је то неопходно.

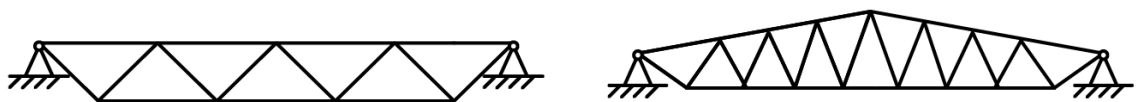
2.1 Конструисање решеткастих конструкција

Приликом дефинисања геометрије иницијалних конфигурација решеткастих носача потребно је тежити најекономичнијој конструкцији у погледу употребе материјала, тако да конструкција може да функционише под захтеваним оптерећењима [80]. Како би се постигла конструкција која одговара траженим захтевима, потребно је узети у обзир коришћене попречне пресеке коришћених профила штапова, дужине елемената и положај веза.

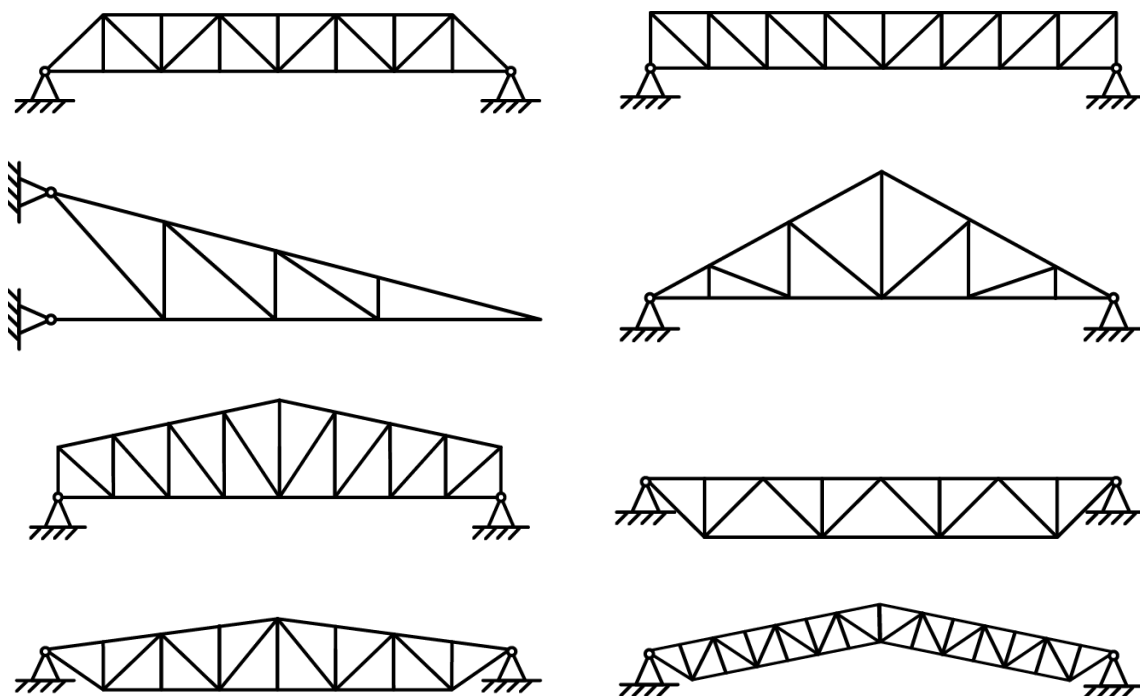
Изузетно је важно адекватно постављање оптерећења и ослонаца у одосу на реално стање приликом прорачуна. Постављањем спољашњих оптерећења на чворовима се елиминише појава локалног савијања појасних елемената. Грешке у овом кораку могу резултовати у катастрофалним исходима, тако да су детаљно познавање проблема и ригорозна провера неопходни за димензионисање овог типа конструкције.

Неопходно је тежити што мањој дужини штапова како би се повећала отпорност притиснутих елемената на извијање. Такође треба избегавати промену правца појасних елемената како би се избегли релативно скупи радионички наставци. Појасним елементима се називају елементи који са горње и доње стране затварају облик конструкције, док се елементи (штапови) којима су они спојени називају елементима испуне.

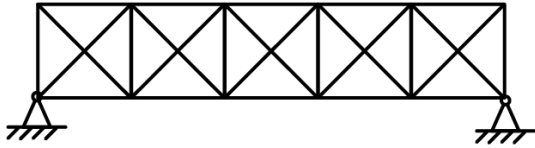
Конструисање решеткастих носача се у пракси најчешће заснива на искуственом одабиру неке од постојећих, познатих конфигурација које се препоручују за одређене распоне, типове оптерећења и намене. Сlike 2.2 – 2.6 [1] илуструју неке од примера типичних конфигурација решеткастих конструкција. Подела је извршена према начину испуне.



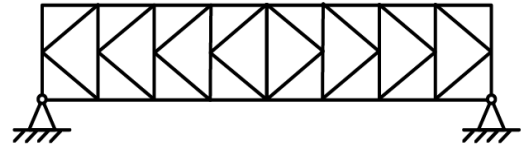
Слика 2.2 – Конфигурације са простом троугаоном испуном.



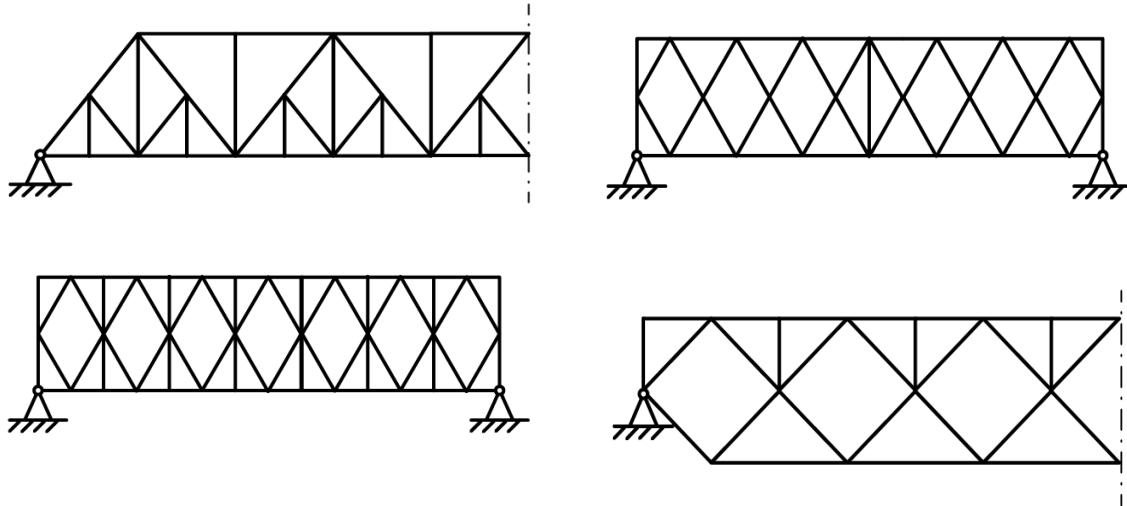
Слика 2.3 – Конфигурације са испуном од дијагонала и вертикала.



Слика 2.4 – Конфигурације са укрштеним дијагоналама.



Слика 2.5 – Конфигурације са K испуном.



Слика 2.6 – Конфигурације са комбинованим испунама.

У свим претходним конфигурацијама штапови и чворови су постављени у одосу на нека геометријска правила и углавном су симетрични. Тако конструисани носачи често имају неискоришћене, или минимално искоришћене елементе који повећавају масу и трошкове израде, а чија елиминација захтева поновну проверу сила у штаповима и евентуално поновно димензионисање.

Конвенционални процес конструисања решеткастих носача је итеративан процес. У првом кораку је важно одабрати концепцију, тј. топологију, у односу на димензије простора које су предвиђене пројектом за одређену решеткасту конструкцију. Овај корак се највише заснива на искуству конструктора, препорукама из стандарда, жељама клијента или архитекте, или на разним прописима. Димензионисање попречних пресека елемената конструкције се ради на крају и у односу на резултате анализа се понављају са сваком изменом топологије или облика конструкције. Приликом димензионисања је веома важно имати у виду практичне проблеме као што су спајање елемената. Поступак добијања решеткастих носача минималне масе конструисани на овај начин се заснива на великом броју покушаја конструктора да би се добила рационална конструкција. Овакав приступ захтева пуно времена, трошкове за пројектанте са великим искуством и не гарантује успех. На слици 2.7 је приказан алгоритам конвенционалног поступка конструисања решеткастих носача.



Слика 2.7 – Конвенционални поступак конструисања решеткастих носача.

Прелазак са конвенционалних и традиционалних приступа конструисања решеткастих носача на савремене поступке рационализације материјала захтева екстензивно познавање процеса конструисања решеткастих носача како би он био унапређен. Нови приступи подразумевају примену актуелних и развој нових софтвера за пројектовање металних конструкција, примену поступка оптимизације и рационализације процеса конструисања. Коришћење савремених поступака омогућава налажење решења носећих конструкција оптималних карактеристика. Развој оваквих конструкција је заснован на правилној расподели напона, дефинисању адекватне структуре уз контролу стабилности елемената и испуњење реалних ограничења у којима конструкција ради. Тиме се постижу конструкције мањих маса и површина елемената, што директно доводи до уштеда. Циљ развоја ових технологија огледа се у добијању јефтинијих конструкција истих техничких карактеристика. Овакав приступ убрзава процес конструисања и смањује утицај количине искуства конструктора на квалитет коначног решења. Нижи трошкови овако добијених конструкција се кроз смањење масе преносе на уштеде у трошковима транспорта, површинске заштите и радне снаге потребне за израду.

Искусвенно, трошкови материјала код коришћења решеткастих кровних конструкција на халама износе преко 50%, а трошкови површинске заштите са применом антикорозионих и противпожарних средстава износе преко 20% укупних трошкова. Решеткасти носачи у највећем броју намена захтевају неки вид антикорозионе, ватроотпорне или неке друге заштите. Обим коришћених попречних пресека и дужине штапова у овом случају знатно утичу на укупну спољашњу површину решеткасте конструкције, а самим тим и на количину неопходне заштите.

2.2 Аналитичке методе прорачуна

Методе прорачуна помоћу којих се може одредити сигурност и функционалност решеткасте конструкције се заснива на провери сила, тј. напона у штаповима и провера тих вредности у односу на критичне. Због постојања прекобројних веза код практично свих, осим елементарних решеткастих носача, није их могуће решити помоћу статичких услова равнотеже. Статички неодређени системи у односу на број прекобројних веза дефинишу степен неодређености.

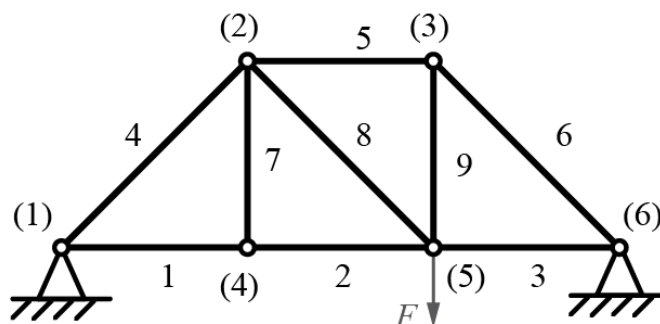
За решавање статички неодређених система морају се формулисати, осим статичких једначина, још и допунске једначине, исти онолики број колико у систему има статички непознатих величина, односно прекобројних веза. Овај поступак захтева заморно решавање које може довести и до знатних грешака [81].

Постоје два основна начина решавања статички неодређених проблема и то: методом сила и методом пресека. Остале аналитичке методе које постоје за решавање овог проблема, као што је метода чворних тачака, се заснивају на ове две методе. Ове методе се такође зову и мешовите (комбиноване) методе јер се могу користити истовремено код решавања статички неодређених система.

Метода сила се заснива на уравнотежавању система сила у чворовима. Како све силе у овом случају пролазе кроз чвор, не постоји потреба за једначином суме момената, тако да се користе само једначине за суме сила пројектоване на осе у случају равanske решетке са слике 2.8 то су:

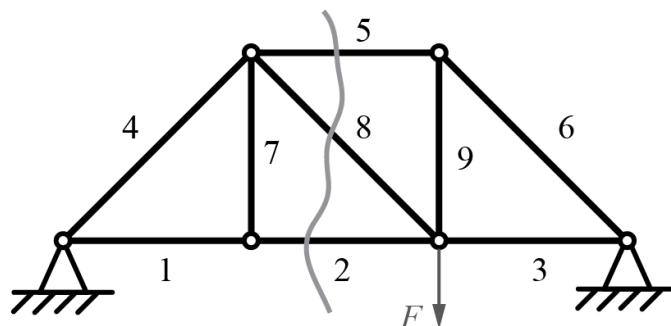
$$\sum F_x = 0 \text{ и}$$
$$\sum F_y = 0$$

Ове једначине се постављају за сваки од чворова. У случају примера са слике то је по две једначине за свих 6 чворова (укупно 12 једначина).



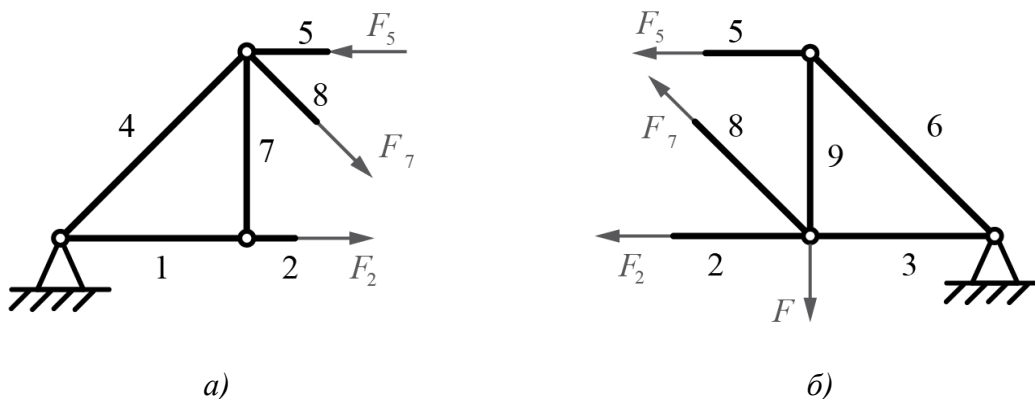
Слика 2.8 – Пример прорачуна методом сила.

Метода пресека, као што назив говори, се заснива на посматрању „пресечени“ сегменти конструкције у којима се прорачунава сила у штаповима који су подељени „пресецањем“ (слика 2.9). Код овог приступа се прорачунавају обе стране независно и посматрају се као круто тело.



Слика 2.9 – Пример прорачуна методом пресека.

На примеру са слике се прорачун врши за леву и десну страну како би се добиле силе штаповима 5, 2 и 8, које уравнотежују силе са леве и десне стране. После одређивања места пресека, следећи корак је дефинисање сила које делују на конструкцију у делу конструкције који се посматра (слика 2.10).



Слика 2.10 – Силе у штаповима са а) леве и б) десне стране.

У овом случају постављањем три једначине равнотеже за обе исечене стране конструкције:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ \sum F_y &= 0 \text{ и} \\ \sum M_z &= 0, \end{aligned}$$

могуће је добити максималне вредности сила у три исечена штапа. За решавање примера са слике 2.9 методом пресека потребно је поставити укупно 6 једначина.

Поред обичног прорачуна на чврстоћу, како би се добила потпуна представа о сигурности конструкције, потребно је извршити још прорачуна. Са додатним повећањем комплексности, дугим временом потребним за постављање и решавање оваквих проблема и великом могућношћу грешке приликом аналитичког прорачуна јавља се потреба за коришћењем алтернативних, једноставнијих за употребу и поузданијих

метода прорачуна решеткастих носача. Најчешћи начин за прорачун, данас, представљају нумеричке методе.

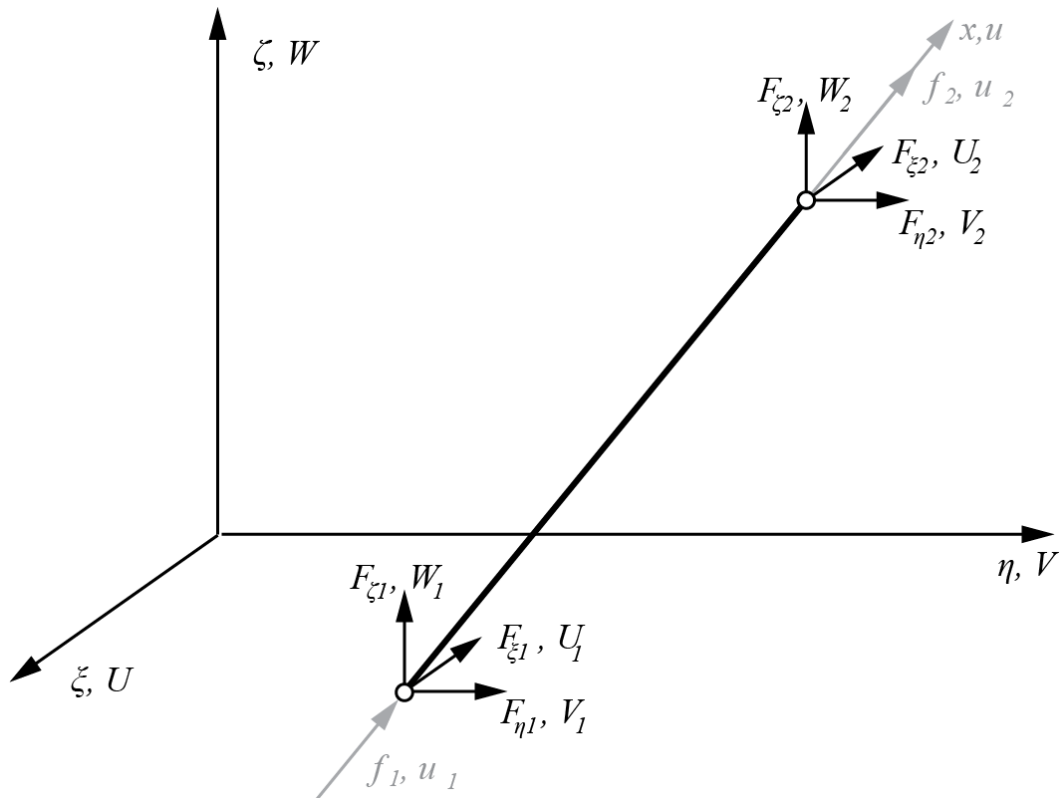
2.3 Нумеричке методе прорачуна

Данашњи проблеми прорачуна решеткастих конструкција се заснивају на употреби рачунара. Силе и напони у штаповима се у софтверима најчешће прорачунавају коришћењем нумеричких метода. Нумеричке методе се деле на континуалне и дискретне. Континуалне методе које користе системе диференцијалних једначина су методе коначних разлика и методе нумеричке интеграције. Дискретне методе подразумевају методу померања, методу сила и методу коначних елемената, која је најзаступљенија у области решеткастих конструкција.

Метода коначних елемената, или краће МКЕ (енг. *Finite Element Method – FEM*), се заснива на дискретизацији континуума конструкције једноставним деловима са коначним димензијама. Анализа методом коначних елемената је нумеричка метода која захтева коришћење адекватних типова елемената како би дискретизација конструкције што реалније описала понашање при спољашњим утицајима [82]. Модели конструкција се апроксимирају моделима који су састављени од коначних елемената, тако да представљају структуру која се прорачунава. Основна подела типова коначних елемената се врши у односу на простор који користе. Тако постоје једнодимензиони, $1D$, дводимензиони, $2D$ и тродимензиони коначни елементи, $3D$. Једнодимензиони елементи се користе за штапове, греде, ужади, затеге, граничне елементе и цевне елементе. Дводимензиони коначни елементи служе за дефинисање напона и деформација раванског континуума и самим тим се најчешће користе за плоче, љуске и мембране. Тродимензиони елементи се користе за сложене запреминске форме и дискретизују се запреминским елементима различитих облика. За анализу решеткастих носача је могуће користити било који тип елемената. Комплексност прорачуна се знатно повећава са повећањем броја елемената и утиче на време и квалитет добијених резултата.

Проблеми нумеричког одређивања напона код решеткастих конструкција се свode на проблеме $1D$ елемената како би било могуће брзо добијање задовољавајућих резултата са најмањим бројем коришћених елемената. Код прорачуна веза се најчешће користе $2D$ или $3D$ елементи како би се добила што реалнија слика напонског стања у конкретном посматраном сегменту конструкције.

Елементи решетке су једнодимензиони у својим координатним системима и могу да преносе само аксијално напрезање услед зглобних веза између елемената. Ово такође значи да је чворовима решеткастог носача дозвољено да имају само степене слободе translације. Тродимензионални елемент решетке има два локална степена слободе на сваком од крајева. На слици 2.11 је илустрован елемент тродимензионалне решетке са локалним и глобалним координатним системима, степенима слободе и дозвољеним напрезањем. Црним словима су представљене глобалне величине, док су сивим словима приказане локалне.



Слика 2.11 – Елемент просторне решеткасте конструкције са глобалним и локалним координатним системима.

Елементи решетке имају само једну локалну координату по оси x , која потиче из једног од чворова и простира се дужином елемента. Једино силе (f_1 и f_2), и деформација (померање) услед оптерећења у локалним системима, (u_1 и u_2), леже аксијално у оси са елементом и елемент има два степена слободе. Глобалне координате система (ξ , η и ζ) се користе за структурну анализу и он разлаже локалне објекте на три еквивалентне глобалне компоненте. Са слике се види да тродимензионални елемент штапа решетке има шест глобалних степени слободе, тј. по један за сваку од глобалних координата на крајевима елемента.

2.4 Извијање притиснутих штапова

Код прорачуна решеткастих конструкција се користи апроксимативни модел где се везе елемената третирају као зглобне. Због лакшег прорачуна подразумева се да су сви штапови оптерећени искључиво центричним аксијалним напрезањем. Облик попречног пресека не утиче у овом случају на масу јер су све тачке попречног пресека подједнако напрегнуте. Претходну тврдњу мења увођење провере на извијање, јер код критичног напона на извијање фигурише и аксијални момент инерције. Коришћењем шупљих попречних пресека са што већим спољашњим димензијама и што већом унутрашњом шупљином, постиже се профил чија је маса удаљена од централних оса. Овакви профили су погоднији, јер за исту површину имају исту масу, али већи критични напон на извијање. Шупљи профили квадратног и кружног попречног пресека због уједначености геометријских карактеристика на свим осама имају већу носивост на извијање у односу на друге профиле са отвореним попречним пресеком. Главни

полупречници инерције су знатно већи код шупљих кружних и квадратних попречних пресека него код отворених, јер за исте граничне услове имају мању виткост елемента и масу. Сматра се да око 50% од укупне масе материјала утршене на конструкцију чине појасни елементи оптерећени на притисак, око 30% чине појасни елементи који су оптерећени на затезање и око 20% чине елементи испуне [83, 84].

Елементи решетке су затегнути и притиснути штапови. Код аксијално затегнутих штапова се врши само провера напона, тј. димензионишу се у односу на напон. Код аксијално притиснутих штапова је потребно проверити и проблем еластичне стабилности [85]. Димензионисање у односу на еластичну стабилност подразумева налажење границе до које постоји стабилна равнотежа између спољних и унутрашњих сила. Проблем еластичне стабилности код притиснутих штапова се назива проблемом извијања притиснутих штапова [86].

Према Хуковом (*Hooke*) закону носивост притиснутог штапа од хомогеног материјала се одређује тако што се израчунава под којом силом може да постоји равнотежа спољашњих и унутрашњих сила, не само за праволинијски положај већ и за њему блиски суседни положај осе савијеног штапа. За случај да је штап зглобно везан на крајевима који у z и y равни имају најмању крутост на извијање, крива линија са слика 2.3 а) представља положај осе благо извијеног штапа. Штап је оптерећен аксијалном силом F . У било ком пресеку извијеног штапа кривина ће бити:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{F \cdot y}{E \cdot I} \quad (2.1)$$

Под претпоставком да је највеће одступање од осе штапа мала величина у односу на дужину штапа добија се упрошћен израз за кривину:

$$\frac{1}{\rho} = y'' \quad \text{и} \quad k^2 = \frac{F}{E \cdot I_{\min}} \quad (2.2)$$

на основу претходних израза добија се хомогена и линеарна диференцијална једначина другог реда:

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (2.3)$$

чије је опште решење:

$$y(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz \quad (2.4)$$

Гранични услови на крајевима штапова су познати те је

$$y(0) = 0$$

из чега се добија да је

$$C_1 = 0,$$

а када је

$$z = l,$$

тј. када је

$$y(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin kl = 0 \Rightarrow \sin kl = 0 \Rightarrow k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

где се за најнижу вредност

$$n (n = 1)$$

добија да је

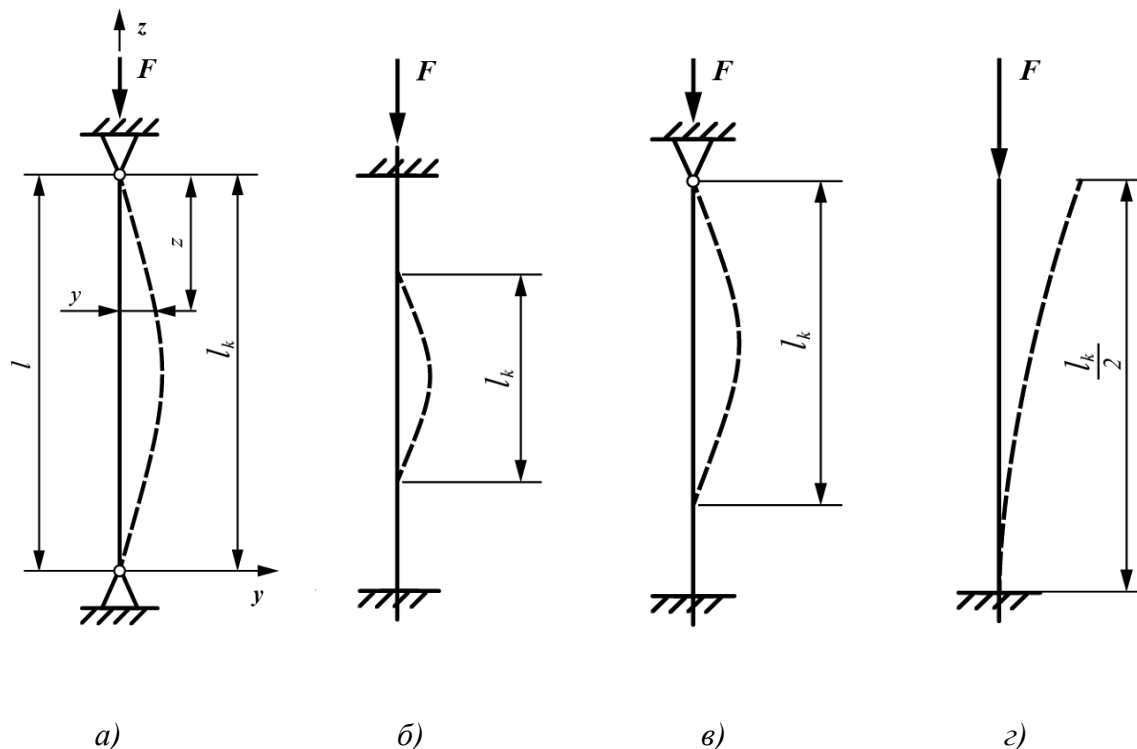
$$k_1 = \pi/l,$$

јер се тражи најмања вредност силе. Најмања вредност силе под којом се штап и у извијеном положају налази у равнотежи, која се назива силом извијања је онда:

$$F_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_k^2}, \quad (2.5)$$

где је l_k дужина извијања.

Ову критичну силу је први одредио Ојлер (*Euler*), па се по њему зове и Ојлерова сила извијања. Штап оптерећен силом извијања се налази у равнотежи у извијеном положају са неодређеном амплитудом. Према томе, сила извијања може се дефинисати као сила притиска под којом штап има равнотежан положај у правом и минимално савијеном положају. Сви могући случајеви притисних оптерећења и њихове дужине извијања су дате на слици 2.12.



Слика 2.12 – Дужине извијања за различите случајеве ослањања.

Критични напон при извијању, σ_k , представља однос критичне (Ојлерове) силе извијања, F_k и површине попречног пресека A :

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 E \frac{I_{\min}}{A}}{l_k^2} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{l_k^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_k^2} . \quad (2.6)$$

Виткост штапа $\lambda_k = l_k / i_{\min}$ представља однос дужине извијања и полупречника инерције пресека. Из израза 2.6 се види да критични напон опада са квадратом виткости због чега код танких и дугачких штапова може имати веома мале вредности које су далеко ниже од дозвољених напона при чистом притиску. Ојлеров образац важи у границама еластичности (у границама Хуковог закона). У овом раду је коришћен Ојлеров образац за одређивање критичних сила јер се конструкције димезионишу како би функционисале у зони еластичности.

3. Структурна оптимизација

Структурна оптимизација представља налажење најбоље расподеле материјала у конструкцији намењене да издржи одређено потребно оптерећење у односу на тражене услове. У инжењерској пракси се најчешће користи за оптимизацију машинских делова и склопова, свих врсте конструкција као и за решеткасте конструкције, а налази примену и у свим другим гранама индустрије. Инжењери су, традиционално, морали да се ослањају на искуство што је давало прихватљива, али не и оптимална решења и управо су искуством постизане добре и рационалне структуре које се и данас користе. Међутим, савремено тржиште захтева економичне и ефикасне конструкције мање масе и трошкова, са што мањим губицима и краћим роковима, док особине конструкције морају да испуне тражене захтеве. Како би се ови захтеви остварили, потребно је рационално пројектовање и истовремено неослањање искључиво на искуство. Дакле, знањем и технологијом је могуће унапредити решења, добити структуре мање масе, а истих карактеристика са смањењем могућности људске грешке и утицаја недостатка искуства.

Основ за то је имплементација оптимизације у процес конструисања решеткастих носача, односно у процес прорачуна, избора карактеристика и варирања концепције је потребно уградити поступак оптимизације који ће дати боља решења у погледу носивости, мање масе, мање укупне површине, цене конструкције, итд.

3.1 Оптимизација

Уобичајено је да се уместо израза „најбоље од рационалних доступних решења“ користи термин оптимално решење, тј. оптимум [87]. Оптимизација је процес налажења решења из групе алтернативних могућих решења. Оваква решења нужно задовољавају све постављене критеријуме како би се решење сматрало прихватљивим. У пракси се овим поступком најчешће налази глобална екстремна вредност, тј. минимум или максимум функције циља, а то је функција у којој фигурише више међусобно независних променљивих чије вредности дају решења у односу на задате критеријуме оптимизације.

Променљиве у оптимизацији су слободне величине чије вредности се одређују поступком оптимизације, како би у што већој мери испуниле критеријуме функције циља. Скупови променљивих оптимизације се дефинишу као вектори (3.1), где n представља укупан број променљивих. Зависно од типа променљиве могу бити континуалне (могу имати било коју вредност реалних бројева из задатог скупа) и дискретне (могу имати само коначан број вредности из задатог скупа). Код инжењерских и других проблема се често јавља потреба за моделима са комбинацијом континуалних и дисконтинуалних променљивих. Дисконтинуалне променљиве могу бити дискретне, целобројне или мешовите и чине процес оптимизације комплекснијим. Дискретне

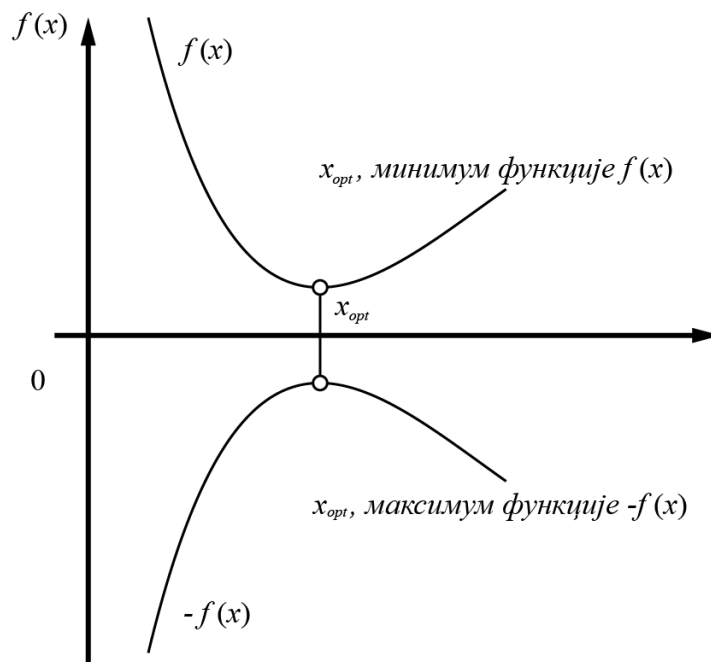
променљиве на први поглед делују једноставније, али драстично компликују процес оптимизације јер дају простор који је прекидан и неконвексан. Решавање проблема са комбинацијом дискретних и континуалних променљивих је нумерички врло захтевно и изискује коришћење адекватних поступака. Вредности се узимају из тачно дефинисаних скупова код дискретних променљивих.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \quad (3.1)$$

Креирање функције циља захтева одређивање међусобне зависности свих променљивих које фигуришу код специфичног проблема. Функција циља је математички гледано аналитичка функција, $f(X)$, која дефинише конкретан проблем. Избор критеријума функције циља зависи од природе проблема који је разматран. У инжењерској оптимизацији, зависно од проблема, то су најчешће критеријуми смањења масе, трошкова, времена, или повећање квалитета, ефикасности, и др. Проблем се у сваком случају своди на проналажење екстремне вредности функције (минимума или максимума). Приступ за дефинисање функције циља је исти за оба случаја. Код оптимизације се ова појава назива еквивалентност (3.2).

$$\min f(X) = \max h(X) = \max \{-f(X)\} \quad (3.2)$$

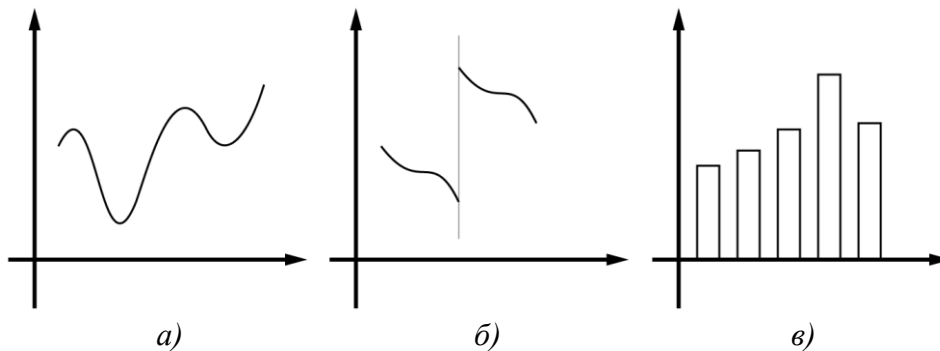
Из претходног израза се види да ако функција $f(X)$ има минималну вредност функције, максимална вредност исте функције има вредност $-f(X)$. На слици 3.1 је илустрована ова појава и са ње се може уочити да се минимална и максимална вредност поклапају и да су симетричне у односу на осу x .



Слика 3.1 – Еквивалентност оптимизације.

Један од највећих проблема у инжењерској пракси у процесу оптимизације јесте дефинисање функције циља. Код реалних проблема конструкција је потребно што је могуће реалније математички представити проблем, што може представљати велики

изазов. Зависно од типа, функција циља може бити континуална, дисконтинуална и дискретна [88]. Слика 3.3 даје упрошћену визуелизацију изгледа облика функција циља у односу на тип функције.



Слика 3.2 – Облици а) континуалне, б) дисконтинуалне и в) дискретне функције циља.

Мултимодалне функције су функције са више локалних екстремних вредности. У случају мултимодалних функција веома је важно тумачити добијена решења јер се често догађа да метода оптимизације одреди локални оптимум као екстремну вредност.

У случају да процес мора да задовољи више често противуречених критеријума, оптимизациони процес се назива вишекритеријумски. Овакав проблем је могуће решити на разне начине, али се најлакше решава креирањем нове глобалне функције циља која се дефинише линеарном комбинацијом функција супротсављених циљева као што је дато изразом:

$$f(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(X) + \dots + w_n f_n(X) , \quad (3.3)$$

где $f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)$ представљају функције циља првог, другог, па до критеријума n -тог критеријума, а w_1 и w_2 тежинске коефицијенте (факторе одмеравања).

Ограничења су услови које решење мора задовољити. Обично су дата у облику неједнакости или једнакости. Неједначине се могу задавати као граница или као опсег. Тако ограничења могу узети један од следећих општих облика:

$$\begin{aligned} G_j(X) &\leq 0, \text{ за } j = 1, p \text{ и} \\ x_{id} &\leq x_i \leq x_{ig}, \text{ за } i = 1, n , \end{aligned} \quad (3.4)$$

где у неједначини за ограничење g_j у ком фигурише променљива оптимизације x постоји p једначина у систему ограничења. За ограничење опсега x_i постоји n ограничења опсега који се крећу у опсегу од x_d до x_g .

Како би се извршио процес оптимизације потребно је изабрати адекватну методу у односу на постављен проблем, доступност и начин примене.

Математички модел представља репрезентацију понашања система који се оптимизује. Потребно је поставити што реалнији математички модел како би се тако описан проблем у разумном року решио и био употребљив, као и да трошкови и напори који настају при тражењу решења буду знатно нижи од позитивних ефеката постизања решења.

3.1.1 Методе оптимизације

Не постоји само један ефикасан метод решавања свих оптимизационих проблема. Велики број техника и алгоритама се употребљава за решавање разних типова проблема. Ово представља велики развојни простор за данашње истраживаче. Постоји велики број подела оптимизационих метода у односу на постојање ограничења, тип променљивих, карактер модела, начин решавања, начин истраживања домена, и др. и у односу на ове поделе могуће је пронаћи најпогоднију методу за решавање конкретног проблема.

Према начину решавања оптимизационе методе се могу поделити на аналитичке и нумеричке. Аналитичке су засноване на математичком одређивању стационарних тачака функције и погодне су за једноставне проблеме специфичних карактеристика. Нумеричке методе имају много већу могућност примене и често се користе у инжењерској пракси, а при избору нумеричке методе потребно је имати у виду карактеристике решаваног проблема. Оптимизационе методе у данашње време практично обавезно подразумевају употребу рачунара и адекватног софтвера.

Нумеричке оптимизационе методе се најједноставније могу поделити на четири основне групе: линеарно, нелинеарно, динамичко и хеуристичко програмирање. Линеарно и нелинеарно програмирање су технике намењене налажењу локалних оптимума за континуалне диференцијабилне функције. Динамичко програмирање се користи за решавање проблема зависних од времена и вишестепних процеса, док се хеуристичке методе издвајају по томе што теже да пронађу глобални оптимум и користе се за непотпуно дефинисане проблеме са малим бројем доступних података који описују проблем. Развој свих ових метода је у експанзији. Постоји велики број хеуристичких метода, а једна од најзаступљенијих хеуристичких метода данашњице јесте генетски алгоритам који ће се овде користити/представити.

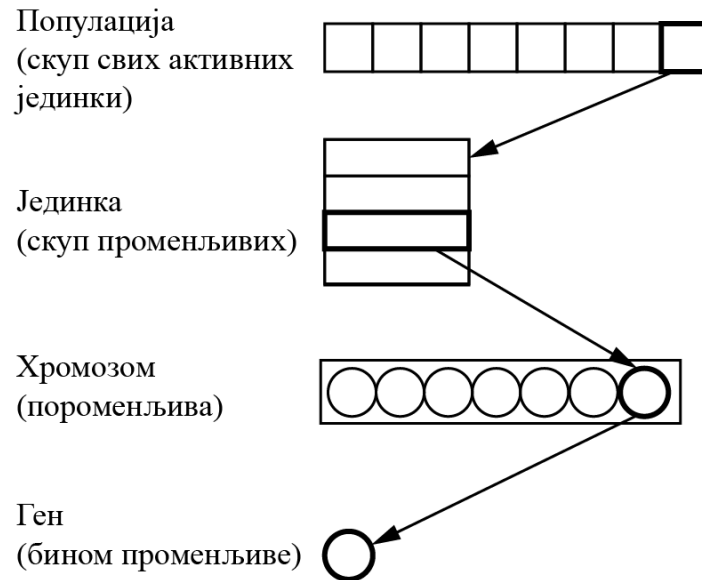
3.1.2 Генетски алгоритам

Генетски алгоритам (*GA*) је метода је заснована на пет Дарвинових главних принципа еволуције: популација, комбинација, варијација, селекција и мутација. Професор Џон Холанд (*John Holland*) се сматра творцем технике генетског алгоритма, поред тога што је у овом периоду већ неко време постојала идеја о имитацији еволуционог процеса у програмирању. Ова хеуристичка метода је веома значајна у развоју оптимизационих метода и дуго се налази у употреби [89]. У алгоритму је сваки од ових принципа заступљен како би имитирао природни процес еволуције. Међутим, поред ових принципа користе се и други процеси као што су елитизам, контрола мутације, и др, а аналогија са генетиком се задржава и у терминологији коришћеној у методи. Основне фазе (оператори) алгоритма су:

- Селекција (*Selection*),
- Укрштање (*Crossover*) и
- Мутација (*Mutation*).

На слици 3.3 јединка представља један квадрат популације. Свака јединка представља решење које треба да је валидно. Генетски материјал сваке јединке је

представљен хромозомом који садржи генетске (апстрактне) информације задате методом, а она може бити задата физичким вредностима које описују решење. Сваки хромозом је састављен од појединачних гена, тј. променљивих (површине, координате, индекса, итд.), представљених кружићима на слици 3.3.

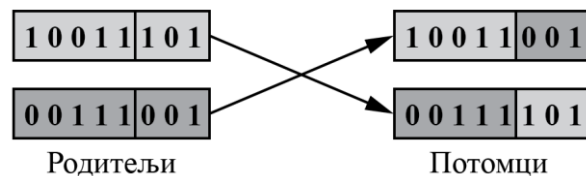


Слика 3.3 – Визуелизација модела популације.

У свакој од итерација (генерација - *Gen*), ова три оператора се користе на популацији могућих решења, која се састоји из скупова јединки. Селекција је процес налажења две јединке из популације који ће служити као родитељи. Нове јединке, потомци, наслеђују особине својих родитеља. Селекцију је могуће вршити на више начина, а неке од најчешћих начина су систем рулетског бирања са скалирањем, селекција стохастичким такмичењем између две јединке, стохастички одабир без замене, стохастички одабир са заменом и елитизам. Елитизам одређује да се најбоље, или неколико најбољих јединки копирају у нову генерацију, онакве какве јесу из претходне. Ово обезбеђује да се добра решења не губе или непожељно мутирају у фази укрштања, што значајно утиче (позитивно или негативно) на рад методе [90].

Објашњење рада методе је дато на бинарно кодираном генетском алгоритму. Начин рада реално кодираног генетског алгоритма је идентичан, само што он користи реалне вредности.

Укрштање је процес комбиновања две јединке у циљу добијања потпуно нових. Због одржавања исте величине популације, најефикаснији начин укрштања је да се од два родитеља добију два потомка који их мењају у новој популацији. Број јединки кроз генерације најчешће остаје непромењен. Могуће је иницијално појачати, а у том случају се задаје колико ће пута само почетна популација бити већа од наредних које остају исте. Најједноставнији, али не и једини, начин укрштања јесте такозвано укрштање у једној тачки. Ово је ефикасан и функционалан вид укрштања и његова илустрација дата на слици 3.4 на примеру бинарног стринга.



Слика 3.4 – Укрштање у једној тачки.

Мутација представља насумичне, неконтролисане, промене генетског материјала како би се постигла потпуно нова решења. Ова фаза је важан и неизбежан процес за успешну конвергенцију. Случајна вредност добијена мутацијом омогућава претрагу по целом дозвољеном домену. Како не би дошло до стохастичког неконтролисаног поступка, мутација мора бити веома мало заступљена (од 0,001% до 0,01%). Пример једноставне мутације илустрован је на слици 3.5.



Слика 3.5 – Једноставна мутација једног гена хромозома.

Популација служи да задржи неку количину података о претходним итерацијама оптимизационог процеса. Еволуциони процес хромозома јединки из популација представља претрагу простора потенцијалних, могућих, решења. У свакој генерацији се врши оцењивање (рангирање) сваке јединке. Парови јединки се бирају из тренутне популације у односу на ранг и укрштају се, уз евентуалну мутацију, како би формирали нову популацију. Нова популација се користи за следећу итерацију и овај процес се понавља све док се не испуни критеријум заустављања (*Limit*). Критеријум по ком се алгоритам зауставља је најчешће максималан број генерација или то да се боља јединка није појавила за одређени број узастопних итерација. Заустављање алгоритма не гарантује глобални оптимум, поготову код сложених проблема са великим бројем променљивих и зато се каже да хеуристичке методе теже проналажењу оптималних вредности. Слика 3.6 приказује упрошћену основну структуру *GA*.

Процес претраге захтева балансирање два међусобно супротна циља: први је експлоатација најбољег решења, а други је претрага простора могућих решења. *GA* је алгоритам који прави изузетно добар компромис између експлоатације и претраге.

Употреба генетског алгоритма се први пут јавља у структурној оптимизацији решеткастих носача 1986. године када је Холандов студент Давид Голдберг (*David Goldberg*) публикувао резултате истраживања [91]. Голдберг је употребио *GA* за минимизацију масе проблема алуминијумског носача са десет штапова. Овај пример се и данас користи као стандардан тест пример за оптимизацију и у овој дисертацији је коришћен у поглављу 5.1.

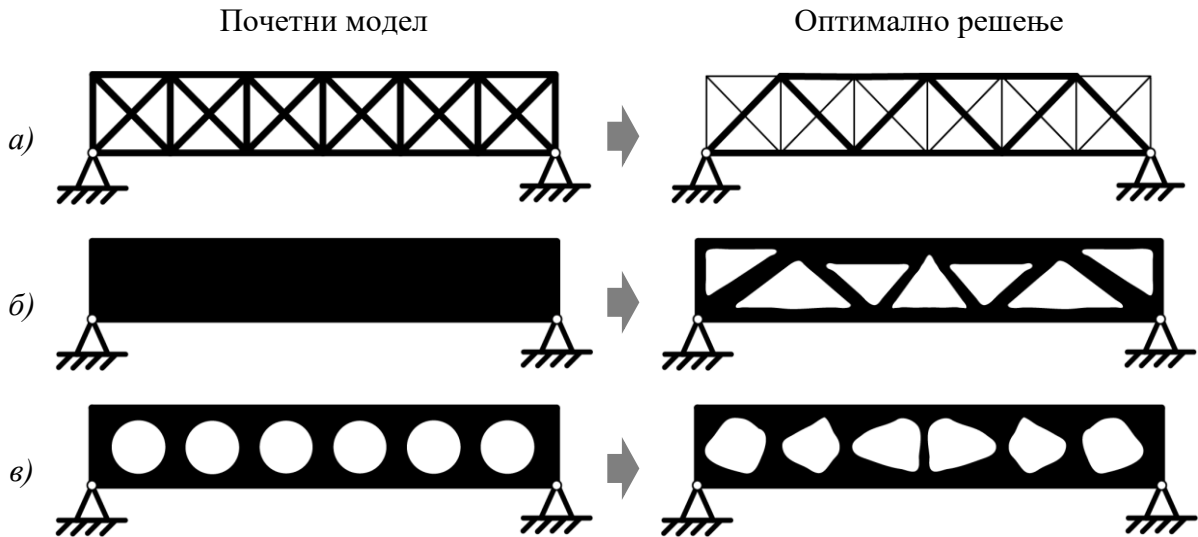


Силка 3.6 – Основна структура генетског алгоритма са приказаним фазама.

3.2 Структурна оптимизација решеткастих носача

Структурна оптимизација је итеративни процес који се користи за побољшање жељених карактеристика конструкције. Функције циља код структурне оптимизације су минимална маса, цена, максимална крутост или њихова комбинација у случају вишекритеријумске оптимизације. У општем случају оптимизације конструкције врши се груба подела (слика 3.7) на следеће подврсте оптимизације у односу на полазни модел:

1. Оптимизација параметера попречних пресека,
2. Оптимизација топологије
3. Оптимизација облика.



Слика 3.7- Општа оптимизација а) параметара, б) топологије и в) облика.

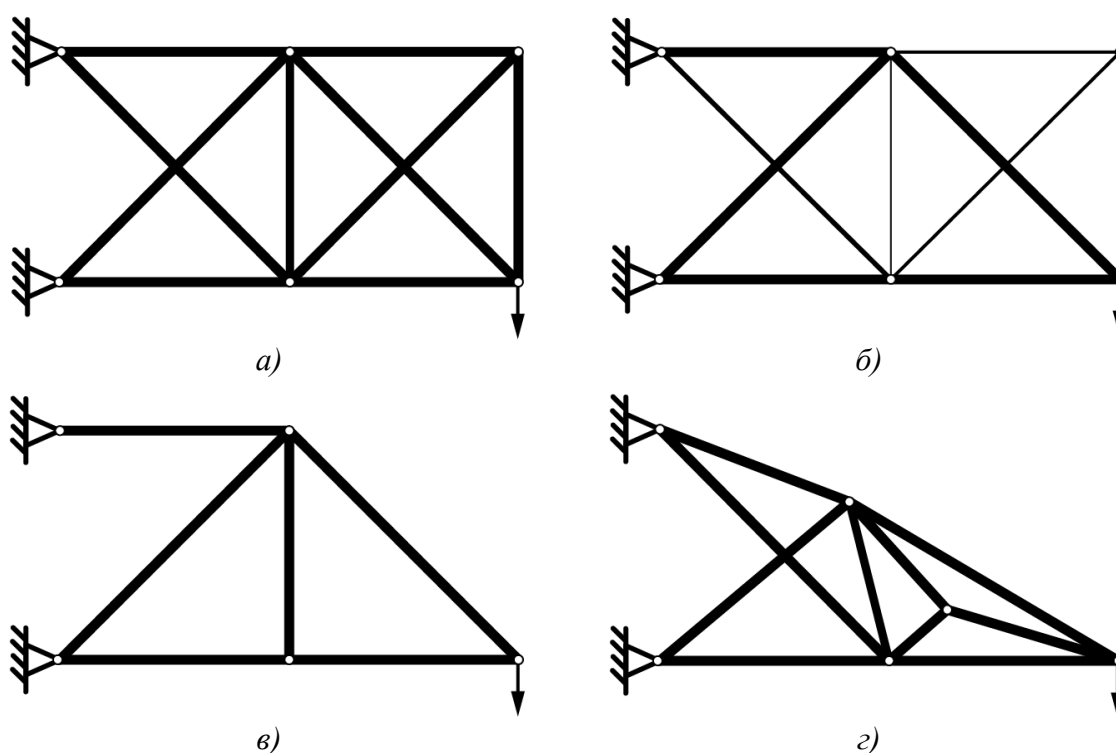
Оптимизације димензија и врсте попречних пресека, облика и топологије се такође могу посматрати параметарски, што је најчешће случај код решеткастих носача. Параметарска оптимизација решеткастих носача не почиње од модела раванског (или просторног) тела, као што је случај на слици 3.7 б) и в), већ од модела са елементима штапова као код 3.1 а), али се заснива на истим основним принципима.

Структурна оптимизација решеткастих носача је комплексан процес који је могуће извести тако да се оптимизује више аспеката конструкције појединачно или њихове комбинације. У овој тези се сви ови аспекти конструкције сматрају параметарским. Основни аспекти (типови) параметарске оптимизације конструкције решеткастих носача су оптимизација попречног пресека (димензија и геометрије попречних пресека штапова), оптимизација топологије (постојање елемената везаних у чворовима) и оптимизација облика (положаја чворова). Појединачне оптимизације различитих аспеката конструкције решеткастих носача (основни типови оптимизације) какве су дефинисане овим радом, илустроване су на слици 3.8.

Могуће је вршити комбинације два или свих аспеката у циљу добијања што бољих решења. Комбиновани типови оптимизације се раде секвенцијално или паралелно. Код секвенцијалног приступа оптимизација се врши у фазама, где се појединачно (фазно) оптимизују аспекти конструкције и овакви приступи углавном почињу са моделом који има све могуће комбинације спајања чворова штаповима и прво се оптимизује топологија. Међутим, овим приступом се не добија најбоље глобално решење, јер проблеми оптимизације различитих аспеката нису линеарно раздвојиви. Једна од предности генетског алгоритма јесте да је могућа паралелна оптимизацију више аспеката. Код паралелног комбиновања типова оптимизације симултано се мењају променљиве свих аспеката конструкције. У односу на искуство, околности и потребе није могуће увек извести комплетну оптимизацију сва три аспекта. Из овог разлога је неопходно знати шта се може очекивати од ког типа или комбинације и начина комбиновања типова оптимизације, како би се могао извршити правилан избор у односу на потребе и како би се постигло оптимално решење. У литератури је могуће наћи и да

се оптимизација попречних пресека назива оптимизацијом димензија, а промена облика попречног пресека се сматра оптимизацијом облика, а не попречног пресека. Притом оптимизација облика попречног пресека не дозвољава додавање или уклањање отвора или шупљина у попречном пресеку [88].

Употреба оптимизације у приступу конструисања решеткастих носача је јако комплексна, али је исплатива. Она захтева пуно знања, употребу нових оптимизационих метода и софтверску анализу, а тренутно је употреба оптимизације ових конструкција мало заступљена у пракси. Широка примена оваквог приступа и комерцијализација софтвера који решавају проблеме оптимизације решеткастих носећих конструкција, захтева још истраживања. Међутим, оптимизација решеткастих конструкција није могућа без употребе софтвера. Овај сложени процес мора узети у обзир комплетну проверу великог броја података у свакој итерацији прорачуна. Дакле, до постизања практично употребљивог решења добијеног овим поступком, није могуће доћи без рачунара.



Слика 3.8 – а) Почетни модел решеткастог носача и решења добијена структурном оптимизацијом б) попречних пресека, в) топологије и г) облика.

Већина радова из структурне оптимизације решеткастих носача оптимизацијом облика посматра само промену позиције чворова, а оптимизацијом попречних пресека посматра промену површина попречноих пресека, тј. димензија, (али не и њиховог облика). У овом раду усвојено је да се оптимизација димензија и/или геометрије попречних пресека назива оптимизацијом попречних пресека, како би узела у обзир и могућност променљивих облика (типова) и димензије попречног пресека, а оптимизацијом облика се подразумева искључиво оптимизација положаја чворова решетке.

3.2.1 Оптимизација попречних пресека

Оптимизација попречних пресека посматра димензије профила и геометрије попречних пресека штапова решеткастог носача као променљиве. Из резултата у литератури, као и резултата овог истраживања се види да када је у питању функција минимизације масе конструкције, овај приступ даје одличне резултате када се примењује самостално. Могуће је вршити континуалну и дискретну промену параметара попречног пресека.

Димензије континуалних променљивих попречних пресека су дефинисане максималним и минималним могућим димензијама. Димензије могу узети било коју вредност у том интервалу. Из практичних разлога овај скуп је ограничен и бројем децимала (минималног инкремента) који те вредности могу имати, али се и даље сматрају континуалним. Зависно од облика попречног пресека, могуће је имати више променљивих димензија, тј. односа димензија, за један попречни пресек. Свака додатна димензија, тј. однос, значајно утиче на комплексност оптимизације. Овакав приступ захтева дефинисану геометрију попречног пресека, и није могуће изабрати другу врсту, или тип, попречног пресека у току оптимизације.

Дискретне променљиве попречних пресека могу бити димензионе (списак могућих димензија), типска (тип, тј. врсту или облик попречног пресека (нпр. кружни, прстенасти, квадратни, I , U , L , ... профил)), која може, такође, бити везана за различити материјал, и њихова комбинација. У случајевима могућих различитих типова попречних пресека који могу бити различитих димензија, препоручује се да се избор врши са списка потенцијаних профила дефинисаних димензија. Оптимизација која користи коначан број могућих попречних пресека је нешто једноставнија и даје практично применљива решења. Због могућности употребе стандардних попречних пресека, употребом дискретних променљивих, процес оптимизације се приближава пракси.

Функција циља која тражи минималну масу за типични пример структурне оптимизације решеткастог носача се може дефинисати као:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min W = \sum_{i=1}^{i=n} \rho_i A_i l_i \text{ са } A = \{A_1, \dots, A_n\}, \\ \text{ограничен на } \begin{cases} A_{\min} \leq A_i \leq A_{\max} & \text{за } i = 1, \dots, n, \\ \sigma_{\min} \leq \sigma_i \leq \sigma_{\max} & \text{за } i = 1, \dots, n, \\ u_{\min} \leq u_j \leq u_{\max} & \text{за } j = 1, \dots, k, \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

где је W маса конструкције, n број елемената носача, ρ је специфична густина (тежина) материјала елемента i из скупа од 1 до n , k је број чворова, l_i је дужина елемената i из скупа од 1 до n , A_i је површина попречног пресека елемента i из скупа од 1 до n , σ_i је напон у елементу елемента i из скупа од 1 до n и u_j је померање чворова j из скупа од 1 до k . Ознаке су усвојене у складу са ознакама из литературе.

3.2.2 Оптимизација топологије

Параметарска оптимизација топологије захтева почетну конфигурацију носача. Овај тип оптимизације у својим итерацијама варира повезивање постојећих чворова са расположивим елементима у циљу добијања оптималне конфигурације употребљених елемената. Модели добијени овим типом оптимизације могу резултовати у конфигурацијама са мањим бројем чворова уколико постоје чворови које није потребно повезати. Код оптимизације овог аспекта променљиве су целобројне из скупа броја елемената носача (од 1 до k).

Један од највећих проблема овог типа оптимизације је избегавање решења која не задовољавају услове стабилности. Стабилност конструкције је могуће нарушити елиминацијом елемената из конструкције, који својим одсуством доводе до тога да није могуће одржати првобитни положај и форму равнотеже при деформацији која одговара оптерећењу. Из тог разлога потребно је јасно дефинисати који елементи носача су неопходни за нормалан рад конструкције.

Елиминација елемената смањује масу, али повећава напоне до дозвољене вредности у преосталим елементима. Препоручено је користити овај тип оптимизације у комбинацији са оптимизацијом попречних пресека и/или облика како би се уравнотежили напони у конструкцији.

3.2.3 Оптимизација облика

Као и код топологије, оптимизација облика захтева почетну конфигурацију носача. Оптимизација овог аспекта решетке је најсложенија за решавање и посматра позиције чворова као променљиве. Повезаност чворова елементима се у овом случају не мења, али је могуће добити другачији облик конструкције. Координате чворова су континуалне променљиве које могу узети било коју вредност из задатог скупа. Из практичних разлога ова променљива се даје са дефинисаним инкрементима у односу на жељену (могућу) прецизност израде. Оптимизација облика генерално се користи да смањи напоне у елементима или да уједначи расподелу напона. Додатна ограничења која се јављају код овог типа оптимизације јесу могућ простор у коме чворови могу да се налазе. Овај израз је математички дефинисан као:

$$\begin{aligned}x_{jmin} &\leq x_j \leq x_{jmax} && \text{за } j = 1, \dots, k, \\y_{jmin} &\leq y_j \leq y_{jmax} && \text{за } j = 1, \dots, k, \\z_{jmin} &\leq z_j \leq z_{jmax} && \text{за } j = 1, \dots, k.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Тип оптимизације који се примењује зависи од аспекта конструкције који се оптимизује. Поред оптимизације појединачних аспеката конструкције, могуће је оптимизовати и комбинације више аспеката. Са симултаним или секвентним комбиновањем два или сва три ова аспекта конструкције значајно се повећава захтевано компјутерско оптерећење и време које је потребно за решавање таквих проблема, због енормног поља претраге које се јавља у тим случајевима. Уз повећану комплексност рада, добијају се и бољи резултати него са оптимизацијом само једног аспекта.

3.3 Новоуведена ограничења структурне оптимизације решеткастих носача

Како би се обезбедило добијање употребљивог оптималног решења, овом тезом је предложено да се у математички модел дода још ограничења. У циљу добијања што реалнијих конструкција, разматрана су постојећа ограничења предвиђена актуелном литературом и пронађена је потреба за практичним ограничењима. Новоуведена ограничења су ограничење минималне дозвољене дужине штапа, ограничење притиснутих штапова против извијања и ограничење броја могућих различитих профила.

3.3.1 Ограничење минималне дозвољене дужине штапа

Ограничење минималне дозвољене дужине штапова је предвиђено за све типове оптимизације које узимају у обзир облик конструкције. Додавањем минималне дозвољене дужине се избегавају оптимална решења у којима се положаји чворова поклапају, или су превише близу један другом до те мере да израда такве конструкције не би била могућа, што решења чини практично неприменљивим. Дужина се за сваки пример одређује искуствено, у односу на препоруке или за употребу искључиво витких штапова према изразу (5.1). Математичка формулација овог ограничења је дата изразом:

$$l_i \geq l_{\min} \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, n$$
$$l_i = \sqrt{(x_b^i - x_a^i)^2 + (y_b^i - y_a^i)^2} \quad (3.7)$$

Где је l_i дужина елемента из опсега од 1 до n која се налази између чворова a и b са координатама (x_a^i, y_a^i) и (x_b^i, y_b^i) тим следом.

Постојећи опсежи за координате чворова дефинишу максималне могуће дужине елемената, тако да овде није предвиђено и то ограничење, али га је могуће увести на исти начин, у случају да постоји реална потреба. Увођењем максималне дужине елемената је могуће елиминисати потребу за креирањем наставака у случају могућих великих распона између чворова.

3.3.2 Ограничење притиснутих штапова против извијања

Ограничење које се односи на проверу притиснутих штапова против извијања се заснива на једначини 3.5 којом је дефинисана Ојлерова сила извијања и даје граничну носивост притиснутог штапа у еластичном подручју. Са сваком променом конфигурације, геометрије елемената или материјала израз 3.8 даје различиту вредност ограничења. С обзиром на то да се код оптимизација које узимају у обзир попречне пресеке елемената који су у свакој итерацији променљиви и да се код оптимизација које узимају у обзир облик дужине елемената у свакој итерацији променљиве и да се у случају оптимизације аспеката топологије и/или облика могу променити смерови сила у

штаповима, ово ограничење се у литератури најчешће назива динамичко ограничење. Увођење динамичких ограничења умногоме повећава сложеност проблема структурне оптимизације. Велики број дисконтинуитета услед природе оваквог ограничења изискује велике нумеричке захтеве и већи број понављања како би се избегли локални оптимуми. Имајући у виду екстремну комплексност овако формулисаних проблема, у литератури се ретко налазе слична ограничења. Притиснути елементи се проверавају ограничењем датим изразом (3.8)

$$\sigma_{Ai}^P \leq \sigma_{ki} \quad \text{где је} \quad (3.8)$$

$$\sigma_{Ai}^P = \frac{F_{Ai}^P}{A_i} \quad \text{и} \quad \sigma_{ki} = \frac{F_{ki}}{A_i},$$

$$F_{ki} = \frac{\pi^2 \cdot E_i \cdot I_i}{l_{ki}^2} \quad (3.9)$$

$$|F_{Ai}^P| \leq F_{ki} \quad \text{за } i = 1, \dots, n.$$

У претходном изразу је σ_{Ai}^P напон у притиснутом штапу, σ_{ki} критични напон при извијању, A_i површина попречног пресека, F_{Ai}^P израчуната аксијална притисна сила, F_{ki} је Ојлерова критична сила извијања, E_i модул еластичности материјала штапа и I_i је минимални аксијални момент инерције попречног пресека, l_{ki} је дужина извијања, елемента i из скупа од 1 до n . Сматра се да су штапови центрично притиснути. Провера се за потребе овог истраживања врши без степена сигурности, па се сматра да је дозвољена сила у притиснутом штапу једнака критичној сили за тај штап.

3.3.3 Ограничење броја различитих попречних пресека

Потреба за ограничењем броја могућих различитих попречних пресека елемената је проистекла из анализе резултата оптимизације попречних пресека. Примећено је да оптимални модели који узимају у обзир попречних пресека дају знатно већи број различитих профила него што би били предвиђени конвенционалним конструкционим приступом. Типични модели оптимизације у литератури се не базирају на број различитих елемената који се добијају, где се чак у великом броју радова површина попречног пресека у оптимизацији попречних пресека даје као континуална променљива. Ово је случај јер се у већини радова не узима у обзир извијање, те облик попречног пресека није пресудан. Приступ структурној оптимизацији дат овом дисертацијом узима у обзир извијање и има за циљ да представи што бољи поступак и практично решење за оптимизацију решеткастих носача, а самим тим предвиђа се коришћење дискретних променљивих попречних пресека. Поред комплексности израде саме конструкције као и спојева, велики број различитих профила елемената значајно утиче на повећање цене конструкције. Мањи број коришћених елемената, у пракси, значи да се више елемената може направити од наручених комада који су типично стандардних дужина од 3 или $6m$ зависно од дебљине зидова профила. Ограничење броја могућих различитих профила попречних пресека елемената резултује у додатним дисконтинуитетима функције циља када су у питању комбинације оптимизација са узимањем у обзир топологије. Математичка дефиниција овог ограничења је дата као :

$$|A = \{A_1^B, A_2^B, A_3^B, \dots, A_n^B\}| = m. \quad (3.10)$$

$$m \leq m_{\max}. \quad (3.11)$$

где је A скуп задатих профила попречних пресека елемента из скупа одабраних попречних пресека $B = \{B_1^G, B_2^G, B_3^G, \dots, B_{m_{\max}}^G\}$, m је кардинал скупа задатих профила и m_{\max} је максимални број дозвољених различитих профила. Скуп одабраних попречних пресека, B , се састоји од попречних пресека из скупа могућих попречних пресека за дати проблем дискретне оптимизације попречног пресека $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_p\}$.

Оригинално решење ограничавања максималног броја различитих профила је осмишљено тако да се врши одабир m_{\max} променљивих B , које узимају вредности из скупа G . Затим скуп променљивих A узима вредности из скупа променљивих B , где скуп променљивих B може имати мањи кардинал од укупног броја чланова скупа, другим речима може садржати више истих профила из скупа могућих профила G . На овај начин се у свим случајевима задовољава услов из (3.11).

С обзиром на то да се у литератури не може наћи пример оваквог ограничења и нису познати резултати са бројем различитих профила, у овој дисертацији је уместо „ \leq “ постављена једнакост и примери су проверени за све могуће, или разумне бројеве, различитих попречних пресека и поређени са оптимумом који се добија без овог ограничења, како би се извукли закључци о препоруци за вредност m_{\max} . Овако постављено ограничење додатно отежава налажење оптимума у већ мултимодалној функцији циља, смањењем броја прихватљивих решења у већ превеликом простору претраге.

3.4 Имплементација структурне оптимизације

Процес параметарске структурне оптимизације, по дефиницији, не може се радити без употребе софтвера, јер би захтевао толико времена да није могуће да остварена добит буде већа од уложених напора. Комплексне структуре је све теже оптимизовати са повећањем броја интеракција између променљивих. Генетски алгоритам је познат по постизању глобалног оптимума код проблема са великим бројем локалних екстрема у дисконтинуалним просторима претраге. Еволуционе оптимизационе методе, генерално, дају супериорна решења која се могу накнадно објаснити коришћењем конвенционалних инжењерских метода, али која није могуће добити аналитички и нису очигледна. Те методе обезбеђују постизање оптималних решења. Оне саме по себи не гарантују апсолутни оптимум, али је њима могуће доћи до решења за разлику од традиционалних метода. Њихова основна предност је што са малим бројем познатих чињеница о проблему могу да обезбеде одговарајућу конвергенцију, а одступања од апсолутног оптимума су занемарљива.

Како би се нумерички извршила структурна оптимизација решеткастих носача, потребно је или за сваки индивидуални пример направити адаптивни прорачун сила у штапу и померања чворова услед деформација, или употребити анализу коначних

елемената. Пошто је креирање адаптивног прорачуна процес који би био специфичан за сваку конструкцију, уложени напори не би могли да оправдају употребу оптимизације. Ове вредности је, дакле, најлакше, једино оправдано и рационално добити употребом методе коначних елемената. Због броја потребних анализа применом МКЕ потребно је упростити анализу и избећи је превременом елиминацијом одређених конфигурација где је то могуће. МКЕ даје резултате сила у штаповима и померања чворова услед деформације. Сва ограничења која не користе ове податке у својој математичкој формулацији, потенцијално, могу унапред да елиминишу одређену конфигурацију пре него што се модел анализира методом коначних елемената. Поред овога, начин на који се користи МКЕ веома је важан у смањењу броја употребљених коначних елемената како би се упростила анализа, а самим тим и смањило време рада оптимизације. Облик (тип профила) попречног пресека не утиче на силе у штаповима, самим тим ни на напонско стање унутар елемената. Ово је важно напоменути, јер значи да је могуће користити једнодимензионе линијске елементе штапова уместо запреминских елемената у МКЕ, што значајно смањује број коришћених елемената са више десетина, стотина или хиљада, на број једнак броју штапова дате конфигурације.

У склопу ове докторске дисертације, у циљу доказивања постављених хипотеза, развијен је оригиналан софтвер са могућношћу оптимизовања свих аспеката конструкције решеткастих носача и њихових комбинација, као и могућношћу коришћења предложених ограничења. Комплексност се односи и на потребу за понављањем истоветних симулација како би се гарантовао оптимум. Ово захтева пуно времена и напора, јер сама оптимизација представља интерактивни процес у коме је конструктор доносилац одлука.

4. Развој софтвера за оптимизацију решеткастих конструкција

Аналитички прорачун решеткастих конструкција даје решења која су употребљива, али не и оптимална. Основним прорачуном добијеним конструкцијама је могуће смањити масу итеративним аналитичким прорачунима алтернативних решења која не гарантују побољшања. Овакав приступ је временски захтеван и комплексан. Конструктори са више искуства могу доћи до решења мањих маса од аналитичких, али и у тим случајевима конструкције опет нису минималне могуће масе.

Употреба оптимизације представља највећи допринос у развоју решеткастих конструкција, а интеграцијом нумеричких метода, наиме хеуристичких процеса оптимизације у комбинацији са методом коначних елемената (МКЕ) је могуће постићи конструкциона решења бољих карактеристика. Структурна оптимизација решеткастих носача се не може замислити без употребе софтвера, тако да у овом приступу највећи уложени напор представља сам процес оптимизације. Наиме, потребно је поставити иницијално решење са неопходним ограничењима како би се постигло практично применљиво решење, извршити анализу сваког резултата и одредити оптимум. Поред тога, хеуристичким оптимизационим методама је могуће постићи решења, која можда инжењерски не би била логична, али испуњавају све задате услове. Ови проблеми су јако сложени због великог броја могућих решења, па их није могуће решити на други начин.

Како би се извршила структурна оптимизација решеткастих носача, неопходна је употреба софтвера који је способан за извршење тог задатка и постоји више приступа развоју софтвера који решавају проблем параметарске структурне оптимизације. Наиме, специјализирани софтвери за прорачун и анализу решеткастих носача имају своје интегрисане модуле за оптимизацију који су на елементарном нивоу и заснивају се на парцијалној оптимизацији конкретних фактора конструкције у складу са претходно постављеним моделом. Како специјализовани софтвер за комплетну параметарску структурну оптимизацију не постоји на тржишту, за потребе овог истраживања је развијен оригинални софтвер.

Истраживања у овој области у највећем броју случајева се заснивају на оптимизацији развијеној у неком од актуелних програмских језика за конкретне примере, са специфичним кодом за решавање само посматраног проблема. Ови софтвери се ослањају на постојеће, опште, математичке поставке једначина без употребе просторних или раванских модела. Резултати су параметарски и захтевају унос добијених вредности у други софтвер због визуелизације. У овде приказаном, оригиналном развијеном софтверу структура је постављена за решавање свих могућих проблема структурне оптимизације решеткастих конструкција.

Правац развоја софтвера највише зависи од начина на који је конципиран. Један од приступа, који се често виђа у литератури, јесте развијање конзолне апликације која

би захтевала текстуални унос и давала текст и/или графички приказ на излазу. Овако конципиран софтвер би имао предност брзог рада, али је недостатак општост примене, могућност праћења процеса оптимизације и дуго време развоја са ограниченом применом. Алтернативно, могуће је користити и комбиновати могућности постојећих софтвера на више начина. Коришћењем специјализованих софтвера са интегрисаном оптимизационом методом и софтвера за анализу коначних елемената, мора се направити веза између та два софтвера која би управљала процесима оба и била посредник. Овакав приступ изискује решавање проблема компатибилности софтвера. Поред тога, стални прелазак из једног софтвера у други са сваком итерацијом би била изузетно процесорски и меморијски захтевна, али би се, у теорији, остварили најбољи резултати. Коришћењем постојећих софтвера који су намењени решавању општих инжењерских проблема, као што су *DS CATIA*, *AD Inventor*, и других са могућношћу оптимизације углавном се долази до проблема могућности контролисања оптимизационог процеса, а решења добијена оваквим путем су задовољавајућа за инжењерску употребу.

Развој софтвера је могуће вршити употребом неког од програмских језика или употребом визуелног програмирања. Општепознато је да визуелно програмирање представља савремени приступ који омогућава олакшан преглед повезаности нелинеарно програмираних проблема, а визуелно програмирање у софтверу који има интегрисане алате за методу коначних елемената и има интегрисан оптимизациони софтвер је идеално решење. Постоји могућност детаљног контролисања улаза у оптимизацију, могуће је праћење целокупног процеса и не захтева излаз из софтвера за прорачун. Међутим, примена визуелног програмирања такође има своје недостатке: неопходно је осмислити и направити везе унутар целокупног поступка, постоји ограничење у виду постојећих оператора за оптимизацију и МКЕ и рад им је незнатно спорији од конзолних апликација, а нешто бржи од комбиновања два различита софтвера.

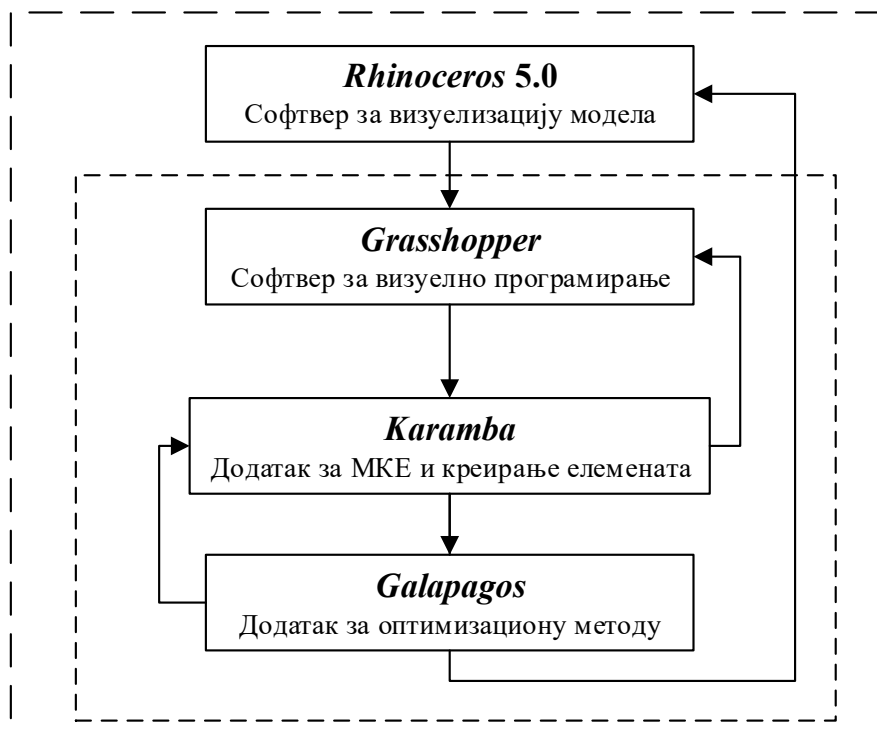
Циљ је искористити постојеће могућности и развити софтвер који решава проблеме оптимизације решеткастих конструкција, тако да резултати могу бити практично применљиви, директно из софтвера. Идеја је да креирани софтвер обједини све неопходне алате потребне за оптимизацију било које конфигурације решеткасте конструкције.

Како би се извршио избор приступа развоју оригиналног софтвера за потребе ове дисертације, постављени су захтеви које такав софтвер мора да испуни. Неопходни захтеви софтвера за параметарску структурну оптимизацију решеткастих конструкција су да софтвер:

- има могућност уноса и визуелизације иницијалне конфигурације,
- користи хеуристичку оптимизациону методу,
- има могућност подешавања параметара коришћене методе,
- функционише са великим бројем променљивих,
- има могућност оптимизовања попречних пресека, топологије, облика и свих њихових комбинација,
- има могућност коришћења МКЕ,
- има могућност надградње у смислу математичке формулације ограничења и параметара улазних података.

- има могућност приказа података било ког коришћеног параметра променљиве у датој итерацији,
- има могућност визуелног приказа резултата и међу резултата.

За потребе ове дисертације, развијен је оригиналан софтвер који се заснива на визуелном програмирању због лаке могућности праћења рада софтвера, модуларности, и могућности проширења. Као основа за програмирање коришћен је софтверски пакет *Rhinoceros 5.0* са његовим додатком за визуелно програмирање *Grasshopper*. Овај софтверски пакет је испуњавао тражене захтеве за креирање оригиналног софтвера, а они су: да софтверски пакет у себи садржи свој прорачун МКЕ, да има уграђену хеуристичку методу оптимизације и да је могућа манипулација начина на који се повезују. Као подршку за МКЕ коришћен је додаток под називом *Karamba* [92], који се уграђује у *Grasshopper* окружење и омогућава повезивање параметризованих геометријских модела, методе коначних елемената, и оптимизационог алгорита. *Grasshopper* садржи у себи и оптимизациони алат *Galapagos*, који има могућност коришћења генетског алгорита или симулације жарења (*Simulated Annealing*). Поред свега тога, матични софтвер (*Rhinoceros 5.0*) даје визуелни приказ модела у свакој итерацији и даје могућност приказивања деформисаног модела као и напонског стања. Визуелизација повезаности софтвера и података је дата на слици 4.1. Коришћена оптимизациона метода је заправо генетски алгорита (*GA*) и она је интегрисана у оптимизациони алат *Galapagos* због својих погодних карактеристика и доступности.

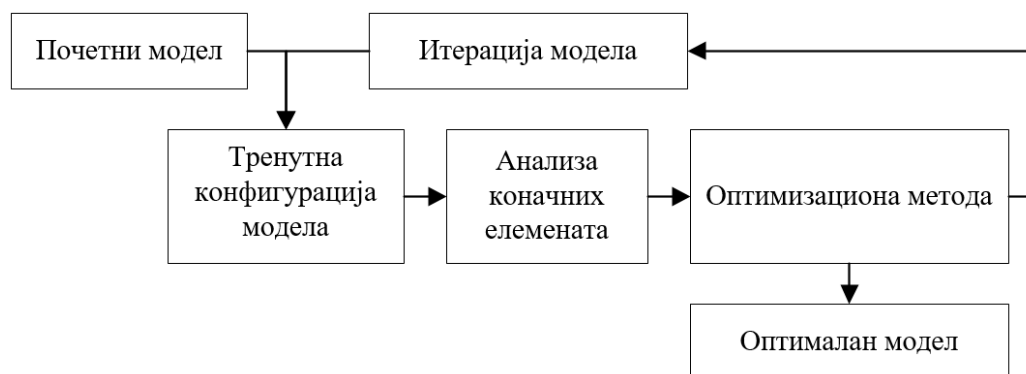


Слика 4.1 – Алгоритам рада главних елемената софтвера.

У процесу параметарске структурне оптимизације решеткастих носача постоји велики број повезаних делова процеса који су међусобно зависни, као и велики број вредности које се користе у различитим сегментима софтвера. Овакав нелинеаран ток рада софтвера је изузетно тешко испратити током рада. Стога је потребно софтвер

структурно поделити на логичне целине са јасним излазима и улазима како би се лако извршило повезивање.

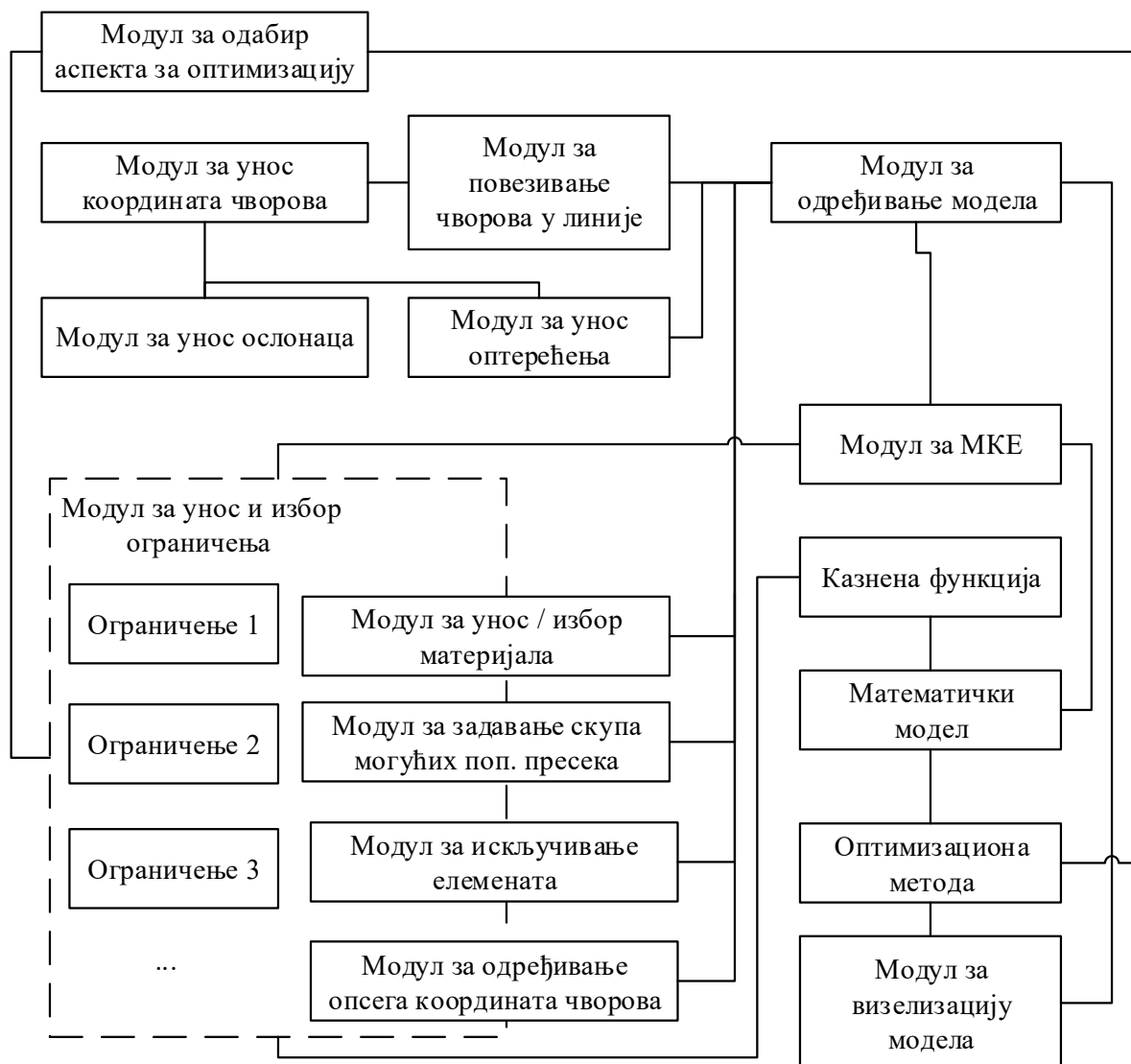
Додатно, да би било олакшано праћење целокупног процеса направљена је подела у блокове у односу на повезане целине процеса. Шема основног принципа рада и поделе блокова је приказана на слици 4.2. Овако структурирани блокови су даље подељени на мање целине у односу на тип излаза који дају, с циљем да се додатно олакша повезивање, а структура унутар самог програма је таква да су улази увек постављени са леве, а излази са десне стране.



Слика 4.2 – Алгоритам глобалног процеса оптимизације у софтверу.

Пошто се ради о параметарској структурној оптимизацији, потребно је креирати прво почетни структурни модел. Ово подразумева креирање тачака (чворова), њихово повезивање (креирање елемената штапова), задавање својстава штапова (материјали, димензије и облик попречних пресека), постављање ослонаца и задавање оптерећења. Даље је потребно задати који од параметара ће бити променљиви и који ће то бити тип променљивих. Такође је потребно задати опсеге или скупове променљивих и неопходна ограничења. Дакле, тако креирани почетни модел је онда могуће повезати са анализом коначним елементима и оптимизацијом.

У процесу развоја овог софтвера је креиран модул за параметарско уношење геометрије иницијалног модела, попречних пресека штапова и оптерећења. Развијени су и интегрисани сви типови оптимизације и ограничења. Креиран је модул за одабир типа и комбинације типова оптимизације и типа ограничења које је могуће изабрати у односу на постављен пример и жељене резултате. Модули ограничења су развијени према математичким моделима датим у поглављу 3. Модули за задавање свих скупова могућих попречних пресека и материјала су направљени тако да су интегрисани са модулима за сва ограничења. Модул прорачуна методе коначних елемената је повезан са ограничењима која у односу на казнену функцију, решења прослеђују модулу за оптимизацију. Ова структура је доста комплексна и повезаност модула захтева екстензивно познавање проблема, стога је детаљно објашњење рада и развоја софтвера дато у наставку 4. поглавља. Развијени софтвер се ослања на употребу интегрисаног модула за визуелизацију, прорачун методом коначних елемената и оптимизациону методу.



Слика 4.3 – Графички приказ повезаности модула у развијеном софтверу.

Постоји и потреба оптимизације самог софтвера и његовог рада која је извршена у процесу развоја софтвера и објашњена је у поглављу 4.5.

4.1 Параметризација модела

Како би се креирао адекватан софтвер за структурну оптимизацију, потребно је унапред познавати проблем за који ће се софтвер решавати. То да ли се ради о оптимизацији попречног пресека, облика, топологије или неке од њихових комбинација, знатно мења потребне параметре. Да би софтвер био опште употребљив, потребно је да постоји могућност креирања параметарског модела, а то је модел који је дефинисан тако да се облик геометријског параметра позиције чворова и димензија попречних пресека мења променом вредности. Промена ових параметара се може вршити директно уношењем вредности у табелу која је повезана са моделом (ово може радити корисник или оптимизациона метода), или индиректно, где се услед промене једног параметра математичком формулацијом мења други параметар. Приликом дефинисања улазних

вредности могуће је одредити и границе у којима се та вредност налази, а оне служе оптимизацији као границе скупа.

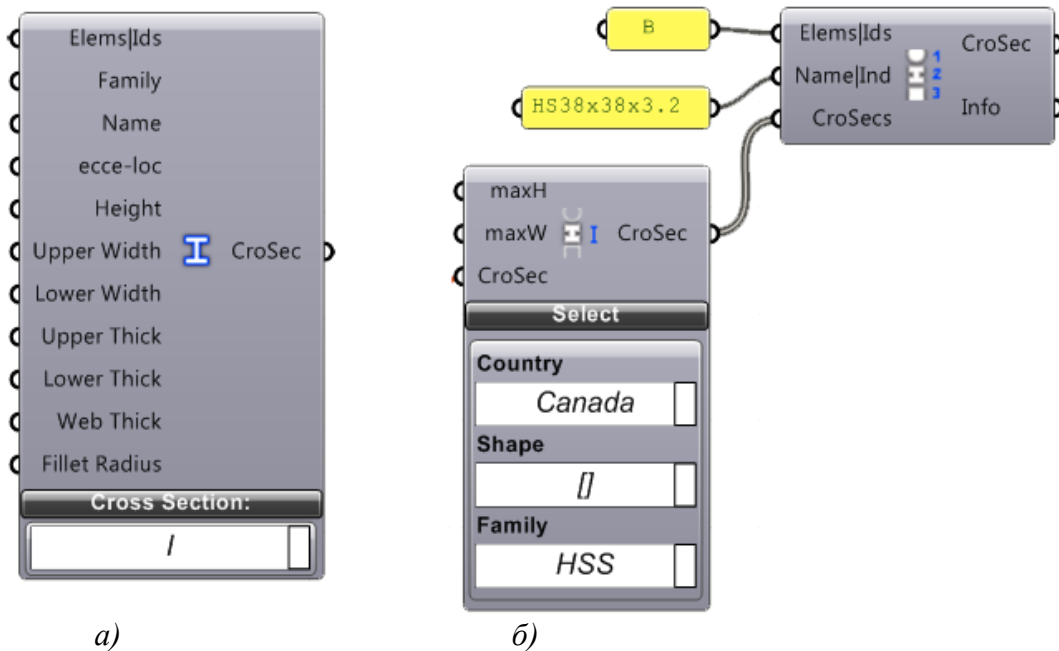
Софтвер који је развијен за потребе ове дисертације је подељен на блокове (модуле) намењене за одређене делове модела (креирање тачака, линија, задавање својстава, оптерећења, ослонаца, итд.), са јасно дефинисаним уносима за корисника у сваком блоку, како би се сваки следећи модел лакше креирао. Блокови, тј. модули, су сегменти софтвера који садрже један или више улаза и задужени су за извођење конкретних подоперација у софтверу како би дали тражени излаз.

Визуелно програмирање је начин програмирања који користи манипулацију графичких елемената извршиоца функција за исказивање процеса рада софтвера уместо употребе текстуалног програмског језика. Сви софтвери за визуелно програмирање се у основи ослањају на неки програмски језик и кôд који омогућава рад употребом графичких елемената и њиховог повезивања. Како би целокупан процес рада развијаног софтвера био видљив и како би његово праћење у раду било могуће, коришћење визуелног програмирања је усвојено као решење које ово омогућава и задовољава потребе софтвера намењеног истраживачком раду. Евентуални развој комерцијалне верзије оваквог софтвера би захтевао превођење визуелног програма у неки од програмских језика како би се направила апликација са корисничким интерфејсом у коме корисник нема увид у кôд и нема могућности промене истог. Како је овде реч о софтверу намењеном истраживању, могућност лаке промене кода визуелним програмирањем олакшава увођење било каквих измена.

Овакав модуларни софтвер је намењен да буде универзалан за било који аспект или комбинацију аспеката оптимизације произвољно задатог решеткасног носача. Приступ креирања оригиналног модуларног софтвера за ову дисертацију је произишао из потребе да се смањи време израде модела, минимизује могућност грешке и обезбеди лака поновљивост процеса за различите примере.

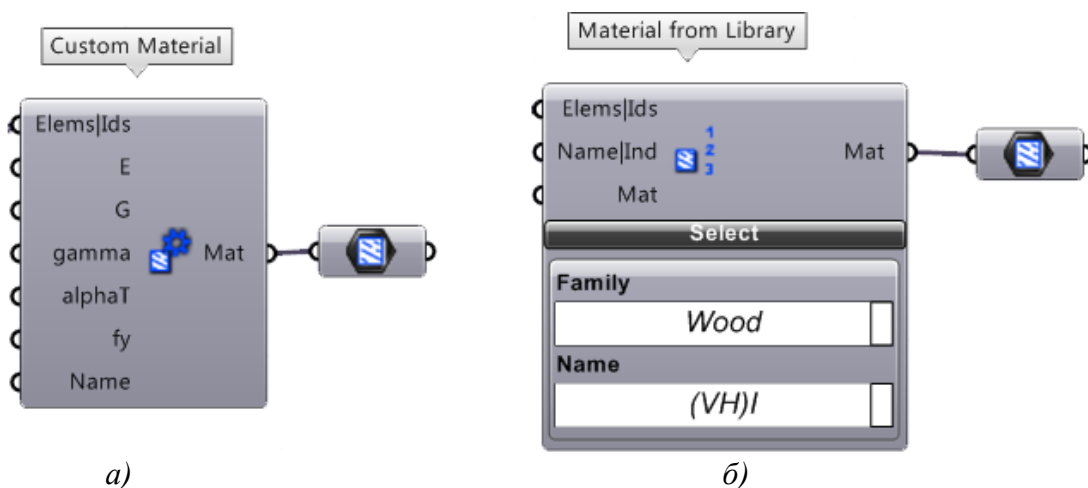
Параметарска оптимизација решеткистих носача захтева почетни модел. Софтвером је предвиђено да корисник сâм унесе координате тачака у одређени блок како би било дефинисано где се налазе чворови на почетном моделу. Поред тога, потребно је за сваки чвор дефинисати опсег и прецизност (јединицу и број децимала) променљиве координате за могућност оптимизације облика. Тачке се по њиховим индексима онда уносе у две колоне (почетна и крајња тачка између којих може да постоји штап), чиме се добијају индекси штапова. Овим се постиже иницијална конфигурација која ће служити за креирање почетних модела. Индекси креираних чворова, елемената и профила служе блоковима за позивање података о конкретним чворовима, елементима или профилима неопходним за извршење њихових функција.

Како би се дужи посматрале као штапови, морају им се задати попречни пресеци и материјали. Попречни пресеци се задају у односу на индекс линије (*Elms|Ids*), константним или променљивим вредностима димензија (*Upper Width, Lowe Width, Upper Thick., ...*) у односу на тип профила из падајућег менија (*Cross Section:*), бирају се из базе постојећих или креираних попречних пресека. Могуће је задати све геометријске карактеристике у односу на жељени профил. Изглед оператора за креирање попречних пресека је приказан на слици 4.4, чији излаз комплетно дефинише геометрију попречног пресека за сваки од унетих штапова (*Elms|Ids*).



а) б)
Слика 4.4 – Оператор за креирање попречног пресека у односу на а) геометрију и б) базу профила [93].

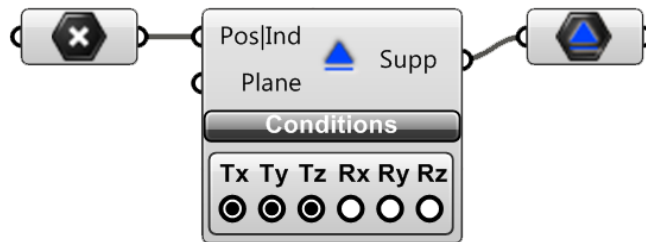
Као и попречни пресеци, материјал се може задати из постојећих база, а могуће је и креирати нови (Слика 4.5), као и задавати различите материјале за сваки елемент у односу на његов индекс, тј. позиције (*Elems|Ids*). За креирање материјала уноси се модул еластичности, $E [kN/cm^2]$, модул смицања, $G [kN/cm^2]$ и специфична тежина (густина), $\gamma [kN/m^3]$. Јединице вредности за креирање материјала се разликују од стандардних, јер је софтвер (*Grasshopper*) направљен тако да користи овакве јединице. Ове вредности дефинишу понашање елемената под статичким случајевима оптерећења у зони еластичности. Вредности унете у оператор за задавање материјала се користе за ограничења и поређења напона и добијање масе конструкције.



а) б)
Слика 4.5 – Оператори за задавање материјала а) параметарски и б) из базе материјала [93].

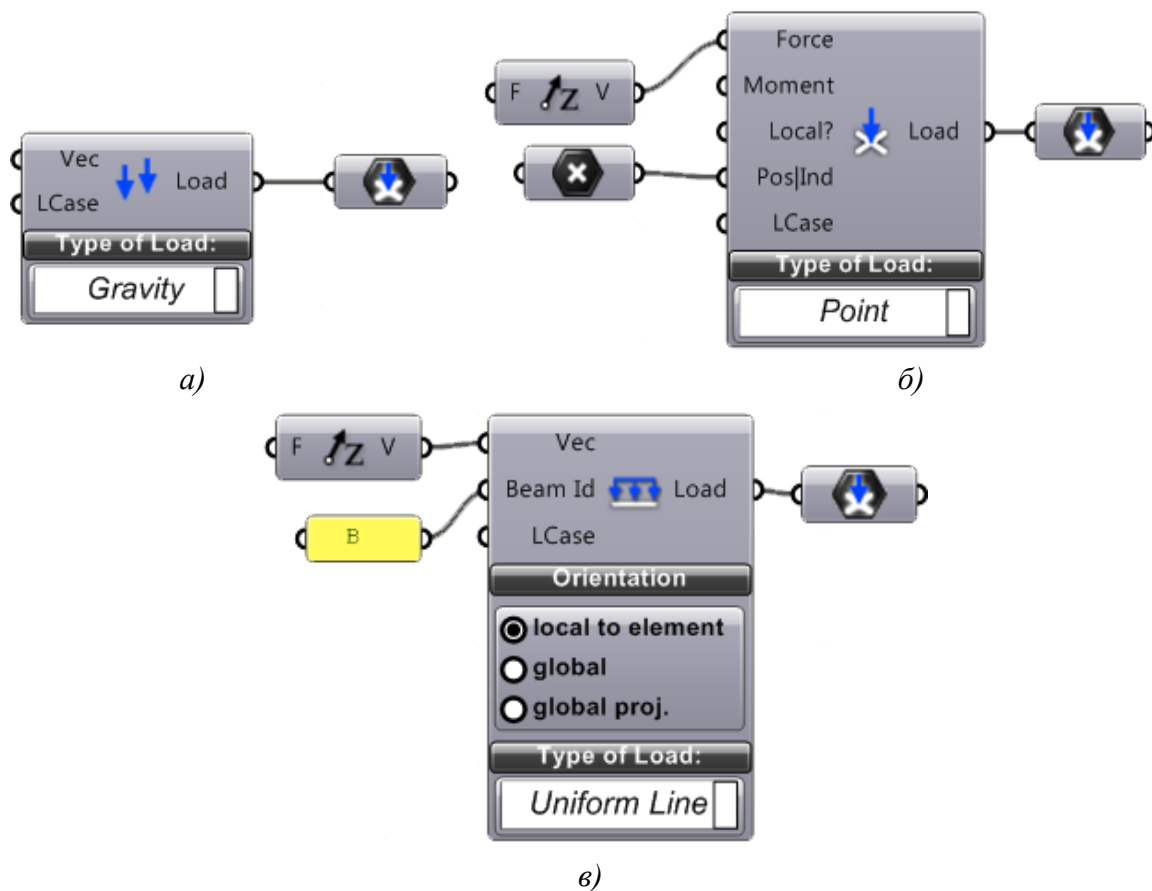
Овако креираном моделу се даље задају оптерећења и ослонци. Ослонци (*Supp*) се задају у односу на индекс чвора (*Pos|Ind*) и имају могућност одузимања појединачних степена слободe (Слика 4.6). Због повезивања ослонца са индексом чвора могуће је задавање променљивих координата чворова у случају да је позиција једног или више

чворова променљива. Зависно од броја различитих ограничења степени слободе могуће је задавати ослонце појединачно или у односу на листу индекса чворова.



Слика 4.6 – Задавање степени слободе чворовима ослонаца [93].

Оптерећење (*Load*) се задаје векторски (*Vec / Force*) у односу на индекс чвора (*Pos|Ind*), елемента (*Beam Id*) или као сопствена маса (*Gravity*). Изглед оператора у односу на изабран случај оптерећења је дат на слици 4.7.



Слика 4.7 – Задавање оптерећења а) гравитације, б) у чвору и г) по елементу [93].

При задавању оптерећења могуће је и задати више различитих случајева оптерећења (*LCase*). Зависно од потреба прорачуна, могуће је вршити оптимизацију тако да резултујућа конструкција задовољава све појединачне случајеве оптерећења истовремено или само засебан случај. Задавањем својстава линијама и тачкама добија се модел решеткастог носача. Овако састављен и оптерећен модел је могуће анализирати методом коначних елемената и оптимизовати.

4.2 Анализа модела методом коначних елемената

Анализа методом коначних елемената (МКЕ) решеткастог носача даје вредности напона за сваки од штапова решетке као функцију површине попречног пресека и силе у штапу. Основни приступ МКЕ је подела целе структуре носача на појединачне елементе, где се сваки штап посматра као засебан елемент, под претпоставком да је напон исти дуж целог штапа, зато што се попречни пресек не мења дуж истог штапа. Затим се једначине за сваки штап дефинишу како би се добила издужења. Све једначине свих елемената су онда спојене у комплетан проблем линеарне алгебре, док се води рачуна да је сума свих сила у сваком од чворова једнака нули како би се задовољио услов равнотеже и постојао континуитет у сабирању померања свих чворова услед деформације. У софтверу оператори за МКЕ дају засебне излазе за силе у штаповима и за напонско стање, тако да је могуће добити обе вредности без потребе за додатним прерачунавањем.

4.3 Оптимизација појединачних аспеката модела

При развоју софтвера иницијална идеја је била да постоји могућност одабира типа оптимизације, тј. одабира аспекта конструкције који се оптимизује. Како би ово било могуће кроз разне елементе програма се прожимају везе између различитих корака у креирању модела, тако да сâм поступак оптимизације није линеаран.

Оптимизација у развијеном софтверу се врши коришћењем генетског алгорита. Повезивање резултата свих претходних прорачуна и провера ограничења доводи у оператор за оптимизацију, *Galapagos*, израчунату масу тренутне конфигурације помножену са коефицијентом из казних функција. Овај оператор се такође повезује и са свим променљивим у софтверу. Самим одабиром типа оптимизације, тј. аспекта конструкције који се оптимизује, искључују се или укључују могућности коришћења променљивих или задатих вредности за потребне параметре. На пример, ако се не врши оптимизација облика, оператор за оптимизацију неће користити променљиве координате, већ оне задате иницијалним моделом.

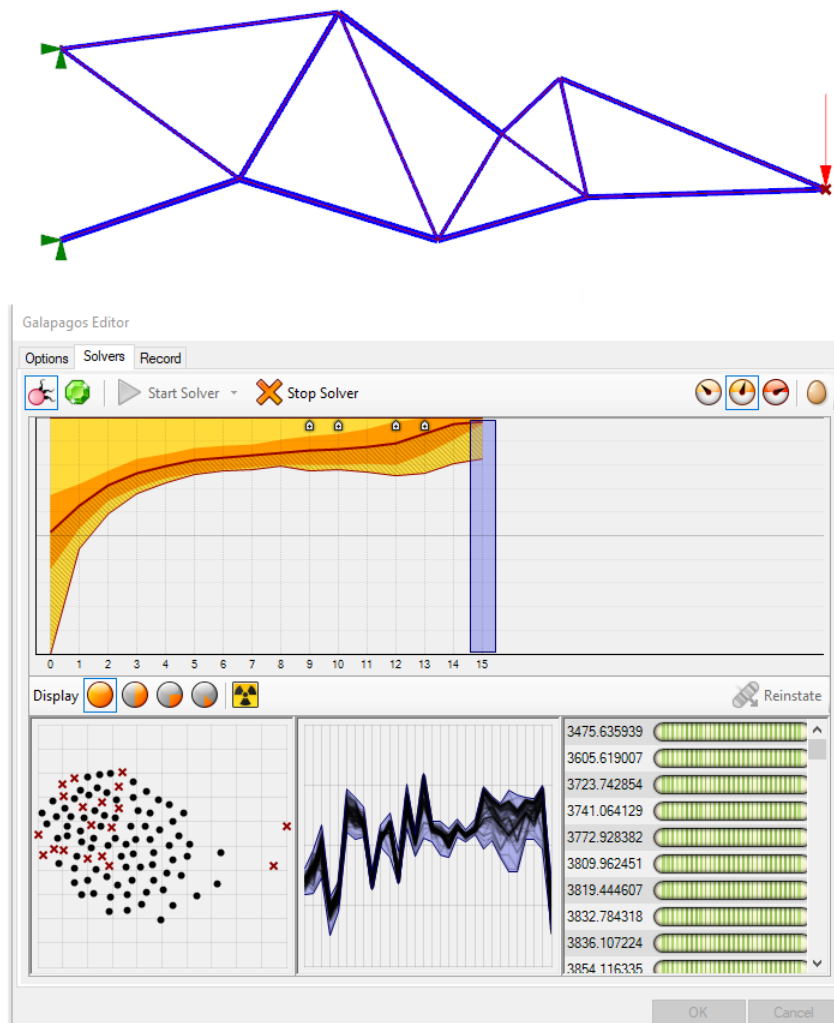
У оператору за оптимизацију могуће је извршити одабир да ли се тражи минимум или максимум функције. Параметри методе оптимизације *GA* у оператору су: максимална стагнација, популација, иницијално појачање, елитизам и укрштање. Дакле, максимална стагнација подразумева максималан број узастопних итерација (генерација) у којим се не јавља боља вредност као оптимум, популација представља величину генерације, док је иницијално појачање заправо увећање прве генерације, како би прва генерација могла бити више пута већа од наредних. На крају, елитизам одржава задати проценат најбољих јединки из претходне генерације и преноси их у наредну. Што се самог укрштања тиче, оно се процентуално уноси и представља процес комбиновања постојећих јединки у циљу добијања потпуно нових јединки, тј. тога колики је проценат наслеђа.

У току процеса оптимизације могуће је праћење визуелно праћење сваке концепције у прозору софтвера *Rhinoceros*, у окружњу *Grasshopper* праћење свих

међурезултата и у *Galapagos* прозору графички приказ конвергенције, популације и свих решења у било којој итерацији оптимизације. Поред тога, у односу на потребе могуће је извршити и додатну мутацију тренутне генерације у било ком тренутку оптимизационог процеса. Слика 4.8 приказује изглед окружења *Galapagos* и изглед тренутног најбољег решења у тој генерацији за пример комплетне оптимизације решеткистог носача.

Практично је корисно имати могућност да се сагледа више различитих решења, јер је могуће имати знатно једноставније оптимално решење са комбинацијом два или само једним оптимизованим аспектом, а да разлика у оптималној маси буде незначајна.

Укључивањем или искључивањем типова оптимизације могуће је извести било који од типова засебно, као и спровести симултану комбинацију било која два или сва три типа симултано. Ово је урађено како би софтвер био универзалан и имао могућност лаке промене између начина оптимизовања задатог решеткистог носача са истим улазним подацима да би се оптималнија решења лакше поредила.



Слика 4.8 – Изглед тренутног најбољег решења у генерацији (изнад) и окружење оптимизационог оператора Galapagos(испод).

Функција циља у овом софтверу је креирана тако да представља минималну масу конструкције, али је могуће поставити и друге циљеве. Софтвер користи податке о густини материјала, површинама попречних пресека и дужинама појединачних штапова. Маса појединачних штапова се онда сабирају како би се добила укупна маса. Овај корак је уведен како би било могуће праћење промене маса појединачних штапова и како би било могуће њихово евентуално поређење.

У случају да неко од ограничења није задовољено, софтвер користи казнену функцију. Казнена функција множи укупну масу конструкције са великим бројем како би метода таква решење третира као инфериорна.

Развијени софтвер има могућност параметарске структурне оптимизације попречног пресека, топологије и/или облика. Комплетан процес оптимизације решеткастих конструкција је развијен овом дисертацијом, а софтверско решење које се односи на постизање оптималних резултата је оригинално.

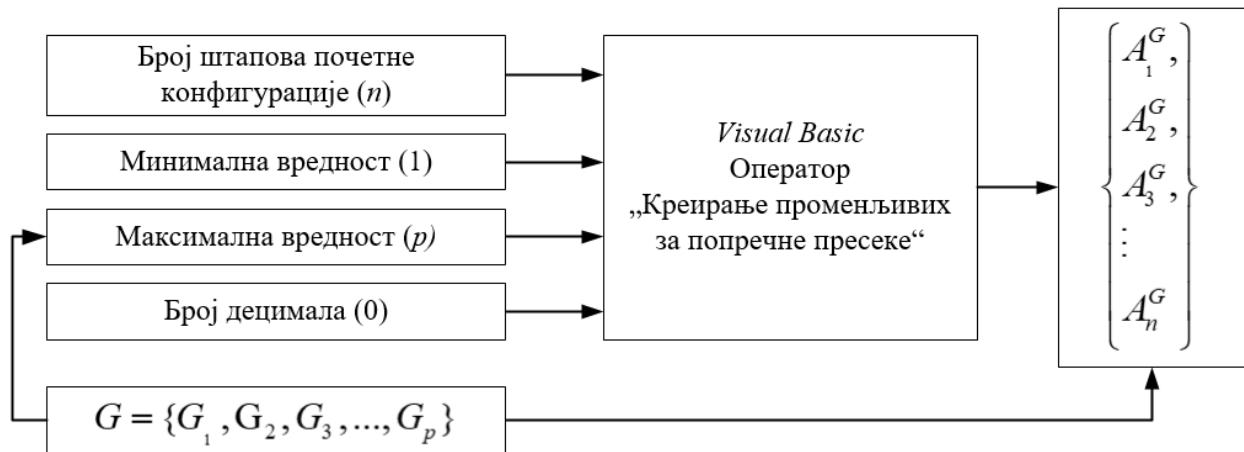
4.3.1 Оптимизација попречних пресека

За потребе оптимизације попречних пресека креиран је оператор који користи скрипту писану у програмском језику *Visual Basic* у којој креира променљиве за оптимизацију попречног пресека. Наиме, у случају оптимизације са континуалним променљивим, овај оператор за задати облик профила дефинише (за све елементе исти) опсег димензије попречног пресека и број децимала (прецизност) и за сваки елемент прави променљиве $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$, где је n укупан број штапова, тј. елемената којима треба задати попречне пресеке у почетној конфигурацији. При креирању иницијалног модела повезивањем тачака (чворова) линијама добија се n штапова, тако да овај оператор елиминише потребу за креирањем појединачних променљивих и аутоматски их задаје.

У случају оптимизације са дискретним попречним пресецима користи се исти оператор, али се унос разликује. Број штапова остаје исти као и за случај оптимизације континуалним променљивим, минимална вредност опсега постаје 1, n је максимална вредност опсега p , је број расположивих профила из скупа $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_p\}$. Оператор у овом случају опет прави променљиве $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$, са разликом што сада ове променљиве само могу узимати вредности из скупа G .

У случају да се не оптимизује попречни пресек, моделима се задаје попречни пресек дефинисан поставком. Тада се уместо скупа могућих профила задаје само једна димензија и тип профила како би оператор задао исти профил свим креираним променљивима, и самим тим, променљиве се третирају као константе. Ако пример нема задате иницијалне попречне пресеке, врши се претходна оптимизација само попречног пресека са једном (истом) променљивом за све штапове. И у овом случају се користи исти оператор са адекватним модификацијама уноса.

На слици 4.9 је приказано повезивање оператора и добијени излази за случај оптимизације попречних пресека коришћењем дискретних променљивих.



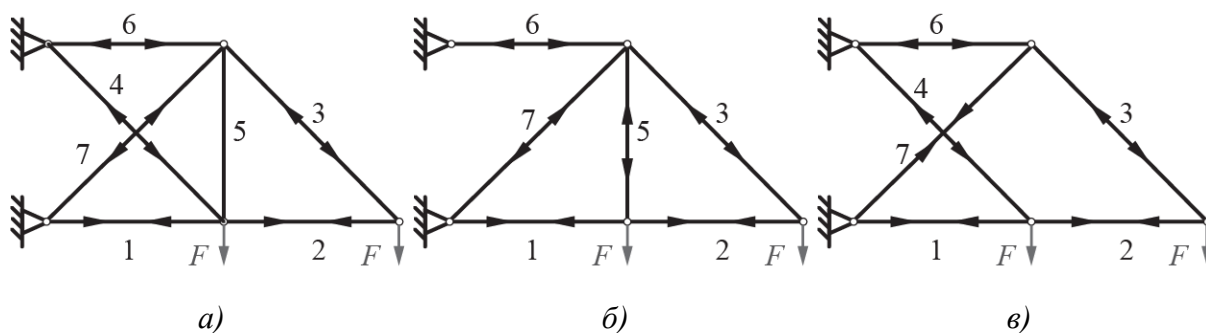
Слика 4.9 – Повезивање оператора писаног у Visual Basic језику за креирање променљивих за попречне пресеке елемената код оптимизације са дискретним променљивим.

4.3.2 Оптимизација топологије

Штапови који се добију у процесу креирања поставке одређеног модела представљају иницијалну конфигурацију и заузимају позиције задате њиховим индексима. Овај систем праћења елемената са индексирањем почетних позиција је развијен у овом раду као решење комплексног проблема праћења елемената при оптимизацији топологије. Индексирање позиција почетних линија омогућава методи да постави или одузме елемент са позиције и да претражује један простор за решење. У супротном, у свакој итерацији би се променили индекси елемената на одређеној позицији и тиме онемогућило оптимизационој методи да функционише, зато што би се самим тим у свакој итерацији мењала и област претраге.

За потребе оптимизације топологије креиран је блок за елиминацију елемената, такав да користи променљиве које елиминишу линије, и то пре него што се линијама задају својства елемената, у односу на њихов индекс. Границе ових променљивих су у опсегу од 1 до $n+1$. Опсег је већи за један од укупног броја линија, за случај да променљива не елиминише ниједну линију, тј. елемент из склопа када је њена вредност $n+1$. Могуће је задати било који број променљивих. Променљиве могу да елиминишу било који елемент или да заузму вредност која не елиминише елемент за ту променљиву. На овај начин је могуће утицати на највећи могући број елемената који се могу појавити у оптимизацији. Коришћењем оператора писаног у Visual Basic, истог какав је коришћен код оптимизације попречног пресека, задаје се назив скупа променљивих и максималан број елемената који могу да се елиминишу, тј. број променљивих. Овај корак се налази после уноса нежељених комбинација тачака, а претходи склапању да би се елиминација елемената односила на индекс позиције елемента у односу на почетни модел. Због смањења количина унетих вредности, а самим тим и могућности људске грешке, у овај оператор се само уноси максималан број жељених променљивих, тј. највећи могући број елемената који корисник сматра да је могуће елиминисати. Оператор у овом блоку за све додате променљиве задаје исте границе за дати пример које сам прерачунава у односу на поставку.

Оптимизацијом топологије, када се елиминишу одређени штапови из модела, поред тога што мења интензитет сила у штаповима, може и да се утиче на њихов смер. Ова појава значајно утиче на проверу на извијање, где се у једној конфигурацији један скуп штапова проверава на извијање, док у се следећој конфигурацији са различитим елиминисаним елементима тај скуп мења. Слика 4.10 приказује промену смера сила у штаповима у односу на то који су елементи елиминисани.



Слика 4.10 – Промена смера сила у штаповима односу на коришћене елементе.

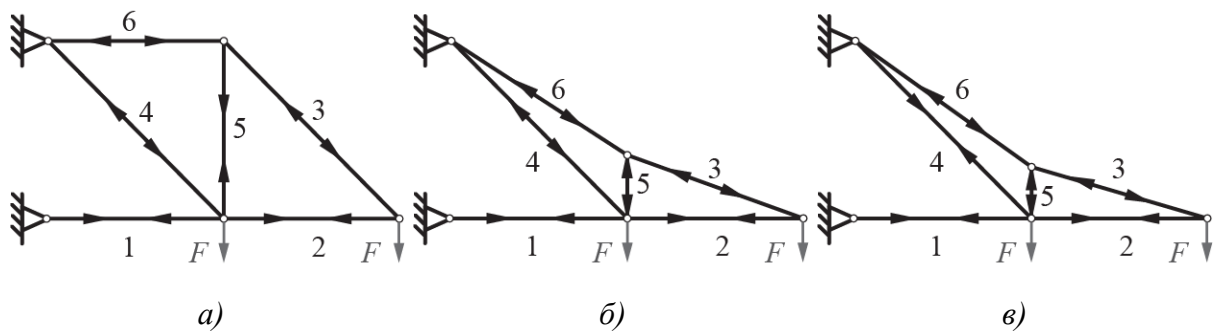
За овај пример где је 4.10 а) иницијална конфигурација, штап 5 је практично неоптерећен. У случају елиминације штапа 4, као на слици 4.10 б), штап 5 постаје оптерећен на затезање. У случају елиминације штапа 5 у односу на иницијалну конфигурацију, као на слици 4.10 в, смерови сила се не мењају јер је штап 5 у иницијалној конфигурацији занемарљиво оптерећен, тј. сматра се да није оптерећен. Ако се елиминише штап 7 из иницијалне конструкције, слика 4.11 а), елемент 5 постаје оптерећен на притисак.

Да би се елиминисала могућност искључивања штапа који је неопходан за конструкцију, на пример штапова 2 и 3 у случају слике 4.10, искључивање штапова из конструкције се врши тако што се елиминишу само штапови са списка штапова дозвољених за елиминацију. Списак скупа штапова који нису дозвољени за елиминацију се формира да не би дошло до појаве решења која су механизми. У случају да не постоје такви конкретни штапови, или да није очигледно који се штапови не смеју изузети, могуће је изабрати да се елиминација врши у односу на цео скуп штапова.

4.3.3 Оптимизација облика

Оптимизација облика је повезана са блоком за унос иницијалне конфигурације тачака (чворова) јер користи променљиве вредности координата тачака чији опсежи су задати на почетку, при уносу иницијалних координата. Тачке, у случају да се не користи оптимизација облика, узимају вредности задате иницијалном конфигурацијом из поставке проблема. У односу на то да ли је активна оптимизација облика, софтвер повлачи вредности координата или из списка иницијалне конфигурације или користи кореспондирајуће променљиве. Оптимизацију облика је могуће ограничити у смислу опсега могућих вредности које променљива може да има, као и прецизности, тј. броја децимала који значајно утиче на величине поља претраге. Овај аспект оптимизације се показао као најзахтевнији за оптимизациону методу. Наиме, примећено је да се

променом позиција чворова отвара могућност и промена врсте оптерећења у елементима модела, слично као код елиминације елемената оптимизацијом топологије. Дакле, елементи који су у једној конфигурацији били оптерећени на притисак или затезање, у другој конфигурацији могу имати супротно оптерећење. Ова појава је илустрована примером на слици 4.11 где је променљива само позиција једног чвора (на споју елемената 3, 5 и 6) по вертикалом правцу.



Слика 4.11 – Утицај промене позиције чвора на смер сила у штапу.

Са слике 4.11 б) се може видети да променом положаја позиције чвора, смер сила у штапу 5 се мења у односу на конфигурацију са слике 4.11 а). У положају са слике 4.11 в) када се додатно спусти чвор који спаја штапове 3, 5 и 6 у односу на положај са 4.11 б), мења се и смер сила у штапу 4. Слична појава се може уочити и при промени позиције овог чвора по хоризонталном правцу. Треба напоменути да иако неке од конфигурација са примера на слици 4.11 нису практично применљиве, ово је једноставан пример намењен да илуструје могућности промене смера сила у штаповима. Код сложенијих примера са више променљивих оптимизације облика, могуће је драстично утицати на смерове сила у штаповима променом позиција чворова. Овај ефекат утиче на стабилност конструкције и креира потребу за применом провере на извијање другачијег скупа штапова.

4.3.4 Оптимизација више аспеката

Комбинована оптимизација више аспеката је развијена тако да је у софтверу омогућено лаким укључивањем и искључивањем жељене оптимизације аспекта. Овај процес, иако олакшан за крајњег корисника, представљао је веома комплексан проблем за решавање у развоју самог софтвера, те је олакшање урађено са циљем убрзаних испитивања и поједностављења управљања софтвером. У случају да се не активира било који од аспеката оптимизације, софтвер користи конфигурацију иницијалног модела. Искључивање оптимизације аспекта повлачи и искључивање њему релевантних променљивих и коришћење иницијалних података из поставке проблема. Овај приступ убрзава поступак добијања оптималних решења и повећава прегледност резултата. Комбиновањем или коришћењем само појединачних оптимизација аспеката могуће је извести структурну оптимизацију жељеног решеткистог носача на највише 7 различитих начина.

4.4 Ограничења

Поред могућности да корисник бира оптимизацију аспекта који жели, омогућено је и селектовање појединих ограничења која ће се користити пре почетка процеса оптимизације. Софтвер може да ограничи: максимално померање чворова услед деформација, максималне дозвољене напоне на притисак и/или затезање (ограничење чврстоће), критичну сила у штапу како не би дошло до извијања, минималну дужину штапова и максималан број различитих профила попречних пресека који се користе у конструкцији.

4.4.1 Максимално померање чворова

Вредност померања услед деформације се добија анализом коначним елементима. Ова вредност се пореди са поставком задатим максималним померањем која је у складу са експлоатационим условима конструкције. Максимално померање чворова услед деформације је могуће дефинисати за конкретне или за све чворове конструкције. Софтвером је такође омогућено задавање и засебних ограничења по осам или укупно померање чвора у било ком правцу.

Могуће је задати ово ограничење са прецизношћу од $1\mu m$, али се за потребе оптимизације решеткастих конструкција препоручује милиметарска прецизност. У случају да је померање било ког од задатих чворова изван граница, софтвер користи казнену функцију, која таква решења третира као неприхватљива. Ограничење максималног померања чворова услед деформације се често налази у примерима из литературе и задаје се искуствено, према препорукама и/или у складу са потребама.

4.4.2 Максимални дозвољени напон

Ограничење максималног дозвољеног напона је најчешће примењивано ограничење у литератури. Оно омогућава задавање максималног напона на притисак и на затезање као вредности дозвољеног напона. Из анализа коначних елемената у овај се блок увозе силе у штаповима које су у односу на знак притискајуће или затезуће. Површине попречних пресека елемената се узимају пошто су извршене евентуалне оптимизације попречних пресека и/или топологије, како би ново индексирање елемената из МКЕ кореспондирало новим индексима оптимизоване конструкције. Пошто се изврши адекватна конверзија јединица, напони се деле на позитивне и негативне и проверавају да ли су већи /мањи од задатих дозвољених напона на притисак /затезање. Као и код претходног ограничења, довољно је да једном елементу напон излази из граница да би се такво решење елиминисало казненом функцијом.

4.4.3 Провера притиснутих штапова на извијање

Провера извијања по Ојлеру је ново ограничење предложено овом тезом у процесу структурне оптимизације решеткастих носача. Потребно је нагласити да је ово једино ограничење које не захтева унос корисника, јер су сви потребни подаци аутоматски добијени у софтверу, у односу на тренутну конфигурацију проблема. Ово ограничење се ретко јавља у литератури због тога што умногоме повећава комплексност налажења стварног оптимума. Чак и када се примењује, у литератури се ово ограничење класификује као динамично ограничење, јер је вредност за сваку итерацију оптимизације другачија. Из израза (4.9) се види да за ово ограничење једино π представља константу и модул еластичности се не мења у случају да су сви профили понуђени оптимизацијом попречног пресека од истог материјала.

Силе у штаповима се мењају у свакој итерацији оптимизације топологије и облика. Променљиве које фигуришу у одређивању критичне, Ојлерове, силе извијања се мењају у свакој итерацији, независно од тога који се аспект конструкције оптимизује. У случају оптимизације попречних пресека минимални аксијални момент инерције попречног пресека се мења за све штапове у свакој итерацији; у случају оптимизације топологије, као што је претходно објашњено у поглављу 4.2.2, елиминација штапова може да изазове промену у смеру сила у штаповима, те се самим тим могу променити и штапови који се проверавају на извијање (притиснути штапови). На крају, у случају оптимизације облика, мења се дужина извијања са сваком итерацијом, јер се са сваким померањем чвора мења дужина једног или више штапова. Уједно је код оптимизације облика, као и код оптимизације топологије, могућа промена смера сила у штаповима.

Због великог броја података који је потребно процесирати у свакој итерацији, ово је најзахтевније ограничење у софтверу. Како би се добили сви неопходни подаци за ово ограничење, софтвер у овај блок увози податке о аксијалним силама из блока за МКЕ, модул еластичности из задатих карактеристика материјала, карактеристике потребне за израчунавање минималног аксијалног момента инерције из блока за одређивање попречних пресека и дужине елемената из блока за задавање својстава линијама (где су већ извршене евентуалне елиминације елемената тополошком оптимизацијом, а позиције дужине одређене поставком или оптимизацијом облика). После свих адекватних конверзија јединица, силе у штаповима који су оптерећени на притисак се пореде са критичним силама тако што се посматра негативна вредност аксијалне силе и проверава да ли је већа од критичне. Овако елементи оптерећени на затезање мењају знак па морају да задовоље овај услов, док ако је сила у било ком штапу већа од његове кореспондирајуће критичне силе, цела конструкција се сматра незадовољавајућом и казнена функција одбацује оваква решења.

Увођење овог ограничења као обавезног при оптимизацији решеткастих конструкција је један од главних принципа треће хипотезе ове дисертације. Оптимална решења добијена без провере на извијање дају конструкције са елементима који су оптерећени на притисак далеко изнад критичних граница, што значи да такве конструкције није могуће извести безбедно без реалне опасности од нарушавања структурног интегритета конструкције при оптерећењу.

4.4.4 Минимална дужина штапа

Ограничење минималне дозвољене дужине штапа је још једно од нових ограничења предложених овом дисертацијом. Примећено је да у литератури код проблема који узимају у обзир оптимизацију облика постоје решења која имају нереално и непрактично кратке елементе. У софтверу је омогућено да се вредност овог ограничења унесе од стране корисника. У случају да корисник жели да конструкција се састоји из само витких штапова за ово ограничење се може користити израз:

$$l_{\min} = 10 \cdot b_{\max}, \quad (4.1)$$

где је l_{\min} најмања дозвољена дужина елемента решетке, а b_{\max} највећа димензија највећег могућег попречног пресека дефинисаног поставком и проверава се у свакој итерацији ако је активна оптимизација облика. Ово ограничење такође елиминисе решења где оптимизација облика даје преклопљене позиције чворова што није практично за извођење. Ово ограничење се аутоматски деактивира у случају да није изабрана оптимизација облика, јер у случају било које друге оптимизације или њихове комбинације, дужине елемената се не мењају.

4.4.5 Максималан број различитих попречних пресека

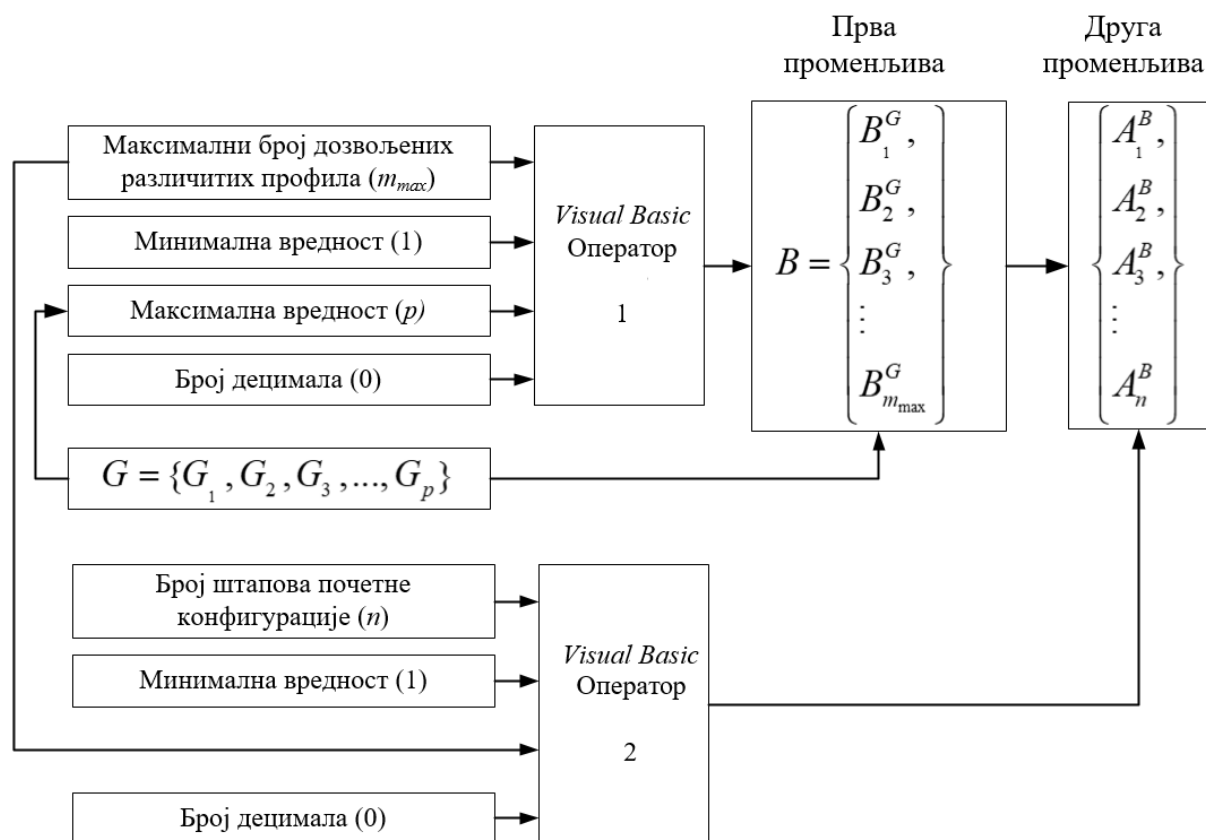
Ограничење максималног броја различитих попречних пресека је изузетно важно ограничење код оптимизације попречних пресека. У пракси је пожељно користити што мањи број различитих профила због рационалног коришћења материјала, настављања елемената и смањења могућности грешке. Искуство са коришћењем оптимизације попречних пресека је показало да оптимална решења добијена овим приступом могу да садрже велики број различитих попречних пресека. У овој дисертацији је ово ограничење математички дефинисано и имплементирано у оригинални развијени софтвер. Потребно је нагласити да је ово ограничење једино смислено користити код оптимизације попречних пресека са дискретним променљивим. Максимални број различитих профила се уноси од стране корисника у софтвер.

Начин на који је имплементирано јесте да оптимизација има два скупа променљивих за оптимизацију попречних пресека. Ово је омогућено креирањем још једног оператора писаног у програмском језику *Visual Basic*, какав је коришћен у оптимизацији попречних пресека са дискретним променљивим (слика 4.7). Разлог за коришћење две променљиве је што више елемената може да има задат исти профил, тј. ако је $m \leq m_{\max}$ друга променљива која задаје профиле штаповима, може да зада исти профил за више различитих штапова.

Први скуп променљивих, B , врши одабир из скупа могућих попречних пресека G . У овом случају уместо броја штапова почетне конфигурације задаје се максимални број различитих профила, m_{\max} . Овако се добија скуп првих променљивих који представља скуп могућих профила за сваку дату итерацију, тј. скуп индекса профила из скупа могућих попречних пресека у тој итерацији.

Друга променљива ради исто као и код оптимизације попречних пресека са дискретним променљивим без овог ограничења, са разликом што је скуп прве променљиве сада скуп могућих профила. Једина разлика јесте што у овом случају штаповима могу бити додељени само профили из скупа првих променљивих. Пошто друга променљива додељује профиле из скупа првих променљивих, ако се код прве променљиве деси да две или више променљиве имају исту вредност (исти индекс профила) то значи да ће услов из (3.11) бити задовољен. У овом случају је кардинал скупа m свакако мањи од максималног броја дозвољених различитих профила па је самим тим и услов задовољен. Начин функционисања овог ограничења је илустрован на слици 4.12.

Ограничење броја различитих профила се аутоматски деактивира у случају да није селектована оптимизација попречног пресека, јер у том случају број различитих профила није променљив у односу на иницијалну конфигурацију модела.



Слика 4.12 – Илустровани приказ функционисања ограничења максималног броја различитих елемената.

Ово представља оригинално решење, развијено за потребе ове дисертације. Да би се у примерима показала разлика између решења са различитим бројевима профила, за ово ограничење је постављена једнакост у изразу (3.11). Без ове једнакости није могуће добити оптимуме са већим бројем различитих профила од оптималног броја без овог ограничења.

Као и ограничење провере на извијање и ово ограничење се може категорисати у динамичка ограничења. У свакој итерацији оптимизације скупови прве променљиве се мењају. Додатно, друга променљива може у свакој итерацији да зада друге индексе прве

променљиве за различите штапове. На овај начин се постижу различите околности за употребу ограничења у свакој итерацији.

4.5 Укупна спољашња површина конструкције

Да би се извршило поређење оптималних резултата по критеријуму укупне спољашње површине, додат је блок који не утиче на оптимизациони процес. Овај блок израчунава укупну спољашњу површину решеткасте носеће конструкције према следећем обрасцу:

$$A_k = \sum_{i=n}^{i=1} O_i \cdot l_i, \quad (4.2)$$

где A_k представља укупну спољашњу површину конструкције, O_i представља спољашњи обим i -тог елемента, а l_i дужину i -тог елемента.

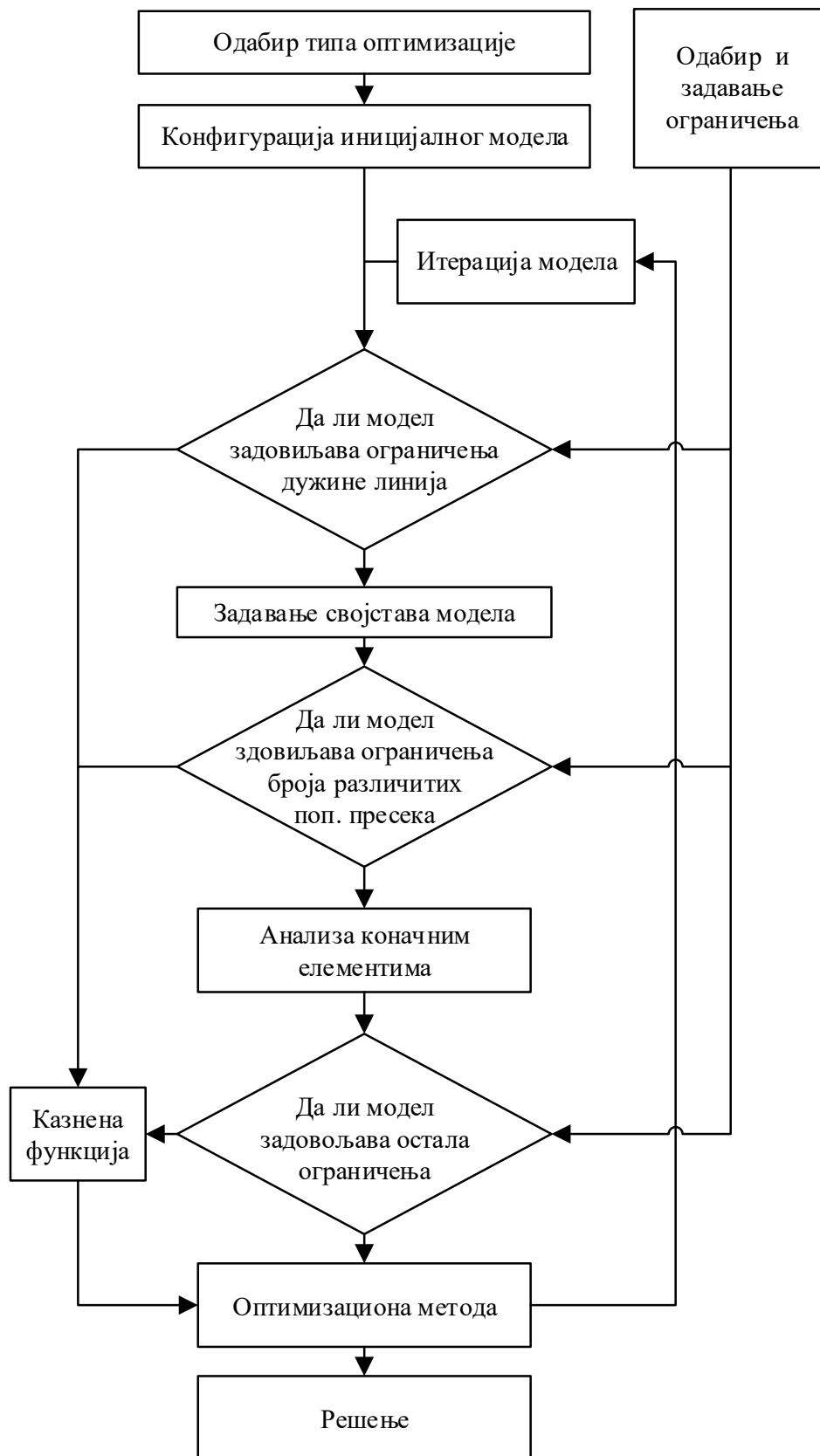
4.6 Оптимизација поступка рада софтвера

Како би се убрзало време добијања резултата, неопходно је сагледати структуру развијеног софтвера и извршити његову оптимизацију. Примећено је да постоје могућности смањења неопходног процесорског времена за одређене сегменте рада софтвера. Смањење рада процесора, тј. количине прорачуна, по итерацији може драстично да утиче на укупно време рада софтвера за дати проблем. Потреба за таквим мерама постаје јасна када се узме у обзир број потребних прорачуна за само једну итерацију једноставног оптимизационог проблема. У свакој итерацији се врши анализа коначним елементима која је најзахтевнији део прорачуна. Елиминацијом овог прорачуна на основу неиспуњености услова ограничења који не зависе од напонског стања у штаповима, могуће је драстично смањити број итерација у којима се врши анализа коначних елемената, а самим тим и укупно време трајања оптимизације.

Поједина нова предвиђена ограничења су таква да за њихово одређивање нису потребни резултати добијени из анализе методом коначних елемената. Ограничење минималне дозвољене дужине елемената може да елиминише конфигурацију дужи још пре него што им се задају својства елемената. У овом кораку су већ познате све дужине и могуће је елиминисати неадекватну конфигурацију. Друго ограничење је минималан број различитих елемената. Ово ограничење само захтева податке списка попречних пресека пре него што се параметри задају елементима. У случају да ограничење није задовољено, даљи рад са овом конфигурацијом је могуће обуставити пре задавања својстава дужима.

Ако само једно ограничење није задовољено, такво решење се не узима у обзир, тј. задаје му се казнена функција. Поступак у софтверу је оптимизован тако што решења која не испуњавају ограничења, осим што активирају казнену функцију, уједно и

деактивирају коришћење МКЕ за то решење. Алгоритам ограничења је приказан на слици 4.13.



Слика 4.13 – Алгоритам ограничења.

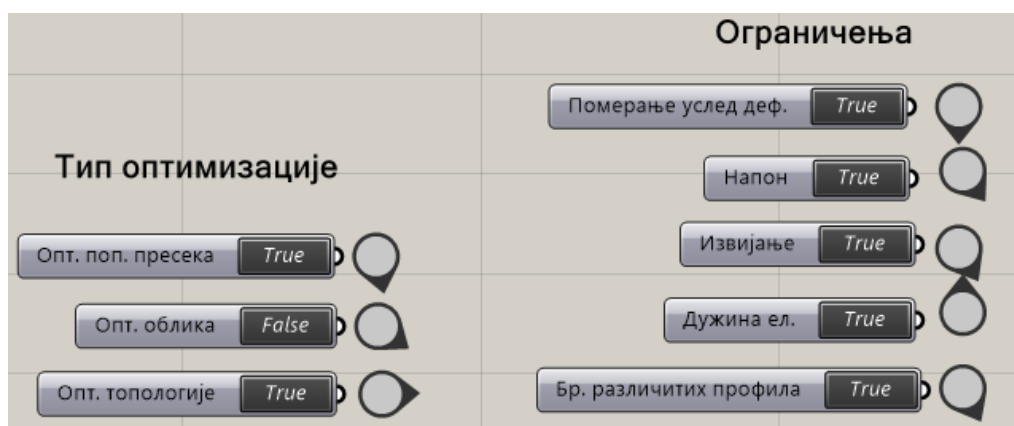
Како неки проблеми не захтевају употребу свих ограничења, софтвер даје могућност укључивања и искључивања употребе појединих ограничења у односу на потребе прорачуна. Један од разлога би био – у случају да постојање једног ограничења значи да би друго у свакој могућој варијанти решења било испуњено. На пример, ако су ограничења померања чворова таква да не постоји могућност да се направе штапови краћи од дозвољене дужине, ограничење минималне дужине штапова би било искључено.

Поред ових могућности и мера, софтвер је такође направљен тако да додатно смањи могућност појаве људске грешке аутоматизацијом одређених узрочно-последичних веза између сегмената. Као што је напоменуто у претходним деловима овог поглавља, искључење било ког аспекта оптимизације, аутоматски елиминише могућност да софтвер користи сегменте прорачуна који не фигуришу у процесу оптимизације када се тај аспект не оптимизује. Тако се искључењем оптимизације попречног пресека искључују и променљиве попречних пресека и ограничење броја различитих попречних пресека. Искључење оптимизације топологије не повлачи са собом никакве додатне мере, док искључење оптимизације облика искључује променљиве положаја чворова и проверу минималне дужине штапова.

4.7 Коришћење софтвера

Софтвер развијен за потребе ове дисертације је креиран тако да буде што лакши за коришћење и да уз минималан број неопходних података од стране корисника изврши све задате функције. Зависно од типа оптимизације који се ради, неке од уноса није потребно вршити, јер самом селекцијом типа оптимизације у самом старту елиминише потребу за неким од уноса. У случају комплетне оптимизације, коришћењем свих ограничења, унос података потребних за коришћење софтвера је дат у табели 4.1.

Одабир типа оптимизације и типа ограничења се врше укључивањем или искључивањем одговарајућих команди. Ове команде су приказане на слици 4.14. и груписане су и постављене на сам почетак, у горњи леви угао унутар софтвера као прва ставка за одређивање.

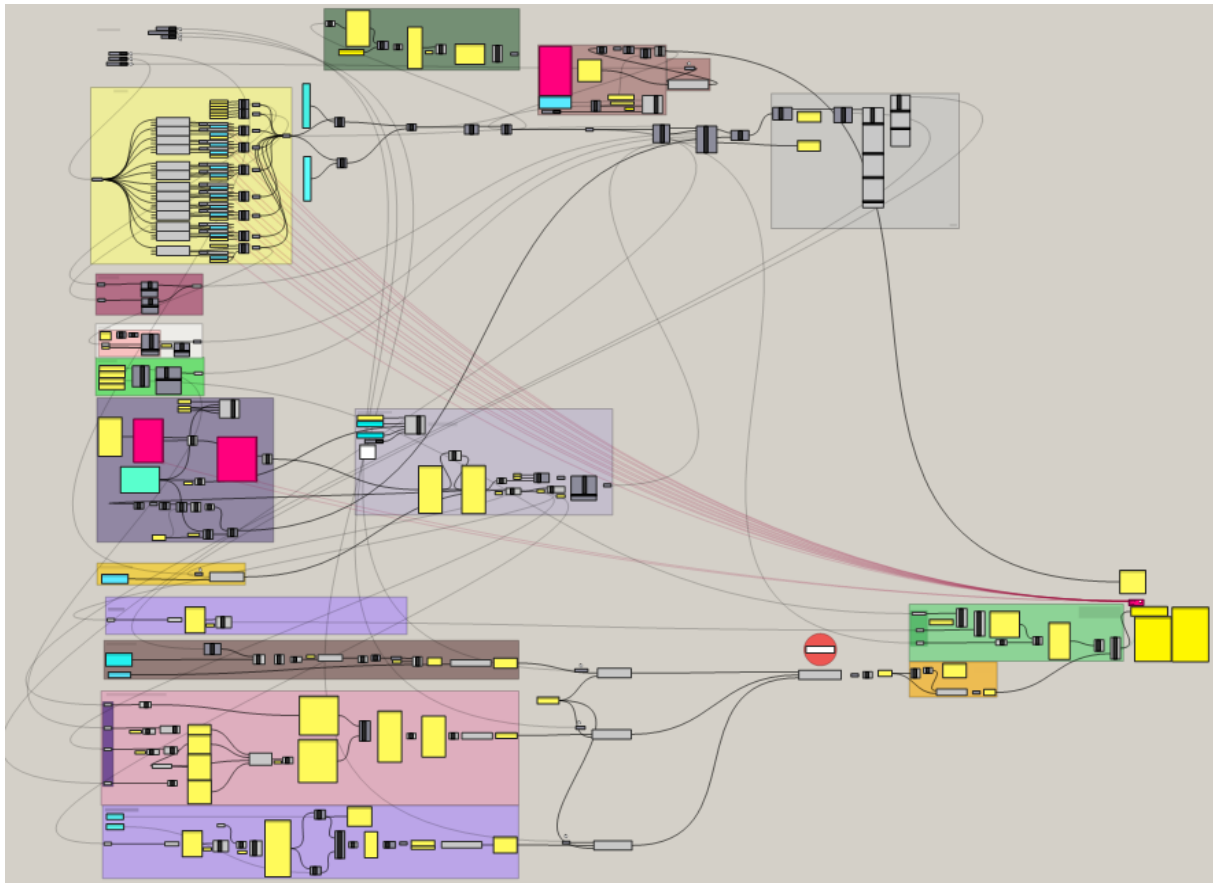


Слика 4.14 – Начин селекције типа оптимизације и ограничења.

Табела 4.1 – Унос података за коришћење софтвера.

Назив	Тип уноса	Номенклатура и јединице
Позиције тачака(чворова) иницијалног модела	Координате	x_j, y_j, z_j [m]
Повезивање тачака (чворова) у дужи (елементе) – почетне и крајње тачке	Листе почетних и крајњих индекса тачака	-
Ослонци	Индекси тачака и степени слободе	$T_{xj}, T_{yj}, T_{zj}, R_{xj}, R_{yj}, R_{zj}$
Опретећења	Индекси тачака, тип, случај и вектор	F [kN]
Материјал	Тип / карактеристике	E [kN/cm ²], G [kN/cm ²] и γ [kN/m ³]
Иницијални попречни пресек	Тип и димензије/ назив	A^G [mm]
Тип оптимизације	Селектовање	-
Променљиве попречних пресека (оптимизација поп. пресека)	Опсези вредности/ скуп профила	$G_{min}, G_{max} /$ $G_1, G_2, G_3, \dots, G_p$
Променљиве координата чворова (оптимизација облика)	Опсези вредности	$x_{imin}, x_{imax},$ y_{imin}, y_{imax} и z_{imin}, z_{imax} [m]
Ограничења	Селектовање	-
Напонско ограничење	Вредности	$\sigma_{min}, \sigma_{max}$ [kN/m ²]
Ограничење померања услед чвора	Вредност и индекс чвора	u_{jmin}, u_{jmax} [m]
Ограничење минималне дужине елемента	Вредност	l_{min} [m]
Број различитих коришћених профила	Вредност	m_{max}

На слици 4.15 је приказан изглед оригиналног софтвера развијеног за потребе ове дисертације применом визуелног програмирања, са свим везама оператора видљивим. У циљу да се визуелно поједностави изглед софтвера и да се олакша праћење, већина ових веза су иначе сакривене, али их је могуће видети појединачно селектовањем жељеног оператора или укључивањем њиховог приказа.

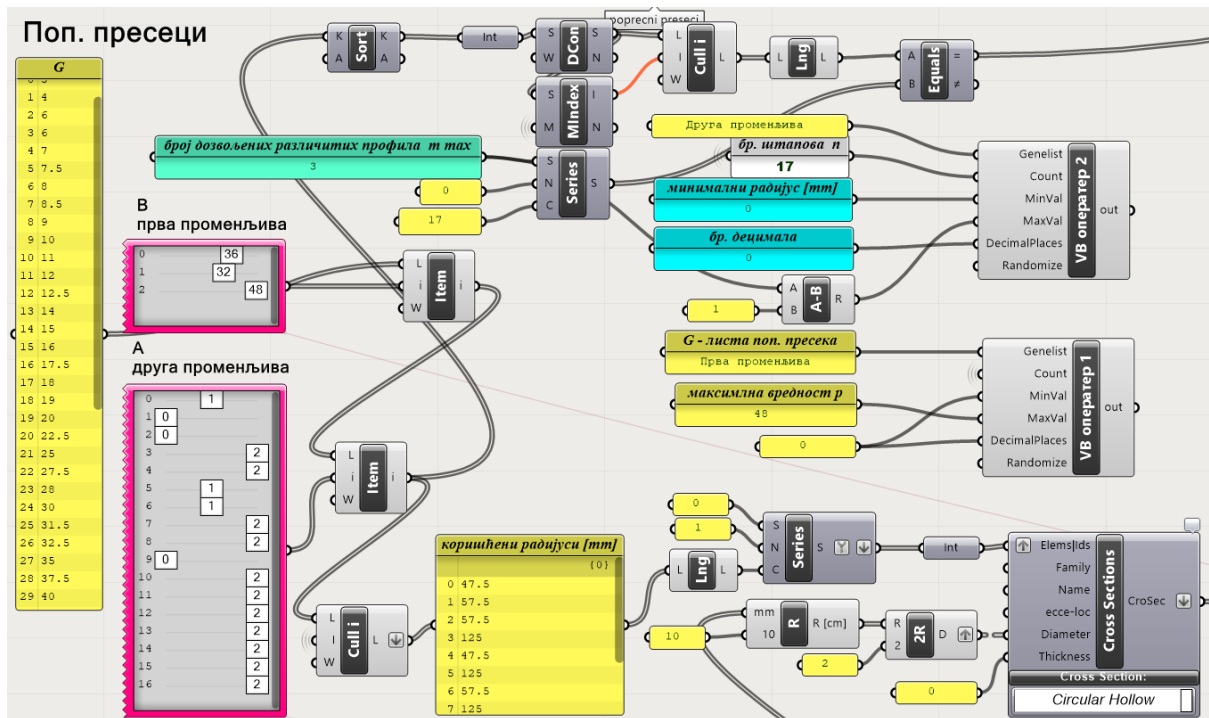


Слика 4.15 – Изглед софтвера за пример оптимизације носача са 17 етапова.

Са слике 4.15 се може закључити да постоји велика међусобна зависност података које оптимизација овог типа користи. Различити блокови су уоквирени различитим бојама како би се њихови оператори лако пратили и пронашли.

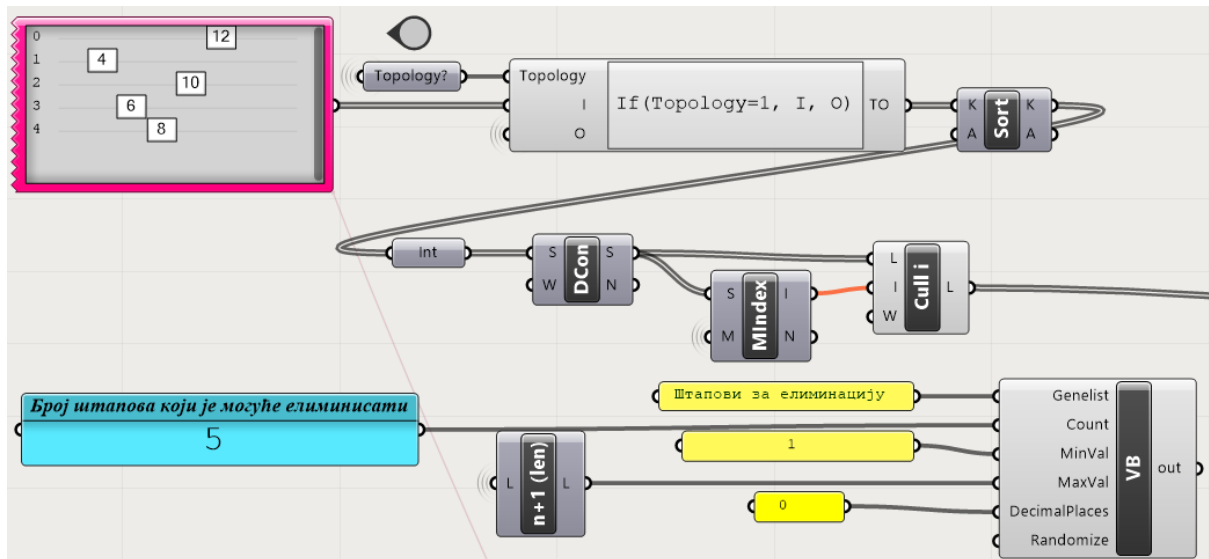
На сликама које следе искључене су боје група којима модули припадају како би се јасније видели оператори. Поред тога, неки од оператора су премештени у односу на слику 4.15 како би се лакше уочиле везе између њих. Сви уноси корисника су у светлоплаво обојеним пољима, док су жута поља очитане вредности из оператора. Љубичастом бојом су обележени скупови променљивих, док су појединачне променљиве клизачи са могућношћу промене вредности (Слика 4.18). Неке од конекција оператора су сакривене због лакше прегледности.

Модул за уношење попречних пресека, као и модул за ограничење максималног броја различитих променљивих, приказани су на слици 4.16. Може се уочити повезаност елемената према дијаграму са слике 4.12 за одређивање променљивих. Излази из ових блокова су попречни пресеци коришћени за елементе према индексима, *CroSec* и провера броја дозвољених различитих профила, *Equals*. На слици је приказан излаз ограничења када је дефинисан тачан жељени број променљивих, као што је случај у примерима у поглављу 5. Како би се ово ограничење поставило да буде максималан, а не једини број могућих различитих попречних пресека, потребно је само користити оператор неједнакости за мање или једнако уместо оператора за једнакост.



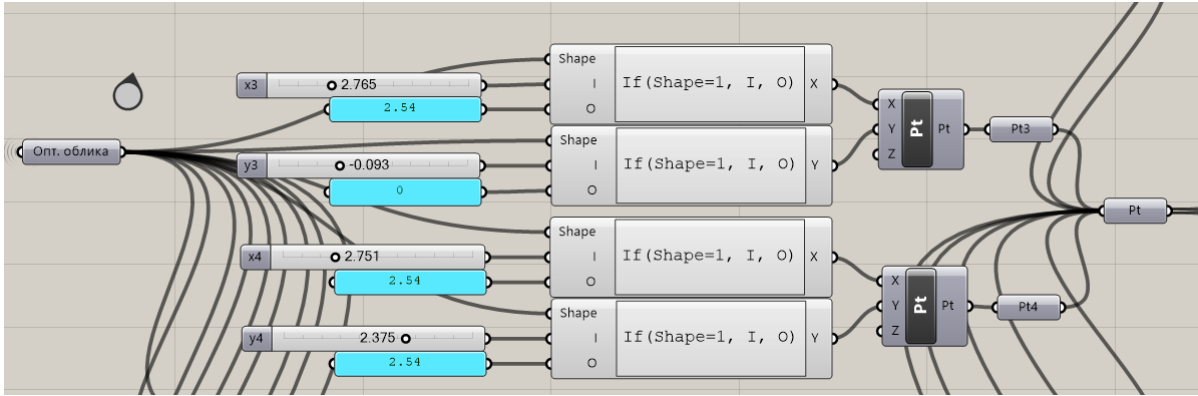
Слика 4.16 – Изглед блока за одређивање попречних preseка и ограничења максималног броја различитих профила.

Изглед модула за елиминацију елемената када је коришћена оптимизација топологије је приказан на слици 4.17.



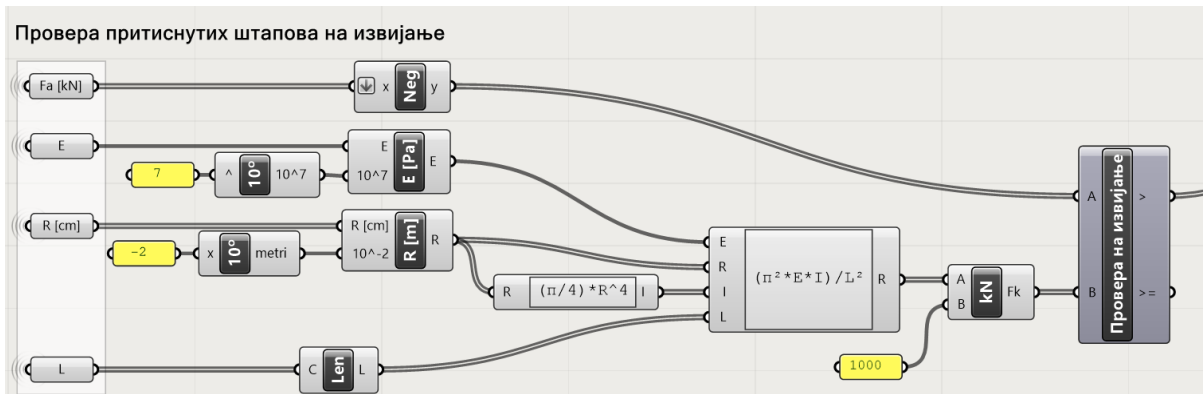
Слика 4.17 – Изглед блока за оптимизацију топологије.

Оптимизација облика се врши коришћењем блока чији је део приказан на слици 4.18. Поставком дефинисане координате чворова се уносе у плава поља како би се користиле у случају да се не врши оптимизација облика коју одређују оператори (у које се уносе подаци координата, зависно од селекције према слици 4.14).



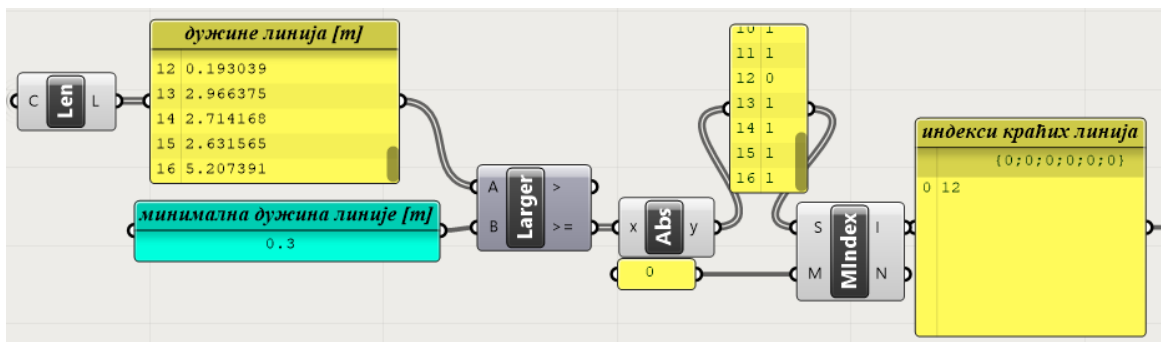
Слика 4.18 – Изглед дела блока за оптимизацију облика и одређивање иницијалне конфигурације.

Провера притиснутих штапова на извијање је приказана на слици 4.19. Улази су повезани са излазом из модула за МКЕ како би се добила аксијална сила у штаповима, са излазом модула за дефинисање материјала како би се добила граница течења, са излазом блока за додељивање попречних пресека за радијусе штапова и са блоком за повезивање чворова у штапове за дужине елемената. Излаз из провере је бинаран и одлази у блок казнене функције.



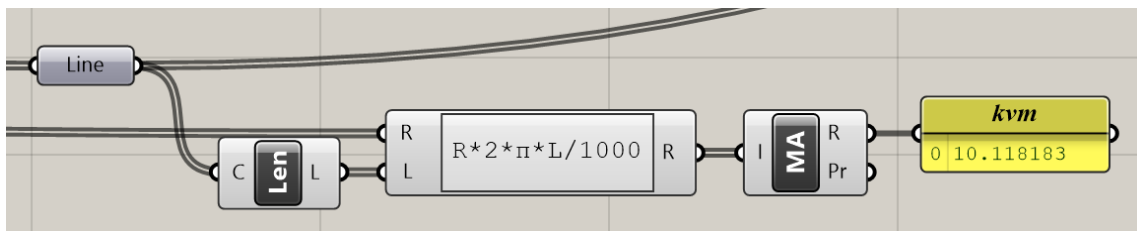
Слика 4.19 – Изглед дела блока за ограничење провере приниснутих штапова на извијање.

Провера минималне дужине елемената се добија коришћењем блока приказаног на слици 4.20. Улаз је дужина линија (штапова), а излаз је индекс штапова који не задовољавају ограничење. Постојање вредности на излазу покреће казнену функцију.



Слика 4.20 – Изглед блока за ограничење минималне дужине штапова.

Одређивање укупне спољашње површине конструкције је приказано на слици 4.21. Улази су дужине штапова и у овом случају радијуси попречних пресека, јер је реч о примеру са пуним кружним попречним пресецима.



Слика 4.21 – Изглед блока за израчунавање укупне спољашње површине конструкције решеткастог носача.

У случају другог облика профила, оператор са једначином се мења у складу са једначином спољашњег обима профила.

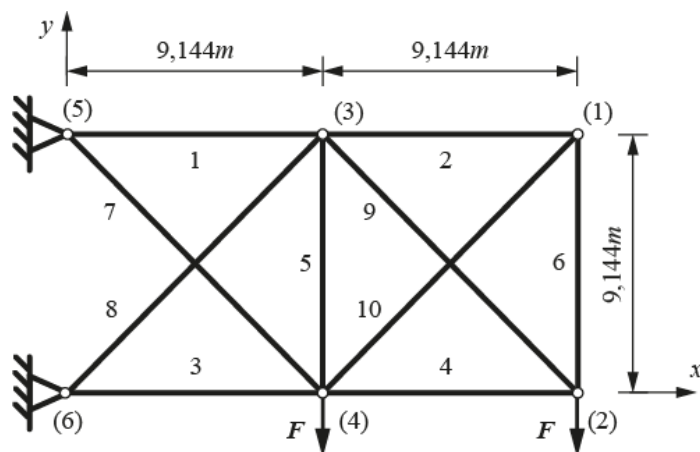
5. Примери и анализа резултата

У овом поглављу је развијени софтвер верификован и употребљен за решавање стандардних примера оптимизације решеткастих носача из литературе. Анализирани стандардни примери су са 10, 17, 25 и 47 штапова као и практичан пример кровног носача са 23 штапа, какав се користи у пракси. Верификације су рађене за примере и типове оптимизације где је било могуће наћи кореспондирајуће примере у литератури. За стандардне примере је дато поређење решења са и без коришћења динамичког ограничења на извијање како би решења била упоредива са литературом. За практичан пример кровне конструкције су коришћена сва неопходна ограничења како би решења била применљива у пракси. Резултати оптимизација са коришћењем континуалних и дискретних променљивих попречних пресека су поређени за случајеве са провером на извијање. Модели са дискретним променљивим су оптимизовани, за све типове оптимизације предвиђене примерима, са ограниченим бројевима различитих попречних пресека штапова и дата је анализа резултата. Сви примери су оптимизовани на рачунару карактеристика: $3,4GHz$ процесора, са $8GB RAM$ меморије.

5.1 Носач са 10 штапова

Пример носача са 10 штапова [3] је најчешће коришћен пример за оптимизацију решеткастих носача. Изглед конфигурације поставке модела је приказан на слици 5.1. Ова конзола се састоји из 10 елемената пуних кружних попречних пресека везаних зглобно у 6 чворова. Материјал елемената је алуминијум $AL6063-T5$ чије су карактеристике модул еластичности $68947MPa$ и густина $2,7g/cm^3$. Силе у чворовима су $F=444,820kN$, према конфигурацији са слике. Модел је ограничен са максималним померањем чворова услед оптерећења од $\pm 0,0508m$ за све чворове у свим правцима, максимално аксијално напрезање од $\pm 172,370MPa$ за све штапове и минимална површина попречног пресека је ограничена на $0,643cm^2$ код континуалних променљивих. Јединице и вредности су конвертоване у односу на империјске из литературе.

У случају оптимизације са дискретним променљивим за попречне пресеке, пречници штапова су сакупљени од различитих произвођача и сачињена је листа могућих променљивих. Пречници попречних пресека су : 12, 16, 20, 25, 30, 34, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 140, 145, 150, 152, 160, 165, 170, 175, 178, 180, 190, 200, 210, 220, 230, 240, 250, 254, 260, 270, 278, 280, 300, 305, 356, дати у mm .



Слика 5.1 – Конфигурација примера носача са 10 штапова.

У случајевима оптимизације облика, координате чворова (1) и (3) су променљиве. Положаји чворова (5) и (6), пошто су ослонци, су константни, као што је дато у [66]. Променљиве по x и y осама су ограничене на три децимална места, тј. имају милиметарску тачност. Оптимизацијом топологије може се елиминисати највише 6 елемената. Минимална могућа дужина штапа је $0,5m$.

5.1.1 Верификација

Како би се извршила верификација рада развијеног софтвера, урађен је пример за случај оптимизације попречних пресека са континуалним променљивим попречним пресецима носача са 10 штапова, без провере на извијање и поређен са резултатима из литературе који користе друге оптимизационе методе. Ово су најчешћи примери у радовима. Табела 5.1 даје поређење оптималних решења из литературе и решење добијено у развијеном софтверу (GA).

Табела 5.1 – Оптимална решења оптимизације попречних пресека без ограничења на извијање са континуалним променљивим.

Површина поп. пресека штапа [cm^2]	<i>H-SAGA</i> [16]	<i>Force method</i> [17]	<i>HNS</i> [7]	<i>TLBO</i> [8]	Овај докторат
1	196,021	196,908	216,774	196,313	152,976
2	0,643	0,645	10,452	0,645	0,645
3	149,063	149,703	147,742	149,958	158,653
4	97,613	98,214	91,617	99,146	103,925
5	0,642	0,645	10,452	0,645	0,645
6	3,572	3,558	10,452	3,710	12,705
7	47,938	48,173	51,419	48,002	86,004
8	135,384	135,704	147,742	135,268	100,422
9	137,965	138,899	141,935	138,922	129,457
10	0,064	0,645	10,452	0,645	0,645
Маса [kg]	2294,568	2295,645	2490,556	2295,611	2314,164

Резултати оптималне масе добијене развијеним софтвером се разликују за $16,18kg$ ($\sim 1\%$) у просеку у односу на друге методе из литературе. Поред овога, вредности из табеле 5.2 су резултат рада овог истраживања и верификовани су поређењем са

добијеним масама из литературе за оптимизације попречних пресека и облика [66, 94] 2322,080kg (мање од 1% разлике), попречних пресека и топологије [95] 2241.97kg (мање од 1% разлике) и комплетне оптимизације [70] 2122,622kg (3% разлике). Може се закључити да софтвер даје задовољавајуће резултате. Резултати осталих типова оптимизације се тешко налазе у литератури и ова нова решења су публикована као резултати истраживања за потребе ове дисертације [73, 74, 77]. Разлог за то је комплексност решавања оваквих проблема.

Табела 5.2 – Оптималне површине попречних пресека и масе у односу на тип оптимизације без провере на извијање примера са 10 штапова .

Површина поп. Пресека штапа [cm^2]	Опт. поп. пресека	Опт. топологије	Опт. облика	Опт. поп. пресека и топологије	Опт. поп. пресека и облика	Опт. топологије и облика	Комплетна оптимизација
1	152,976	153,938	153,938	198,010	170.597	153,938	166,031
2	0,645	-	153,938	-	89.689	-	-
3	158,653	153,938	153,938	144,357	215.320	153,938	119,875
4	103,925	153,938	153,938	105,263	88.719	153,938	102,822
5	0,645	-	153,938	-	0.643	-	-
6	12,705	-	153,938	-	64.994	-	-
7	86,004	153,938	153,938	39,652	88.032	153,938	41,338
8	100,422	153,938	153,938	118,509	68.233	153,938	127,268
9	129,457	153,938	153,938	163,653	55.120	153,938	196,390
10	0,645	-	153,938	-	45.153	-	-
Маса [kg]	2314,164	2767,351	3513,511	2240,711	2250,632	2663,042	2186,370
Померање [m]	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508

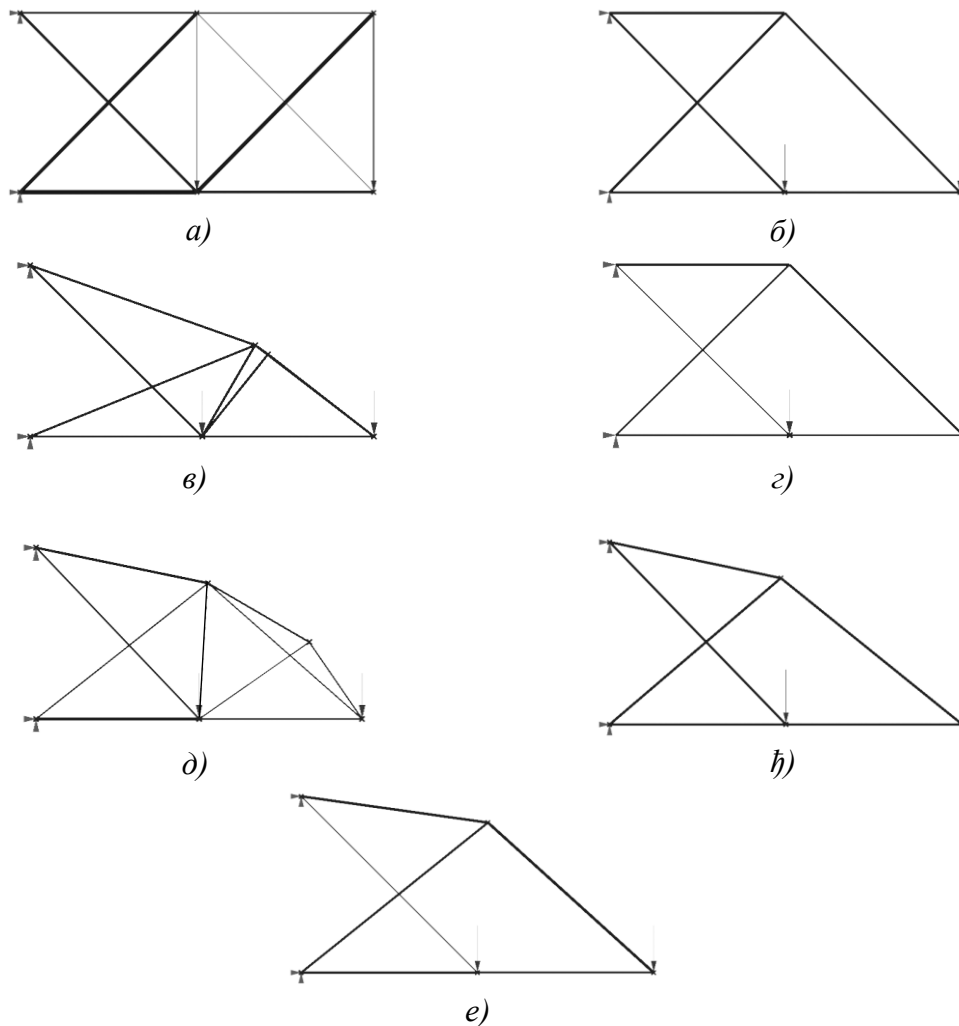
5.1.2 Резултати

Како би се усвојио попречни пресек иницијалних модела за случајеве у којима се не оптимизују попречни пресеци, извршена је оптимизација у иницијалној конфигурацији, са функцијом циља минималне масе истог попречног пресека за све елементе. Оптималан попречни пресек у случају да су сви штапови исти је $127,118cm^2$, тј. пречника $127,221mm$ за случај без провере на извијање. Пошто овакав попречни пресек тополошком оптимизацијом не смањује број елемената, за оптимизацију топологије, облика и њихове комбинације узима се за све штапове пречник $140mm$ ($153,938 cm^2$). Није усвојен пречник од $130mm$ како би било могуће елиминисање штапова приликом оптимизације топологије јер са пречником од $130mm$ оптимална конструкција са аспекта топологије је иницијална конфигурација.

За случај провере на извијање, оптимални попречни пресек је површине $430,829cm^2$, тј. пречника $234,211mm$. За потребе оптимизације топологије, облика и њихове комбинације усвојен је за све штапове пречник $240mm$. Попречни пресеци почетних модела код којих се оптимизује топологија, облик и њихова комбинација су усвојени као већи из разлога што су у иницијалном моделу, са оптималним (минималним) попречним пресеком, сви елементи оптерећени, те није могућа елиминација елемената нити померање чворова без нарушавања носивости.

Резултати оптимизација вршених без провере на извијање су дати у табели 5.2. У овој табели су белим текстом у сивим пољима дати попречни пресеци штапова који нису

задовољили услов извијања у накнадној провери, а црним словима у сивим пољима су попречни пресеци осталих штапова који су аксијално оптерећени на притисак али задовољавају критеријум извијања. Треба напоменути да су прекорачења дозвољених сила за неке од ових штапове вишеструка. Такође, само штап 10 код оптимизације само попречног пресека и само облика су изложени притиску, али су испод критичне границе за извијање, сви остали штапови ако су оптерећени на притисак, изнад су критичне границе. Слика 5.2 даје визуелну репрезентацију свих решења где се боље виде разлике конфигурација оптимума за све типове.



Слика 5.2 – Изгледи конфигурација решења примера са 10 штапова за оптимизације а) попречног пресека, б) топологије, в) облика, г) попречног пресека и топологије, д) попречног пресека и облика, ђ) топологије и облика и е) комплетне, за случај без провере на извијање.

У табели 5.3 су приказани резултати оптимизација где су коришћене континуалне и дискретне променљиве пречника попречних пресека. За оптимизацију само топологије и само облика као и симултану оптимизацију топологије и облика коришћена је иста вредност попречних пресека са списка дискретних попречних пресека, те су резултати исти за оба случаја.

Табела 5.3 – Поређење оптималних попречних пресека са континуалним и дискретним променљивим примера са 10 штапова са провером на извијање.

Површина попресека штапа [cm^2]	Опт. попр. пресека		Опт. топологије исти за оба	Опт. облика исти за оба	Опт. попр. пресека и топологије		Опт. попр. пресека и облика		Опт. топологије и облика исти за оба	Комплетна оптимизација	
	конт.	дискр.			конт.	дискр.	конт.	дискр.		конт.	дискр.
1	74,584	78,540	452,389	452,389	89,088	70,882	176,602	176,715	452,389	125,629	153,938
2	52,714	15,904	-	452,389	-	-	34,224	33,183	-	-	63,617
3	42,5,133	415,475	452,389	452,389	370,375	380,133	377,594	380,133	452,389	454,316	490,874
4	157,316	240,528	452,389	452,389	262,236	283,529	346,347	346,361	452,389	308,559	314,159
5	0,741	1,131	-	452,389	-	-	28,274	28,274	452,389	102,528	-
6	61,053	15,904	-	452,389	-	-	28,274	28,274	-	-	1,131
7	169,464	122,718	452,389	452,389	36,441	44,179	1,123	1,131	-	74,899	63,617
8	267,758	415,476	452,389	452,389	441,357	452,389	380,970	380,133	452,389	-	-
9	27,827	103,869	452,389	452,389	111,244	132,732	95,026	95,033	452,389	215,146	153,938
10	352,537	181,458	-	452,389	-	-	0,645	2,011	-	-	63,617
Маса [kg]	4759,458	4795,734	8089,269	9371,591	3838,440	3947,466	3680,937	3685,142	6321,673	3172,868	3180,693
Спољашња површина [m^2]		42,706	49,934	57,849		21,209		36,992	39,027		28,425

Код модела који не користе ограничење извијања, координате чворова који су променљиви у случајевима који користе оптимизацију облика, дати су у табели 5.4.

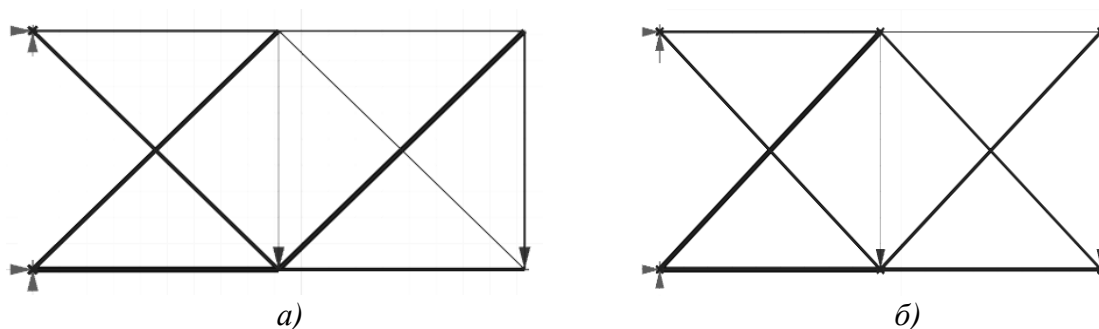
Табела 5.4 – Координате чворова за случајеве са оптимизацијом облика који немају проверу на извијање примера са 10 штапова.

Тип оптимизације	Опт. облика	Опт. поп. пресека и облика	Опт. Топологије и облика	Комплетна оптимизација
1 (x; y) [m]	(12,650; 4,398)	(15,323; 4,105)	-	-
3 (x; y) [m]	(11,964; 4,882)	(9,642; 7,252)	(8,877; 7,339)	(9,688; 7,782)

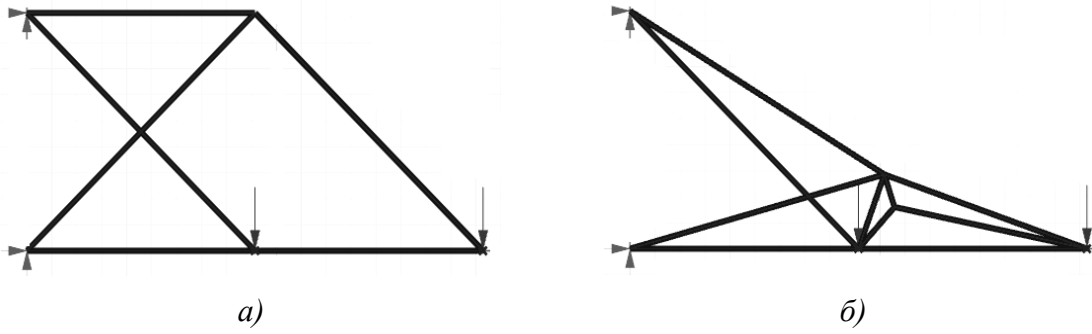
На сликама од 5.3 до 5.8 су дата поређења изгледа свих оптималних решења која узимају у обзир ограничење извијања. Код модела са континуалним и дискретним променљивим попречним пресецима, координате чворова који су променљиви у случајевима који користе оптимизацију облика, дати су у табели 5.5, где су координате исте за оптимизације само облика, и комбинације облика и топологије у оба случаја променљивих.

Табела 5.5 – Координате чворова за случајеве који узимају у обзир оптимизацију облика за пример са 10 штапова.

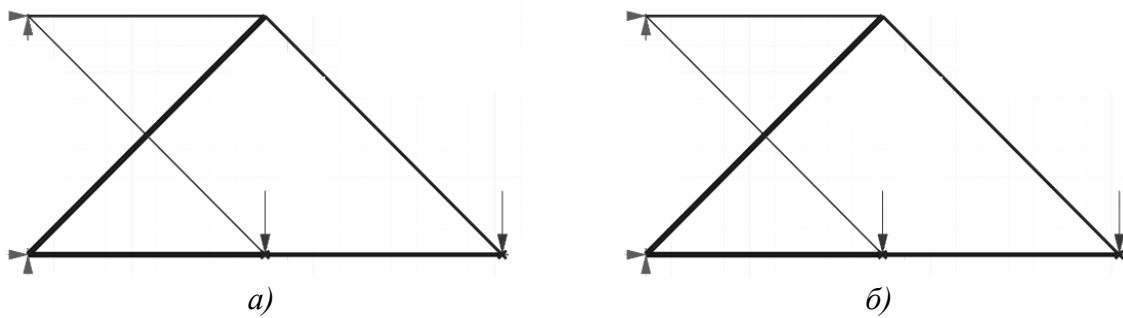
Тип оптимизације	Континуалне променљиве		Дискретне променљиве	
	1 (x; y) [m]	3 (x; y) [m]	1 (x; y) [m]	3 (x; y) [m]
Опт. облика	(10,584; 1,603)	(10,178; 2,853)	(10,584; 1,603)	(10,178; 2,853)
Опт. поп. пресека и облика	(11,587; 4,263)	(5,795; 8,003)	(11,596; 4,284)	(5,789; 8,003)
Опт. топологије и облика	(9,423; 2,956)	-	(9,423; 2,956)	-
Комплетна оптимизација	-	(12,799; 3,966)	(11,585; 1,409)	(14,150; 2885)



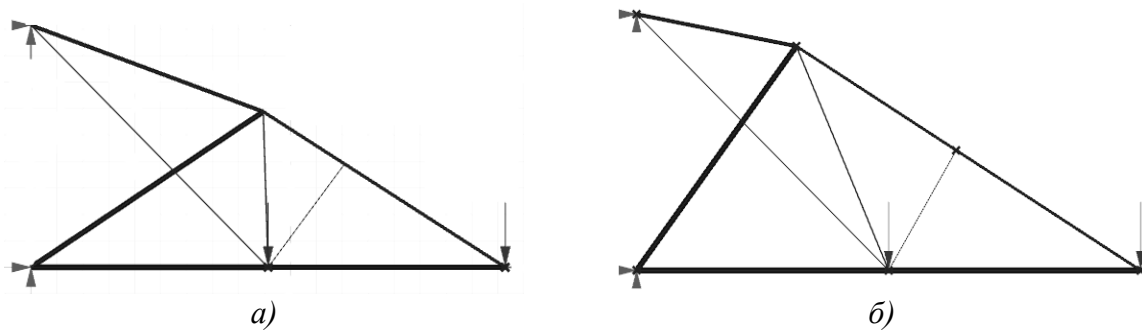
Слика 5.3 – Резултати оптимизације попречних пресека примера са 10 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.



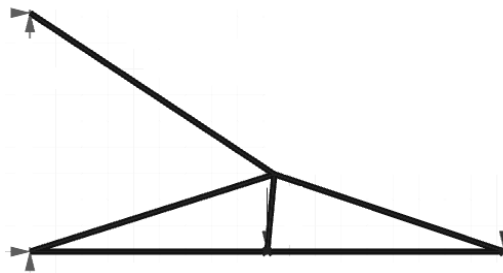
Слика 5.4 – Резултати оптимизације а) топологије и б) облика примера са 10 итапова.



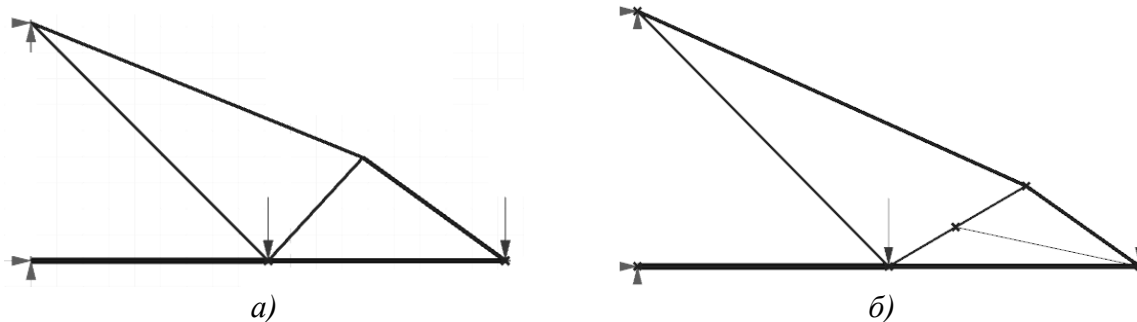
Слика 5.5 – Резултати оптимизације попречних пресека и топологије примера са 10 итапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.



Слика 5.6 – Модели оптималних попречних пресека и облика користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве, примера са 10 итапова.

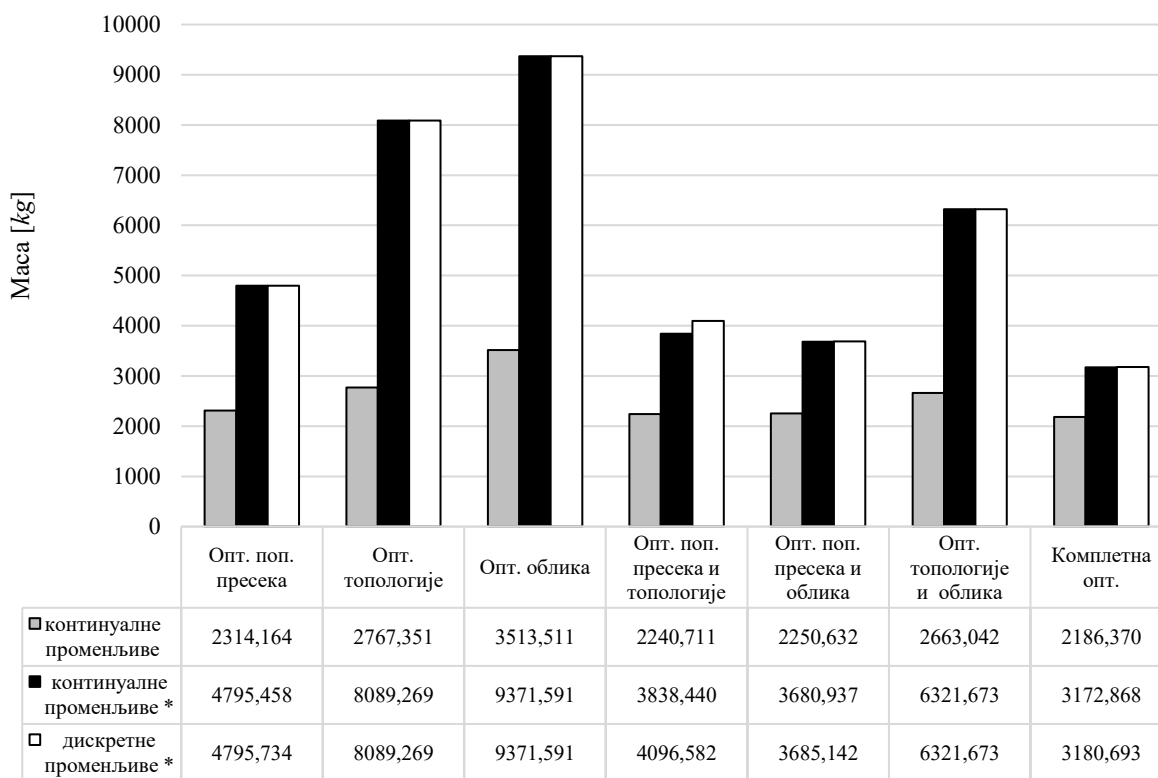


Слика 5.7 – Резултати оптимизације топологије и облика примера са 10 итапова.



Слика 5.8 – Резултати комплетне оптимизације примера са 10 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.

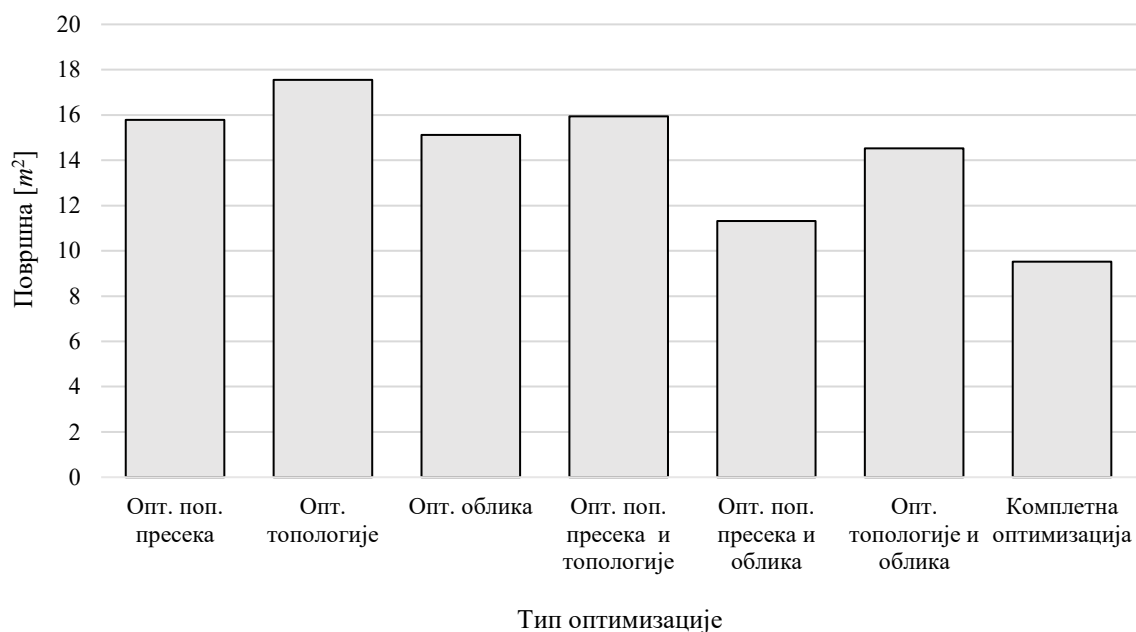
Са слика се може видети да се конфигурације знатно мењају код примене дискретних променљивих. Ово се објашњава немогућношћу постизања граничних вредности функције са конфигурацијама које не покривају распоне пречника између две променљиве. График на слици 5.9 приказује разлике маса оптималних модела у односу на иницијалне, са истим попречним пресецима свих штапова, за конфигурације без узимања у обзир променљивог ограничења на извијање и дискретних и континуалних модела који узимају у обзир ово динамичко ограничење.



* са провером на извијање

Слика 5.9 – Маса оптималних модела примера са 10 штапова.

На слици 5.10 је дато поређење спољашњих површина оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 10 штапова.



Слика 5.10 – Спољашње површине оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 10 штапова.

Како би се добила разлика маса у односу на број различитих профила штапова, поновљен је поступак на дискретним моделима са додатим ограничењем броја штапова за све типове оптимизације који узимају у обзир попречне пресеке. Табеле 5.6, 5.8, 5.10 и 5.13 дају поређење оптималних маса са различитим, ограниченим, бројевима различитих попречних пресека са општим оптималним решењем и оптималним решењем са само једним попречним пресеком за цео модел, за оптимизације попречних пресека, попречних пресека и топологије, попречних пресека и облика, и комплетне оптимизације, тим редоследом.

Табела 5.6 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека примера са 10 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	13089,261	-	172,936%
2	6752,918	48,409%	40,811%
3	5924,592	54,737%	23,539%
4	5643,872	56,882%	17,685%
5	5552,247	57,582%	15,775%
6	5292,524	59,566%	10,359%
7	5251,098	59,882%	9,495%
8	4795,734	63,361%	-
9	5223,248	60,095%	8,914%
10	5506,26	57,933%	14,816%

У табелама 5.7, 5.9, 5.11 и 5.14 су дате површине попречних пресека за оптимална решења са различитим бројевима различитих попречних пресека за оптимизације попречних пресека, попречних пресека и топологије, попречних пресека и облика, и комплетне оптимизације, тим редоследом.

Табела 5.7 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека примера са 10 штапова.

Елемент	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	452,389	78,540	78,540	78,540	78,540	113,097	95,033	415,476	103,869	103,869
2	452,389	78,540	78,540	78,540	78,540	44,179	63,617	240,528	113,097	38,485
3	452,389	452,389	452,389	452,389	415,476	415,476	415,476	78,540	415,476	452,389
4	452,389	452,389	314,159	201,062	201,062	153,938	153,938	15,904	181,458	153,938
5	452,389	78,540	78,540	78,540	78,540	23,758	23,758	15,904	7,069	28,274
6	452,389	78,540	78,540	78,540	78,540	113,097	95,033	122,718	86,590	122,718
7	452,389	78,540	78,540	78,540	78,540	113,097	113,097	1,131	86,590	113,097
8	452,389	452,389	452,389	452,389	452,389	380,133	380,133	103,869	380,133	380,133
9	452,389	78,540	78,540	78,540	78,540	23,758	23,758	415,475	33,183	23,758
10	452,389	452,389	314,159	314,159	314,159	380,133	380,133	181,458	346,361	415,476
Маса [kg]	13089,261	6752,918	5924,592	5643,872	5552,247	5245,509	5251,098	4795,734	5223,248	5506,26
Површина [m ²]	80,367	52,905	50,131	48,982	48,695	46,243	46,099	42,706	45,978	46,936

Табела 5.8 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека и топологије примера са 10 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	8319,783	-	103,091
2	5320,16	36,054%	29,868
3	4356,529	47,637%	6,345
4	4432,558	46,723%	8,201
5	4363,84	47,549%	6,524
6	4096,582	50,761%	-
7	4168,532	49,896%	1,756
8	4418,861	46,887%	7,867
9	4400,696	47,106%	7,424

Табела 5.9 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека и топологије примера са 10 штапова.

Ел.	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	490,874	283,529	122,718	122,718	95,033	70,882	153,938	176,715	70,882
2	-	-	-	-	-	-	-	2,011	2,011
3	490,874	490,874	490,874	490,874	490,874	380,133	3,801	490,874	380,133
4	490,874	283,529	283,529	314,159	314,159	283,529	283,529	314,159	283,529
5	490,874	283,529	283,529	283,529	283,529	-	4,909	283,529	3,142
6	-	-	-	-	-	-	-	1,131	1,131
7	490,874	283,529	122,718	122,718	122,718	44,179	44,179	113,097	63,617
8	-	-	-	-	-	452,389	490,874	-	452,389
9	490,874	283,529	283,529	283,529	283,529	132,732	70,882	248,846	213,825
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Маса [kg]	8319,783	5320,16	4356,529	4432,558	4363,840	3947,466	4168,532	4418,861	4400,696
Површина [m ²]	49,040	38,994	34,486	34,773	34,342	21,209	33,581	35,605	35,996

Табела 5.10 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека и облика примера са 10 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	8866,484	-	140,601%
2	4440,629	49,917%	20,501%
3	4084,884	53,929%	10,847%
4	3869,295	56,360%	4,997%
5	3812,595	57,000%	3,459%
6	3813,71	56,987%	3,489%
7	3824,721	56,863%	3,788%
8	3685,142	58,437%	-
9	3775,581	57,417%	2,454%
10	3781,66	57,349%	2,619%

Табела 5.11 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека и облика примера са 10 штапова.

Ел.	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	415,476	380,133	380,133	213,825	176,715	176,715	176,715	176,715	176,715	176,715
2	415,476	56,745	56,745	63,617	44,179	44,179	50,265	33,183	122,718	132,732
3	415,476	380,133	380,133	380,133	380,133	380,133	380,133	380,133	415,476	415,476
4	415,476	380,133	380,133	380,133	380,133	380,133	380,133	346,361	380,133	380,133
5	415,476	56,745	56,745	63,617	44,179	44,179	44,179	28,274	1,131	1,131
6	415,476	56,745	56,745	63,617	44,179	44,179	44,179	28,274	23,758	23,758
7	415,476	56,745	1,131	1,131	1,131	1,131	1,131	1,131	56,745	56,745
8	415,476	380,133	380,133	380,133	380,133	380,133	380,133	380,133	226,980	226,980
9	415,476	56,745	56,745	63,617	95,033	95,033	95,033	95,033	122,718	122,718
10	415,476	56,745	1,131	1,131	1,131	2,011	2,011	2,011	7,069	7,069
Маса [kg]	8866,484	4440,629	4084,884	3869,295	3812,595	3813,71	3824,721	3685,142	3775,581	3781,66
Површина [m ²]	56,807	38,226	33,969	33,230	33,087	33,146	33,250	36,992	33,654	33,689

Табеле 5.12 и 5.15 дају координате чворова за оптимизације попречних пресека и облика, и комплетне оптимизације, тим редоследом.

Табела 5.12 – Координате чворова оптималних решења за у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попр. пресека и облика примера са 10 штапова.

Коорд.	Координате чворова [m] за број различитих профила									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	11,487	11,561	11,524	11,635	11,6	11,6	11,6	11,596	10,23	10,23
y_1	1,427	3,172	3,963	3,97	3,975	3,972	3,972	4,284	3,516	3,516
x_3	11,312	6,817	6,037	5,957	5,916	5,916	5,916	5,789	8,888	8,888
y_3	3,126	7,235	7,326	7,405	7,452	7,452	7,452	8,003	5,305	5,305

Табела 5.13 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем комплетне оптимизације примера са 10 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	5896,031	-	85,369
2	4325,324	26,640%	35,987
3	3572,348	39,411%	12,314
4	3386,197	42,568%	6,461
5	3180,693	46,054%	-
6	3233,19	45,163%	1,650
7	3268,929	44,557%	2,774
8	3413,695	42,102%	7,326
9	3276,435	44,430%	3,010

Табела 5.14 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила за проблем комплетне оптимизације примера са 10 штапова.

Елемент	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	415,476	23,758	181,458	181,458	153,938	132,732	132,732	176,715	201,062
2	-	-	-	-	63,617	78,540	50,265	63,617	78,540
3	415,476	490,874	490,874	490,874	490,874	490,874	490,874	490,874	490,874
4	415,476	490,874	490,874	415,476	314,159	314,159	346,361	346,361	380,133
5	415,476	23,758	28,274	28,274	-	-	-	56,745	12,566
6	-	-	-	-	1,131	1,131	1,131	103,869	103,869
7	-	-	28,274	28,274	63,617	78,540	70,882	63,617	33,183
8	415,476	201,062	-	-	-	-	-	-	-
9	415,476	201,062	181,458	181,458	153,938	201,062	213,825	78,540	63,617
10	-	-	-	-	63,617	78,540	50,265	50,265	1,131
Маса [kg]	5896,031	4325,324	3572,348	3386,197	3180,693	3233,19	3268,929	3413,695	3276,435
Површина [m ²]	37,775	32,268	27,263	26,727	28,425	27,949	27,735	31,459	28,987

Табела 5.15 – Координате чворова оптималних решења за у односу на број различитих профила за проблем комплетне оптимизације примера са 10 штапова.

Коорд.	Координате чворова [m] за број различитих профила								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x ₁	-	-	-	-	11,585	11,586	11,362	11,406	6,768
y ₁	-	-	-	-	1,409	1,387	1,605	4,126	5,569
x ₃	9,155	10,304	10,235	9,803	14,15	14,262	13,616	7,619	9,828
y ₃	3,628	3,239	3,48	3,749	2,885	2,904	3,231	5,795	4,085

5.1.3 Анализа резултата

Код оптимизације примера са 10 штапова резултати који не узимају у обзир извијање као динамичко ограничење дају резултате који су у практичној примени апсолутно неупотребљиви. У литератури се ови резултати појављују и користе се најчешће у циљу унапређивања рада оптимизационих метода и могућности сагледавања и анализе оптимизационог процеса. Овом дисертацијом анализирана су решења са и без употребе динамичких ограничења на извијање за овај пример. Решења без провере на извијање су коришћена због поређења са литературом. Из табеле 5.2 се јасно види да у свим оптималним моделима, независно од тога о ком је типу оптимизације реч, постоје штапови оптерећени на извијање који не задовољавају ограничење на извијање по Ојлеру (тамносива поља). Једини штап који задовољава услове, а оптерећен је на притисак у случају оптимизације само попречних пресека и оптимизације само облика је тополошки сувишан, што се види из резултата свих оптимизација које узимају у обзир топологију (светлосива поља). Постоје по 3 и више штапова код којих би дошло до извијања, па се може закључити да је постојање овог ограничења неопходно за било какав вид практичног извођења.

Када се у процес оптимизације укључе ограничења минималне дужине штапова и провера на извијање, постижу се практично применљиви резултати. Пошто се у литератури јавља пуно примера који користе континуалне променљиве попречног пресека, урађена је оптимизација са континуалним променљивим попречним пресецима. Због практичне применљивости резултата, урађена је и оптимизација са дискретним променљивим попречних пресека. У случају оптимизације топологије и облика, као и њихове комбинације, као што је претходно наведено, коришћен је исти попречни пресек, за све елементе модела, који припада скупу дискретних променљивих због незнатне разлике у димензијама са резултатима оптимизације са континуалним променљивим. Резултати оптимизације коришћењем континуалних и дискретних променљивих се веома мало разликују у маси. Разлике маса између добијених модела са континуалним и дискретним попречним пресецима је 0,762% за оптимизацију попречних пресека, 15,064% за оптимизацију попречних пресека и топологије, 0,114% за оптимизацију попречних пресека и облика и 9,051% за комплетну оптимизацију. Очекивано, дискретна решења су нешто веће масе у односу на решења која користе континуалне променљиве јер континуална решења имају могућност претраге простора у околини дискретних оптималних вредности. Решења са комбинацијом оптимизације облика коришћењем континуалних променљивих такође омогућавају решења која дискретне вредности не могу постићи, те се геометрије тих решења разликују још више. Код комплетне оптимизације се не јављају исте топологије за оба случаја, баш из овог разлога.

Поређењем оптималних маса решења оптимизације само са дискретним променљивим може се уочити да се најмања маса постиже оптимизацијом сва три аспекта симултано (комплетном оптимизацијом). Потребно је нагласити да аналитичко решење прорачуна овог носача даје исте резултате као оптимизација са једним истим попречним пресеком за све штапове (табела 5.6) јер се димензионисање врши у односу на најоптерећенији штап. То значи да је оптималнио решење где су оптимизовани само попречни пресеци 63,361% мање масе у поређењу са аналитичким решењем. Оптимална

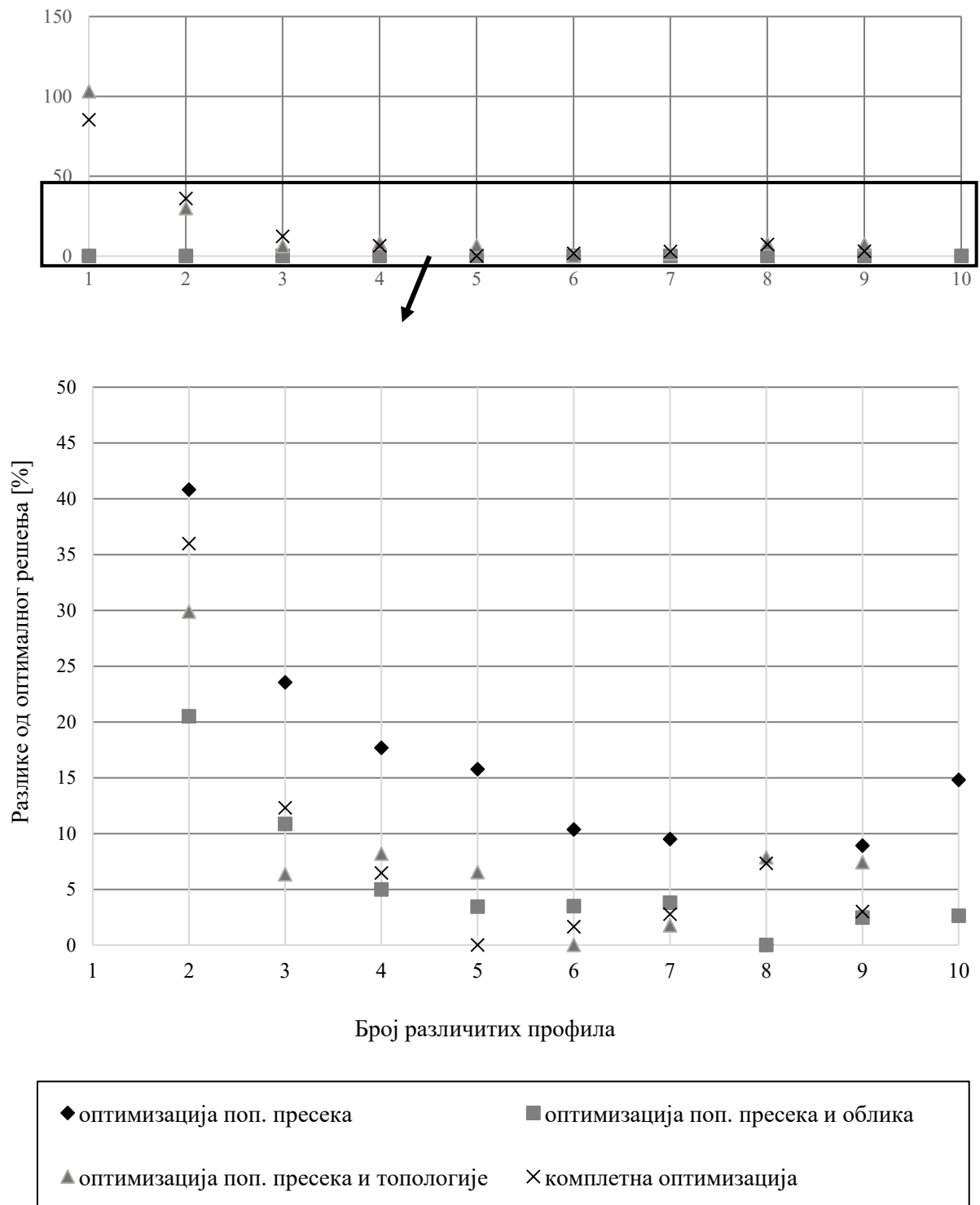
решења само топологије и само облика дају значајно веће масе од осталих оптималних решења. Она су упоредива са аналитичким решењем јер користе исти попречни пресека, тако да оптимизацијом само топологије добија се 38,201% мања маса, а оптимизацијом само облика 28,404% мања маса од аналитички добијеног модела.

Резултати комплетне оптимизације дају 75.701% мању масу од аналитичког решења. Детаљнијом анализом резултата могуће је уочити да се разлике маса где је оптимизован облик или топологија у комбинацији са оптимизацијом попречних пресека даје нешто лошије, али упоредиве резултате са комплетном оптимизацијом. Конкретно, оптимизација попречних пресека и облика даје 13,689% већу масу од комплетне оптимизације (71,847% мања маса од аналитичког модела), док оптимизација попречних пресека и топологије даје 22,357% већу масу од решења комплетне оптимизације (68,704% мања маса од аналитичког модела). Оптимизација само попречних пресека даје 33,677% већу масу од резултата комплетне оптимизације. Када се посматрају разлике оптималних маса, јасно је да је најбоље користити комплетну оптимизацију. У случајевима када то није могуће, евидентно, било која комбинација која користи оптимизацију попречних пресека, па чак и оптимизација само попречних пресека, даје приближно смањење масе.

У пракси није могуће постићи конструкције оптимизацијом континуалних попречних пресека. Имајући ово у виду, дати су резултати укупне спољашње површине само за оптималне моделе се дискретним попречним пресецима. Поређењем површина оптималних решења уочава се недостатак апсолутне корелације резултујућих укупних површина и оптималних маса у односу на тип оптимизације. Будући да су у питању пуни попречни пресеци, дебљина зида профила није фактор у овој разлици. Оптимизације које узимају у обзир облик, у овом примеру дају мање укупне површине од оптимизације само попречног пресека, као и топологије и њених комбинација. Ово је резултат смањења дужина елемената. Комплетна оптимизација у овом примеру даје најмању укупну површину и најмању масу.

Оптимално решење примера са 10 штапова у случају оптимизације само попречних пресека садржи 8 различитих попречних пресека у конструкцији. Оптимизација попречних пресека и топологије даје оптимално решење са 6, оптимизација попречних пресека и облика 8, а комплетна оптимизација даје оптимално решење са 5 различитих попречних пресека. Ово су непрактично велики бројеви различитих профила које би било потребно искористити за једну конструкцију. Ограничавањем броја различитих попречних пресека у решењима су добијене оптималне масе за све могуће вредности броја различитих попречних пресека. У овом кораку су само поређене оптимизације које узимају у обзир попречне пресеке као променљиве. Табеле 5.6, 5.8, 5.10 и 5.13 дају поређења резултата оптимизације са ограниченим бројем различитих профила са оптималним решењем и са аналитичким решењем (решењем где су сви исти попречни пресеци). Поређењем резултата са слике 5.11 се јасно види да масе расту скоро нормалном расподелом са смањењем броја различитих попречних пресека, а што је број различитих већи од оптимума, маса се повећава у односу на оптимална решења без овог ограничења. Повећање масе у односу на оптимално решење, лево и десно од њега на графику (6.11), указује на то да су у питању глобалне оптималне вредности броја различитих профила. На слици 5.11 је приказана разлика маса оптималних модела са свим бројевима различитих профила у

односу на оптимум за све случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречног пресека код примера са 10 штапова, са увећаним делом графика.



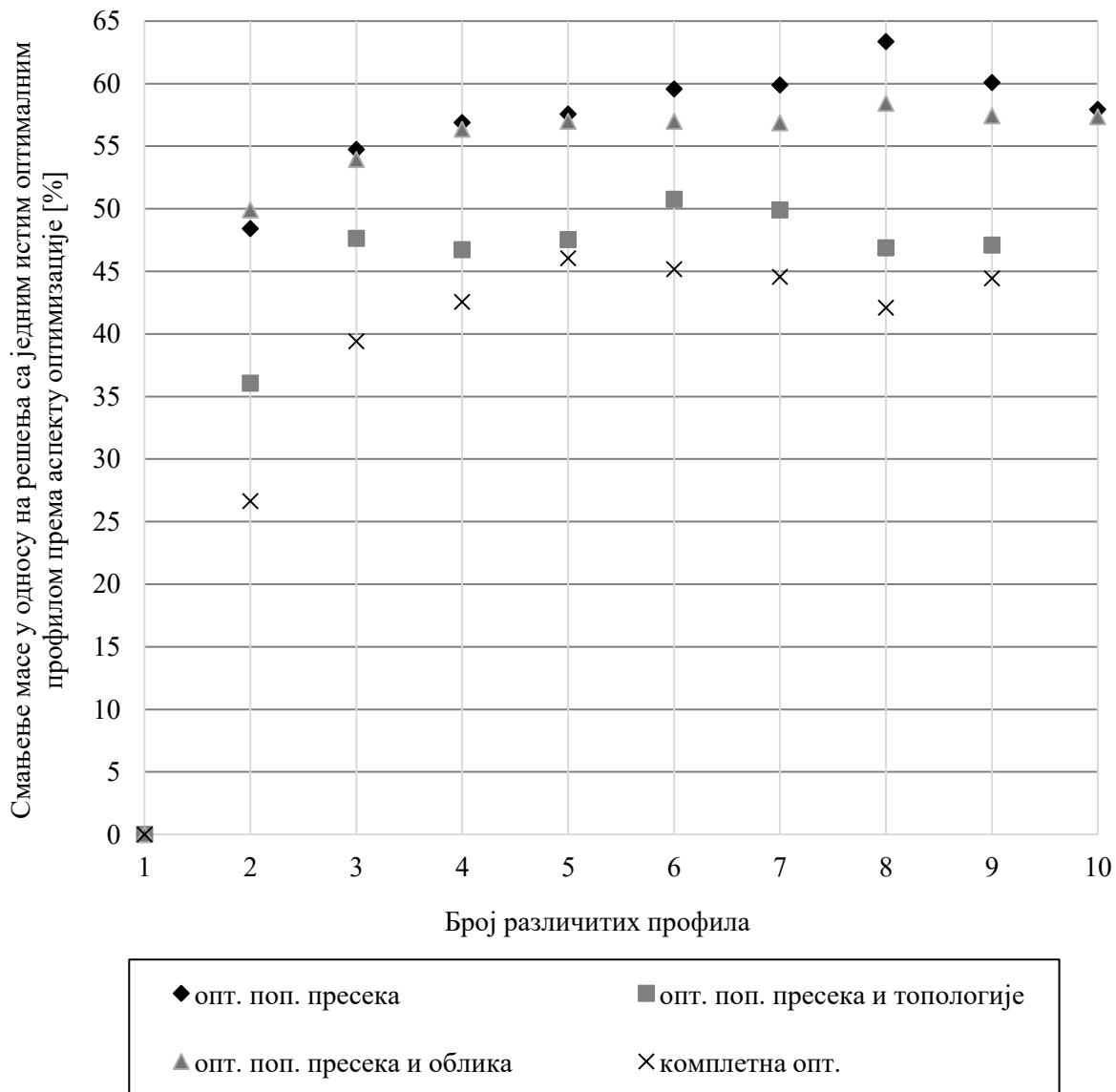
Слика 5.11– Разлика маса оптималних модела у односу на број различитих профила за пример са 10 штапова.

Приликом конструисања решеткастих носача конвенционалним методама, рационално је користити највише 3 до 4 различита профила у односу на сложеност конструкције. У случају оптимизације само попречних пресека примера са 10 штапова решења са 3 различита попречна пресека даје 23,539% веће резултате од оптимума за тај аспект (са 8 различитих профила), док је са 4 различита профила та разлика 17,685%. Код оптимизације попречних пресека и топологије решења са 3 различита попречна пресека даје 6,345% веће резултате од оптимума за тај аспект (са 6 различитих профила), док је са 4 различита профила та разлика 8,201%. Овај феномен појаве веће масе са већим бројем различитих профила јавља се услед тога што је оптимално решење за пример са 3 различита попречна пресека оптимална за попречне пресеке те тополошке конфигурације. Ово је уједно и оптимална конфигурација топологије у случају 4 различита попречна пресека, али услед услова за постојање 4 различита попречна пресека, један од профила мора бити већи у овом случају. Алтернативна тополошка решења нису могла да конвергирају овом минимуму. Код оптимизације попречних пресека и облика, решења са 3 различита попречна пресека дају 10,847% веће резултате од оптимума за тај аспект (са 8 различитих профила), док је са 4 различита профила та разлика 4,997%. Код комплетне оптимизације са 3 могућа различита профила добија се да је 12,314% већи резултат од оптимума (са 5 различитих профила), док је са 4 могућа различита профила та разлика 6,461%.

На слици 5.12 је дато поређење оптималних маса у односу на број различитих попречних пресека и решења кореспондирајућих типова оптимизације са само једним (оптималним за тај случај) попречним пресеком. Примери који узимају у обзир топологију немају оптимална решења са 10 различитих штапова, јер у том случају топологија није оптимизована пошто су сви штапови из иницијалног модела присутни.

Када се постави ограничење од 4 различита профила оптимизације попречног пресека, као и решења оптимизација попречног пресека и облика дају преко 55% боље резултате од решења када се за те исте типове оптимизација користи само један оптимални профил. У случају комплетне оптимизације и оптимизације попречних пресека и топологије са 4 различита профила постиже се преко 40% боље решење од решења са једним оптималним профилем.

Ако се посматрају разлике укупних спољашњих површина за оптимизације конкретних аспеката у односу на број различитих профила попречних пресека код оптимизације само попречних пресека, постоји корелација са резултатима маса. Ово је и логично, пошто се дужине елемената не мењају, као ни број коришћених профила, тако да су једини фактор утицаја на укупну површину пречници коришћених елемената. У случају оптимизације попречних пресека и топологије, осим код случаја са 3 различита профила, јавља се иста корелација. Ово одступање од тренда је незнатно и може се приписати уоченој могућности штапа 4 да у случају са 4 различита профила оптимизација, постиже решење где тај штап има већу вредност у односу на решење са 3, како би био испуњен услов броја различитих профила. Код оптимизације облика и попречних пресека решење са 5 различитих профила даје најмању укупну површину, са незнатном разликом између тог решења и решења са 3, 4, 6 и 7 различитих профила.

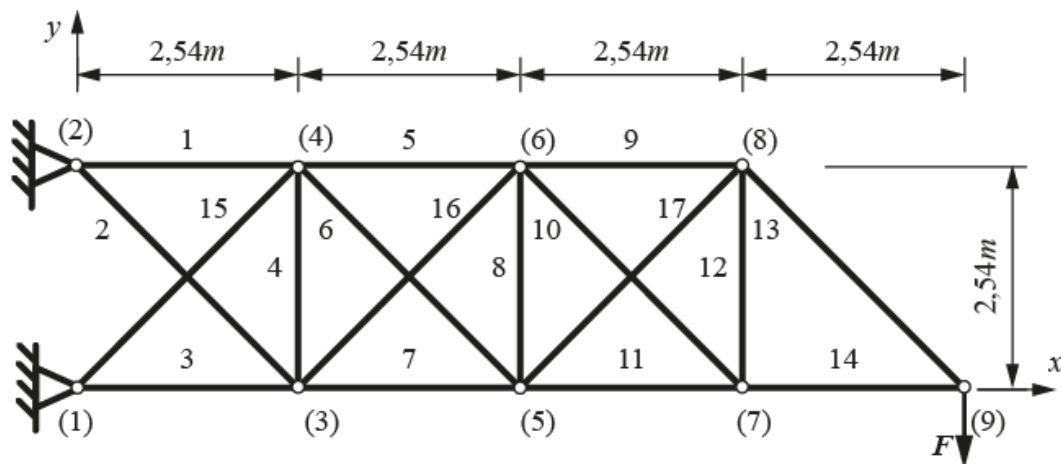


Слика 5.12 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројевима различитих профила у односу на решење са само једним истим оптималним профилем за случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречних preseка примера са 10 штапова.

Посматрањем података уочено је да је то случај јер су варијације у попречним preseцима и положају чворова мале, а ова решења имају укупно најмање дужине елемената. Најповољнији случај за минималну укупну површину код комплетне оптимизације се јавља код решења са 4 различита попречна preseка. Варијације у резултујућим површинама код оптимизације свих аспеката конструкције је тешко приписати некој карактеристици решења због великог броја променљивих и велике разлике између концепција решења у односу на број различитих профила. Интересантно је напоменути да најмању спољашњу површину модела код овог примера нема решење комплетне оптимизације, већ оптимално решење попречних preseка и топологије ($21,209m^2$).

5.2 Носач са 17 штапова

Пример носача са 17 штапова [26, 96] је још један од комплексних раванских проблема. Конфигурација је постављена у 9 чворова као што је приказано на слици 5.13. За овај пример коришћени су кружни пуни попречни пресеци од конструкционог челика карактеристика: модул еластичности $206842,719\text{MPa}$ и густина $7,4\text{g/cm}^3$. Сила од $F=444,82\text{kN}$ је постављена у чвору 9 у $-y$ смеру. Овај пример нема напонских ограничења, али има задато максимално померање свих чворова у x и у правцима од $\pm 0,0508\text{m}$.



Слика 5.13 – Конфигурација примера носача са 17 штапова.

За решавање оптимизационих проблема коришћењем континуалних пречника попречних пресека минимални пречници су задати $9,045\text{mm}$ ($0,645\text{cm}^2$). Што се тиче дискретних променљивих, попречни пресеци су сакупљени из каталога различитих произвођача и састављен је списак могућих пречника штапова и то: 6, 8, 12, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 38, 40, 45, 50, 55, 56, 60, 63, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 220 и 250, где су вредности дате у mm .

У случајевима оптимизације облика, x и y координате чворова 3, 4, 5, 6, 7 и 8 су променљиве, док је само $+y$ координата променљива код чвора 9. Променљиве по x и y осама су ограничене на три децимална места, тј. имају милиметарску тачност. Положаји чворова 1 и 2, пошто су ослонци, су константни. Оптимизацијом топологије може се елиминисати највише 6 елемената. Минимална могућа дужина штапа је усвојена као $0,3\text{m}$.

5.2.1 Верификација

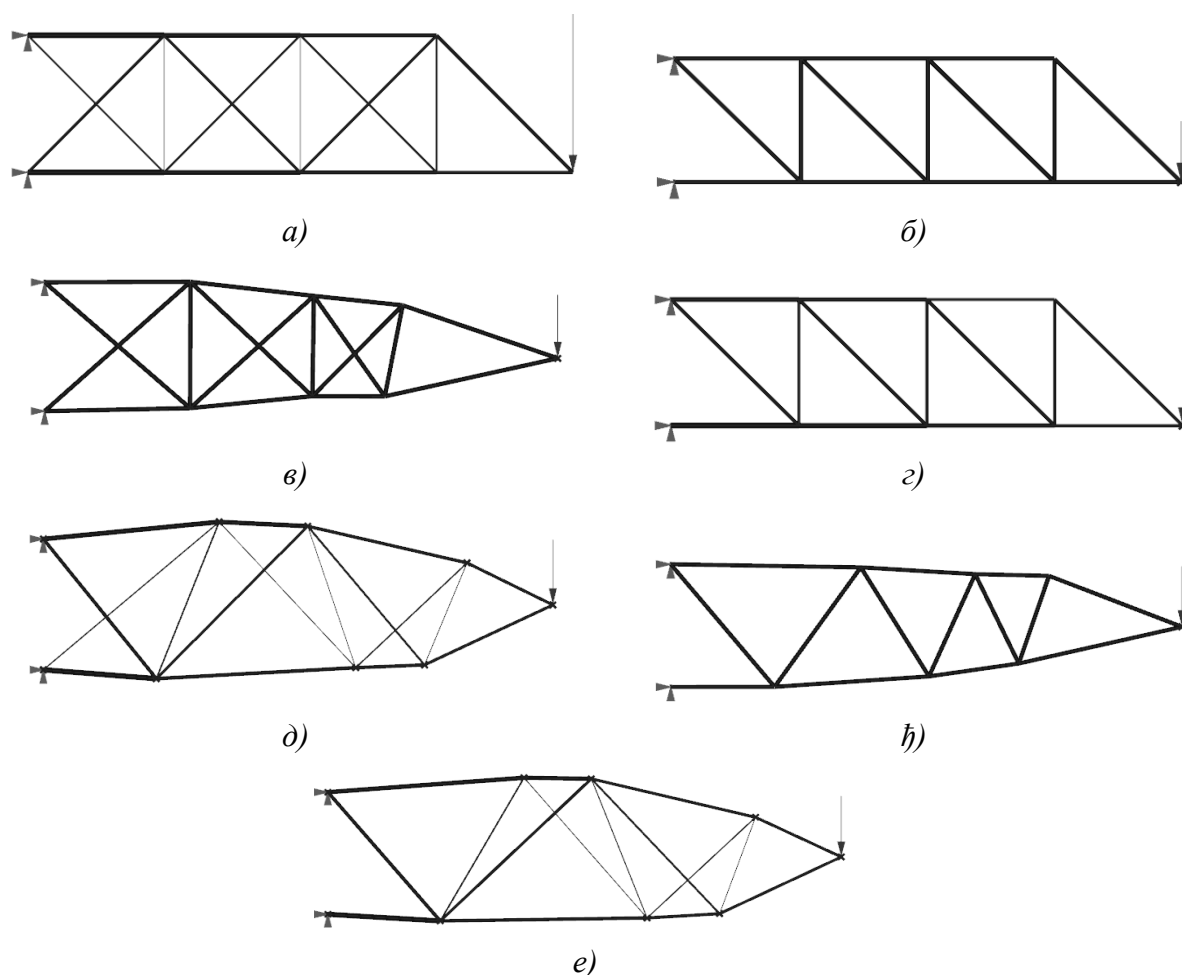
Како би се извршила верификација рада развијеног софтвера, урађен је и пример за случај оптимизације попречног пресека са континуалним променљивим попречним пресецима носача са 17 штапова без провере на извијање и упоређен са резултатима из литературе [16] где су аутори користили оптимизациону методу *H-SAGA*. Резултати се

разликују за око 1%, тј. 13,365kg, где је у наведеном раду добијена маса од 1169,705kg, док је софтвером развијеним за потребе ове дисертације добијена маса од 1183,071 kg.

5.2.2 Резултати

Како би се усвојио попречни пресек иницијалних модела, урађен је исти процес као за пример из 5.1. Оптималан попречни пресек у случају да су сви штапови истог профила је $63,317\text{cm}^2$, тј. пречника 90mm за моделе који не врше проверу на извијање, а $79,614\text{cm}^2$, тј. пречника 100,681mm за моделе који врше проверу на извијање. За потребе оптимизације топологије, облика и њихове комбинације узета је површина попречних пресека $86,590\text{cm}^2$, тј. пречника 105mm (13089,261kg) за моделе који врше проверу на извијање за случајеве континуалних и дискретних попречних пресека.

Слика 5.14 приказује оптимална решења за пример са 17 штапова код којих се не врши провера на извијање.



Слика 5.14 – Изгледи конфигурација решења примера са 17 штапова за оптимизације а) попречних пресека, б) топологије, в) облика, г) поп. пресека и топологије, д) поп. пресека и облика, ђ) топологије и облика и е) комплетне оптимизације, за случај без провере на извијање.

Резултати оптимизација вршених без провере на извијање су дати у табели 5.16 и у њој су белим текстом у сивим пољима дати попречни пресеци штапова који нису задовољили услов извијања у накнадној провери, а црним словима у сивим пољима су попречни пресеци осталих штапова који су аксијално оптерећени на притисак али задовољавају критеријум извијања. Као код претходног примера, притисне силе које делују на штапове који не задовољавају критеријум извијања су вишеструко веће од дозвољених.

Координате чворова у случајевима у којим се оптимизује облик за примере без провере на извијање су дати у табели 5.17. Табела 5.18 даје поређење попречних пресека маса и померања за примере где је вршена провера на извијање, за случајеве коришћења континуалних и дискретних попречних пресека.

Табела 5.16 – Оптималне површине попречних пресека и масе у односу на тип оптимизације без провере на извијање примера са 17 штапова.

Површина поп. Пресека штапа [cm ²]	Опт. поп. пресека	Опт. топологије	Опт. облика	Опт. поп. пресека и топологије	Опт. поп. пресека и облика	Опт. топологије и облика	Комплетна оптимизација
1	90,883	63,317	63,317	83,046	74,199	63,317	71,742
2	13,980	63,317	63,317	39,549	41,279	63,317	44,602
3	88,314	63,317	63,317	110,916	92,793	63,317	94,952
4	0,645	63,317	63,317	31,164	8,793	63,317	9,194
5	64,084	63,317	63,317	57,694	65,659	63,317	64,746
6	22,763	63,317	63,317	40,997	2,749	63,317	2,817
7	64,636	63,317	63,317	90,019	43,572	63,317	43,433
8	0,645	63,317	63,317	31,180	1,726	63,317	3,996
9	41,186	63,317	63,317	31,107	34,842	63,317	32,218
10	23,089	63,317	63,317	42,817	15,138	63,317	14,809
11	39,158	63,317	63,317	61,154	38,270	63,317	36,241
12	9,805	63,317	63,317	31,809	0,662	63,317	0,646
13	36,981	63,317	63,317	41,192	29,868	63,317	29,579
14	30,296	63,317	63,317	31,540	30,240	63,317	29,984
15	25,136	-	63,317	-	6,080	-	-
16	14,517	-	63,317	-	25,527	-	31,590
17	11,113	-	63,317	-	7,520	-	6,419
Маса [kg]	1183,071	1839,241	2133,025	1463,045	1070,090	1656,366	1068,898
Померање [m]	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508

Табела 5.17 – Координате чворова за случајеве са оптимизацијом облика који немају проверу на извијање примера са 17 штапова.

Тип оптимизације	Опт. облика	Опт. поп. пресека и облика	Опт. топологије и облика	Комплетна оптимизација
3 (x; y) [m]	(2,88; 0,059)	(2,253; -0,172)	(2,063; 0,003)	(2,225; -0,138)
4 (x; y) [m]	(2,887; 2,548)	(3,507; 2,873)	(3,777; 2,476)	(3,882; 2,2848)
5 (x; y) [m]	(5,302; 0,295)	(6,229; 0,041)	(5,132; 0,219)	(6,317; -0,076)
6 (x; y) [m]	(5,331; 2,271)	(5,271; 2,789)	(6,051; 2,335)	(5,215; 2,818)
7 (x; y) [m]	(6,753; 0,291)	(7,6; 0,095)	(6,917; 0,486)	(7,753; 0,012)
8 (x; y) [m]	(7,09; 2,086)	(8,449; 2,076)	(7,518; 2,3)	(8,464; 2,018)
9 (x; y) [m]	(10,16; 1,042)	(10,16; 1,26)	(10,16; 1,245)	(10,16; 1,193)

Табела 5.18 – Поређење оптималних попречних пресека са континуалним и дискретним променљивим примера са 17 штапова.

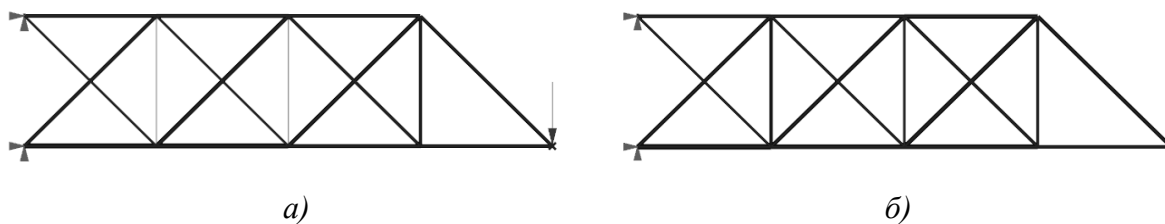
Површина поп. пресека штапа [cm ²]	Опт. поп. пресека		Опт. топологије исти за оба	Опт. облика		Опт. поп. пресека и топологије		Опт. поп. пресека и облика		Опт. топологије и облика исти за оба	Комплетна оптимизација	
	конт.	дискр.		исти за оба	конт.	дискр.	конт.	дискр.	конт.		дискр.	конт.
1	79,794	44,179	86,590	86,590	86,590	80,269	50,265	59,517	56,745	86,590	76,151	78,540
2	6,962	23,758	86,590	86,590	86,590	32,662	44,179	19,582	19,635	86,590	28,418	22,274
3	93,299	86,590	86,590	86,590	86,590	107,101	86,590	88,201	86,590	86,590	88,260	86,590
4	15,636	23,758	86,590	86,590	86,590	42,494	44,179	17,255	19,635	86,590	49,772	50,265
5	56,137	56,745	86,590	86,590	86,590	56,941	44,179	57,966	56,745	86,590	62,305	63,617
6	0,774	23,758	86,590	86,590	86,590	41,937	50,265	18,077	17,635	86,590	23,973	28,274
7	59,620	86,590	86,590	86,590	86,590	88,991	86,590	82,988	78,540	86,590	78,492	78,540
8	4,695	0,283	86,590	86,590	86,590	42,382	24,630	3,413	4,909	86,590	28,472	28,274
9	31,191	38,485	86,590	86,590	86,590	29,254	63,617	44,626	44,179	86,590	32,749	28,274
10	35,440	38,485	86,590	86,590	86,590	38,146	12,566	5,249	4,909	86,590	23,687	23,758
11	55,431	56,745	86,590	86,590	86,590	64,149	56,745	57,118	56,745	86,590	63,758	63,617
12	35,570	38,486	86,590	86,590	86,590	42,211	15,904	6,577	4,909	86,590	26,752	28,274
13	30,352	38,485	86,590	86,590	86,590	41,010	33,183	22,809	19,635	86,590	43,521	50,265
14	41,459	44,179	86,590	86,590	86,590	42,125	44,179	44,253	44,179	86,590	51,541	50,265
15	61,006	50,265	-	86,590	86,590	-	-	46,523	44,179	-	-	-
16	68,013	56,745	-	86,590	86,590	-	-	36,005	44,179	-	-	-
17	38,345	50,265	-	86,590	86,590	-	78,540	47,878	56,745	-	-	-
Маса [kg]	1522,064	1571,875	2503,411	2720,756	1501,902	1525,639	1316,695	1355,876	2091,971	1287,342	1303,889	
Спољашња површина [m ²]		11,044	13,118	14,257	10,374	10,212	10,968					

Код модела са континуалним и дискретним променљивим попречним пресецима, координате чворова који су променљиви у случајевима који користе оптимизацију облика су дати у табели 5.19. За случајеве оптимизације само облика и комбинације са топологијом координате су исте, јер су коришћени попречни пресеци исти за оба случаја.

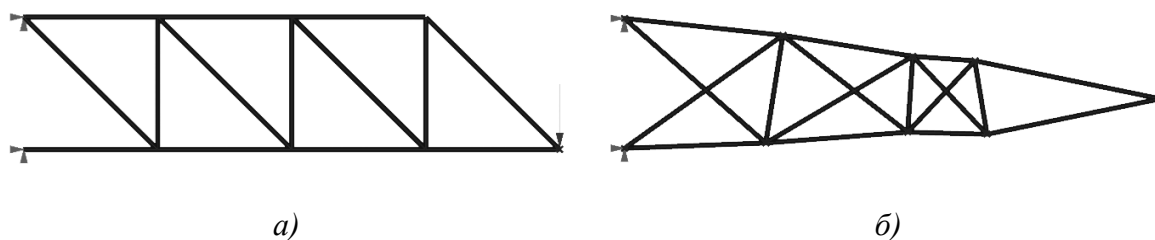
Табела 5.19 – Координате чворова за случајеве који узимају у обзир оптимизацију облика за пример 17 са штапова.

Коорд. чвора	Тип променљивих	Опт. облика	Опт. топологије и облика	Опт. поп. пресека и облика	Комплетна оптимизација
3 (x; y) [m]	Континуалне	(2,679; 0,104)	(2,886; 0,052)	(2,511; -0,313)	(1,950; -0,008)
	Дискретне			(2,561; -0,303)	(1,985; 0,044)
4 (x; y) [m]	Континуалне	(3,003; 2,211)	(2,764; 2,404)	(1,743; 2,400)	(3,366; 2,419)
	Дискретне			(1,604; 2,411)	(3,368; 2,428)
5 (x; y) [m]	Континуалне	(5,37; 0,315)	(5,384; 0,23)	(5,203; -0,272)	(4,775; -0,092)
	Дискретне			(5,540; -0,272)	(4,7791; -0,096)
6 (x; y) [m]	Континуалне	(5,467; 1,799)	(5,006; 2,249)	(4,005; 2,333)	(5,850; 1,954)
	Дискретне			(4,068; 2,356)	(5,861; 1,956)
7 (x; y) [m]	Континуалне	(6,873; 0,274)	(7,310; 0,409)	(8,055; -0,268)	(7,4; -0,008)
	Дискретне			(8,160; -0,205)	(7,416; -0,006)
8 (x; y) [m]	Континуалне	(6,642; 1,712)	(6,660; 2,158)	(7,334; 1,901)	(8,476; 1,645)
	Дискретне			(7,766; 1,909)	(8,481; 1,647)
9 (x; y) [m]	Континуалне	(10,16; 0,968)	(10,160; 1,305)	(10,160; 0,535)	(10,16; 0,592)
	Дискретне			(10,160; 0,584)	(10,16; 0,521)

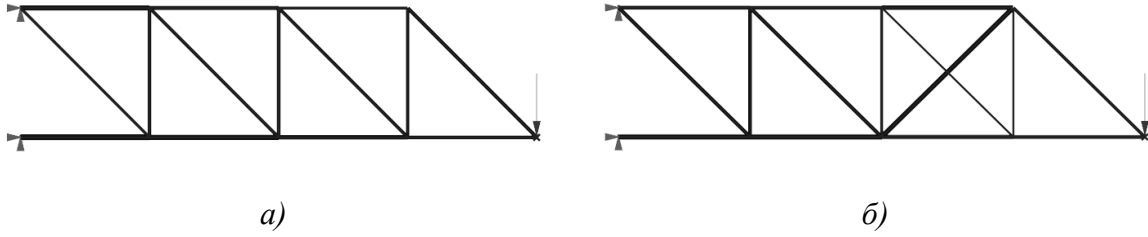
На сликама од 5.15 до 5.20 су дата поређења изгледа свих оптималних решења примера са 17 штапова која узимају у обзир ограничење извијања.



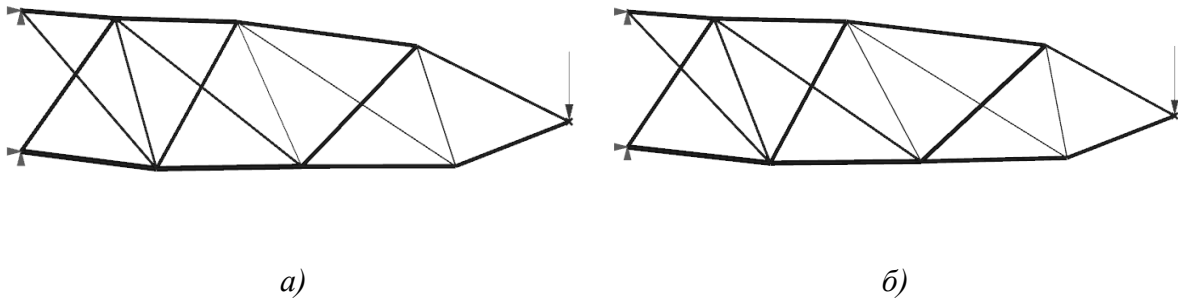
Слика 5.15 – Резултати оптимизације попречних пресека примера са 17 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.



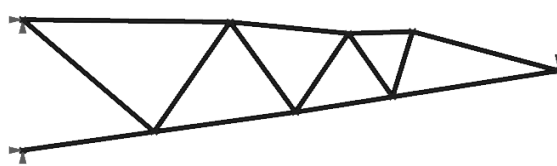
Слика 5.16 – Резултати оптимизације а) топологије, б) облика за обе врсте променљивих, примера са 17 штапова.



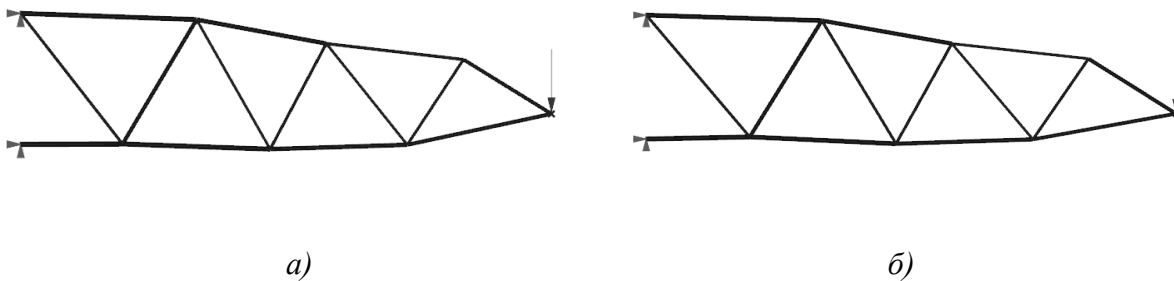
Слика 5.17 – Резултати оптимизације попречних пресека и топологије примера са 17 итапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.



Слика 5.18 – Резултати оптимизације попречних пресека и облика користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве, примера са 17 итапова.

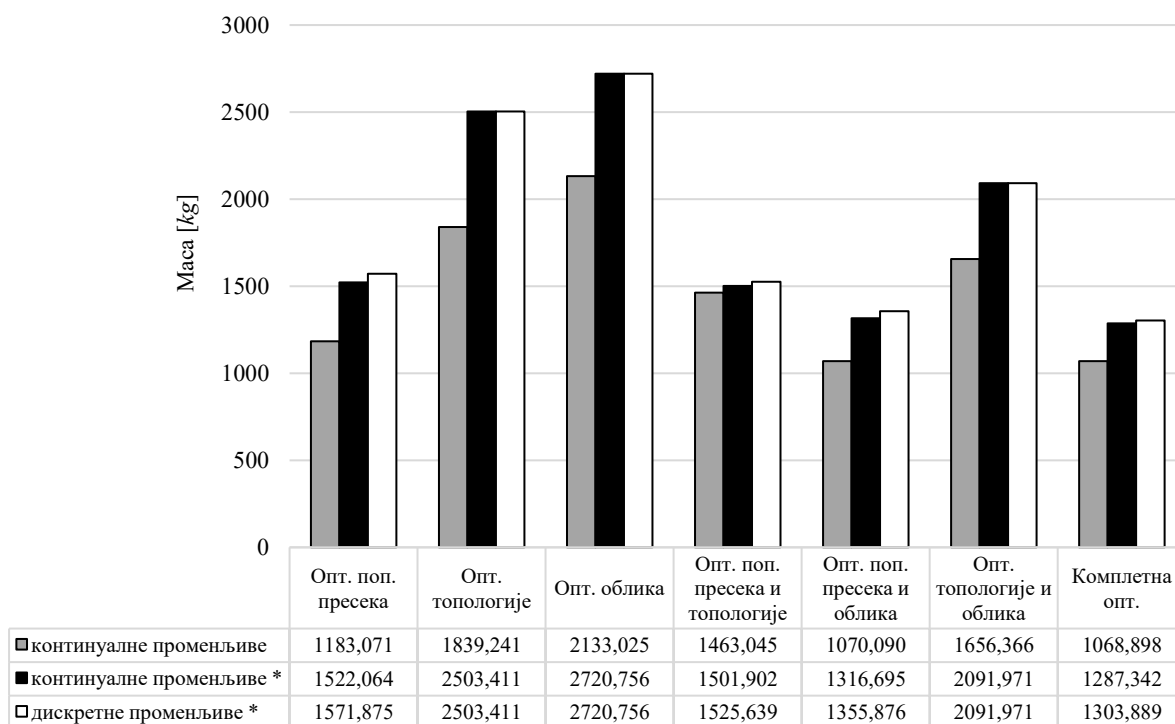


Слика 5.19 – Резултати оптимизације топологије и облика за обе врсте променљивих примера са 17 итапова.



Слика 5.20 – Резултати комплетне оптимизације примера са 17 итапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.

Са слика се може видети да се конфигурације знатно мењају код примене дискретних променљивих на примерима који имају симултану оптимизацију облика. Ово се објашњава немогућношћу постизања граничних вредности функције са конфигурацијама које не покривају распоне пречника између две променљиве. График на слици 5.21 приказује разлике маса оптималних модела у односу на иницијалне, са истим попречним пресецима свих штапова, за конфигурације без узимања у обзир променљивог ограничења на извијање и дискретних и континуалних модела који узимају у обзир ово динамичко ограничење.

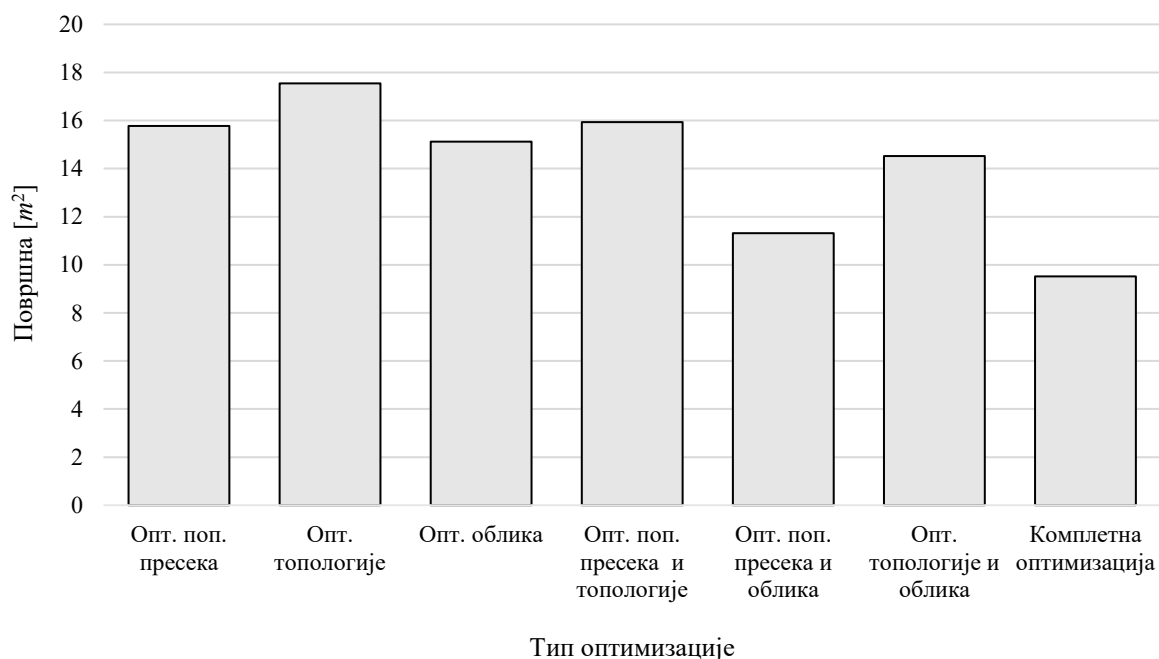


* са провером на извијање

Слика 5.21 – Маса оптималних модела примера са 17 штапова.

Како би се добила разлика маса у односу на различити број штапова, поновљен је поступак на дискретним моделима са додатим ограничењем броја штапова за све типове оптимизације који узимају у обзир попречни пресек. Табеле 5.20, 5.22, 5.24 и 5.27 дају поређење оптималних маса са различитим, ограниченим, бројевима различитих попречних пресека са општим оптималним решењем и оптималним решењем са само једним попречним пресеком за цео модел, за оптимизације попречног пресека, попречног пресека и топологије, попречног пресека и облика, и комплетне оптимизације, тим редоследом.

На слици 5.22 је дато поређење спољашњих површина оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 17 штапова.



Слика 5.22 – Спољашње површине оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 17 штапова.

Табела 5.20 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека примера са 17 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	3181,777	-	102,419%
2	2047,368	35,653%	30,250%
3	1836,005	42,296%	16,803%
4	1774,722	44,222%	12,905%
5	1692,007	46,822%	7,643%
6	1675,086	47,354%	6,566%
7	1572,28	50,585%	0,026%
8	1571,875	50,598%	-
9	1710,898	46,228%	8,844%
10	1688,375	46,936%	7,412%

У табелама 5.21, 5.23, 5.25 и 5.28 су дате површине попречних пресека за оптимална решења са различитим бројевима различитих попречних пресека за оптимизације попречног пресека, попречног пресека и топологије, попречног пресека и облика, и комплетне оптимизације.

Табела 5.21 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила примера оптимизације попречних пресека примера са 17 штапова.

Ел.	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	86,59	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179
2	86,59	44,179	44,179	44,179	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758
3	86,59	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590	95,033	95,033
4	86,59	44,179	44,179	44,179	23,758	23,758	0,503	0,503	23,758	11,341
5	86,59	44,179	44,179	44,179	56,745	56,745	56,745	56,745	38,485	38,485
6	86,59	44,179	44,179	44,179	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758
7	86,59	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590
8	86,59	44,179	44,179	38,485	23,758	23,758	0,503	0,283	0,283	0,503
9	86,59	86,590	44,179	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485	78,540	78,540
10	86,59	44,179	44,179	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485
11	86,59	86,590	56,745	56,745	56,745	56,745	56,745	56,745	78,540	78,540
12	86,59	44,179	44,179	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485
13	86,59	44,179	44,179	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485
14	86,59	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179
15	86,59	44,179	44,179	44,179	56,745	50,265	50,265	50,265	50,265	50,265
16	86,59	44,179	44,179	44,179	56,745	56,745	56,745	56,745	50,265	50,265
17	86,59	86,590	56,745	56,745	56,745	56,745	50,265	50,265	56,745	56,745
Маса [kg]	3181,777	2047,368	1836,005	1774,722	1692,007	1675,086	1572,28	1571,875	1710,898	1688,375
Површина [m ²]	16,670	13,205	12,581	12,348	11,923	11,867	11,060	11,044	11,698	11,579

Табела 5.22 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека и топологије примера са 17 штапова.

Бр. различитих попречних пресека	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	2503,411	-	64,089
2	1654,452	33,912%	8,443
3	1671,553	33,229%	9,564
4	1681,162	32,845%	10,194
5	1607,739	35,778%	5,381
6	1667,983	33,285%	9,473
7	1686,702	32,624%	10,557
8	1661,998	33,611%	8,938
9	1614,631	35,503%	5,833
10	1525,639	39,058%	-

Табела 5.23 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације поп. пресека и топологије примера са 17 штапова.

Ел.	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	86,590	50,265	50,265	50,265	50,265	50,265	44,179	44,179	50,265	50,265
2	86,590	50,265	50,265	50,265	50,265	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179
3	86,590	86,590	86,590	95,033	113,097	95,033	95,033	95,033	86,590	86,590
4	86,590	50,265	50,265	50,265	50,265	44,179	44,179	44,179	50,265	44,179
5	86,590	50,265	50,265	50,265	50,265	63,617	63,617	63,617	44,179	44,179
6	86,590	50,265	50,265	50,265	50,265	44,179	44,179	44,179	50,265	50,265
7	86,590	86,590	86,590	78,540	78,540	103,869	95,033	103,869	86,590	86,590
8	86,590	50,265	50,265	50,265	50,265	44,179	44,179	44,179	38,485	24,630
9	86,590	50,265	50,265	50,265	50,265	44,179	44,179	44,179	63,617	63,617
10	86,590	50,265	50,265	50,265	50,265	50,265	50,265	50,265	23,758	12,566
11	86,590	86,590	63,617	78,540	63,617	63,617	63,617	63,617	56,745	56,745
12	86,590	50,265	63,617	56,745	44,179	63,617	56,745	56,745	31,172	15,904
13	86,590	50,265	63,617	56,745	44,179	50,265	86,590	70,882	31,172	33,183
14	86,590	50,265	50,265	56,745	44,179	63,617	44,179	44,179	44,179	44,179
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	-	-	-	-	78,540	78,540
Маса [kg]	2503,411	1654,452	1671,553	1681,162	1607,739	1667,983	1686,702	1661,998	1614,631	1525,639
Површина [m ²]	13,118	10,593	10,666	10,690	10,417	10,600	10,643	10,570	10,816	10,374

Табела 5.24 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека и облика примера са 17 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	2720.745	-	100.663%
2	1647.07	39.463%	21.476%
3	1471.678	45.909%	8.541%
4	1395.838	48.696%	2.947%
5	1361.614	49.954%	0.423%
6	1355.876	50.165%	-
7	1363.586	49.882%	0.569%
8	1364.098	49.863%	0.606%
9	1373.841	49.505%	1.325%
10	1373.769	49.508%	1.320%

Табела 5.25 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека и облика примера са 17 штапова.

Ел.	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	86,590	86,590	56,745	56,745	63,617	56,745	56,745	56,745	56,745	56,745
2	86,590	3,801	15,904	15,904	12,566	19,635	15,904	15,904	15,904	15,904
3	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590	86,590	95,033	95,033	95,033	95,033
4	86,590	3,801	15,904	15,904	12,566	19,635	15,904	15,904	15,904	15,904
5	86,590	86,590	56,745	56,745	63,617	56,745	56,745	56,745	56,745	56,745
6	86,590	3,801	15,904	15,904	12,566	19,635	15,904	15,904	15,904	15,904
7	86,590	86,590	86,590	86,590	63,617	78,540	78,540	86,590	86,590	86,590
8	86,590	3,801	15,904	15,904	1,767	4,909	6,158	7,069	8,042	8,042
9	86,590	86,590	56,745	44,179	50,265	44,179	44,179	38,485	38,485	38,485
10	86,590	3,801	15,904	15,904	1,767	4,909	6,158	7,069	8,042	7,069
11	86,590	86,590	56,745	56,745	63,617	56,745	63,617	63,617	63,617	63,617
12	86,590	3,801	15,904	15,904	1,767	4,909	6,158	7,069	8,042	7,069
13	86,590	86,590	15,904	15,904	50,265	19,635	15,904	15,904	15,904	15,904
14	86,590	86,590	56,745	44,179	50,265	44,179	44,179	38,485	33,183	33,183
15	86,590	86,590	56,745	44,179	50,265	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179
16	86,590	3,801	56,745	44,179	50,265	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179
17	86,590	86,590	56,745	56,745	50,265	56,745	56,745	56,745	56,745	56,745
Маса [kg]	2720,745	1647,07	1471,678	1395,838	1361,614	1355,876	1363,586	1364,098	1373,841	1373,769
Површина [m ²]	14,257	9,832	10,749	10,558	9,834	10,212	10,227	10,247	10,320	10,308

Табеле 5.26 и 5.29 дају координате чворова за оптимизације попречног пресека и облика, и комплетне оптимизације.

Табела 5.26 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за проблем оптимизације попречног пресека и облика са 17 итапова.

Коорд.	Координате чворова [m] за број различитих профила									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_3	2,652	2,722	2,741	2,65	2,599	2,651	2,664	2,599	2,562	2,563
y_4	0,123	-0,247	-0,269	-0,278	-0,342	-0,303	-0,301	-0,301	-0,288	-0,256
x_4	3,12	1,524	1,532	1,614	1,518	1,604	1,613	1,615	1,677	1,706
y_4	2,125	2,498	2,436	2,41	2,455	2,411	2,418	2,418	2,408	2,405
x_5	5,192	5,676	4,99	5,297	4,922	5,45	5,516	5,525	5,749	5,756
y_5	0,373	-0,136	-0,285	-0,295	-0,236	-0,272	-0,279	-0,275	-0,2	-0,199
x_6	5,184	3,993	4,029	3,983	3,935	4,068	4,071	4,071	3,897	3,917
y_6	1,881	1,833	2,194	2,231	2,356	2,356	2,417	2,421	2,4	2,415
x_7	6,665	6,949	7,699	8,097	7,682	8,16	8,232	8,289	8,392	8,35
y_7	0,296	-0,144	-0,445	-0,327	-0,111	-0,205	-0,228	-0,191	0,025	-0,004
x_8	6,649	6,385	7,085	7,488	7,306	7,766	7,791	7,791	8,197	8,281
y_8	1,917	1,338	1,927	1,921	1,815	1,909	1,929	1,939	1,947	2,015
y_9	0,828	0,343	0,718	0,748	0,327	0,584	0,704	0,769	0,816	0,835

Табела 5.27 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем комплетне оптимизације примера са 17 итапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	1971,904	-	51,233%
2	1598,321	18,945%	22,581%
3	1390,499	29,484%	6,642%
4	1386,597	29,682%	6,343%
5	1366,206	30,716%	4,779%
6	1303,889	33,877%	-
7	1317,059	33,209%	1,010%
8	1322,443	32,936%	1,423%
9	1376,080	30,216%	5,537%
10	1380,341	30,000%	5,863%

Табела 5.28 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека за проблем комплетне оптимизације примера са 17 штапова.

Ел.	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	78,540	56,745	78,540	78,540	78,540	78,540	78,540	78,540	78,540	78,540
2	-	-	-	-	-	28,274	31,172	31,172	44,179	44,179
3	78,540	86,590	78,540	78,540	78,540	86,590	86,590	86,590	95,033	95,033
4	78,540	56,745	28,274	23,758	23,758	50,265	50,265	50,265	44,179	44,179
5	78,540	56,745	56,745	56,745	56,745	63,617	63,617	70,882	86,590	86,590
6	-	-	-	-	-	28,274	31,172	28,274	12,566	12,566
7	78,540	86,590	78,540	78,540	78,540	78,540	78,540	78,540	78,540	78,540
8	78,540	56,745	28,274	31,172	31,172	28,274	38,485	38,485	44,179	44,179
9	78,540	56,745	56,745	56,745	56,745	28,274	31,172	31,172	31,172	31,172
10	-	-	-	-	-	23,758	28,274	28,274	12,566	15,904
11	78,540	56,745	56,745	56,745	56,745	63,617	63,617	63,617	78,540	78,540
12	78,540	56,745	28,274	23,758	23,758	28,274	28,274	28,274	23,758	23,758
13	78,540	56,745	28,274	31,172	31,172	50,265	31,172	31,172	50,265	50,265
14	78,540	56,745	56,745	56,745	56,745	50,265	50,265	50,265	56,745	56,745
15	78,540	56,745	56,745	56,745	56,745	-	-	-	-	-
16	78,540	56,745	56,745	56,745	50,265	-	-	-	-	-
17	78,540	56,745	56,745	56,745	50,265	-	-	-	-	-
Маса [kg]	1971,904	1598,321	1390,499	1386,597	1366,206	1303,889	1317,059	1322,443	1376,080	1380,341
Површина [m ²]	10,850	9,945	9,311	9,295	9,246	8,843	8,914	8,913	8,913	8,935

Табела 5.29 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за пример оптимизације попречног пресека и облика са 17 штапова.

Коорд.	Координате чворова [m] за број различитих профила									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_3	2,455	2,756	2,541	2,543	2,54	1,985	1,982	2,001	1,976	1,972
y_4	-0,311	-0,146	-0,194	-0,19	-0,187	0,044	0,029	0,061	-0,019	-0,001
x_4	1,668	1,345	1,236	1,247	1,243	3,368	3,334	3,313	3,456	3,456
y_4	2,151	2,419	2,519	2,525	2,525	2,428	2,379	2,375	2,441	2,441
x_5	5,217	5,157	5,202	5,172	5,172	4,791	4,789	4,789	4,772	4,733
y_5	-0,388	-0,01	-0,256	-0,275	-0,371	-0,096	-0,098	-0,099	0,169	0,198
x_6	4,546	4,122	3,765	3,735	3,733	5,861	5,859	5,851	5,618	5,618
y_6	1,55	2,183	2,249	2,232	2,229	1,956	1,956	1,956	2,119	2,082
x_7	7,247	7,638	7,88	7,866	7,857	7,416	7,416	7,415	7,286	7,285
y_7	-0,373	-0,051	-0,328	-0,347	-0,347	-0,006	-0,012	-0,014	0,137	0,12
x_8	6,691	6,762	6,665	6,632	6,632	8,481	8,478	8,474	8,449	8,439
y_8	1,121	1,846	1,846	1,871	1,871	1,647	1,646	1,645	1,514	1,512
y_9	0,52	0,862	0,778	0,747	0,747	0,521	0,52	0,514	0,492	0,458

5.2.3 Анализа резултата

Код оптимизације примера са 17 штапова резултати који не узимају у обзир извијање као динамичко ограничење, као и код претходног примера, постиже резултате који су у практичној примени апсолутно неупотребљиви. Овај пример садржи много више елемената, па је и логично да би дошло до извијања већег броја штапова код свих типова оптимизација. Овом дисертацијом анализирана су решења са и без употребе динамичких ограничења на извијање и за овај пример. Решења без провере на извијање су коришћена због поређења са литературом. Као и код примера са 10 штапова у табели 5.16 су попречни пресеци штапова код којих би дошло до извијања обележени тамносивом, а остали штапови оптерећени на притисак светлосивом бојом. У случају оптимизације топологије и облика, као и њихове комбинације, као и код претходног примера, коришћен је исти попречни пресек који припада скупу дискретних променљивих због незнатне разлике у димензијама са континуалним променљивим. Резултати оптимизације коришћењем континуалних и дискретних променљивих се веома мало разликују у маси.

Када се у процес оптимизације укључе ограничења минималне дужине штапова и провера на извијање постижу се практично применљиви резултати. Пошто се у литератури за овај пример користе континуалне променљиве попречног пресека, урађена је оптимизација са континуалним променљивим попречним пресецима. Због практичне применљивости резултата урађена је и оптимизација са дискретним променљивим попречних пресека. У случају оптимизације топологије и облика, као и њихове комбинације, као што је претходно наведено, коришћен је исти попречни пресек, за све елементе модела, који припада скупу дискретних променљивих због незнатне разлике у димензијама са резултатима оптимизације са континуалним променљивим. Резултати оптимизације коришћењем континуалних и дискретних променљивих се веома мало разликују у маси. Разлике маса између добијених модела са континуалним и дискретним попречним пресецима је 3,169% за оптимизацију попречних пресека, 6,583% за оптимизацију попречних пресека и топологије, 1,556% за оптимизацију попречних пресека и облика и 5,486% за комплетну оптимизацију. И код овог примера сва оптимална решења која користе континуалне променљиве имају мање масе од дискретних решења.

Очекивано, поређењем оптималних маса решења оптимизације само са дискретним променљивим може се уочити да се најмања маса постиже оптимизацијом сва три аспекта симултано (комплетном оптимизацијом). Потребно је нагласити да аналитичко решење прорачуна овог носача даје исте резултате као оптимизација са једним истим попречним пресеком за све штапове (табела 5.20) јер се димензионисање врши у односу на најоптерећенији штап. То значи да у поређењу са аналитичким решењем, оптималнио решење где су оптимизовани само попречни пресеци даје 50,598% мање масе. Оптимална решења само топологије и само облика дају значајно веће масе од осталих оптималних решења. Она су упоредива са аналитичким решењем јер користе исти попречни пресек, тако да је оптимизацијом само топологије добија се 21,320% мања маса, а оптимизацијом само облика 16,945% мања маса од аналитички добијеног модела.

Резултати комплетне оптимизације дају 123,565% мању масу од аналитичког решења (решења иницијалне топологије и облика са свим истим попречним пресецима). Детаљнијом анализом резултата могуће је уочити да се разлике маса где је оптимизован облик или топологија у комбинацији са оптимизацијом попречних пресека дају нешто лошије, али упоредиве, резултате са комплетном оптимизацијом. Конкретно, оптимизација попречних пресека и облика даје 4,730% већу масу од комплетне оптимизације (57,386% мања маса од аналитичког модела), док оптимизација попречних пресека и топологије даје 7,198% већу масу од комплетне оптимизације (52,051% мања маса од аналитичког модела). Оптимизација само попречних пресека даје 10,447% већу масу од резултата комплетне оптимизације. Када се посматрају разлике оптималних маса, јасно је да је најбоље користити комплетну оптимизацију. У случајевима када то није могуће, евидентно, било која комбинација која користи оптимизацију попречних пресека, па чак и оптимизација само попречних пресека, даје приближно смањење масе.

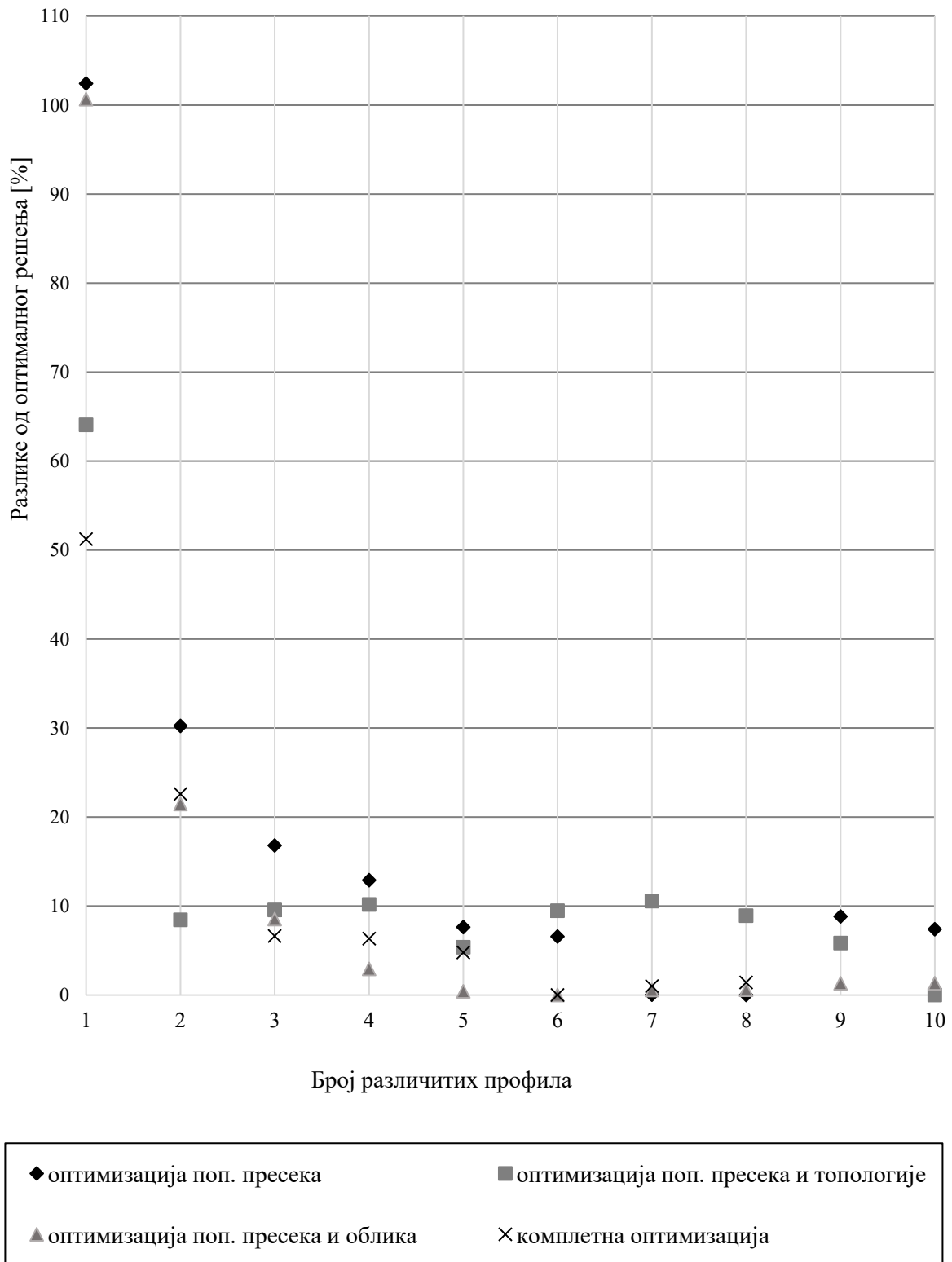
И у овом примеру су дати резултати укупне спољашње површине само за оптималне моделе се дискретним попречним пресецима. Поређењем површина оптималних решења уочава се недостатак апсолутне корелације резултујућих укупних површина и оптималних маса у односу на тип оптимизације. Будући да су у питању

пуни попречни пресеци, дебљина зида профила није фактор у овој разлици. Оптимизације које узимају у обзир облик у овом примеру дају мање укупне површине од оптимизације само попречног пресека, као и топологије и њених комбинација. Ово је резултат смањења дужина елемената. Комплетна оптимизација и у овом примеру даје најмању укупну површину и најмању масу.

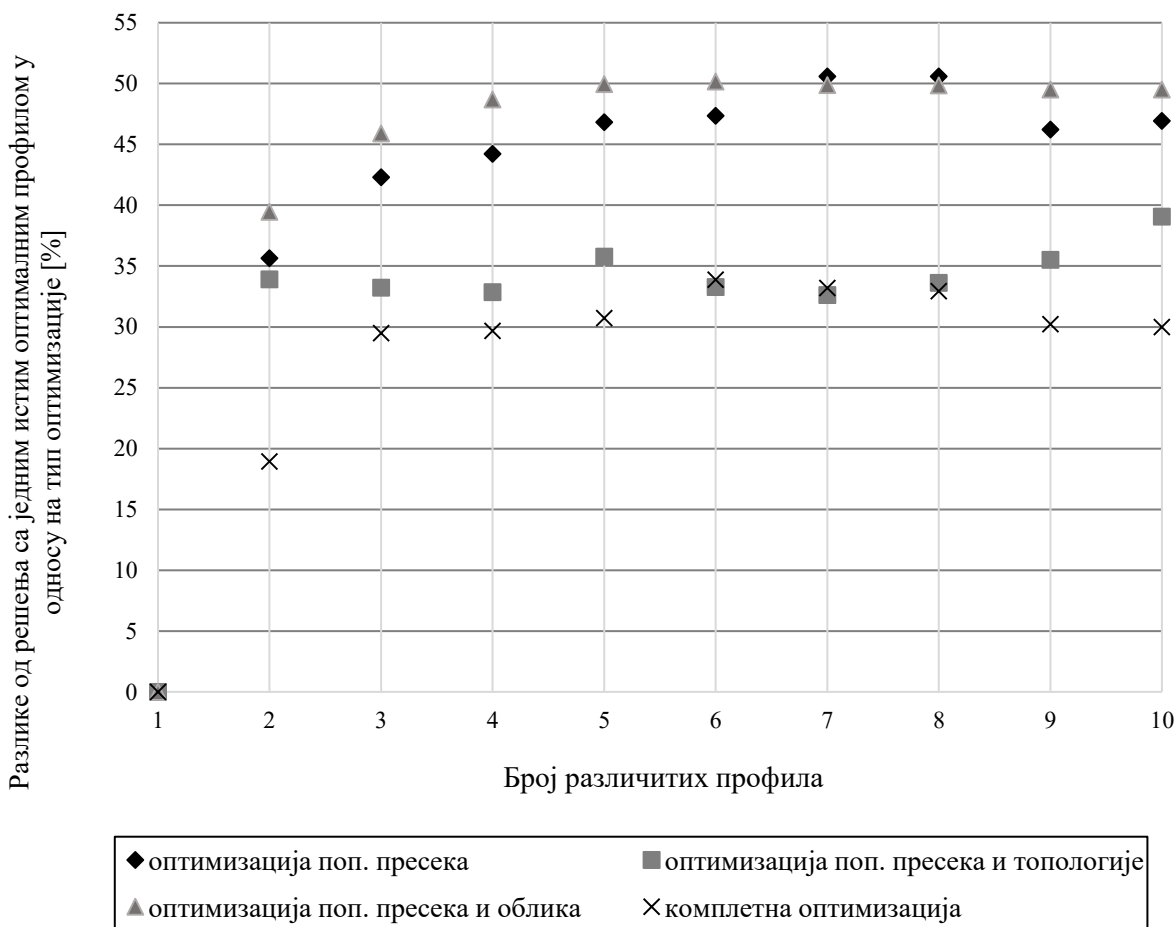
Оптимално решење примера са 17 штапова у случају оптимизације само попречних пресека садржи 8 различитих попречних пресека у конструкцији. Оптимизација попречних пресека и топологије даје оптимално решење са 10, оптимизација попречних пресека и облика 6, а комплетна оптимизација даје оптимално решење са 6 различитих попречних пресека. Ово су непрактично велики бројеви различитих профила које би било потребно искористити за једну конструкцију. Код овог примера није рађена оптимизација са већем бројем од 10 различитих јер је оптимално решење које узима у обзир попречне пресеке и топологију има толико различитих профила, а све преко 10 профила је свакако бесмислено велики број. Ограничавањем броја различитих попречних пресека у решењима су добијене оптималне масе за све могуће вредности броја различитих попречних пресека. У овом кораку су само поређене оптимизације које узимају у обзир попречне пресеке као променљиве. Табеле 5.20, 5.22, 5.24 и 5.27 дају поређења резултата оптимизације са ограниченим бројем различитих профила са оптималним решењем и са аналитичким решењем (решењем где су сви исти попречни пресеци). Поређењем резултата са слике 5.23 се јасно види да масе расту скоро нормалном расподелом са смањењем броја различитих попречних пресека, док што је број различитих већи од оптимума маса се повећава у односу на оптимална решења без овог ограничења. Повећање масе у односу на оптимално решење, лево и десно од њега на графику, указује на то да су у питању глобалне оптималне вредности броја различитих профила. На слици 5.23 је приказана разлика маса оптималних модела са свим бројевима различитих профила у односу на оптимум за све случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречног пресека код примера са 17 штапова.

Посматрајући случајеве са 3 и 4 различита профила као у претходном примеру у случају оптимизације само попречних пресека примера са 17 штапова, решења са 3 различита попречна пресека дају 16,803% веће резултате од оптимума за тај аспект (са 8 различитих профила), док је са 4 различита профила та разлика 12,905%. Код оптимизације попречних пресека и топологије решења са 3 различита попречна пресека дају 9,564% веће резултате од оптимума за тај аспект (са 10 различитих профила), док је са 4 различита профила та разлика 10,194%. Код оптимизације попречних пресека и облика, решења са 3 различита попречна пресека дају 8,541% веће резултате оптимума за тај аспект (са 10 различитих профила), док је са 4 различита профила та разлика 2,947%. Код комплетне оптимизације са 3 могућа различита профила, добија се 6,642% већи резултат од оптимума комплетне оптимизације (са 6 различитих профила), док је са 4 могућа различита профила та разлика 6,343%.

На слици 5.24 је дато поређење оптималних маса у односу на број различитих попречних пресека и решења кореспондирајућих типова оптимизације са само једним (оптималним за тај случај) попречним пресеком.



Слика 5.23 – Разлика маса оптималних модела у односу на број различитих профила за пример са 17 штапова.

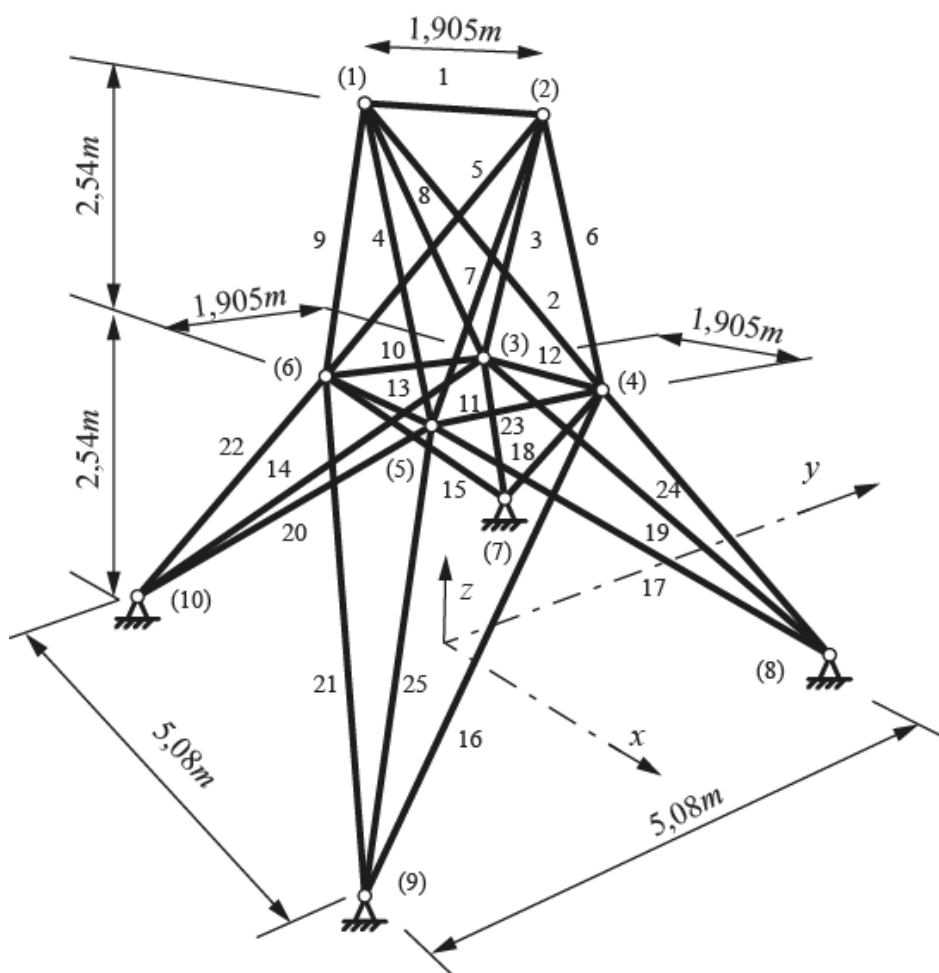


Слика 5.24 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројевима различитих профила у односу на решење са само једним истим оптималним профилу за случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречних пресека примера са 17 штапова.

Посматрањем разлике укупних спољашњих површина, за оптимизације конкретних аспеката у односу на број различитих профила попречних пресека код оптимизације само попречних пресека, постоји корелација са резултатима маса. Ово је и логично пошто се дужине елемената не мењају, као ни број коришћених профила, тако да су једини фактор утицаја на укупну површину пречници коришћених елемената. У случају оптимизације попречних пресека и топологије, постоји веома мала разлика у површинама између решења са 2 и више различитих профила. У овом случају такође постоји корелација са масама, осим код примера са 9 различитих штапова, јер се у том решењу користи и штап 17 за разлику од осталих, док оптимално решење за тај аспект има најмању масу и садржи и штап 17. Код оптимизације облика и попречних пресека, решење са 2 различита профила даје најмању укупну површину. Посматрањем података уочава се да је то случај јер су положају чворова такви да ово решење имаја најмање дужине елемената. Најповољнији случај за минималну укупну површину код комплетне оптимизације се јавља код решења са 6 различитих попречна пресека (оптимално решење). Ово је уједно најповољнији случај посматрајући површине у односу на све остале типове оптимизације.

5.3 Носач са 25 штапова

Пример носача са 25 штапова [49, 62, 97, 98] је комплексан просторни проблем. Иницијална конфигурација је постављена у 10 чворова као што је приказано на слици 5.25. За овај пример коришћен је исти алуминијум као за пример са 10 штапова, као и исти скуп 50 могућих попречних пресека за оптимизацију са дискретним променљивим попречним пресецима. Попречни пресеци су груписани за одређене елементе према следећем распореду: 1 (A_1), 2 ($A_2 - A_5$), 3 ($A_6 - A_9$), 4 ($A_{10} - A_{11}$), 5 ($A_{12} - A_{13}$), 6 ($A_{14} - A_{17}$), 7 ($A_{18} - A_{21}$), 8 ($A_{22} - A_{25}$). Вектор силе у чвору 1 је $(4,448, -44,48, -44,48) \text{ kN}$, у чвору 2 је $(0, -44,48, -44,48) \text{ kN}$, у чвору 3 је $(2,224, 0, 0) \text{ kN}$ и у чвору 6 је $(2,6688, 0, 0) \text{ kN}$. Напонска ограничења за случај када се не узима у обзир извијање су дата у табели 5.30, у осталим случајевима само се узима у обзир ограничење на истезање из ове табеле. Максимално померање свих чворова у x и y правцима је $\pm 0.00889 \text{ m}$.



Слика 5.25 – Конфигурација примера носача са 25 штапова.

За решавање оптимизационих проблема коришћењем континуалних пречника попречних пресека минимални пречници су задати 12 mm ($1,131 \text{ cm}^2$). У случајевима оптимизације облика, ограничења позиција чворова су:

$$0,508m \leq x_4, x_5, -x_3, -x_6 \leq 1,524m;$$

$$1,016m \leq y_3, y_4, -y_5, -y_6 \leq 2,032m;$$

$$2,286m \leq z_3, z_4, z_5, z_6 \leq 3,302m;$$

$$1,016m \leq x_8, x_9, -x_7, -x_{10} \leq 2,032m;$$

$$2,540m \leq y_7, y_8, -y_9, -y_{10} \leq 3,556m.$$

Оптимизацијом топологије могу се елиминисати само целе групе елемената. Ограничење дужине елемената за овај пример није коришћено, јер су мали опсеги у којима могу да се крећу координате чворова које су променљиве.

5.3.1. Верификација

За верификацију овог примера поређена су решења примера који не узимају у обзир извијање са резултатима из литературе. У табели 5.30 је приказано поређење оптималних маса из литературе [9, 58, 62, 97-99] са онима из оригиналног софтвера.

Табела 5.30 – Поређење оптималних резултата са литературом.

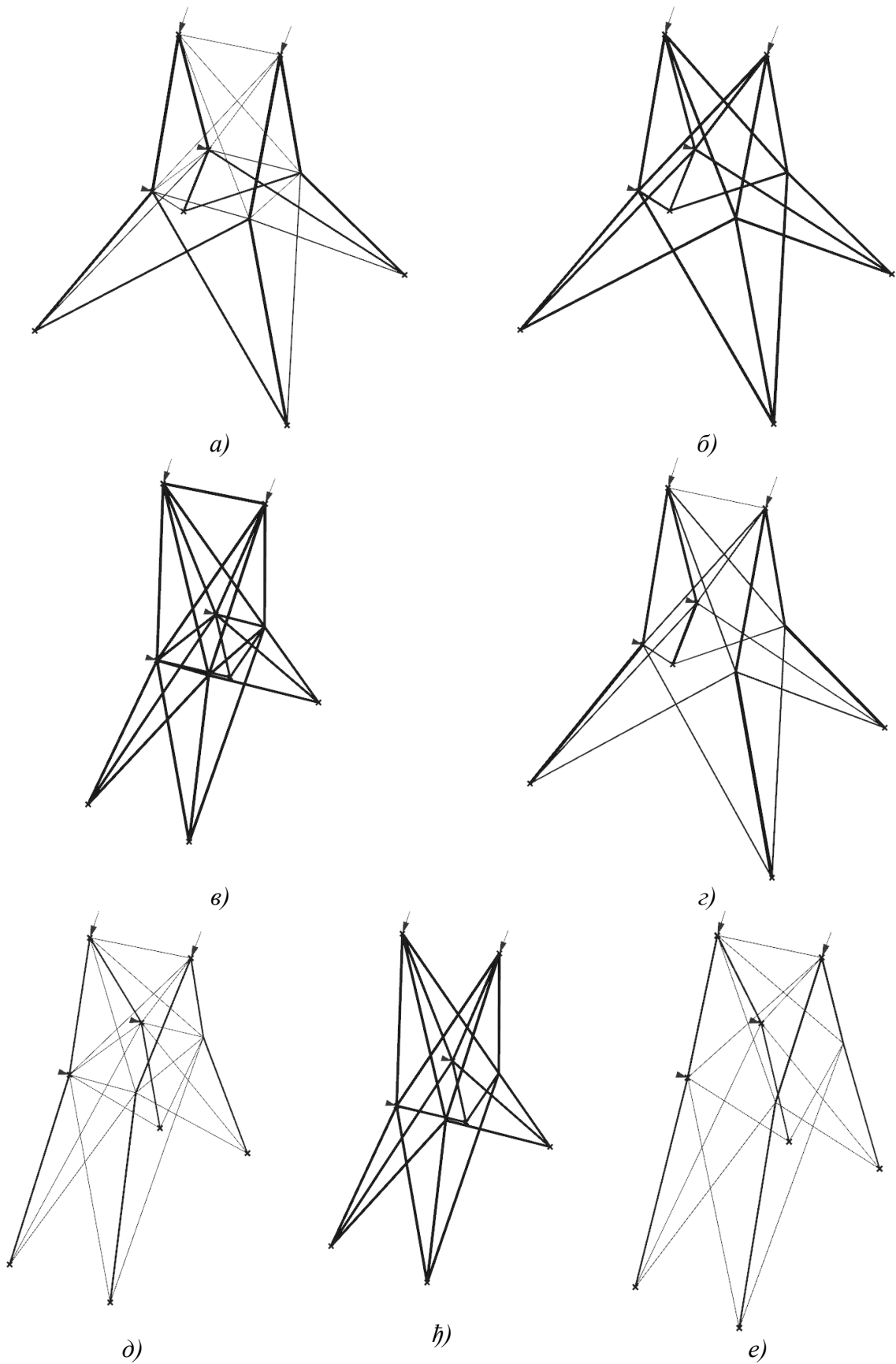
Површина поп. Пресека штапа [cm ²]	Опт. поп. пресека				Опт. поп. пресека и облика		Комплетна оптимизација		
	<i>CMLPSA</i> [74]	<i>GA</i> [75]	<i>EFA</i> [9]	Овај докторат	<i>LESLP</i> [76]	Овај докторат	<i>GA</i> [43]	<i>JA</i> [47]	Овај докторат
Маса [kg]	247,303	248,736	220,706	233,299	57,289	67,599	51,887	51,388	64,303

Разлике у масама се у највећој мери јављају због коришћених скупова попречних пресека и заокруживања јер већина постојеће литературе користи империјске мерне јединице и скупове подељене према тим величинама, док су разлике у попречним пресецима и позицијама чворова незнатне.

5.3.2 Резултати

Оптималан попречни пресек у случају да су сви штапови истог профила је $19,635\text{cm}^2$, тј. пречника 25mm за моделе који не врше проверу на извијање, а $44,179\text{cm}^2$, тј. пречника 75mm за моделе који врше проверу на извијање.

Слика 5.26 приказује оптимална решења за проблем са 25 штапова код којих се не врши провера на извијање.



Слика 5.26 – Изгеди конфигурација решења примера са 25 штапова за оптимизације
a) попречних пресека, б) топологије, в) облика, г) поп. пресека и топологије, д) поп.

пресека и облика, *ђ*) топологије и облика и *е*) комплетне, за случај без провере на извијање.

Резултати оптимизација вршених без провере на извијање су дати у табели 5.31. У овој табели су тамносиво обележене групе попречних пресека штапова који нису задовољили услов извијања у накнадној провери. Код овог примера ако макар један штап не задовољава услов извијања, обележена је цела група, исто важи и за постојање притиснутих штапова који задовољавају услов извијања.

Табела 5.31 – Оптималне површине попречних пресека и масе у односу на тип оптимизације без провере на извијање примера са 25 штапова.

Површина поп. Пресека групе штапова [cm^2]	Опт. поп. пресека	Опт. топологије	Опт. облика	Опт. поп. пресека и топологије	Опт. поп. пресека и облика	Опт. топологије и облика	Комплетна оптимизација
1	1,131	-	19,635	1,131	1,131	-	1,131
2	1,131	19,635	19,635	6,716	1,131	19,635	1,131
3	23,495	19,635	19,635	18,959	7,208	19,635	8,553
4	1,131	-	19,635	-	1,131	-	-
5	3,005	-	19,635	-	1,136	-	-
6	3,774	19,635	19,635	7,282	1,131	19,635	1,131
7	12,399	19,635	19,635	5,561	1,131	19,635	1,131
8	20,205	19,635	19,635	31,188	8,513	19,635	7,411
Маса [kg]	233,299	396,957	394,671	259,556	67,599	352,027	64,303
Померање [m]	0,0088	0,0066	0,0052	0,0088	0,0088	0,0088	0,0088

Координате чворова у случајевима у којим се оптимизује облик за примере без провере на извијање су дати у табели 5.32. Табела 5.33 даје поређење попречних пресека маса и померања за примере где је вршена провера на извијање, за случајеве коришћења континуалних и дискретних попречних пресека.

Табела 5.32 – Координате чворова за случајеве са оптимизацијом облика који немају проверу на извијање примера са 25 штапова.

Тип оптимизације	Опт. облика	Опт. поп. пресека и облика	Опт. топологије и облика	Комплетна оптимизација
$-x_3, x_4, x_5, -x_6$ [m]	0,508	0,640	0,508	0,818
$y_3, y_4, -y_5, -y_6$ [m]	1,016	4,220	1,016	1,196
z_3, z_4, z_5, z_6 [m]	2,286	3,120	2,286	3,163
$-x_7, x_8, x_9, -x_{10}$ [m]	1,016	1,016	1,016	1,016
$y_7, y_8, -y_9, -y_{10}$ [m]	2,540	2,713	2,540	2,684

Табела 5.33 – Поређење оптималних попречних пресека са континуалним и дискретним променљивим примера са 25 штапова са провером на извијање.

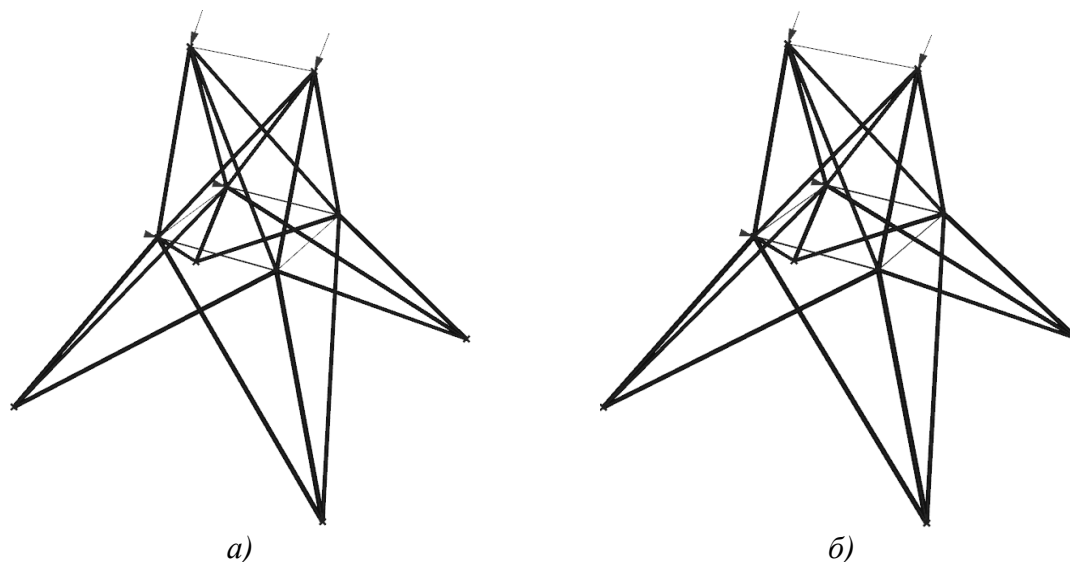
Површина поп. Пресека групе штапова [cm ²]	Опт. поп. пресека		Опт. топологије	Опт. облика	Опт. поп. пресека и топологије		Опт. поп. пресека и облика		Опт. топологије и облика	Комплетна оптимизација	
	конт.	дискр.			конт.	дискр.	конт.	дискр.		конт.	дискр.
1	1,178	1,131	-	44,179	-	-	1,357	1,131	-	1,131	-
2	24,060	23,758	44,179	44,179	22,670	23,758	23,118	23,758	44,179	12,117	12,566
3	30,249	33,183	44,179	44,179	30,829	33,183	31,923	33,183	44,179	32,180	33,183
4	1,131	2,011	-	44,179	-	-	1,131	1,131	-	-	-
5	4,028	4,909	-	44,179	4,327	28,274	12,821	4,909	-	-	-
6	27,057	28,274	44,179	44,179	26,858	28,274	6,432	7,069	44,179	3,558	4,909
7	36,945	38,485	44,179	44,179	37,623	38,485	26,081	28,274	44,179	15,634	9,621
8	39,826	44,179	44,179	44,179	39,605	44,179	27,392	28,274	44,179	34,586	38,486
Маса [kg]	647,968	687,111	893,153	888,009	644,784	679,370	398,753	413,612	792,060	327,028	328,893
Спољашња површина [m²]		15,781	17,548	15,121		15,936		11,314	14,525		9,516

Код модела са континуалним и дискретним променљивим попречним пресецима, координате чворова који су променљиви у случајевима који користе оптимизацију облика су дати у табели 5.34. За случајеве оптимизације само облика и комбинације топологије и облика координате су исте, јер су коришћени попречни пресеци исти за оба случаја.

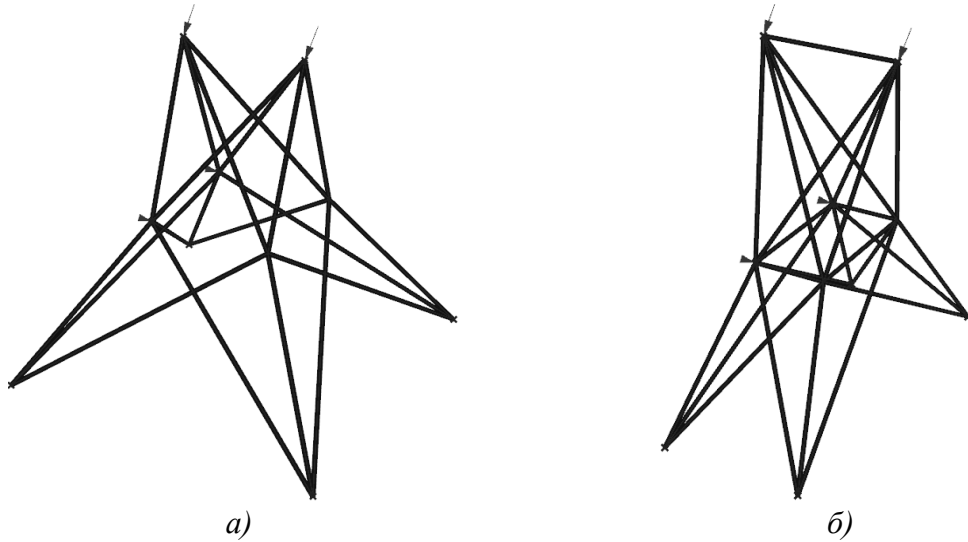
Табела 5.34 – Координате чворова за случајеве који узимају у обзир оптимизацију облика за пример 25 са штапова.

Коорд. чвора	Тип променљивих	Опт. облика	Опт. топологије и облика	Опт. попр. пресека и облика	Комплетна оптимизација
$-x_3, x_4, x_5, -x_6$ [m]	Континуалне	0,508	0,508	0,508	0,875
	Дискретне			0,508	0,995
$y_3, y_4, -y_5, -y_6$ [m]	Континуалне	1,016	1,016	1,342	1,228
	Дискретне			1,300	1,224
z_3, z_4, z_5, z_6 [m]	Континуалне	2,286	2,286	2,377	2,593
	Дискретне			2,460	2,590
$-x_7, x_8, x_9, -x_{10}$ [m]	Континуалне	1,016	1,016	1,016	1,016
	Дискретне			1,016	1,016
$y_7, y_8, -y_9, -y_{10}$ [m]	Континуалне	2,540	2,540	2,540	2,540
	Дискретне			2,540	2,540

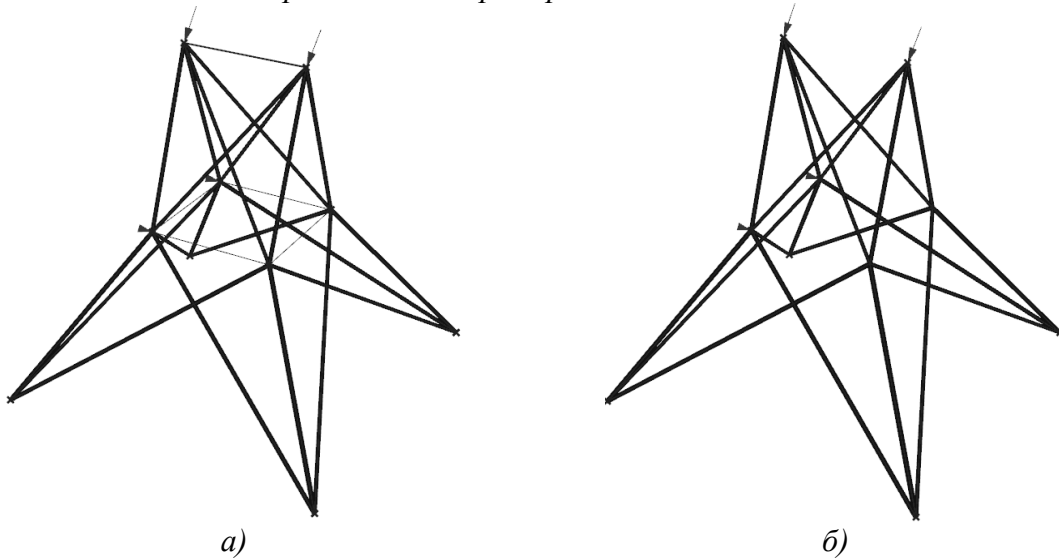
На сликама од 5.27 до 5.32 су дата поређења изгледа свих оптималних решења примера са 25 штапова која узимају у обзир ограничење извијања.



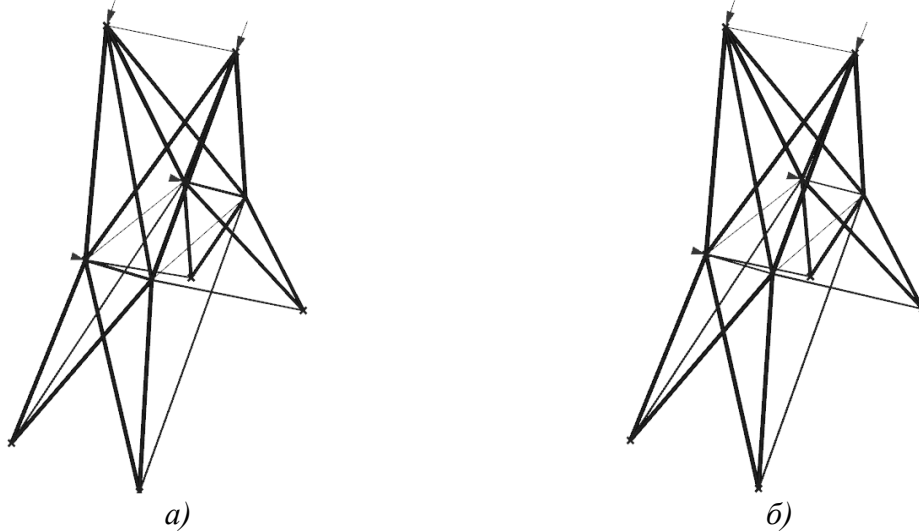
Слика 5.27 – Резултати оптимизације попречних пресека примера са 25 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.



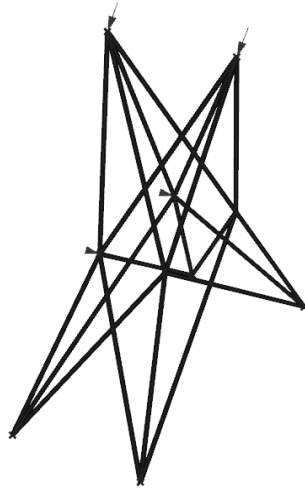
Слика 5.28 – Резултати оптимизације а) топологије, б) облика за обе врсте променљивих, примера са 25 итапова.



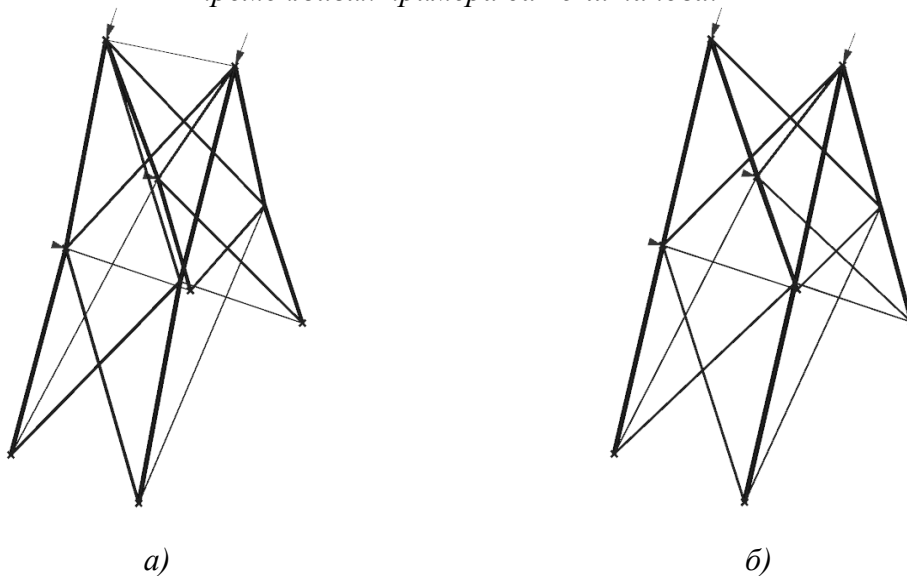
Слика 5.29 – Резултати оптимизације попречних пресека и топологије примера са 25 итапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.



Слика 5.30 – Резултати оптимизације попречних пресека и облика користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве, примера са 25 итапова.



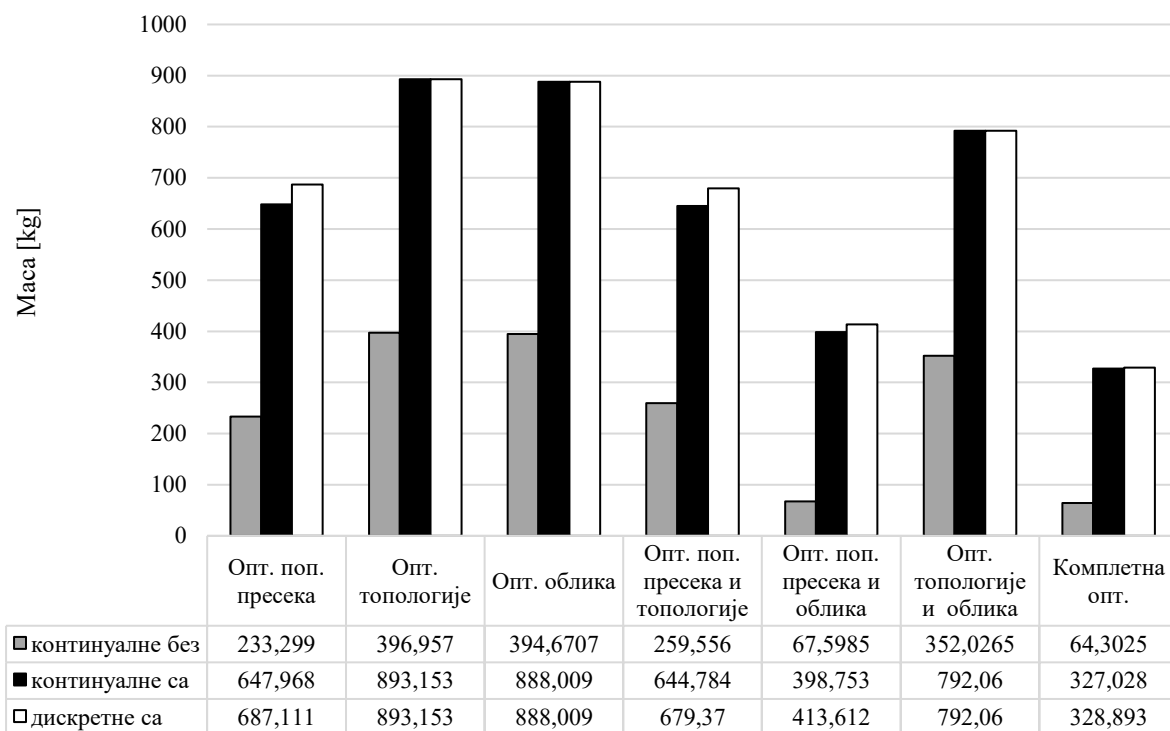
Слика 5.31 – Резултати оптимизације топологије и облика за обе врсте променљивих примера са 25 штапова.



Слика 5.32 – Резултати комплетне оптимизације примера са 25 штапова користећи а) континуалне и б) дискретне променљиве.

Са слика се може видети да се конфигурације знатно мењају код примене дискретних променљивих. Ово се објашњава немогућношћу постизања граничних вредности функције са конфигурацијама које не покривају распоне пречника између две променљиве. График на слици 5.33 приказује разлике маса оптималних модела у односу на иницијалне, са истим попречним пресецима свих штапова, за конфигурације без узимања у обзир променљивог ограничења на извијање и дискретних и континуалних модела који узимају у обзир ово динамичко ограничење.

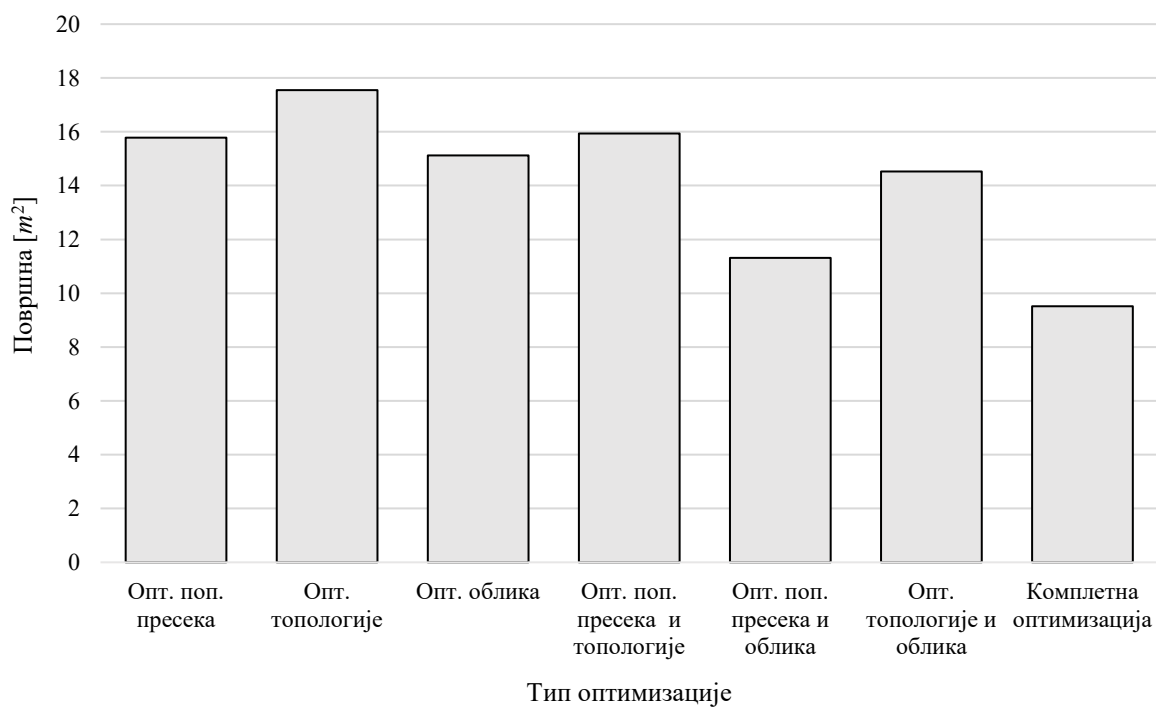
Како и у претходним примерима, поновљен је поступак на дискретним моделима са додатим ограничењем броја штапова за све типове оптимизације који узимају у обзир попречни пресек. Табеле 5.35, 5.37, 5.39 и 5.42 дају поређење оптималних маса са различитим, ограниченим, бројевима различитих попречних пресека са општим оптималним решењем и оптималним решењем са само једним попречним пресеком за цео модел, за оптимизације попречног пресека, попречног пресека и топологије, попречног пресека и облика, и комплетне оптимизације.



провером на извијање

Слика 5.33 – Масе оптималних модела примера са 25 штапова.

На слици 5.34 је дато поређење спољашњих површина оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 25 штапова.



Слика 5.34 – Спољашње површине оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 25 штапова.

Табела 5.35 – Поређење разлика маса у односу на број различитих штапова за пример оптимизације попречних пресека са 25 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	1007,379	-	46,611%
2	819,530	18,647%	19,272%
3	783,903	23,537%	12,104%
4	736,686	26,871%	7,215%
5	703,108	30,204%	2,328%
6	702,455	30,269%	2,233%
7	697,573	30,754%	1,523%
8	687,111	31,792%	-

Табела 5.36 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека примера оптимизације попречних пресека са 25 штапова.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	44,179	33,183	44,179	4,909	3,142	1,131	1,131	1,131
2	44,179	33,183	44,179	33,183	23,758	28,274	23,758	23,758
3	44,179	33,183	33,183	28,274	38,485	33,183	33,183	33,183
4	44,179	33,183	4,909	4,909	3,142	1,131	1,131	2,011
5	44,179	33,183	4,909	33,183	3,142	4,909	15,904	4,909
6	44,179	33,183	33,183	28,274	28,274	28,274	28,274	28,274
7	44,179	33,183	33,183	33,183	38,485	38,485	38,485	38,485
8	44,179	50,265	44,179	50,265	44,179	44,179	44,179	44,179
Маса [kg]	1007,379	819,530	783,903	736,686	703,108	702,455	697,573	687,111
Површина [m ²]	19,793	17,793	17,099	16,549	15,987	15,941	15,972	15,781

Табела 5.37 – Поређење разлика маса у односу на број различитих штапова за пример оптимизације попречних пресека и топологије са 25 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	893,153	-	31,468%
2	756,457	15,305%	11,347%
3	711,239	20,368%	4,691%
4	694,985	22,187%	2,298%
5	679,370	23,936%	-
6	785,423	12,062%	15,610%
7	791,452	11,387%	16,498%

Табела 5.38 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека примера оптимизације попречних пресека и топологије са 25 штапова.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm^2] за број различитих профила						
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	-	-	-	-	2,011
2	44,179	28,274	28,274	23,758	23,758	23,758	33,183
3	44,179	44,179	38,485	38,485	33,183	33,183	1,131
4	-	-	-	-	-	1,131	44,179
5	-	-	-	-	28,274	-	-
6	44,179	28,274	28,274	28,274	28,274	44,179	38,485
7	44,179	44,179	38,485	38,485	38,485	38,485	28,274
8	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	28,274	23,758
Маса [kg]	893,153	756,457	711,239	694,985	679,37	680,540	681,580
Површина [m^2]	17,548	16,056	15,597	15,389	15,936	15,362	15,458

Табела 5.39 – Поређење разлика маса у односу на број различитих штапова за пример оптимизације попречних пресека и облика са 25 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	578,458	-	39,855%
2	530,288	8,327%	28,209%
3	479,944	17,030%	16,037%
4	479,164	17,165%	15,849%
5	474,359	17,996%	14,687%
6	413,612	28,497%	-
7	442,939	23,428%	7,090%
8	442,895	23,435%	7,080%

Табела 5.40 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека примера оптимизације попречних пресека и облика са 25 штапова.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm^2] за број различитих профила							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	28,2743	12,566	1,131	4,909	4,909	1,130973	1,131	2,011
2	28,2743	33,183	33,183	28,274	28,274	23,75829	23,758	23,758
3	28,2743	33,183	33,183	28,274	28,274	33,18307	33,183	33,183
4	28,2743	12,566	1,131	4,909	1,131	1,130973	1,131	1,131
5	28,2743	12,566	7,069	4,909	4,909	4,908739	4,909	3,142
6	28,2743	12,566	7,069	15,904	15,904	7,068583	7,069	7,069
7	28,2743	33,183	33,183	28,274	28,274	28,27433	28,274	28,274
8	28,2743	33,183	33,183	33,183	33,183	28,27433	38,485	38,485
Маса [kg]	578,458	530,288	479,944	479,164	474,359	413,612	442,939	442,895
Површина [m^2]	14,207	13,318	12,123	12,595	12,402	11,314	11,653	11,647

Табеле 5.41 и 5.44 дају координате група чворова за комбиновану оптимизацију попречног пресека и облика и комплетну оптимизацију.

Табела 5.41 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за пример оптимизације попречног пресека и облика са 25 штапова.

Координате	Координате чворова [m] за број различитих профила							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$-x_3, x_4, x_5, -x_6$ [m]	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508	0,508
$y_3, y_4, -y_5, -y_6$ [m]	1,187	1,116	1,194	1,145	1,13	1,3	1,367	1,342
z_3, z_4, z_5, z_6 [m]	2,444	2,753	2,639	2,566	2,568	2,43	2,286	2,336
$-x_7, x_8, x_9, -x_{10}$ [m]	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016

Табела 5.42 – Поређење разлика маса у односу на број различитих штапова за пример комплетне оптимизације са 25 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим профилима	Разлика од оптималног решења
1	543,164	-	65,149%
2	392,324	27,771%	19,286%
3	380,002	30,039%	15,540%
4	361,072	33,524%	9,784%
5	328,893	39,449%	-
6	351,122	35,356%	6,759%
7	353,488	34,921%	7,478%

Табела 5.43 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих попречних пресека примера комплетне оптимизације са 25 штапова.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила						
	1	2	3	4	5	6	7
1	28,274	-	-	-	-	1,131	2,011
2	28,274	12,566	12,566	1,131	12,566	15,904	9,079
3	28,274	38,485	38,485	38,485	33,183	33,183	33,183
4	-	-	-	-	-	-	1,131
5	28,274	-	-	-	-	-	-
6	28,274	12,566	12,566	4,909	4,909	4,909	9,621
7	28,274	12,566	9,079	28,274	9,621	12,566	12,566
8	28,274	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485	38,485
Маса [kg]	543,164	392,324	380,098	361,072	328,893	351,122	353,488
Површина [m ²]	13,340	10,704	10,480	9,287	9,516	9,962	10,319

Табела 5.44 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за пример комплетне оптимизације са 10 штапова.

Координате	Координате чворова [m] за број различитих профила						
	1	2	3	4	5	6	7
$-x_3, x_4, x_5, -x_6$ [m]	0,508	0,932	0,999	0,609	0,995	0,897	0,961
$y_3, y_4, -y_5, -y_6$ [m]	1,245	1,212	1,169	1,4	1,224	1,279	1,168
z_3, z_4, z_5, z_6 [m]	2,433	2,472	2,559	2,286	2,59	2,49	2,658
$-x_7, x_8, x_9, -x_{10}$ [m]	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016

5.3.3 Анализа резултата

Код оптимизације примера са 25 штапова резултати који не узимају у обзир извијање као динамичко ограничење, као и код претходног примера, јер дају резултате који су у практичној примени апсолутно неупотребљиви. Као што је већ поменуто у претходном потпоглављу, у литератури се и ови резултати појављују и користе најчешће у циљу унапређивања рада оптимизационих метода и могућности сагледавања и анализе оптимизационог процеса. Овом дисертацијом анализирана су решења са и без употребе динамичких ограничења на извијање за овај пример. Постојање сложеног просторног оптерећења доводи до тога да код скоро свих оптималних решења у групама елемената постоји бар један штап оптерећен на притисак. Међу штаповима у тим групама који су оптерећени на притисак чак и ако само један штап не задовољава услове извијања, поље је обележено тамно сивом бојом у табели 5.31. Постојање макар једног оваквог поља у решењима елиминише могућност употребе такве концепције конструкције у реалним условима, као и код претходних примера уосталом.

Поново, у случају оптимизације топологије и облика, као и њихове комбинације, као и код претходног примера, коришћен је исти попречни пресек који припада скупу дискретних променљивих због незнатне разлике у димензијама са континуалним променљивим. Код примера са 25 штапова за оптимизацију топологије, облика и њихове комбинације коришћен је попречни пресек аналитичког решења ($44,179\text{cm}^2$ тј. 75mm^2).

Када се у процес оптимизације укључе ограничења минималне дужине штапова и провера на извијање, постижу се практично применљиви резултати. Пошто се у литератури јавља пуно примера који користе континуалне променљиве попречног пресека, урађена је оптимизација са континуалним променљивим попречним пресецима. Због практичне применљивости резултата, урађена је и оптимизација са дискретним променљивим попречних пресека. Резултати оптимизације коришћењем континуалних и дискретних променљивих се веома мало разликују у маси. Разлике маса између добијених модела са континуалним и дискретним попречним пресецима је 5,697% за оптимизацију попречних пресека, 5,091% за оптимизацију попречних пресека и топологије, 3,592% за оптимизацију попречних пресека и облика и 0,567% за комплетну оптимизацију. И код овог примера сва оптимална решења која користе континуалне променљиве имају мање масе од дискретних решења, што је и очекивано.

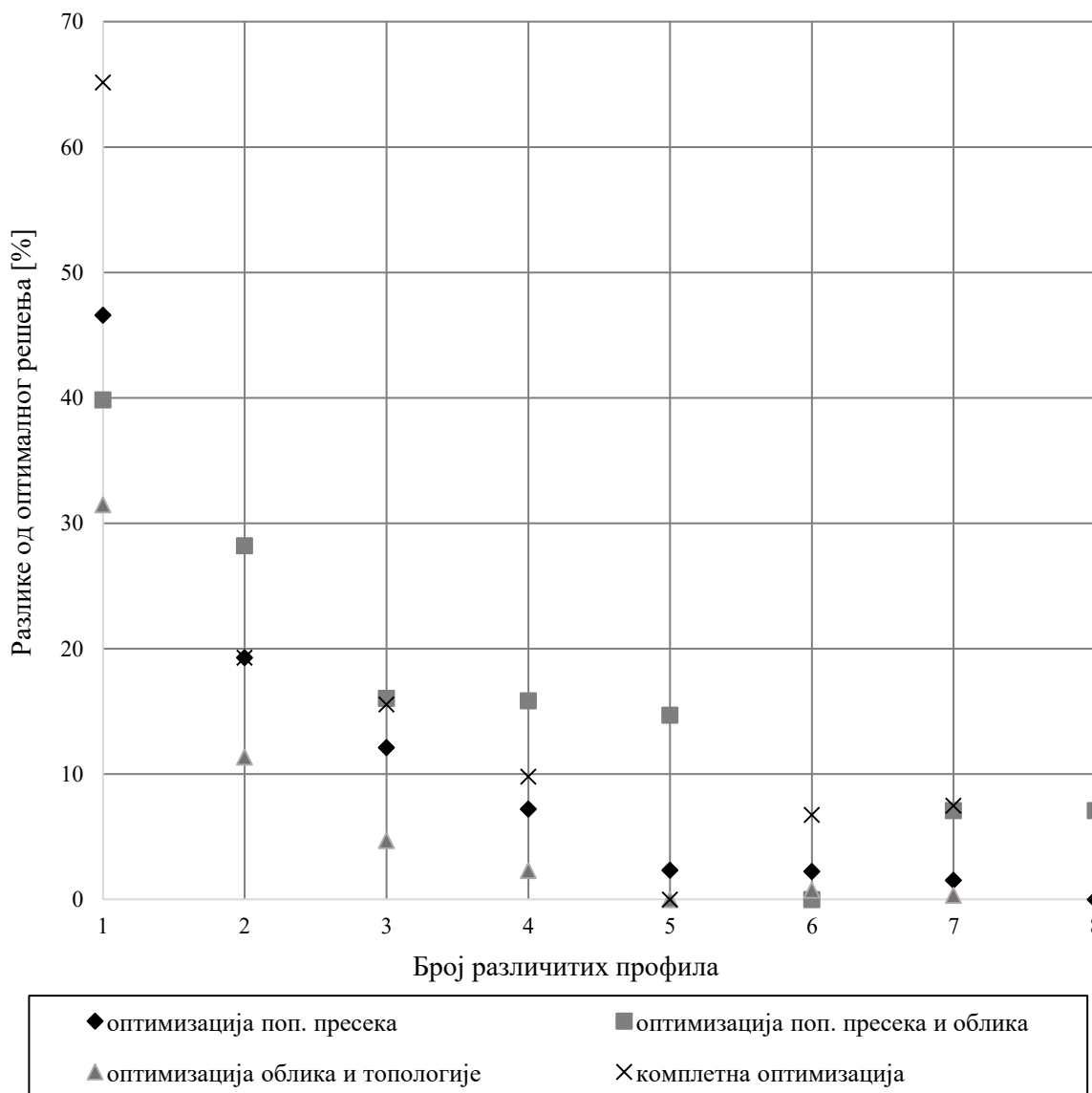
Као и код претходних примера, поређењем оптималних маса решења оптимизације само са дискретним променљивим, може се уочити да се најмања маса постиже оптимизацијом сва три аспекта симултано (комплетном оптимизацијом). Аналитичко решење прорачуна овог носача даје исте резултате као оптимизација са једним истим попречним пресеком за све групе штапова (табела 5.35) јер се димензионисање врши у односу на најоптерећенији штап. То значи да у поређењу са аналитичким решењем, оптималнио решење где су оптимизовани само попречни пресеци са 31,792% мање масе. Оптимална решења само топологије и само облика дају значајно веће масе од осталих оптималних решења. Она су упоредива са аналитичким решењем јер користе исти попречни пресек, тако да је оптимизацијом само топологије добија се 11,339% мања маса, а оптимизацијом само облика 11,849% мања маса од аналитички добијеног модела.

Резултати комплетне оптимизације дају 67,352% мању масу од аналитичког решења. И овде је случај да детаљнија анализа резултата омогућава уочавање разлике маса где је оптимизован облик или топологија у комбинацији са оптимизацијом попречних пресека који дају нешто лошије, али упоредиве резултате са комплетном оптимизацијом. Конкретно, оптимизација попречних пресека и облика даје 25,759% већу масу од комплетне оптимизације (58,942% мања маса од аналитичког модела), док оптимизација попречних пресека и топологије даје 106,563% већу масу од оптималне (32,561% мања маса од аналитичког модела). Оптимизација само попречних пресека даје 97,015% већу масу од резултата комплетне оптимизације. Када се посматрају разлике оптималних маса, поново је јасно да је најбоље користити комплетну оптимизацију. Али за разлику од претходних примера, за овај носач са 25 штапова, у случајевима када то није могуће, очигледно, препоручује се оптимизација облика и попречних пресека. Такође је евидентно да се највеће уштеде постижу оптимизацијом облика, што наводи на закључак да је облик иницијалног модела предимензионисан. Из резултата се може видети да оптимизацијом топологије у овом случају није могуће значајно утицати на масу код овог примера.

И у овом примеру су само дати резултати укупне спољашње површине за оптималне моделе се дискретним попречним пресецима. Код овог примера се јавља корелација односа укупних спољашњих површина и оптималних маса када се пореде типови оптимизација. Једино одступање се јавља код оптимизације попречних пресека и топологије које има већу површину од оптималних решења свих типова осим оптимизације топологије. Разлог за ово је да су у овом решењу коришћени већи профили од профила код оптимизације само попречних пресека у групи 5 због елиминације група 1 и 4 у конфигурацији.

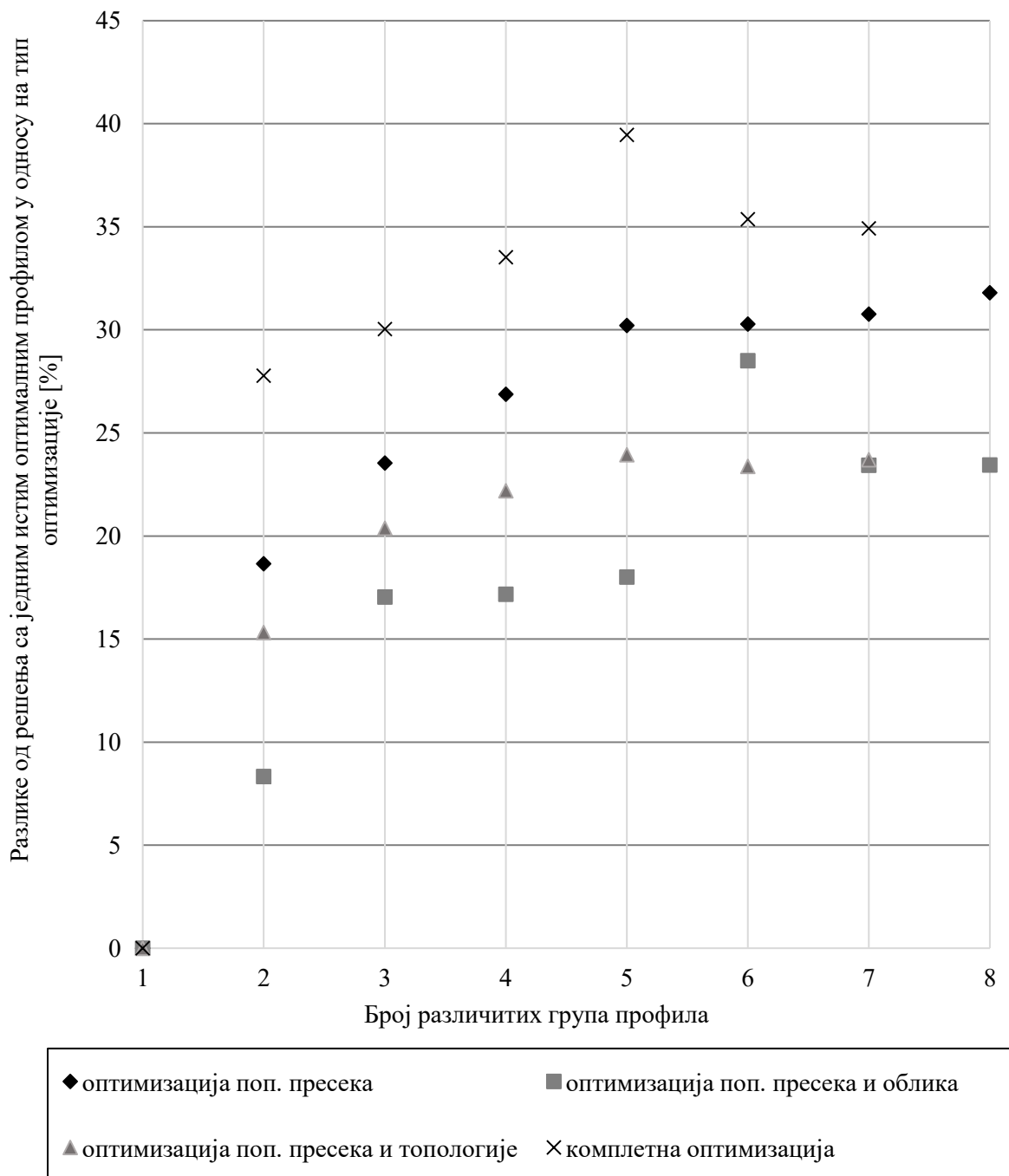
Оптимално решење примера са 25 штапова у случају оптимизације само попречних пресека садржи свих 8 различитих група попречних пресека у конструкцији. Оптимизација попречних пресека и топологије даје оптимално решење са 5, оптимизација попречних пресека и облика 6, а комплетна оптимизација даје оптимално решење са 5 различитих попречних пресека. Понављамо да су ово свакако велики бројеви различитих профила које би било потребно искористити за једну конструкцију. Ограничавањем броја различитих попречних пресека у решењима су добијене оптималне масе за све могуће вредности броја различитих група попречних пресека. У овом кораку су само поређене оптимизације које узимају у обзир попречне

пресеке као променљиве. Табеле 5.35, 5.37, 5.39 и 5.42 дају поређења резултата оптимизације са ограниченим бројем различитих профила са оптималним решењем и са аналитичким решењем (решењем где су сви исти попречни пресеци за тај тип оптимизације). Поређењем резултата са слике 5.35 се јасно види да масе расту скоро нормалном расподелом са смањењем броја различитих попречних пресека, док што је број различитих већи од оптимума маса се повећава у односу на оптимална решења без овог ограничења. Повећање масе у односу на оптимално решење, лево и десно од њега на графику, указује на то да су у питању глобалне оптималне вредности броја различитих профила. На слици 5.35 је приказана разлика маса оптималних модела са свим бројевима различитих профила у односу на оптимум за све случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречног пресека код примера са 25 штапова.



Слика 5.35 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројем профила у односу на оптимум за случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречних пресека примера са 25 штапова.

На слици 5.36 је дато поређење оптималних маса у односу на број различитих попречних пресека и решења кореспондирајућих типова оптимизације са само једним (оптималним за тај случај) попречним пресеком.



Слика 5.36 – Разлика маса оптималних модела различитим бројем профила у односу на решење са само једним истим оптималним профилем за случајеве који узимају у обзир оптимизацију попречних пресека примера са 25 итапова.

Посматрајући случајеве са 3 и 4 различита профила као у претходним примерима у случају оптимизације само попречних пресека примера са 25 штапова решења са 3 различита попречна пресека даје 12,104% веће резултате од оптимума за тај аспект (са 8 различитих група профила), док је са 4 различита профила та разлика 7,215%. Код оптимизације попречних пресека и топологије решења са 3 различита попречна пресека дају 4,691% веће резултате од оптимума за тај аспект (са 5 различитих група профила), док је са 4 различита профила та разлика 2,298%. Код оптимизације попречних пресека и облика решења са 3 различита попречна пресека дају 16,037% веће резултате оптимума за тај аспект (са 6 различитих група профила), док је са 4 различита профила та разлика 15,849%. Код комплетне оптимизације са 3 могућа различита профила добија се да је 15,540% већи резултат од оптимума комплетне оптимизације (са 5 различитих група профила), док је са 4 могућа различита профила та разлика 9,784%.

Када се постави ограничење од 4 различита профила оптимизације попречног пресека, као и решења оптимизација попречног пресека и топологије дају преко 20% боље резултате од решења када се за те исте типове оптимизација користи само један оптимални профил. У случају комплетне оптимизације са 4 различита профила се постиже преко 30% боље решење од решења са једним оптималним профилем. Код овог примера оптимизација попречних пресека и облика дају најмање побољшање у односу на пример са свим истим профилима од ~17%.

Ако се посматрају разлике укупних спољашњих површина, за оптимизације конкретних аспеката у односу на број различитих профила попречних пресека код оптимизације само попречних пресека, постоји корелација са резултатима маса. Једино одступање се јавља код решења са 7 различитих штапова које има за $0,031 m^2$ већу површину од решења са 6 различитих профила. Ово је случај услед коришћења знатно већег профила у групи 5 а мало мањег профила у групи 2. У случају оптимизације попречних пресека и топологије, осим код случаја са 5 различита профила (оптимума за овај аспект) се јавља иста корелација. Ово одступање од тренда се јавља због постојања групе 5 у овој оптималној конфигурацији за разлику од решења са мањим бројем различитих. Код оптимизације облика и попречних пресека постоји корелација резултата маса и спољашњих површина. Најповољнији случај за минималну укупну површину код комплетне оптимизације се јавља код решења са 4 различита попречна пресека. И овде је варијације у резултујућим површинама код оптимизације свих аспеката конструкције тешко приписати некој карактеристици решења због великог броја променљивих и велике разлике између концепција решења у односу на број различитих профила.

5.4 Носач са 47 штапова

Пример носача са 47 штапова [49, 99-102] је равански проблем коме су позиције чворова симетрични по у оси. Попречни пресеци елемената су груписани у 27 група тако да постоји симетрија по у оси. Конфигурација је постављена у 22 чвора као што је приказано на слици 5.37. За овај пример коришћени су профили пуног кружног попречног пресека од конструкционог челика карактеристика: модул еластичности 206842.719MPa и густина 7.4g/cm^3 , као код примера са 17 штапова. Конструкција мора да издржи три независна случаја оптерећења ($LC1$, $LC2$ и $LC3$). За први случај оптерећења ($LC1$) концентрисане силе од $26,689\text{kN}$ у $+x$ смеру и $66,275\text{kN}$ у $-y$ смеру у чворовима 17 и 22. У другом случају оптерећења ($LC2$) концентрисане силе од $26,689\text{kN}$ у $+x$ смеру и $66,275\text{kN}$ у $-y$ смеру у чвору 17. У трећем случају оптерећења ($LC3$) концентрисане силе од $26,689\text{kN}$ у $+x$ смеру и $66,275\text{kN}$ у $-y$ смеру у чвору 22. Пример са 47 штапова има задата ограничење напона за истезање од $137,895\text{MPa}$ и $103,421\text{MPa}$ за притисак. Овај пример нема задато ограничење за максимално дозвољено померања чворова услед деформације.

Код континуално променљивих минимални пречник попречног пресека је 9mm ($2,54\text{cm}^2$), док се за случај дискретних променљивих користи исти списак као код примера са 17 штапова (поглавље 5.2).

Ограничења координата чворова код оптимизације облика су груписане због услова симетрије, по x оси су следеће:

$$0\text{m} \leq x_{2-8} \leq 3,05\text{m} ;$$

$$-0,08\text{m} \leq x_{10-14} \leq 2,29 ;$$

$$-0,08\text{m} \leq x_{18-20} \leq 2,29 \text{ и}$$

$$0,08\text{m} \leq x_{21} \leq 3,81,$$

а по y оси су:

$$1,52\text{m} \leq y_4 \leq 4,57 ;$$

$$4,57\text{m} \leq y_6 \leq 7,62 ;$$

$$7,62\text{m} \leq y_8 \leq 10,67 ;$$

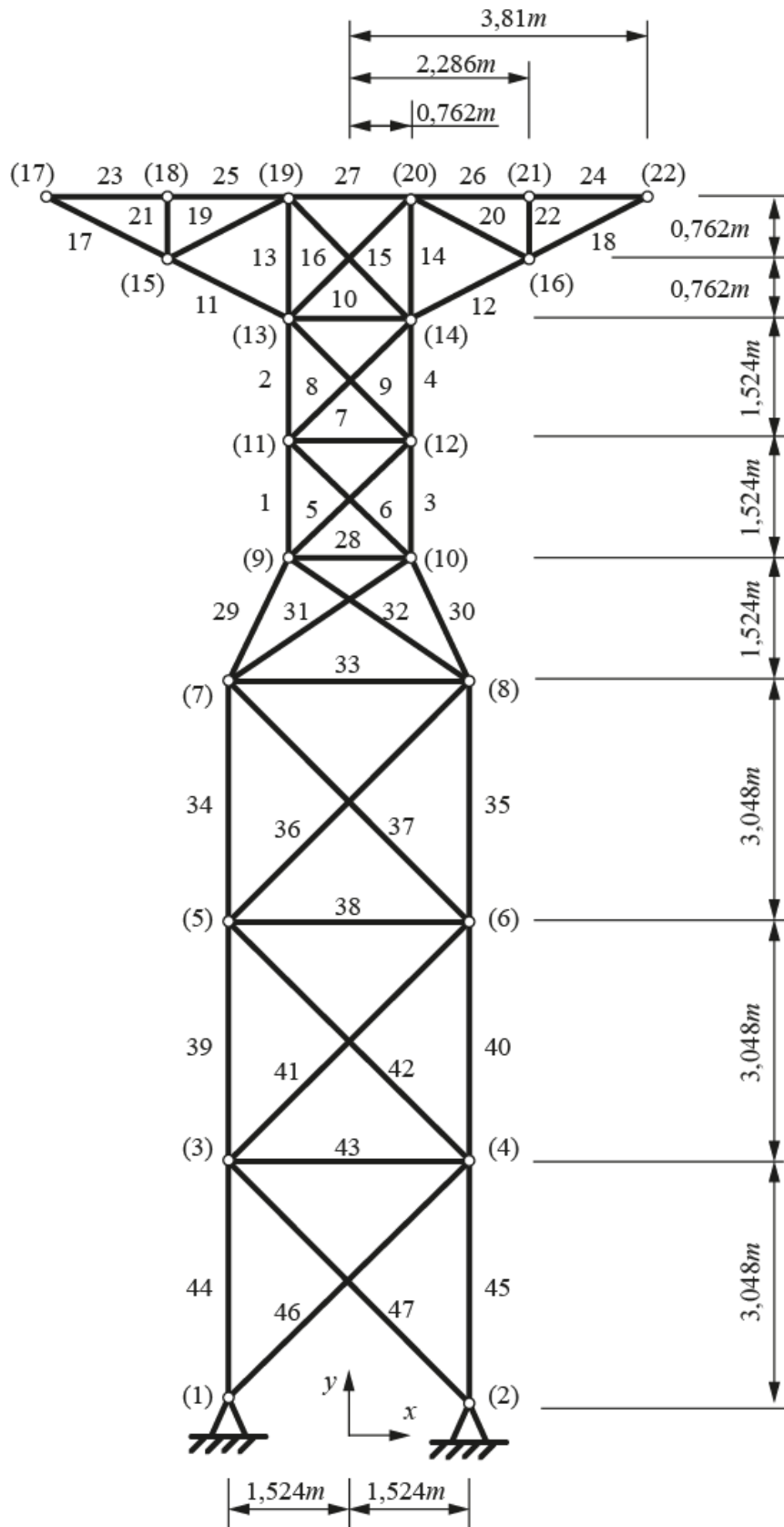
$$9,14\text{m} \leq y_{10} \leq 12,19 ;$$

$$10,67\text{m} \leq y_{12} \leq 13,72 ;$$

$$12,19\text{m} \leq y_{14} \leq 15,24 \text{ и}$$

$$13,72\text{m} \leq y_{20,21} \leq 16,76.$$

Оптимизација попречног пресека има 27 променљивих и у комбинацији са оптимизацијом облика укупно 44 оптимизационе променљиве. Код оптимизације ове конструкције није предвиђена оптимизација топологије.



Слика 5.37 – Конфигурација примера носача са 47 итапова.

Када се узму у обзир и динамична ограничења на извијање, овај сложени проблем има укупно 282 ограничења која чине овај пример изузетно захтевним. Додавање ограничења броја различитих штапова драстично повећава комплексност, поготову на конкретне бројеве различитих, као што је рађено у претходним примерима. Имајући ово у виду, за потребе овог примера је коришћено ограничење броја различитих профила до 7. За носач са 47 штапова је постављено ограничење минималне дужине елемената од 0,5m.

5.4.1 Верификација

Верификацију резултата за пример са 47 штапова није једноставно извести због неусаглашености ограничења и променљивих. Највећи проблеми се јављају приликом одређивања ограничења пошто се провере на извијање у литератури врши у односу на једначину извијања као што је дата у [49, 100-102]. Једначина коришћена у овим радовима гласи:

$$|(\sigma_c)_i| \leq \beta EA_i / l_i^2, \quad \beta = 3,96, \quad (5.1)$$

где је $|(\sigma_c)_i|$ апсолутна вредност напона i -тог елемента оптерећеног на притисак. Поред тога, литература користи дискретан скуп од 50 променљивих за попречне пресеке који су дати као површине од $0,1in^2$ ($0,251cm^2$ тј. пречника $5,655mm$) до $5in^2$ ($12,7cm^2$ тј. пречника $40,228mm$) са инкременталним повећањем од $0,1in^2$ ($0,251cm^2$). Како би се извршила верификација урађене су засебне оптимизације тако што је модификован скуп променљивих као и ограничење провере на извијање према литератури.

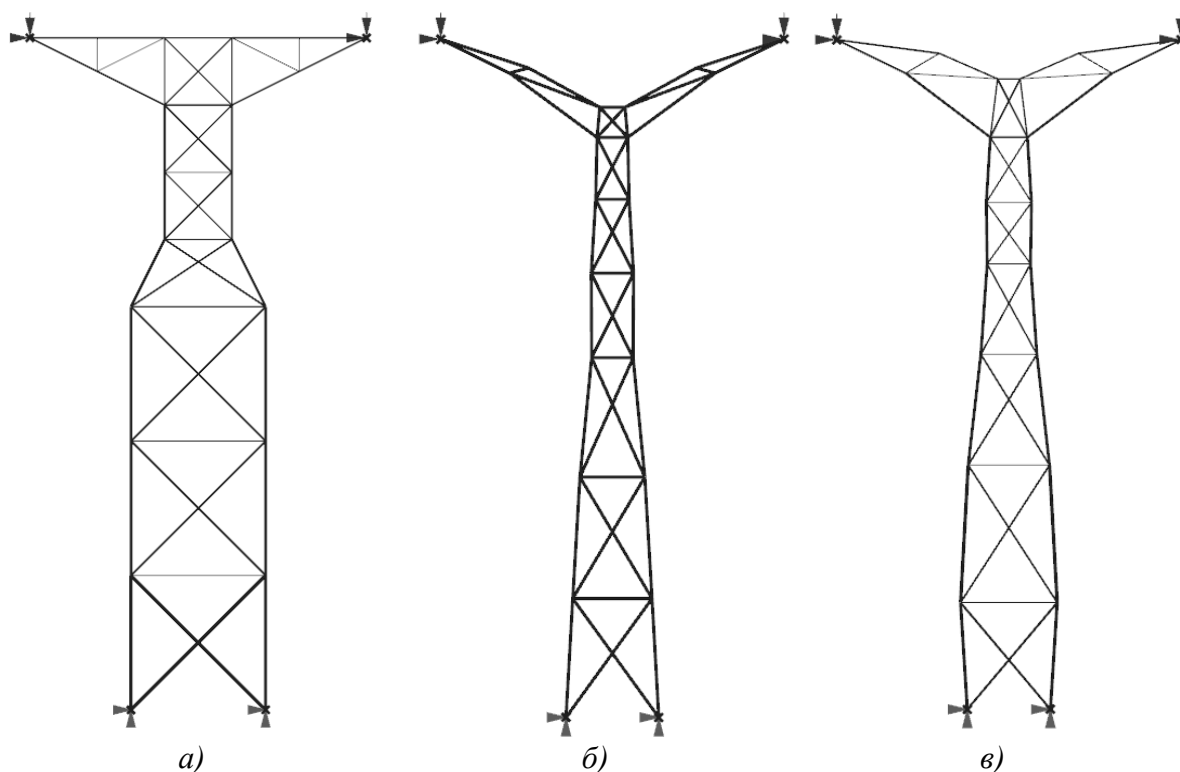
Једначина за извијање из литературе када се преведе у облик који је дат у поглављу 3 даје дужину извијања такву да је $l = 5,045 l_k$. Овако дефинисан критични напон извијања није могуће поредити са једначинама постављеним у претходним поглављима. Коришћење тако малих ограничења такође омогућава употребу попречних пресека максималне површине $12,7mm^2$ у литератури. Иницијална конфигурација овог примера, чак и са свим штаповима површине $12,7cm^2$ не испуњава услове извијања као што су представљени овим радом.

У литератури је пронађен само један пример где се код овог примера само оптимизује попречни пресек [61] где је оптимална маса $1381,660kg$. Резултати оптимизације попречних пресека коришћењем ограничења (5.1) за извијање, уместо по Ојлеру, дају оптималну масу од $1137,873kg$ коришћењем оригиналног софтвера. Ови резултати нису упоредиви из више разлога. Велика разлика у резултатима се јавља због ограничене, мање, популације и мањег броја итерација коришћених за оптимизацију у литератури. Поред тога, овако оптимизован модел не испуњава услове извијања по Ојлеру за 13 штапова код првог случаја оптерећења, 11 штапова код другог и 14 штапова код трећег случаја оптерећења. Међутим, у даљем раду је коришћено ограничење по Ојлеру као и у претходним поглављима и за овај пример.

Код примера са 47 штапова верификација рада софтвера је рађена на овај начин јер у литератури није могуће наћи оптимизацију овог примера без претходно поменуте провере на извијање.

5.4.2 Резултати

У литератури нису пронађени примери оптимизације без икакве провере на извијање за овај пример, тако да нису рађене ни овде. Оптимални попречни пресек када се користи један исти профил за целу конструкцију је коришћен за случај оптимизације само облика и он је површине $44,179\text{cm}^2$ (пречника 75mm). Оптимизација облика није рађена за случај континуалних променљивих попречних пресека будући да је континуално оптимално решење оптимизације попречних пресека са истим профилем за све штапове незнатно мање од дискретног решења. На слици 5.38 су приказана оптимална решења добијена коришћењем дискретних променљивих за оптимизацију попречних пресека, облика и њихове комбинације.



Слика 5.38 – Решења примера са 47 штапова и дискретним променљивим са провером на извијање а) оптималних попречних пресека, б) оптималног облика и в) оптималних попречних пресека и облика.

У табели 5.45 су дате координате чворова оптималних решења која узимају у обзир оптимизацију облика. У табели су дате координате за случај континуалних и дискретних променљивих за случај симултане оптимизације попречних пресека и облика. Табела 5.46 даје поређење површина попречних пресека и оптималних маса оптимизованих решења примера са 47 штапова са континуалним и дискретним променљивим попречним пресецима.

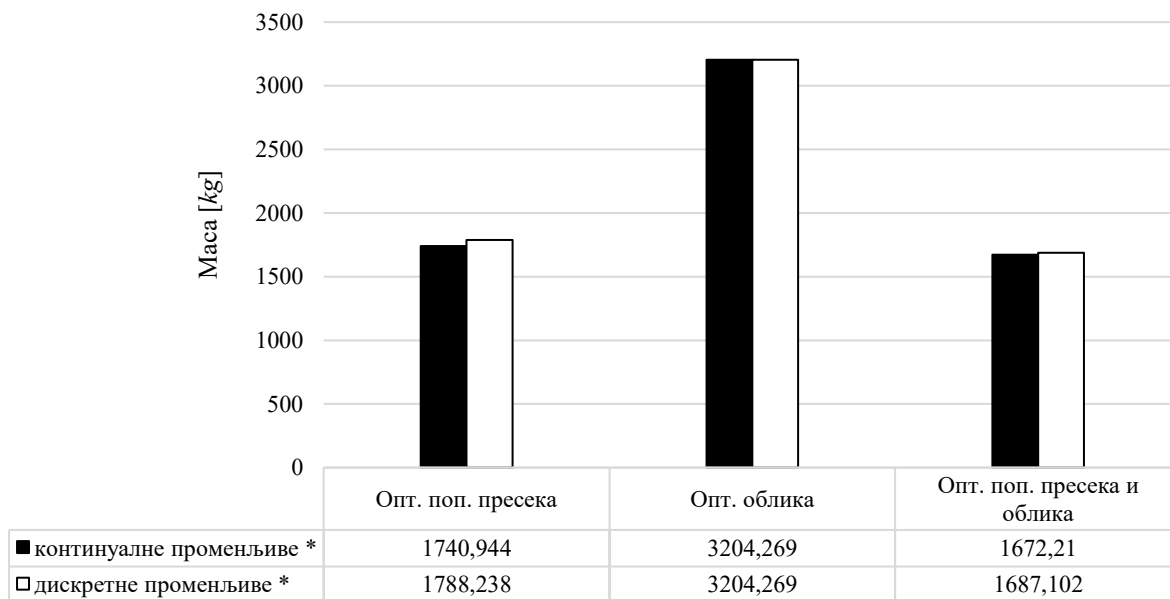
Табела 5.45 – Координате чворова за случајеве са оптимизацијом облика са провером на извијање примера са 47 штапова.

Коорд. чвора	Тип променљивих	Опт. облика	Опт. поп. пресека и облика
$x_2, y_2 / -x_1, y_1 [m]$	Континуалне	(0,91; 0,00)	(0,92; 0,00)
	Дискретне		(1,88; 0,00)
$x_4, y_4 / -x_3, y_3 [m]$	Континуалне	(1,03; 2,63)	(1,07; 2,43)
	Дискретне		(1,66; 3,11)
$x_6, y_6 / -x_5, y_5 [m]$	Континуалне	(0,96; 5,54)	(0,9; 5,56)
	Дискретне		(1,65; 5,92)
$x_8, y_8 / -x_7, y_7 [m]$	Континуалне	(0,68; 8,62)	(0,62; 8,08)
	Дискретне		(1,47; 8,55)
$x_{10}, y_{10} / -x_9, y_9 [m]$	Континуалне	(0,42; 10,67)	(0,48; 10,14)
	Дискретне		(0,57; 10,43)
$x_{12}, y_{12} / -x_{11}, y_{11} [m]$	Континуалне	(0,37; 11,7)	(0,5; 11,54)
	Дискретне		(0,65; 11,91)
$x_{14}, y_{14} / -x_{13}, y_{13} [m]$	Континуалне	(0,39; 12,9)	(0,41; 13,02)
	Дискретне		(0,54; 13,31)
$x_{20}, y_{20} / -x_{19}, y_{19} [m]$	Континуалне	(0,39; 12,9)	(0,25; 14,35)
	Дискретне		(0,24; 14,62)
$x_{21}, y_{21} / -x_{18}, y_{18} [m]$	Континуалне	(1,71; 15,11)	(1,54; 14,93)
	Дискретне		(1,95; 15,15)

Табела 5.46 – Поређење оптималних попречних пресека и маса са континуалним и дискретним променљивим примера са 47 штапова.

Површина поп. пресека штапа [cm^2]	Опт. поп. пресека		Опт. облика	Опт. поп. пресека и облика	
	континуалне	дискретне	исти за оба	континуалне	дискретне
1	24,279	24,630	44,179	30,386	38,485
2	21,401	23,758	44,179	27,340	38,485
3	12,566	12,566	44,179	17,055	9,621
4	10,292	7,069	44,179	8,867	0,503
5	13,592	15,904	44,179	10,521	9,621
6	18,704	12,566	44,179	14,657	19,635
7	15,904	15,904	44,179	22,902	28,274
8	11,104	11,341	44,179	9,954	11,341
9	16,475	19,635	44,179	13,332	15,904
10	16,046	15,904	44,179	16,909	19,635
11	0,283	0,283	44,179	2,956	3,801
12	4,012	0,503	44,179	4,301	7,069
13	10,986	11,341	44,179	12,192	15,904
14	10,986	11,341	44,179	11,341	12,566
15	8,143	9,621	44,179	10,752	11,341
16	19,322	7,069	44,179	1,629	1,131
17	26,058	24,630	44,179	27,712	38,485
18	19,635	23,758	44,179	26,058	12,566
19	0,665	1,131	44,179	8,657	0,283
20	35,046	38,485	44,179	29,802	38,485
21	14,930	15,904	44,179	13,074	15,904
22	4,676	7,069	44,179	0,636	0,283
23	37,610	38,485	44,179	34,212	50,265
24	24,279	23,758	44,179	20,428	15,904
25	7,942	1,539	44,179	3,079	0,283
26	41,854	44,179	44,179	40,264	44,179
27	22,902	23,758	44,179	21,237	23,758
Маса [kg]	1740,944	1788,238	3204,269	1672,210	1687,102
Површина [m^2]		16,096	20,580		14,290

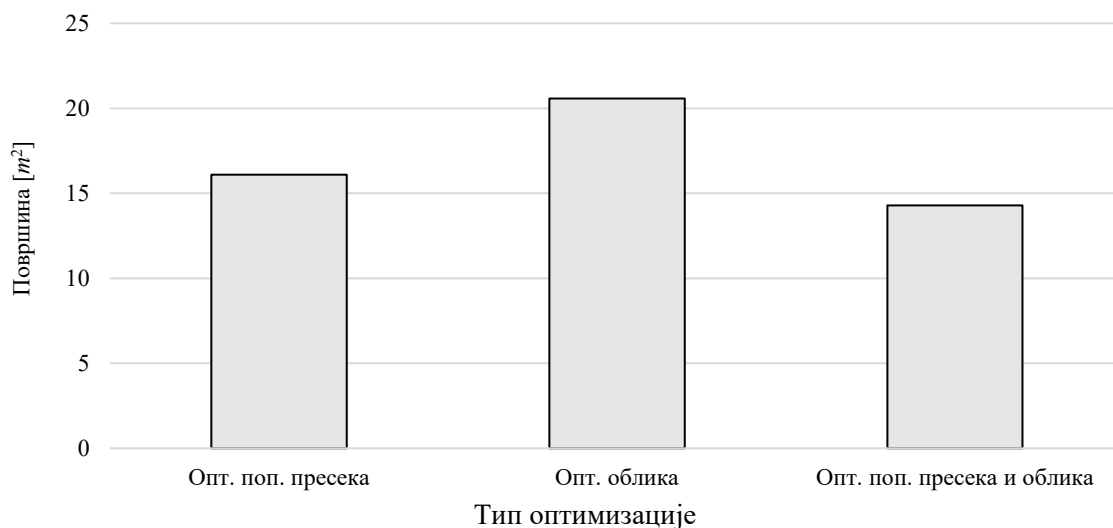
На слици 5.39 је дат графички приказ поређења оптималних маса за различите типове оптимизације у односу на врсту променљивих.



* са провером на извијање

Слика 5.39 – Маса оптималних модела примера са 47 штапова.

На слици 5.40 је дато поређење спољашњих површина оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 47 штапова.



Слика 5.40 – Спољашње површине оптималних решења у односу на тип оптимизације за пример са 47 штапова.

Како и у претходним примерима, поновљен је поступак на дискретним моделима са додатим ограничењем броја различитих профила за обе оптимизације који узимају у обзир попречни пресек. Табеле 5.47 и 5.49 дају поређење оптималних маса са различитим, ограниченим, бројевима различитих попречних пресека са општим оптималним решењем и оптималним решењем са само једним попречним пресеком за

цео модел, за оптимизације попречног пресека и попречног пресека и облика, тим редоследом.

Табела 5.47 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека примера са 47 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим елементима	Разлика од оптималног решења
1	3969,870	-	121,999%
2	2510,117	36,771%	40,368%
3	2260,859	43,050%	26,429%
4	2246,385	43,414%	25,620%
5	2194,342	44,725%	22,710%
6	2157,790	45,646%	20,666%
7	2018,764	49,148%	12,891%
...			
14	1788,238	54,955%	-

У табелама 5.48 и 5.50 су дате површине попречних пресека за оптимална решења са различитим бројевима различитих попречних пресека за оптимизације попречног пресека и попречног пресека и облик, тим редоследом.

Табела 5.48 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека примера са 47 штапова.

Ел.	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила							
	1	2	3	4	5	6	7	14
1	44,179	24,630	44,179	28,274	28,274	28,274	44,179	24,630
2	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758
3	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	15,904	11,341	12,566
4	44,179	24,630	1,310	0,503	0,503	0,503	1,131	7,069
5	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	15,904	15,904
6	44,179	24,630	23,758	23,758	15,904	15,904	19,635	12,566
7	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	15,904	15,904
8	44,179	24,630	23,758	23,758	15,904	15,904	11,341	11,341
9	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	19,635	19,635
10	44,179	24,630	23,758	23,758	15,904	15,904	15,904	15,904
11	44,179	24,630	1,310	0,503	0,503	0,503	1,131	0,283
12	44,179	24,630	1,310	0,503	0,503	0,503	1,131	0,503
13	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	11,341	11,341
14	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758	11,341
15	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	15,904	11,341	9,621
16	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	11,341	7,069
17	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758	24,630
18	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	31,172	28,274	23,758
19	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	11,341	1,131
20	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	38,485
21	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758	15,904
22	44,179	24,630	1,310	0,503	0,503	0,503	1,131	7,069
23	44,179	24,630	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	38,485
24	44,179	24,630	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758	23,758
25	44,179	24,630	1,310	0,503	0,503	0,503	1,131	1,539
26	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179	44,179
27	44,179	24,630	23,758	28,274	28,274	23,758	23,758	23,758
Маса [kg]	3969,87	2510,117	2260,859	2246,385	2194,342	2157,79	2018,764	1788,238
Површина [m ²]	25,497	20,129	18,343	18,177	17,926	17,746	17,107	16,096

Табела 5.49 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за проблем оптимизације попречних пресека примера са 47 штапова.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од решења са свим истим елементима	Разлика од оптималног решења
1	2927,972	-	73,550%
2	2709,349	1,756%	70,502%
3	2702,297	7,708%	60,174%
4	2447,605	16,406%	45,077%
5	2298,462	21,500%	36,237%
6	2079,942	28,963%	23,285%
7	109,192	34,795%	13,164%
...			
15	1687,102	42,380%	-

Табела 5.50 – Површине попречних пресека и масе за различите бројеве различитих профила проблема оптимизације попречних пресека примера са 47 штапова.

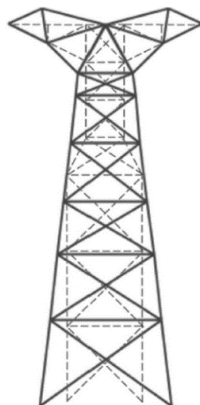
Ел.	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила							
	1	2	3	4	5	6	7	15
1	38,485	33,183	33,183	44,179	0,283	9,621	50,265	38,485
2	38,485	33,183	33,183	31,172	15,904	9,621	38,485	38,485
3	38,485	33,183	33,183	31,172	15,904	9,621	38,485	9,621
4	38,485	33,183	33,183	31,172	15,904	9,621	0,283	0,503
5	38,485	33,183	33,183	33,183	15,904	9,621	19,635	9,621
6	38,485	33,183	33,183	31,172	31,172	15,904	19,635	19,635
7	38,485	33,183	33,183	44,179	31,172	15,904	38,485	28,274
8	38,485	33,183	33,183	23,758	31,172	15,904	10,179	11,341
9	38,485	33,183	33,183	23,758	31,172	19,635	23,758	15,904
10	38,485	33,183	33,183	31,172	31,172	19,635	19,635	19,635
11	38,485	33,183	33,183	23,758	31,172	23,758	10,179	3,801
12	38,485	33,183	33,183	23,758	31,172	23,758	38,485	7,069
13	38,485	33,183	33,183	23,758	31,172	23,758	10,179	15,904
14	38,485	33,183	33,183	31,172	31,172	23,758	10,179	12,566
15	38,485	33,183	33,183	33,183	31,172	23,758	10,179	11,341
16	38,485	33,183	33,183	23,758	31,172	23,758	0,283	1,131
17	38,485	33,183	33,183	33,183	31,172	23,758	38,485	38,485
18	38,485	33,183	33,183	31,172	31,172	23,758	19,635	12,566
19	38,485	33,183	33,183	23,758	31,172	23,758	0,283	0,283
20	38,485	44,179	33,183	44,179	31,172	23,758	38,485	38,485
21	38,485	44,179	33,183	31,172	31,172	23,758	19,635	15,904
22	38,485	44,179	33,183	23,758	31,172	38,485	0,283	0,283
23	38,485	44,179	33,183	44,179	31,172	44,179	44,179	50,265
24	38,485	44,179	33,183	31,172	31,172	44,179	19,635	15,904
25	38,485	44,179	44,179	23,758	38,485	44,179	10,179	0,283
26	38,485	44,179	50,265	44,179	50,265	44,179	38,485	44,179
27	38,485	44,179	50,265	23,758	50,265	44,179	19,635	23,758
Маса [kg]	2927,972	2876,544	2702,297	2447,605	2298,462	2079,942	1909,192	1687,102
Површина [m ²]	20,149	19,870	19,151	18,138	17,363	16,731	15,665	14,290

Табела 5.51 – Координате чворова оптималних решења за различите бројеве различитих попречних пресека за пример оптимизације попречног пресека и облика са 47 штапова.

Коорд.	Координате чворова [m] за број различитих профила							
	1	2	3	4	5	6	7	15
$x_2; y_2$ $-x_1; y_1$	(1,34; 0,0)	(1,44; 0,0)	(1,1; 0,0)	(1,11; 0,0)	(0,89; 0,0)	(0,91; 0,0)	(1,23; 0,0)	(1,88; 0,00)
$x_4; y_4$ $-x_3; y_3$	(1,21; 2,61)	(0,84; 2,71)	(0,65; 2,83)	(0,98; 2,76)	(0,77; 2,78)	(0,97; 2,62)	(1,0; 2,44)	(1,66; 3,11)
$x_6; y_6$ $-x_5; y_5$	(0,93; 5,25)	(0,8; 5,49)	(0,69; 5,68)	(0,58; 5,37)	(0,58; 5,62)	(0,83; 5,07)	(1,08; 4,89)	(1,65; 5,92)
$x_8; y_8$ $-x_7; y_7$	(0,6; 7,82)	(0,7; 8,3)	(0,64; 8,6)	(0,71; 8,14)	(0,74; 8,07)	(0,55; 7,71)	(0,88; 7,62)	(1,47; 8,55)
$x_{10}; y_{10}$ $-x_9; y_9$	(0,55; 10,36)	(0,58; 10,55)	(0,57; 10,73)	(0,55; 10,42)	(0,63; 10,28)	(0,41; 10,2)	(0,51; 10,25)	(0,57; 10,43)
$x_{12}; y_{12}$ $-x_{11}; y_{11}$	(0,38; 12,3)	(0,5; 12,13)	(0,5; 12,21)	(0,42; 11,94)	(0,58; 11,99)	(0,42; 11,49)	(0,43; 10,96)	(0,65; 11,91)
$x_{14}; y_{14}$ $-x_{13}; y_{13}$	(0,39; 13,53)	(0,45; 13,65)	(0,41; 13,65)	(0,59; 13,59)	(0,42; 13,44)	(0,44; 13,01)	(0,43; 12,9)	(0,54; 13,31)
$x_{20}; y_{20}$ $-x_{19}; y_{19}$	(2,29; 14,48)	(2,13; 14,78)	(1,52; 14,62)	(2,13; 14,8)	(2,12; 14,98)	(1,55; 14,93)	(2,04; 15,32)	(1,95; 15,15)
$x_{21}; y_{21}$ $-x_{18}; y_{18}$	(0,39; 14,22)	(0,42; 14,4)	(0,73; 14,49)	(0,55; 14,19)	(0,35; 14,27)	(0,19; 14,7)	(0,37; 14,09)	(0,24; 14,62)

5.4.3 Анализа резултата

Код оптимизације примера са 47 штапова није вршена оптимизација топологије, јер се таква решења ретко налазе у литератури. Могући разлог за ово је комплексност проблема и мали број елемената који би могли бити изузети из модела у оваквој конфигурацији. Наиме једини елементи који би могли бити изузети без појаве механизма су вертикални штапови у доњем појасу конструкције [103]. Када се у процес оптимизације укључе ограничења минималне дужине штапова, постижу се практично применљиви резултати. У литератури ограничења координата чворова омогућавају преклапање чворова и најчешће у оптимизацији попречних пресека и облика дају резултате (приказане пуним линијама) као на слици 5.41. Са слике се јасно види да елемент 27 (слика 5.37) има дужину која конвергира нули, али и штапови 16 и 13, као и 15 и 14 имају скоро исти положај. На слици је испрекиданим линијама приказана иницијална конфигурација, а пуним линијама оптимално решење из литературе.



Слика 5.41 – Резултујући модел оптимизације попречних пресека и облика према ограничењима из литературе [50].

Ови резултати из [40] наводе на могућност постојања алтернативног решења са 44 до 39 штапова, зависно од тога колико би оптимизација топологије елиминисала вертикалних веза из новог модела са 44 штапова где су елиминисани елементи 15,16 и 27, а штапови 13 и 14, 19 и 20 и 25 и 26 спојени у један чвор уместо чворова 19 и 20 (са слике 5.37). Овакав пример би захтевао нову поставку и био би интересантан за поређење са примером са 47 штапова.

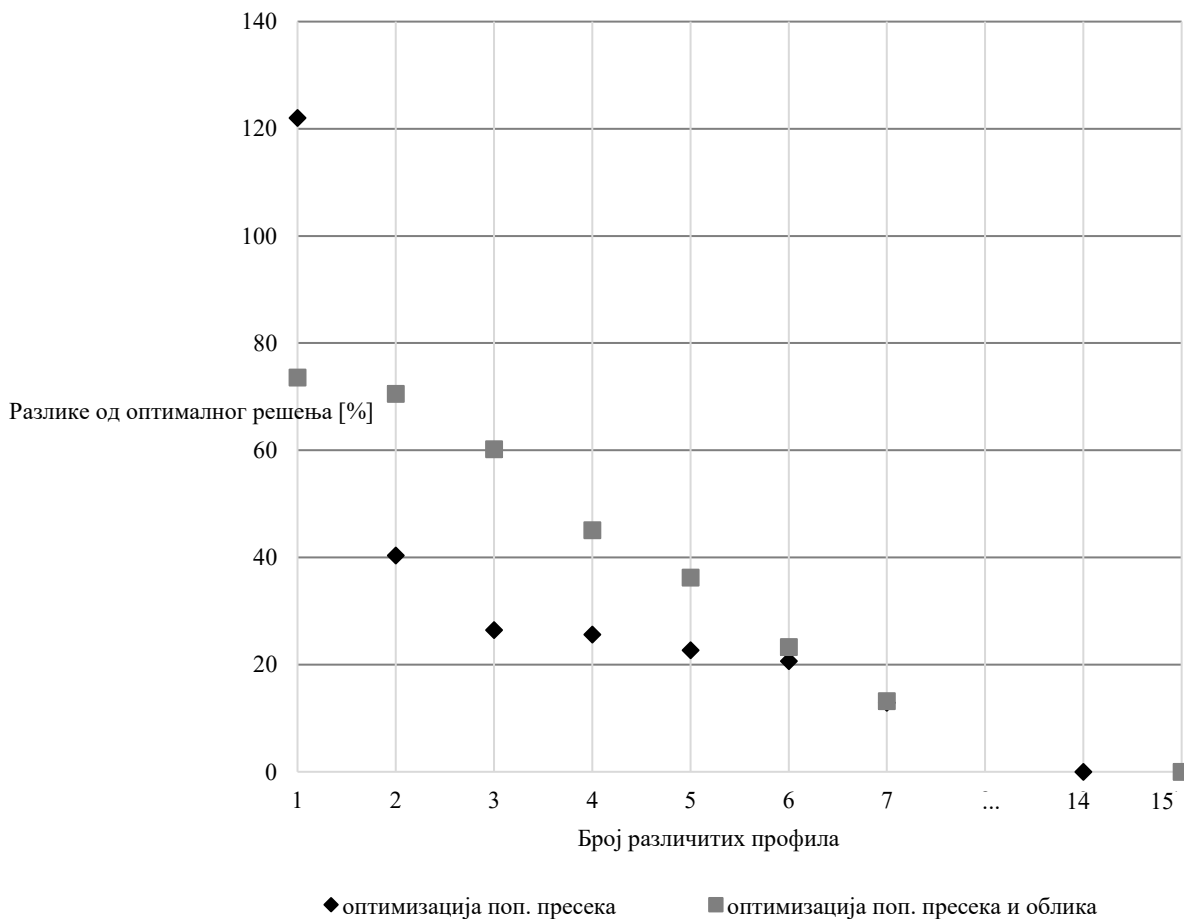
Пошто се у литератури јавља пуно примера који користе континуалне променљиве попречног пресека, урађена је оптимизација са континуалним променљивим попречним пресецима. Због практичне применљивости резултата, урађена је и оптимизација са дискретним променљивим попречних пресека. У случају оптимизације облика, као што је претходно наведено, коришћен је исти попречни пресек за све елементе модела, који припада скупу дискретних променљивих због незнатне разлике у димензијама са резултатима оптимизације са континуалним променљивим. Резултати оптимизације коришћењем континуалних и дискретних променљивих се веома мало разликују у маси. Разлике маса између добијених модела са континуалним и дискретним попречним пресецима је 2,717% за оптимизацију попречних пресека и 0,891% за оптимизацију попречних пресека и облика. Очекивано, дискретна решења су нешто веће масе у односу на решења која користе континуалне променљиве, јер као што смо већ рекли, континуална решења имају могућност претраге простора у околини дискретних оптималних вредности. Решења оптимизације попречних пресека и облика коришћењем континуалних променљивих у овом случају дају сличније решење, али се то може приписати критеријуму заустављања. За разлику од претходних примера, поређењем оптималних маса решења оптимизације само са дискретним променљивим може се уочити да се најмања маса постиже оптимизацијом оба критеријума симултано.

Као што је већ поменуто, аналитичко решење прорачуна овог носача даје исте резултате као оптимизација са једним истим попречним пресеком за све штапове (табела 5.49) јер се димензионисање врши у односу на најоптерећенији штап. То значи да у поређењу са аналитичким решењем, оптимално решење где су оптимизовани само попречни пресеци даје 54,955% мање масе. Оптимална решења само облика дају значајно веће масе од осталих оптималних решења. Она су упоредива са аналитичким решењем јер користе исти попречни пресек, тако да оптимизацијом само облика добија се 23,893% мања маса од аналитички добијеног модела. У овом примеру се добија релативно мала разлика између решења оптимизације само попречних пресека и комбинације попречних пресека и облика. Резултати оптимизације попречних пресека дају 5,896% мању масу од комбинације са обликом.

Како је напоменуто раније, у пракси није могуће постићи вредности добијене оптимизацијом континуалних попречних пресека. Имајући ово у виду, дати су резултати укупне спољашње површине само за оптималне моделе се дискретним попречним пресецима. Поређењем површина оптималних решења уочава се корелација између укупних површина и оптималних маса у односу на тип оптимизације.

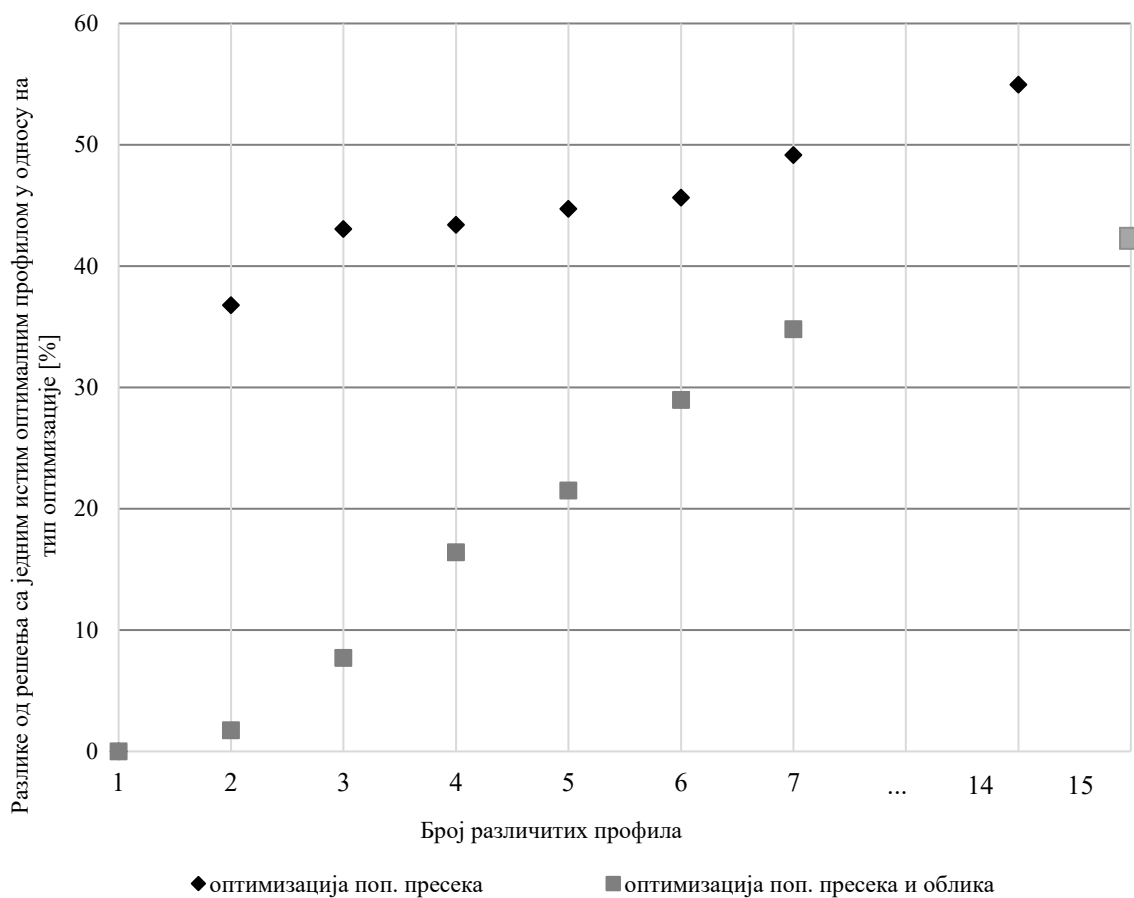
Пример са 47 штапова је направљен симетрично и профили елемената су подељени у 27 група. Оптимално решење примера са 47 штапова у случају оптимизације само попречних пресека садржи 14 различитих попречних пресека у конструкцији. Оптимизација попречних пресека и облика даје оптимално решење са 15 различитих

попречних пресека. Ово нису практични, већ енормно велики бројеви различитих профила које би било потребно искористити за једну овакву конструкцију. Ограничавањем броја различитих попречних пресека у решењима су добијене оптималне масе за вредности броја различитих попречних пресека од 1 до 7. У овом кораку су само поређене оптимизације попречних пресека и комбинације попречних пресека и облика. Табеле 5.49 и 5.51 дају поређења резултата оптимизације са ограниченим бројем различитих профила са оптималним решењем и са аналитичким решењем (решењем где су сви исти попречни пресеци). И овде се поређењем резултата са слике 5.42 јасно види да се масе смањују, скоро нормалном расподелом, са смањењем броја различитих попречних пресека. Повећање масе у односу на оптимално решење, лево од њега на графику (6.42), указује на то да су у питању глобалне оптималне вредности броја различитих профила. На слици 5.42 је приказана разлика маса оптималних модела са свим бројевима различитих профила (од 1-7, 14 и 15) у односу на оптимум за случајеве оптимизације попречноих пресека и комбинације попречних пресека и облика код примера са 47 штапова.



Слика 5.42 – Разлика маса у односу на број различитих профила за пример са 47 штапова.

На слици 5.43 је дато поређење оптималних маса за број различитих попречних пресека и решења кореспондирајућих типова оптимизације са само једним (оптималним за тај случај) попречним пресеком.



Слика 5.43 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројевима различитих профила у односу на решење са само једним истим оптималним профилем за случајеве оптимизације попречних пресека и комбинације попречних пресека и облика примера са 47 штапова.

Приликом конструисања решеткастих носача конвенционалним методама, рационално је користити највише 3 до 4 различита профила у односу на сложеност конструкције. У случају оптимизације само попречних пресека примера са 47 штапова решења са 3 различита попречна пресека дају 26,429% веће резултате од оптимума за тај аспект (са 14 различитих профила), док је са 4 различита профила та разлика 25,620%. Код оптимизације попречних пресека и облика решења са 3 различита попречна пресека дају 60,174% веће резултате од оптимума за тај аспект (са 15 различитих профила), док је са 4 различита профила та разлика 45,077%.

Када се постави ограничење од 4 различита профила оптимизације попречног пресека, као и решења оптимизација попречног пресека и облика дајају се преко 40% бољи резултати од решења када се за те исте типове оптимизација користи само један оптимални профил.

Ако се посматрају разлике укупних спољашњих површина за оптимизације конкретних аспеката у односу на број различитих профила попречних пресека, код оба случаја оптимизације постоји корелација са резултатима маса.

5.5 Кровни решеткасти носач

Пример кровног решеткастог носача са 29 штапова је равански проблем трапезастог - полигоналног решеткастог носача коме су позиције чворова симетричне по у оси. Попречни пресеци елемената су груписани у 9 група тако да постоји симетрија по у оси. Конфигурација је постављена у 16 чворова као што је приказано на слици 5.43. За овај пример коришћен је конструкциони челик *S235JRG2* (Č0361) карактеристика: модул еластичности $210\,000\text{MPa}$ и густина $7,85\text{g/cm}^3$. Конструкција је оптерећена у чворовима према слици 5.44 у $-y$ смеру $F=17,652\text{kN}$. Пример кровног носача има напонско ограничење на истезање од 180MPa и 180MPa на притисак. Овај пример има ограничење померања чворова услед деформације $\pm 0,036\text{m}$ према препорукама статичара. Дискретне променљиве попречних пресека профила као и њихови, каталошки дати моменти инерције су приказани у табели 5.52 према стандарду [104]. Укупно постоји 40 могућих различитих профила. Максимални могући број различитих профила је задат на 5 за примере када је укључено ово ограничење како би се избегле непотребне симулације већег броја од највећег различитих профила оптимума за оба случаја.

Табела 5.52 – Квадратни челични хладно обликовани профили коришћени за пример кровног решеткастог носача и њихови моменти инерција.

Димензије профила [mm]	Моменти инерције [cm^4] у односу на дебљине зидова профила [mm]			
	3	4	5	6
40x40	8,6	11,1	-	-
45x45	14,4	17,6	-	-
50x50	19,5	23,7	27	-
60x60	35,1	43,6	50,5	-
70x70	56,1	68,9	-	-
80x80	87,8	111	131	149
90x90	127	162	193	220
100x100	177	226	271	311
110x110	235,9	300,3	357,4	439,8
120x120	317,2	409,5	498,6	562
130x130	397,3	510,2	612,8	748,3
140x140	510	661,5	805,8	945,8

Ограничења координата чворова код оптимизације облика су груписане због услова симетрије, по у оси су следеће:

$$5,5\text{m} \leq -x_2 = x_{11} \leq 8,5\text{m} ,$$

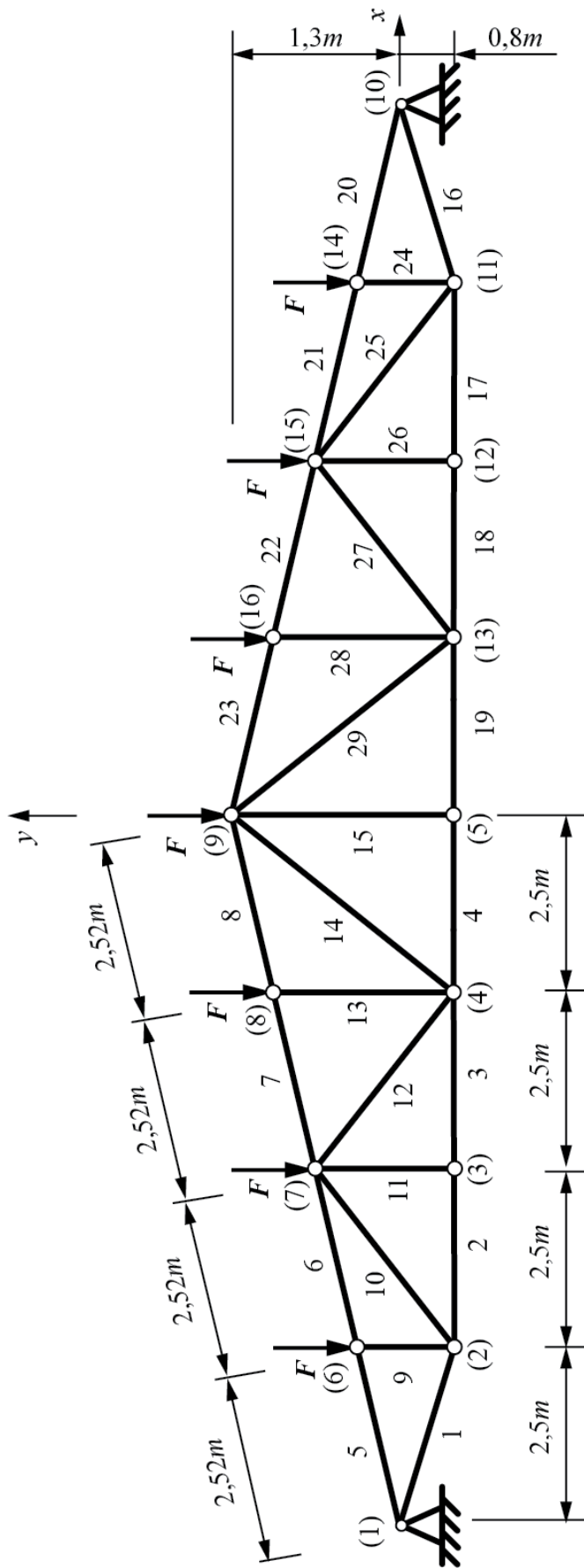
$$3\text{m} \leq -x_3 = x_{12} \leq 7\text{m} \text{ и}$$

$$0,5\text{m} \leq -x_4 = x_{13} \leq 4,5\text{m},$$

а по у оси су:

$$0\text{m} \leq y_{2-5} = y_{11-13} \leq -0,8\text{m} .$$

Попречни пресеци су груписани у горњи сноп, доњи сноп и испуну и симетрични су по у оси као и променљиве облика. Групе променљивих попречних пресека у односу на елементе су: $A_{(1-4)} = A_{(16-19)}$, $A_{(5-8)} = A_{(20-23)}$, $A_{(9)} = A_{(24)}$, $A_{(10)} = A_{(25)}$, $A_{(11)} = A_{(26)}$, $A_{(12)} = A_{(27)}$, $A_{(13)} = A_{(28)}$, $A_{(14)} = A_{(29)}$, $A_{(15)}$. Оптимизација попречног пресека има 9 променљивих и оптимизација облика има 4 променљиве, што у случају да се врши оптимизација по оба аспекта даје 13 оптимизационих променљивих.



Слика 5.44 – Конфигурација примера кровног решеткастог носача.

Минимална дозвољена дужина штапа није постављена као ограничење, с обзиром на то да су ограничења позиција чворова таква да није могуће добити решења са елементима који би били сувише мале дужине. Тополошка оптимизација је због ограничења лимитирана на четири различите концепције, тако да су за овај пример урађене оптимизације попречног пресека и комбинације попречног пресека и облика за све случајеве. Штапови који се једино тополошки могу елиминисати су 11 тј. 26 и 15. Није могуће елиминисати дијагоналне елементе конструкције због статичке стабилности, а остале вертикалне елементе испуне носача није могуће елиминисати јер су у местима где је постављена сила. Овим примером су предвиђене рожњаче које преносе силу са крова на решетку. У случају елиминисања вертикалних елемената испуне, у штаповима би се јавило савијање ако не постоје чворови 6 тј. 14 и 8 тј. 16.

5.5.1 Резултати

Пример кровног носача се значајно разликује од претходних примера, највише због великог броја постављених ограничења. Мала могућност одступања од иницијалног модела не даје толико драстичне разлике у резултатима оптимизације, као што је то био случај код претходних примера. Четири случаја топологије за овај пример су нумерисани и за сваки је извршена оптимизација попречних пресека, као и симултана оптимизација попречних пресека и облика.

Табела 5.53 даје координате чворова, тј. група чворова, за сва четири случаја када се врши симултана оптимизација попречних пресека и облика. Код случаја 3 и 4 због елиминације штапа 11 тј. 26 чворови 3 и 12 не постоје, тако да за њих нису дате вредности. Због истог ограничења у координате свих чворова доњег снопа, чвор 5 се у случају 2 и 4 не јавља из истог разлога.

Табела 5.53 – Координате чворова за оптимална решења попречних пресека и облика у односу на случај.

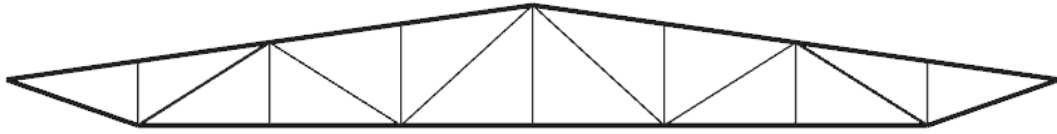
Координата чвора	Случај 1	Случај 2	Случај 3	Случај 4
$-x_2, x_{11}$	7,10	6,94	7,02	7,27
$-x_3, x_{12}$	5,00	5,00	-	-
$-x_4, x_{13}$	2,63	2,54	2,48	2,58
u_{2-5}, u_{11-13}	0,80	0,80	0,8	0,8

Резултати маса и укупне спољашње површине тих оптималних решења према случајевима су дати у табели 5.54. За разлику од претходних примера, овде су дати типови профила уместо површина попречних пресека. Поред оптималних решења, због поређења, дати су и резултати аналитичког прорачуна као и искуствено аналитичко решење. Оба ова решења користе координате чворова иницијалног облика.

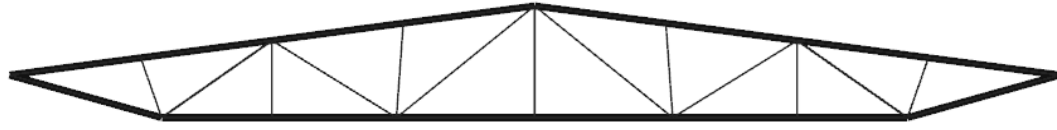
Слике 5.45 – 5.48 дају изгледе оптималних решења за сва четири тополошка случаја.

Табела 5.54 – Поређење оптималних попречних пресека и маса различитих тополошких решења кровног решеткастог носача.

Профил поп. пресека штапа [mm]	Тополошки случај											
	Случај 1			Случај 2			Случај 3			Случај 4		
Група елемената	Аналит. решење	Опт. поп. пресека	Опт. поп. пресека и облика	Аналит. решење	Опт. поп. пресека	Опт. поп. пресека и облика	Аналит. решење	Опт. поп. пресека	Опт. поп. пресека и облика	Аналит. решење	Опт. поп. пресека	Опт. поп. пресека и облика
$A_{(1-4, 16-19)}$	100x100x4	90x90x6	140x140x3	90x90x6	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5	120x120x5	140x140x3	140x140x3
$A_{(5-8, 20-23)}$	90x90x6	90x90x4	140x140x3	90x90x4	100x100x4	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5	110x110x3	140x140x3	140x140x3
$A_{(9, 24)}$	50x50x4	40x40x3	40x40x3	50x50x4	40x40x3	40x40x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	50x50x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(10, 25)}$	50x50x4	60x60x3	50x50x3	50x50x4	90x90x3	45x45x3	60x60x3	60x60x3	50x50x3	50x50x3	60x60x3	60x60x3
$A_{(11, 26)}$	50x50x4	40x40x3	40x40x3	50x50x4	40x40x3	40x40x3	-	-	-	-	-	-
$A_{(12, 27)}$	50x50x4	40x40x3	40x40x3	50x50x4	40x40x3	40x40x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	50x50x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(13, 28)}$	50x50x4	40x40x3	40x40x3	50x50x4	40x40x3	40x40x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	50x50x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(14, 29)}$	50x50x4	40x40x3	40x40x3	50x50x4	40x40x3	40x40x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	50x50x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(15)}$	50x50x4	40x40x3	45x45x3	50x50x4	-	-	60x60x3	40x40x3	40x40x3	-	-	-
Маса [kg]	699,683	623,382	613,251	662,796	612,382	612,018	653,775	615,700	606,993	655,792	604,068	601,890
Површина [m ²]	21,139	19,635	27,596	19,909	20,800	18,809	20,788	19,171	18,797	23,369	26,919	26,819

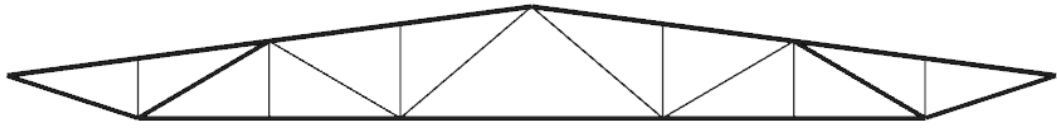


a)

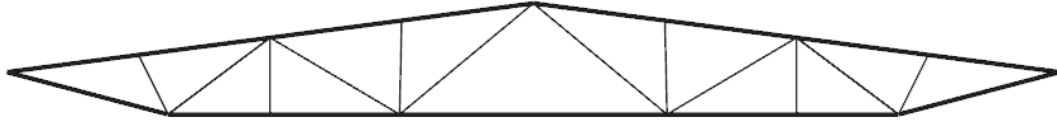


б)

Слика 5.45 – Изгледи модела за случај 1 а) опт. поп. пресека и б) опт. поп. пресека и облика.

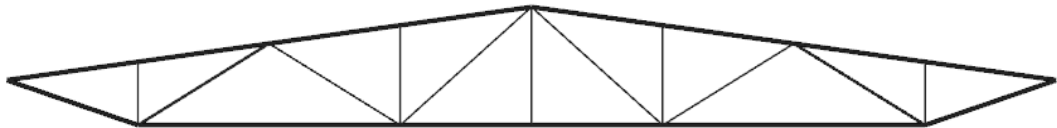


a)

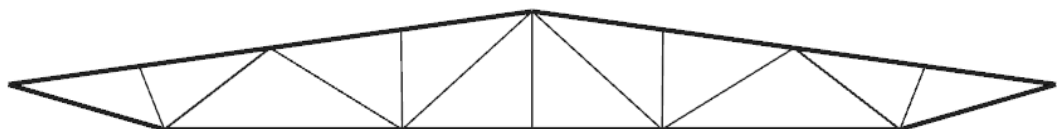


б)

Слика 5.46 – Изгледи модела за случај 2 а) опт. поп. пресека и б) опт. поп. пресека и облика.



a)



б)

Слика 5.47 – Изгледи модела за случај 3 а) опт. поп. пресека и б) опт. поп. пресека и облика.



a)

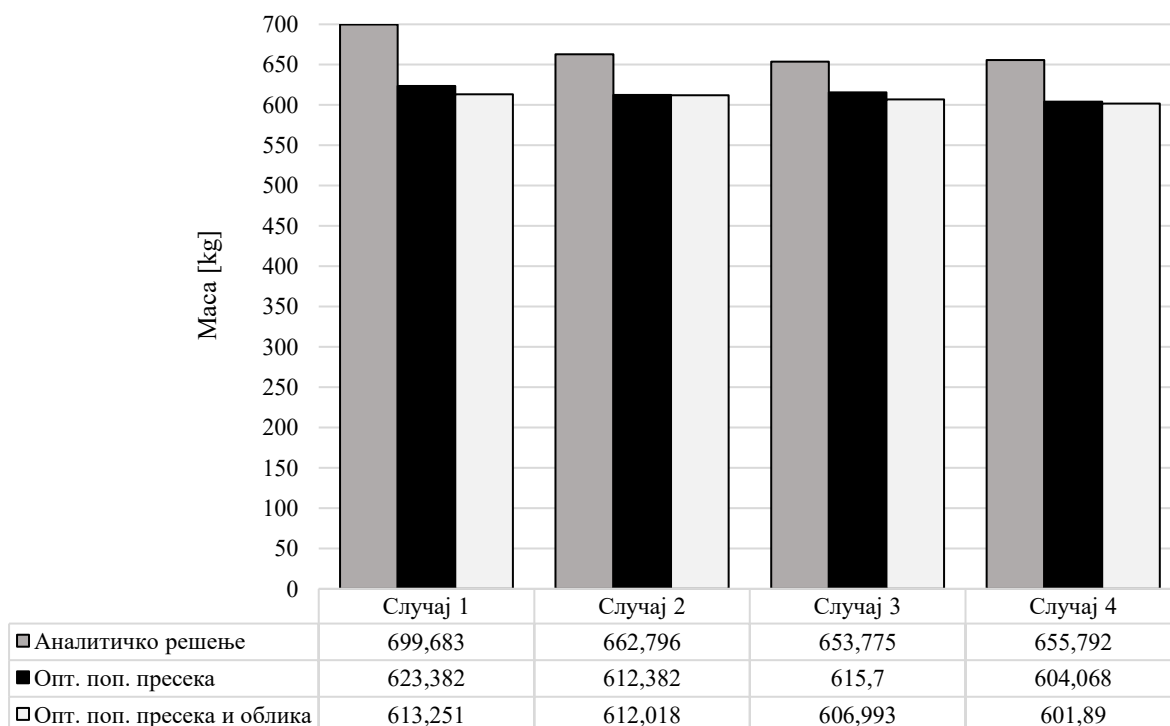


б)

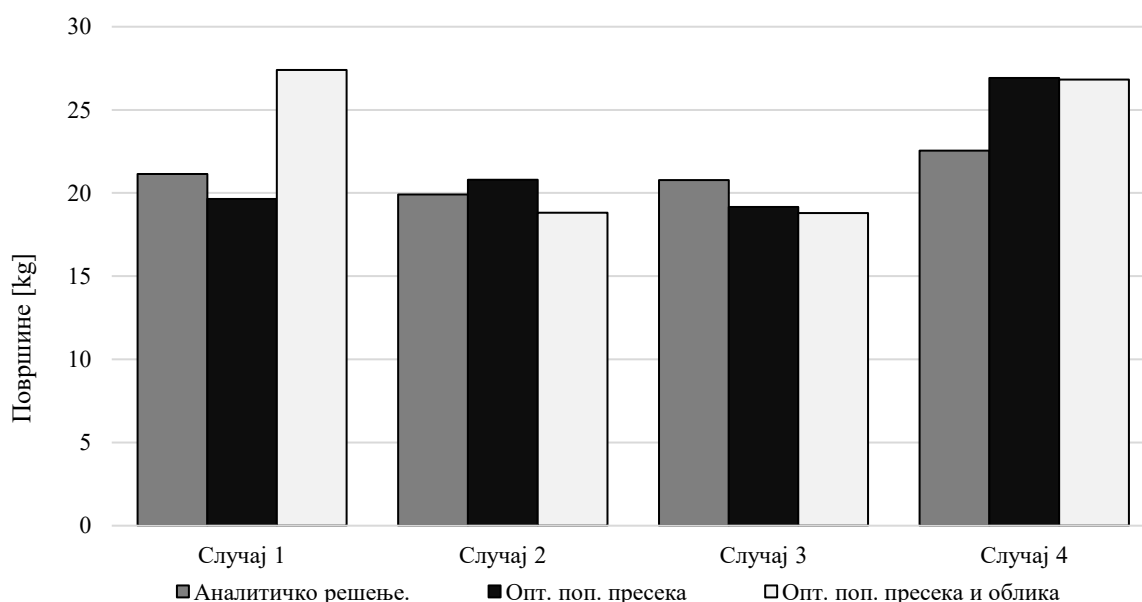
Слика 5.48 – Изгледи модела за случај 4 а) опт. поп. пресека и б) опт. поп. пресека и облика.

У пракси, аналитичко решење овог примера није решење са свим истим попречним пресецима. Овакве конструкције са најчешће димензионишу у 2-3 различите групе, где се горњи и доњи снопови димензионишу засебно.

На слици 5.49 је дат график на коме се пореде масе модела свих решења у односу на случај. Поређење спољашњих површина свих модела је дата на слици 5.50.



Слика 5.49 – Маса аналитичких и оптималних решења у односу на случај.



Слика 5.50 – Разлике укупних спољашњих површина у односу на тип решења и случај.

Како би се добила разлика маса у односу на различити број штапова, поновљен је поступак са додатим ограничењем броја штапова за све случајеве и типове

оптимизације. Табеле 5.55, 5.57, 5.60, 5.62, 5.65, 5.67, 5.70 и 5.72 дају поређење оптималних маса са различитим, ограниченим бројевима различитих попречних пресека са општим оптималним решењем и оптималним решењем са само једним попречним пресеком за цео модел, за оптимизације попречног пресека и попречног пресека и облика, тим редоследом, за сва четири тополошка случаја. Табеле 5.56, 5.58, 5.61, 5.63, 5.66, 5.68, 5.71 и 5.73 дају површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека и попречних пресека и облика, тим редоследом, за сва четири тополошка случаја. Табеле 5.59, 5.64, 5.69 и 5.74 дају координате чворова за оптимална решења попречних пресека и облика за сва четири случаја, датим редоследом.

Табела 5.55 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека случаја 1 кровног решеткастог носача.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од аналитичког решења	Разлика од оптималног решења
Аналитичко решење	699,683	-	12,240
1	881,841	26,034%	41,461%
2	668,819	-4,411%	7,289%
3	625,280	-10,634%	0,304%
4	623,382	-10,905%	-
5	625,395	-10,617%	0,323%

Табела 5.56 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека случаја 1 кровног решеткастог носача.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила					
	Аналит.	1	2	3	4	5
A _(1-4, 16-19)	90x90x6	140x140x3	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5
A _(5-8, 20-23)	100x100x4	140x140x3	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5
A _(9, 24)	50x50x4	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x4
A _(10, 25)	50x50x4	140x140x3	60x60x3	60x60x3	60x60x3	60x60x3
A _(11, 26)	50x50x4	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(12, 27)	50x50x4	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(13, 28)	50x50x4	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(14, 29)	50x50x4	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A ₍₁₅₎	50x50x4	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
Маса [kg]	699,683	881,841	668,819	625,280	623,382	625,395
Површина [m ²]	21,139	38,813	21,484	19,635	19,635	19,635

Табела 5.57 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека и облика случаја 1 кровног решеткастог носача.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од аналитичког решења	Разлика од оптималног решења
Аналитичко решење	699,683	-	14,094
1	879,399	25,685	43,400%
2	634,235	-9,354	3,422%
3	617,637	-11,726	0,715%
4	613,251	-12,353	-
5	624,138	-10,797	1,775%

Табела 5.58 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека и облика случаја 1 кровног решеткастог носача.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm^2] за број различитих профила					
	Аналит.	1	2	3	4	5
$A_{(1-4, 16-19)}$	90x90x6	90x90x5	140x140x3	140x140x3	140x140x3	90x90x5
$A_{(5-8, 20-23)}$	100x100x4	90x90x5	140x140x3	140x140x3	140x140x3	80x80x6
$A_{(9, 24)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	45x45x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(10, 25)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	45x45x3	50x50x3	50x50x3
$A_{(11, 26)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(12, 27)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	45x45x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(13, 28)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	45x45x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(14, 29)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(15)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	40x40x3	45x45x3	45x45x3
Маса [kg]	699,683	879,399	634,235	617,637	613,251	624,138
Површина [m^2]	21,139	24,657	28,287	27,596	27,396	18,454

Табела 5.59 – Координате чворова за оптимална решења попречних пресека и облика за случај 1 у односу на број различитих профила попречних пресека.

Координата чвора	Координате чворова [m] за број различитих профила				
	1	2	3	4	5
- x_2, x_{11}	6,81	7,10	7,12	7,10	6,82
- x_3, x_{12}	5,00	5,01	6,06	5,00	5,00
- x_4, x_{13}	2,63	2,79	2,66	2,63	2,63
y_{2-5}, y_{11-13}	0,80	0,80	0,80	0,80	0,8

Табела 5.60 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека случаја 2 кровног решеткастог носача.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од аналитичког решења	Разлика од оптималног решења
Аналитичко решење	662,796	-	8,232%
1	855,122	-29,017%	39,639%
2	657,925	0,735%	7,437%
3	630,415	4,886%	2,945%
4	612,382	7,606%	-
5	623,340	5,953%	1,789%

Табела 5.61 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека случаја 2 кровног решеткастог носача.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm^2] за број различитих профила					
	Аналит.	1	2	3	4	5
$A_{(1-4, 16-19)}$	90x90x6	140x140x3	90x90x5	90x90x4	90x90x5	90x90x4
$A_{(5-8, 20-23)}$	90x90x4	140x140x3	90x90x5	90x90x6	100x100x4	90x90x6
$A_{(9, 24)}$	50x50x4	140x140x3	60x60x3	50x50x3	40x40x3	100x100x3
$A_{(10, 25)}$	50x50x4	140x140x3	60x60x3	50x50x3	90x90x3	50x50x3
$A_{(11, 26)}$	50x50x4	140x140x3	60x60x3	50x50x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(12, 27)}$	50x50x4	140x140x3	60x60x3	50x50x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(13, 28)}$	50x50x4	140x140x3	60x60x3	50x50x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(14, 29)}$	50x50x4	140x140x3	60x60x3	50x50x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(15)}$	-	-	-	-	-	-
Маса [kg]	662,796	855,122	657,925	630,415	612,382	623,340
Површина [m^2]	19,909	37,637	20,980	19,909	20,800	19,608

Табела 5.62 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека и облика случаја 2 кровног решеткастог носача.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од аналитичког решења	Разлика од оптималног решења
Аналитичко решење	662,796	-	8,297%
1	852,436	-28,612%	39,283%
2	629,502	5,023%	2,857%
3	612,018	7,661%	-
4	614,014	7,360%	0,326%
5	616,609	6,969%	0,750%

Табела 5.63 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека и облика случаја 2 кровног решеткастог носача.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm^2] за број различитих профила					
	Аналит.	1	2	3	4	5
$A_{(1-4, 16-19)}$	90x90x6	90x90x5	90x90x5	90x90x5	80x80x6	80x80x6
$A_{(5-8, 20-23)}$	90x90x4	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5
$A_{(9, 24)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(10, 25)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	45x45x4	45x45x3	45x45x3
$A_{(11, 26)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x4
$A_{(12, 27)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(13, 28)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(14, 29)}$	50x50x4	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
$A_{(15)}$	-	-	-	-	-	-
Маса [kg]	662,796	852,436	629,502	612,018	614,014	616,609
Површина [m^2]	19,909	23,901	19,768	18,809	17,981	17,981

Табела 5.64 – Координате чворова за оптимална решења попречних пресека и облика за случај 2 у односу на број различитих профила попречних пресека.

Координата чвора	Координате чворова [m] за број различитих профила				
	1	2	3	4	5
-x ₂ , x ₁₁	-6,81	7,01	6,94	6,81	6,81
-x ₃ , x ₁₂	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00
-x ₄ , x ₁₃	2,63	2,65	2,54	2,55	2,55
y ₂₋₅ , y ₁₁₋₁₃	0,8	0,80	0,8	0,8	0,8

Табела 5.65 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека случаја 3 кровног решеткастог носача.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од аналитичког решења	Разлика од оптималног решења
Аналитичко решење	653,775	-	6,184
1	842,164	28,816%	36,782%
2	653,775	0,000%	6,184%
3	615,700	-5,824%	-
4	616,689	-5,673%	0,163%
5	620,301	-5,120%	0,560%

Табела 5.66 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека случаја 3 кровног решеткастог носача.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила					
	Аналит.	1	2	3	4	5
A _(1-4, 16-19)	90x90x5	140x140x3	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5
A _(5-8, 20-23)	90x90x5	140x140x3	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5
A _(9, 24)	60x60x3	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(10, 25)	60x60x3	140x140x3	60x60x3	60x60x3	60x60x3	60x60x3
A _(11, 26)	-	-	-	-	-	-
A _(12, 27)	60x60x3	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	45x45x3
A _(13, 28)	60x60x3	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(14, 29)	60x60x3	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A ₍₁₅₎	60x60x3	140x140x3	60x60x3	40x40x3	45x45x3	40x40x3
Маса [kg]	653,775	844,943	653,775	615,700	616,689	620,301
Површина [m ²]	20,788	37,189	20,788	19,171	19,213	19,287

Табела 5.67 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека и облика случаја 3 кровног решеткастог носача.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од аналитичког решења	Разлика од оптималног решења
Аналитичко решење	653,775	-	
1	842,164	28,816%	38,744%
2	626,117	-4,231%	3,151%
3	606,993	-7,156%	-
4	607,891	-7,018%	0,163%
5	610,392	-6,636%	0,560%

Табела 5.68 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека и облика случаја 3 кровног решеткастог носача.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила					
	Аналит.	1	2	3	4	5
A _(1-4, 16-19)	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5
A _(5-8, 20-23)	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5	90x90x5
A _(9, 24)	60x60x3	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(10, 25)	60x60x3	90x90x5	50x50x3	50x50x3	50x50x3	50x50x3
A _(11, 26)	-	-	-	-	-	-
A _(12, 27)	60x60x3	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(13, 28)	60x60x3	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	45x45x3
A _(14, 29)	60x60x3	90x90x5	50x50x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A ₍₁₅₎	60x60x3	90x90x5	50x50x3	40x40x3	45x45x3	40x40x4
Маса [kg]	653,775	842,164	626,117	606,993	607,891	610,392
Површина [m ²]	20,788	23,613	19,609	18,797	18,835	18,861

Табела 5.69 – Координате чворова за оптимална решења попречних пресека и облика за случај 3 у односу на број различитих профила попречних пресека.

Координата чвора	Координате чворова [m] за број различитих профила				
	1	2	3	4	5
-x ₂ , x ₁₁	6,81	7,01	7,02	7,01	7,00
-x ₃ , x ₁₂	-	-	-	-	-
-x ₄ , x ₁₃	2,63	2,69	2,48	2,55	2,59
y ₂₋₅ , y ₁₁₋₁₃	0,8	0,8	0,8	0,88	0,8

Табела 5.70 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека случаја 4 кровног решеткастог носача.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од аналитичког решења	Разлика од оптималног решења
Аналитичко решење	655,792	-	8,563%
1	818,224	-24,769%	35,452%
2	638,187	2,685%	5,648%
3	604,068	7,887%	-
4	606,420	7,529%	0,389%
5	609,495	7,060%	0,898%

Табела 5.71 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека случаја 4 кровног решеткастог носача.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила					
	Аналит.	1	2	3	4	5
A _(1-4, 16-19)	120x120x5	140x140x3	140x140x3	140x140x3	90x90x5	90x90x5
A _(5-8, 20-23)	110x110x3	140x140x3	140x140x3	140x140x3	140x140x3	140x140x3
A _(9, 24)	50x50x3	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(10, 25)	50x50x3	140x140x3	60x60x3	60x60x3	60x60x3	60x60x3
A _(11, 26)	-	-	-	-	-	-
A _(12, 27)	50x50x3	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(13, 28)	50x50x3	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(14, 29)	50x50x3	140x140x3	60x60x3	40x40x3	40x40x3	45x45x3
A ₍₁₅₎	-	-	-	-	-	-
Маса [kg]	655,792	818,224	638,187	604,068	606,420	609,495
Површина [m ²]	23,369	36,013	28,368	26,919	22,869	23,000

Табела 5.72 – Поређење разлика маса у односу на број различитих профила за пример оптимизације попречних пресека и облика случаја 4 кровног решеткастог носача.

Бр. различитих профила	Маса [kg]	Разлика од аналитичког решења	Разлика од оптималног решења
Аналитичко решење	655,792	-	8,955%
1	809,798	-23,484%	34,543%
2	640,507	0,578%	8,325%
3	601,890	8,219%	-
4	607,306	7,394%	0,900%
5	609,415	7,072%	1,250%

Табела 5.73 – Површине попречних пресека, масе и укупне површине за различите бројеве различитих профила оптимизације попречних пресека и облика случаја 4 кровног решеткастог носача.

Групе елемената	Површине попречних пресека [cm ²] за број различитих профила					
	Аналит.	1	2	3	4	5
A _(1-4, 16-19)	120x120x5	140x140x3	90x90x5	140x140x6	90x90x5	90x90x5
A _(5-8, 20-23)	110x110x3	140x140x3	90x90x5	140x140x3	90x90x5	90x90x5
A _(9, 24)	50x50x3	140x140x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3	40x40x4
A _(10, 25)	50x50x3	140x140x3	90x90x5	60x60x3	60x60x3	60x60x3
A _(11, 26)	-	-	-	-	-	-
A _(12, 27)	50x50x3	140x140x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A _(13, 28)	50x50x3	140x140x3	40x40x3	40x40x3	45x45x3	45x45x3
A _(14, 29)	50x50x3	140x140x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3	40x40x3
A ₍₁₅₎	-	-	-	-	-	-
Маса [kg]	655,792	809,798	640,507	601,890	607,306	609,415
Површина [m ²]	23,369	35,642	19,198	26,819	18,769	18,769

Табела 5.74 – Координате чворова за оптимална решења попречних пресека и облика за случај 4 у односу на број различитих профила попречних пресека.

Координата чвора	Координате чворова [m] за број различитих профила				
	1	2	3	4	5
-x ₂ , x ₁₁	7,02	6,90	7,27	7,15	7,15
-x ₃ , x ₁₂	-	-	-	-	-
-x ₄ , x ₁₃	2,63	2,59	2,58	2,54	2,54
y ₂₋₅ , y ₁₁₋₁₃	0,8	0,87,15	0,8	0,8	0,8

5.5.2 Анализа резултата

Код оптимизације практичног примера кровног носача није рађена оптимизација без провере на извијање, као ни оптимизација са континуалним променљивим, јер се такви примери не могу наћи у литератури. Овај пример је специфичан на више начина. Наиме, због конфигурације није било могуће вршити оптимизацију топологије, пошто би недостатак било ког елемента изазвао појаву механизма. Како су оптерећења постављена у чворове горњег снопа, није било могуће елиминисати вертикалне елементе на местима где су они једина директна веза тог чвора са доњим снопом (елементи 9, 13, 24 и 28). Као што је претходно наведено у поставци код овог примера, зато су оптимизована 4 различита тополошка случаја (варијације конструкције). У првом случају су присутни сви елементи. У другом случају је елиминисан штап 15 и чвор 5, тако да су штап 4 и штап 19 замењени једним штапом. Код трећег тополошког случаја су елиминисани штапови 11 и 26 као и чворови 3 и 12 у односу на први случај и тиме су

замене елемента 2 и 3, као и штапови 17 и 18 са по једним штапом. Четврти тополошки случај је комбинација другог и трећег. Поред овога, пример крова је специфичан у односу на претходне у томе што су му ограничења у веома малим опсезима и што је много мањи број чворова могуће померати оптимизацијом облика у односу на укупан број чворова.

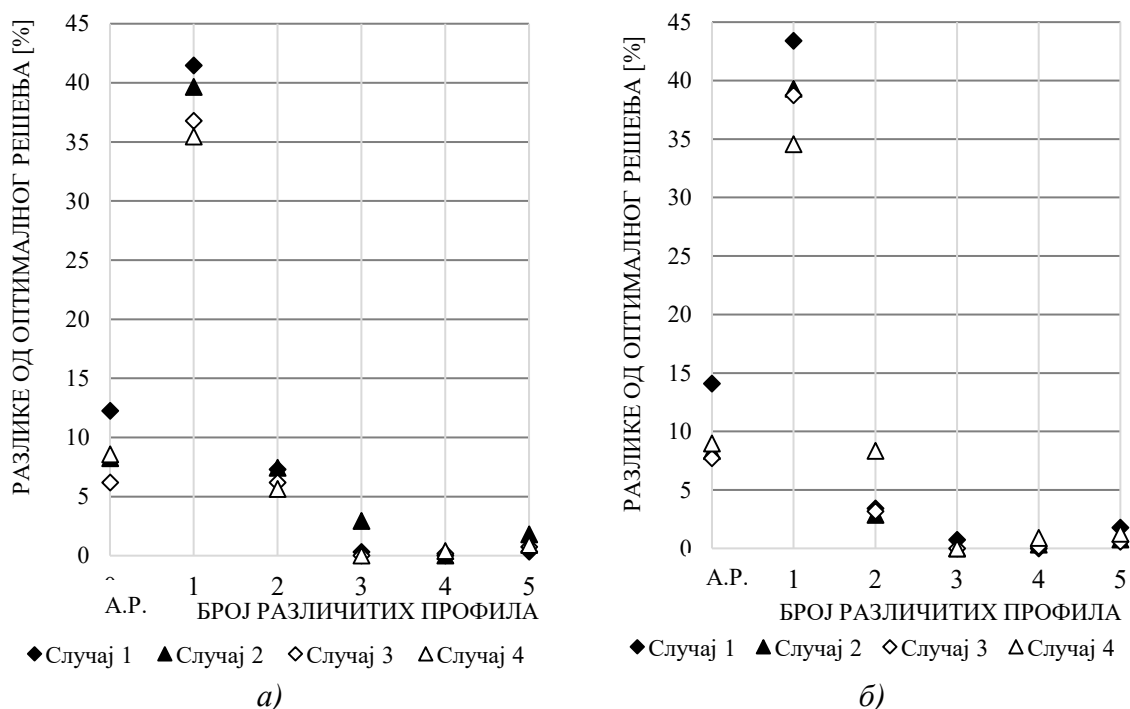
Оптимизацијом попречних пресека и облика у односу на оптимизацију само попречних пресека се добија врло мало побољшање у смислу смањења масе. Код првог случаја се јавља највећа разлика где се оптимизацијом само попречних пресека добија 1,652% (~10kg) већа маса у односу на оптимизацију попречних пресека и облика. Код случаја 2 је та разлика само неколико грама, случаја 3 је то скоро 8kg, док је код 4. случаја разлика мања од 3kg. Како решење оптималног облика даје геометрију компликованију за израду, а ове разлике су доста мале, код овог примера се може закључити да оптимизација облика није исплатива. Ово се дешава због стриктних ограничења малог броја променљивих за овај тип оптимизације.

Када се посматра разлика укупних спољашњих површина решења оптимизације сва 4 случаја, не постоји корелација са оптималним масама код свих случајева. Уочава се велика разлика између укупних спољашњих површина код првог случаја, где се оптимизацијом оба аспекта конструкције добија 28,849% већа површина у односу на оптимизацију само попречних пресека. Ово се објашњава појавом много тањих профила, већих спољашњих димензија, у горњем и доњем снопу решења симултане оптимизације. Решења случаја 2, 3 и 4 имају мање површине оптималних решења оба аспекта у односу на оптимална решења где је оптимизован само попречни пресек. Површине обе оптимизације случајева 2 и 3 се мало разликују од површине оптималног модела оптимизације само попречних пресека. Интересанто је приметити да случај 4 за оба типа оптимизације даје велике површине (само око 0,5m² мање од оптимизације попречних пресека и облика случаја 1). Оба ова решења користе тање профиле већих спољашњих димензија за снопове, а мање у делу испуне.

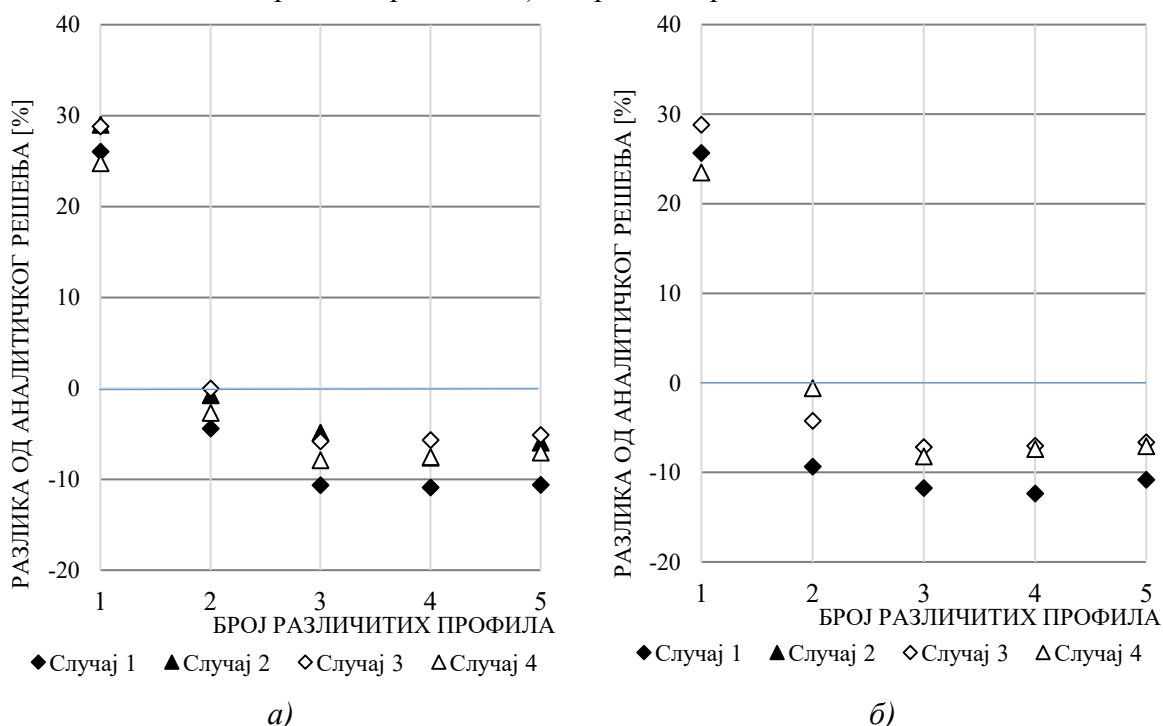
Оптимална решења случаја 1 за обе оптимизације дају решења са 4 различита профила. Смањењем броја могућих различитих профила код овог случаја на 3 се добија 0,304% већа маса од оптималног без овог ограничења за случај оптимизације само попречних пресека, а 0,715% за случај оптимизације попречних пресека и облика. Оптимално решење случаја 2 где су оптимизовани само попречни пресеци, садржи 4 различита профила. Смањењем броја могућих различитих профила код овог случаја на 3 се добија 2,945% већа маса. Оптимално решење са 3 различита профила је уједно и аналитичко решење за овај случај. Оптимизацијом попречних пресека и облика тополошког случаја 2 се добија решење са 3 различита профила док се решење са 2 различита профила незнатно разликује од аналитичког по маси. Оптимална решења оптимизација попречних пресека, као и попречних пресека и облика случаја 3 и 4 дају решења са 3 различита профила. Дакле, смањењем броја различитих на 2 у овим случајевима није препоручљиво због њихове незнатне разлике од аналитичких решења.

Графици разлика маса оптималних модела у односу на број различитих штапова од оптималног модела без ограниченог броја различитих, подељени су на слику 5.51 а и 5.51 б у односу на тип оптимизације. Наиме, разлика маса оптималних модела различитим бројем профила у односу на аналитичко решење за случајеве који узимају у

обзир оптимизацију попречних пресека је дата на слици 5.52 а, док је ова разлика за оптимизацију попречних пресека и облика дата на слици 5.52 б.



Слика 5.51 – Разлика маса оптималних модела у односу на број различитих итапова од оптималног модела без ограниченог броја различитих за случај оптимизације а) попречних пресека и б) попречних пресека и облика.



Слика 5.52 – Разлика маса оптималних модела са различитим бројем профила у односу на аналитичко решење за случајеве оптимизације а) попречних пресека и б) попречних пресека и облика.

Због лакшег приказа велике количине података графици се разликују код анализе овог примера.

6. Закључак

Структурна оптимизација решеткастих носећих конструкција представља актуелан и комплексан проблем у сфери науке и индустрије. У пракси се оптимизација решења конструкција најчешће своди на искуство пројектанта, а нумеричке методе се користе за верификацију искуствених решења. Могућност постизања бољих решења коришћењем оптимизационих метода је још увек веома ретко експлоатисана у овој области инжењерства, док у истраживачким круговима имамо супротан случај. Оптимизација се врши хеуристичким методама, прорачуни нумеричким методама, а резултати се посматрају само са аспекта постигнутих побољшања у односу на поставку, али не и у односу на проблеме у реализацији конструкција.

У складу са циљевима ове дисертације, идентификовани су проблеми структурне оптимизације решеткастих носећих конструкција. Наиме, највећи проблем јесте дефинисање проблема у складу са условима експлоатације. Било је потребно дефинисати приступ решавању проблема како би се креирао адекватан софтвер који би могао да прати тај приступ. Уочено је да постоји потреба за дефинисањем нових ограничења која ће спречити могућност појаве извијања код притиснутих штапова и самим тим нарушити структурну стабилност конструкције. Поред тога, приликом оптимизације облика при дефинисању могућег поља претраге за позиције чворова, уочена је појава решења која имају неизводљиво кратке елементе. Овај проблем је захтевао развој ограничења минималне дужине елемената. Развој је подразумевао и шири поглед на решеткасте носеће конструкције и поступке њиховог извођења. Уочено је да постоји могућност уштеде материјала, не само за само израду металне конструкције већ и за њену површинску заштиту. Површинска заштита решеткастих носача је утицајни фактор у укупној цени ових конструкција и треба га узети у обзир, ако не као информацију о конструкцији, онда у неком следећем кораку истраживања можда и као део вишекритеријумске оптимизације.

У првом делу дисертације је дат кратак историјски преглед и преглед актуелних истраживања у области структурне оптимизације решеткастих носећих конструкција. Предмет и циљеви рада су постављени у односу на увиђени истраживачки простор у области. Хипотезе су дате у складу са мотивацијом за рад и потребама за развој који је обухваћен њима.

Други део дисертације се односи на преглед постојећих метода за конструисање, прорачун и анализу решеткастих конструкција. У овом поглављу је и напоменута важност провере притиснутих штапова на извијање. Акцент ове дисертације је на увођењу реалних ограничења како би се резултати оптимизације практично применили и како би се отворио нови истраживачки простор за даљи развој у области. У трећем поглављу је процес структурне оптимизације разматран како би се у наредном поглављу представио оригинални развијени софтвер за решавање баш тих проблема. Новоуведена

ограничења су математички и алгоритамски дефинисана и објашњен је њихов начин примене.

Резултати оптимизације примера из претходног поглавља потврђују прву хипотезу. Минимизацијом масе, смањењем броја елемената (оптимизацијом топологије), и оптимизацијом попречних пресека се добијају решења мање масе, самим тим и мање цене. Носивост решеткастог носача код оптималних решења је услов за прихватање таквог решења као валидног, што се постиже постављеним ограничењима за максимално дозвољено оптерећење у штаповима. Брзина којом се долази до решења је знатно већа од итеративног димензионисања конструкције коришћењем аналитичког прорачуна, јер рачунар у једној секунди изврши прорачун више могућих конфигурација. Поред тога, рачунар користи инверзни приступ, где се димензионисање (попречних пресека), коришћење елемената (топологија) и позиционирање чворова (облик) одређује хеуристички. Овим приступом је могуће добити решења минималне масе која можда не подлежу инжењерској процедури конструисања.

Друга хипотеза је потврђена на следећи начин. Аналитичка решења свих примера дају веће масе од оптималних маса када се оптимизује само један аспект конструкције (попречни пресеци, топологија или облик). Ово се види из поређења аналитичког решења за пример са 10 штапова из табеле 5.6 и оптималних решења појединачних аспеката из табеле 5.3, за пример са 17 штапова из табеле 5.20 и оптималних решења појединачних аспеката из табеле 5.18, за пример са 25 штапова из табеле 5.35 и оптималних решења појединачних аспеката из табеле 5.33, за пример са 47 штапова из табеле 5.47 и оптималних решења појединачних аспеката из табеле 5.46 и за пример кровног носача за сва 4 случаја поређењем вредности из табеле 5.56. Бољи резултати симултане оптимизације два или сва три аспекта у неким случајевима се најбоље види са слика 5.9 за пример са 10 штапова, 5.21 за пример са 17 штапова, 5.33 за пример са 25 штапова, 5.39 за пример са 47 штапова и 5.47 за пример случајева кровне носеће конструкције.

Поред практичног постављања променљивих оптимизације, важно је користити и реална ограничења. Имплементацијом реалних ограничења добијају се оптимална решења која су применљива у пракси. Ограничења попут максималних и минималних напона као и ограничење померања чворова услед деформације се најчешће налазе у научним радовима. Ово је само део неопходних провера, тј. ограничења, које је потребно имплементирати у процес оптимизације решеткастих конструкција. Како би се извршила адекватна провера модела, потребно је извршити и проверу притиснутих штапова против појаве извијања. Провера на извијање штапова услед притисних сила је најважнија провера у прорачуну конструкције решеткастих носача, јер дозвољени напони у притиснутим штаповима често су вишеструко већи од критичних напона при извијању, зависно од димензија штапова.

Трећа хипотеза је потврђена провером оптималних решења без употребе ограничења притиснутих штапова према Ојлеровом обрасцу за извијање. Из табеле 5.2 за пример са 10 штапова, 5.16 за пример са 17 штапова и табеле 5.31 за пример са 25 штапова се види да у свим оптималним конфигурацијама без употребе овог ограничења, постоје штапови код којих би дошло до извијања. У примерима су коришћене континуалне и дискретне променљиве попречних пресека. Дискретни скупови

попречних пресека представљају реални случај при конструисању решеткастих носача, будући да је непрактично, ако не и немогуће, постићи димензије попречних пресека добијене континуалним променљивим. Чак и ако се занемаре енормни трошкови израде нестандартних димензија профила са прецизностима милиметра или мање, утицај толеранција димензија, положаја и облика би довео до конструкције која није егзактна у односу на модел и самим тим потенцијално нестабилна. Када се маса конструкције минимизује, између осталог, примарно због смањења трошкова, бесмислено је не користити стандардне димензије елемената. Континуалне променљиве координата чворова код оптимизација које узимају у обзир облик су такође биле ограничене на центиметарску прецизност. Сва прецизнија одређивања мања од тога не би била изводљива у пракси због утицаја толеранција и начина израде. Употреба дискретних променљивих за димензије попречних пресека које су применљиве у пракси су нешто веће масе од решења која користе континуалне променљиве које није могуће произвести. Поређење маса решења са континуалним и дискретним променљивим попречних пресека са решењима која не узимају у обзир извијање се јасно види са слике 5.9 за пример са 10 штапова, слике 5.21 за пример са 17 штапова и слике 5.33 за пример са 25 штапова. Како би се добијена оптимална решења што лакше примењивала у пракси без потребе додатних измена, у софтвер је додато и ограничење минималне дужине елемената. Ограничење минималне дужине елемената је неопходно јер је уочено да оптимална решења без овог ограничења могу дати елементе неизводљиво малих дужина, па чак и дужине од $0,00m$. Ово ограничење је неопходно код примера где променљиве облика, тј. променљиве координата чворова, могу да резултују у неизводљивим решењима. Ограничење минималне дужине штапова такође омогућава добијање резултујућих конфигурација код којих је могуће извођење спајање штапова у чворовима заваривањем или постављањем елемената везе. Ово ограничење није коришћено код примера из литературе као што је приказано на слици 5.41 и самим тим је добијено решење које није изводљиво. Уведено ограничење је омогућило добијање конструкције нешто веће масе са применљивом дужином елемената од најмање $0,5m$.

Прегледом резултата у литератури уочено је да су оптимална решења решеткастих конструкција најчешће са нереално великим бројем различитих попречних пресека. Поред резултата из литературе, оптимални модели примера рађених у оквиру ове дисертације су били, зависно од типа, решења са 5 до 8 различитих попречних пресека код примера са 10 штапова, са 6 до 10 различитих попречних пресека код примера са 17 штапова, са 5 до 8 различитих група попречних пресека код примера са 25 штапова, са 14 и 15 различитих попречних пресека код примера са 47 штапова и са 3 до 4 различите групе попречних пресека само код примера кровног носача од максимално 5 различитих. У пракси није практично користити више од 3 до 4 различита профила попречних пресека за једну конструкцију. Димензионисање се углавном врши по сегментима којима се задају попречни пресеци у односу на критичан штап у датом сегменту (нпр. горњем/доњем снопу и испуни). Овај закључак је довео до развијања потпуно новог ограничења броја различитих попречних пресека који конструкција може да садржи. Како анализа утицаја броја различитих попречних пресека на оптималну масу конструкције није до сада пронађена у литератури, у овој дисертацији је ограничење примењено за све (или у сличају великог броја, све рационалне) бројеве укупних различитих попречних пресека. Ограничење броја различитих попречних пресека је

намењено да се користи као ограничење максималног могућег броја различитих попречних пресека.

У анализи резултата оптимизације је вршено поређење броја различитих попречних пресека за случајеве са 3 и 4 различита профила попречних пресека са решењима где је цела конструкција димензионисана у односу на критични штап (аналитичка решења) и са оптималним решењем које не узима у обзир број различитих штапова. Уочено је да су масе ова два случаја веома мало разликују од оптималних решења у већини случајева. Са друге стране, ова решења су далеко боља од аналитичких, чиме се потврђује четврта хипотеза.

Укупне спољашње површине свих оптималних решења, која користе нова ограничења провере на извијање и минималне дужине елемената, су дате у резултатима. За примере са 10, 17, 25 и 47 штапова који користе пуне кружне попречне пресеке се види јасна корелација између масе и укупне спољашње површине, а она настаје услед директне корелације између обима и површине попречног пресека. Међутим, код кровног решеткистог носача, где се користе шупљи квадратни попречни пресеци, ово није случај. Шупљи профили могу имати различите дебљине, самим тим и површине попречних пресека, док у једначини за израчунавање површине само фигурише спољашњи обим профила. Поређењем слика 5.49 и 5.50 се види да случај 4 иако има најмању оптималну масу за оба случаја оптимизације нема најмању спољашњу површину. Код првог случаја аналитичко решење има чак мању површину од решења оптимизације попречних пресека и облика за тај случај. Објашњење ове појаве лежи у томе да оптимални попречни пресеци имају веће спољашње димензије, али тање зидове. Провера укупне спољашње површине може бити важан фактор у одлучивању приликом усвајања решења, зависно од цене површинске заштите. Разлика између оптималне масе случаја 3 и 4 где се оптимизују попречни пресеци и облик је нешто више од 5kg, али је случај 3 са око $6m^2$ у односу на случај 4 иако садржи један штап више. Поређење маса и укупних спољашњих површина за ове различите случајеве је потврдило пету хипотезу.

Могуће је извести закључак да симултана оптимизација свих аспеката конструкције даје најбоља решења, али да у случајевима где околности онемогућавају оптимизацију облика, симултана оптимизација попречних пресека и топологије или само попречних пресека даје решења приближне масе. Такође, може се препоручити да се у сваком случају изврши оптимизација попречних пресека и свих комбинација аспеката како би се дошло до усвајања решења које је компромисно у односу на сложеност решења, број елемената, укупну спољашњу површину и др.

Примена нових ограничења представљених овом дисертацијом је показала правац за даљи развој истраживања у области оптимизације решеткастих конструкција. Њихова употреба је овде први пут представљена и даје резултате који се драстично разликују од свега што се може наћи у актуелној литератури. Радам су покривена и ограничења параметара у циљу што бољег дефинисања проблема. Оригинални софтвер који је развијен за потребе овог истраживања је универзалан и има могућност надградње. У њега је уграђена могућност оптимизације било ког аспекта конструкције и употреба било ког од устаљених и новоуведених ограничења. Резултати примера који су анализирани овде указују на могућност директне имплементације резултата у пракси. Конструкције оптимизоване на начин који је представљен овом дисертацијом имају

мање масе, самим тим и мању цену израде, а могуће је и поређење резултата различитих типова оптимизација према укупној спољашњој површини како би се извршио рационалан избор решења.

Постоји потреба за даљим истраживањима у овој области пре него што она нађе сталну примену у пракси. Детаљним математичким дефинисањем проблема и напретком у области рачунарске технике која је довела до могућности обраде велике количине података, оптимизација може да нађе сталну примену у индустрији. Нова истраживања мораће да узму у обзир све утицаје и ограничења приликом оптимизације решеткастих носећих конструкција. Додатна пажња се мора посветити могућим нестабилностима приликом оптимизације облика где је, како се види са слике 4.11, могућа промена смера деловања сила у штаповима са малом променом положаја чворова. Ова појава није дубље обрађена као део истраживања у склопу ове дисертације, али ће служити као смерница за потребе даљег дефинисања математичког модела и евентуалног увођења провере толеранција димензија положаја и облика у процес верификације оптималних решења.

Перспектива развоја у овој области може бити имплементација провере конструкције на утицај динамичких сила услед ветра и земљотреса, као и провере сопствених фреквенција конструкције. Овом дисертацијом је отворено ново поглавље развоја и примене структурне оптимизације решеткастих носећих конструкција и њихових ограничења, а простор за даље истраживање је, за разлику од проблема на којима се примењује, неограничен.

Литература

- [1] D. Buđevac, Z. Marković, D. Bogavac, D. Tošić, METALNE KONSTRUKCIJE – Specijalna poglavlja i tehnologija izrade –, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 1999.
- [2] C.W. Condit, Engineering in History. Richard Shelton Kirby , Sidney Withington , Arthur Burr Darling , Frederick Gridley Kilgour History of American Technology. John W. Oliver, Isis, 48 (1957) 484-487.
- [3] C.A.C. Coello, M. Rudnick, A.D. Christiansen, Using genetic algorithms for optimal design of trusses, Proceedings Sixth International Conference on Tools with Artificial Intelligence. TAI 94, (1994) 88-94.
- [4] G. Galilei, Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze (1638).
- [5] T. Yokota, T. Taguchi, M. Gen, solution method for optimal weight design problem of 10 bar truss using genetic algorithms, Computers & Industrial Engineering, 35 (1998) 367-372.
- [6] M. Khatibinia, H. Yazdani, Accelerated multi-gravitational search algorithm for size optimization of truss structures, Swarm and Evolutionary Computation, (2017).
- [7] M.-Y. Cheng, D. Prayogo, Y.-W. Wu, M.M. Lukito, A Hybrid Harmony Search algorithm for discrete sizing optimization of truss structure, Automation in Construction, 69 (2016) 21-33.
- [8] S.O. Degertekin, M.S. Hayalioglu, Sizing truss structures using teaching-learning-based optimization, Computers & Structures, 119 (2013) 177-188.
- [9] D.T. Le, D.-K. Bui, T.D. Ngo, Q.-H. Nguyen, H. Nguyen-Xuan, A novel hybrid method combining electromagnetism-like mechanism and firefly algorithms for constrained design optimization of discrete truss structures, Computers & Structures, 212 (2019) 20-42.
- [10] T. Dede, S. Bekiroğlu, Y. Ayvaz, Weight minimization of trusses with genetic algorithm, Applied Soft Computing, 11 (2011) 2565-2575.
- [11] M. Kilinc, J.M. Caicedo, Finding Plausible Optimal Solutions in Engineering Problems Using an Adaptive Genetic Algorithm, Advances in Civil Engineering, 2019 (2019) 1-9.
- [12] A.E. Charalampakis, G.C. Tsiatas, Critical Evaluation of Metaheuristic Algorithms for Weight Minimization of Truss Structures, Frontiers in Built Environment, 5 (2019).

- [13] S. Gholizadeh, R. Sojoudizadeh, Modified Sine-Cosine Algorithm for Sizing Optimization of Truss Structures with Discrete Design Variables, *INTERNATIONAL JOURNAL OF OPTIMIZATION IN CIVIL ENGINEERING*, 9 (2019) 195-212.
- [14] S.O. Degertekin, Improved harmony search algorithms for sizing optimization of truss structures, *Computers & Structures*, 92-93 (2012) 229-241.
- [15] A.C. de Castro Lemonge, G.R. Duarte, L.G. da Fonseca, An algorithm inspired by bee colonies coupled to an adaptive penalty method for truss structural optimization problems, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 41 (2019).
- [16] M.A. Reza Najian Asl, Masoud Shariat Panahi, Sizing Optimization of Truss Structures using a Hybridized Genetic Algorithm, in, 2016.
- [17] B. Farshi, A. Alinia-ziazi, Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation, *International Journal of Solids and Structures*, 47 (2010) 2508-2524.
- [18] A. Sadollah, A. Bahreininejad, H. Eskandar, M. Hamdi, Mine blast algorithm for optimization of truss structures with discrete variables, *Computers & Structures*, 102-103 (2012) 49-63.
- [19] S. Kazemzadeh Azad, O. Hasançebi, M.P. Saka, Guided stochastic search technique for discrete sizing optimization of steel trusses: A design-driven heuristic approach, *Computers & Structures*, 134 (2014) 62-74.
- [20] F. Flager, G. Soremekun, A. Adya, K. Shea, J. Haymaker, M. Fischer, Fully Constrained Design: A general and scalable method for discrete member sizing optimization of steel truss structures, *Computers & Structures*, 140 (2014) 55-65.
- [21] A. Sadollah, H. Eskandar, A. Bahreininejad, J.H. Kim, Water cycle, mine blast and improved mine blast algorithms for discrete sizing optimization of truss structures, *Computers & Structures*, 149 (2015) 1-16.
- [22] C.V. Camp, M. Farshchin, Design of space trusses using modified teaching–learning based optimization, *Engineering Structures*, 62-63 (2014) 87-97.
- [23] A. Kaveh, R. Sheikholeslami, S. Talatahari, M. Keshvari-Ilkhichi, Chaotic swarming of particles: A new method for size optimization of truss structures, *Advances in Engineering Software*, 67 (2014) 136-147.
- [24] A. Kaveh, B. Mirzaei, A. Jafarvand, An improved magnetic charged system search for optimization of truss structures with continuous and discrete variables, *Applied Soft Computing*, 28 (2015) 400-410.
- [25] G. SVED, Z. Grsos, *STRUCTURAL OPTIMIZATION UNDER MULTIPLE LOADING*, *Int. J. mech. Sci. Pergamon Press.*, 10 (1968) 803-805.
- [26] H. Assimi, A. Jamali, N. Nariman-zadeh, Sizing and topology optimization of truss structures using genetic programming, *Swarm and Evolutionary Computation*, (2017).

- [27] H. Madah, O. Amir, Truss optimization with buckling considerations using geometrically nonlinear beam modeling, *Computers & Structures*, 192 (2017) 233-247.
- [28] H. Assimi, A. Jamali, A hybrid algorithm coupling genetic programming and Nelder–Mead for topology and size optimization of trusses with static and dynamic constraints, *Expert Systems with Applications*, 95 (2018) 127-141.
- [29] G.G. Tejani, V.J. Savsani, S. Bureerat, V.K. Patel, P. Savsani, Topology optimization of truss subjected to static and dynamic constraints by integrating simulated annealing into passing vehicle search algorithms, *Engineering with Computers*, 35 (2018) 499-517.
- [30] G.G. Tejani, V.J. Savsani, V.K. Patel, S. Mirjalili, An improved heat transfer search algorithm for unconstrained optimization problems, *Journal of Computational Design and Engineering*, 6 (2019) 13-32.
- [31] G.G. Tejani, V.J. Savsani, V.K. Patel, S. Mirjalili, Truss optimization with natural frequency bounds using improved symbiotic organisms search, *Knowledge-Based Systems*, 143 (2018) 162-178.
- [32] H.-C. Kuo, J.-T. Chiu, C.-H. Lin, Intelligent Garbage Can Decision-Making Model Evolution Algorithm for optimization of structural topology of plane trusses, *Applied Soft Computing*, 12 (2012) 2719-2727.
- [33] V.T. Bich Quyen, C.Q. Khanh, T.T. Thuy Van, D.N. Khoa, T.P. Truc, A New Algorithm for Size Optimization of the Truss Structures with Buckling Constraint using Finite Element Method, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 661 (2019) 012041.
- [34] M. Shahabsafa, A. Mohammad-Nezhad, T. Terlaky, L. Zuluaga, S. He, J.T. Hwang, J.R.R.A. Martins, A novel approach to discrete truss design problems using mixed integer neighborhood search, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58 (2018) 2411-2429.
- [35] M. Jalalpour, J.K. Guest, T. Igusa, Reliability-based topology optimization of trusses with stochastic stiffness, *Structural Safety*, 43 (2013) 41-49.
- [36] A. FRIEDLANDER, F.A.M. GOMES, Solution of a truss topology bilevel programming problem by means of an inexact restoration method, *Computational & Applied Mathematics*, 30 (2011) 109-125.
- [37] T. Sokół, A 99 line code for discretized Michell truss optimization written in Mathematica, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43 (2010) 181-190.
- [38] R.M. Freund, Truss Design and Convex Optimization, in: *M.I.o. Technology* (Ed.), 2004.
- [39] F. Bastos, A. Cerveira, J. Gromicho, Using Optimization to Solve Truss Topology Design Problems, *Investigacao Operacional*, 25 (2005) 123-156.
- [40] B.S. Gan, T. Hara, A. Han, S.W. Alisjahbana, S. As'ad, Evolutionary ACO Algorithms for Truss Optimization Problems, *Procedia Engineering*, 171 (2017) 1100-1107.

- [41] Z. Wu, L. Xia, S. Wang, T. Shi, Topology optimization of hierarchical lattice structures with substructuring, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 345 (2019) 602-617.
- [42] A. Csébfalvi, Structural optimization under uncertainty in loading directions: Benchmark results, *Advances in Engineering Software*, 120 (2018) 68-78.
- [43] E. Grande, M. Imbimbo, V. Tomei, Role of global buckling in the optimization process of grid shells: Design strategies, *Engineering Structures*, 156 (2018) 260-270.
- [44] M. Röber, M. Todtermuschke, Multiobjective Topology Optimization of Truss Structures for Assembly Devices Using Intelligent Swarm Techniques, *Procedia CIRP*, 23 (2014) 241-245.
- [45] C.-Y. Cui, B.-S. Jiang, A morphogenesis method for shape optimization of framed structures subject to spatial constraints, *Engineering Structures*, 77 (2014) 109-118.
- [46] C.E. Tschida, L.M. Silverberg, Cellular growth algorithms for shape design of truss structures, *Computers & Structures*, 116 (2013) 1-6.
- [47] A. Kaveh, M. Khayatazad, Ray optimization for size and shape optimization of truss structures, *Computers & Structures*, 117 (2013) 82-94.
- [48] Specification for Structural Steel Buildings Allowable Stress Design and Plastic Design, in, AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, INC., 1989.
- [49] S. Gholizadeh, Layout optimization of truss structures by hybridizing cellular automata and particle swarm optimization, *Computers & Structures*, 125 (2013) 86-99.
- [50] A. Mortazavi, V. ToğAn, A. NuhoğLu, Weight Minimization of Truss Structures with Sizing and Layout Variables Using Integrated Particle Swarm Optimizer, *Journal of Civil Engineering and Management*, 23 (2017) 985-1001.
- [51] P.W. Jansen, R.E. Perez, Constrained structural design optimization via a parallel augmented Lagrangian particle swarm optimization approach, *Computers & Structures*, 89 (2011) 1352-1366.
- [52] M. Kamiński, M. Solecka, Optimization of the truss-type structures using the generalized perturbation-based Stochastic Finite Element Method, *Finite Elements in Analysis and Design*, 63 (2013) 69-79.
- [53] A. Kaveh, A. Zolghadr, Democratic PSO for truss layout and size optimization with frequency constraints, *Computers & Structures*, 130 (2014) 10-21.
- [54] F. Flager, A. Adya, J. Haymaker, M. Fischer, A bi-level hierarchical method for shape and member sizing optimization of steel truss structures, *Computers & Structures*, 131 (2014) 1-11.
- [55] A. Kaveh, A. Zolghadr, Comparison of nine meta-heuristic algorithms for optimal design of truss structures with frequency constraints, *Advances in Engineering Software*, 76 (2014) 9-30.

- [56] A. Kaveh, M. Ilchi Ghazaan, Hybridized optimization algorithms for design of trusses with multiple natural frequency constraints, *Advances in Engineering Software*, 79 (2015) 137-147.
- [57] R.J. Balling, M. ASCE, R.R. Briggs, K. Gillman, Multiple Optimum Size/Shape/Topology Designs for Skeletal Structures Using a Genetic Algorithm, *JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING*, 132 (2006) 1158-1165.
- [58] H. Rahami, A. Kaveh, Y. Gholipour, Sizing, geometry and topology optimization of trusses via force method and genetic algorithm, *Engineering Structures*, 30 (2008) 2360-2369.
- [59] R. Cazacu, L. Grama, Steel Truss Optimization Using Genetic Algorithms and FEA, *Procedia Technology*, 12 (2014) 339-346.
- [60] A. Ahrari, A.A. Atai, K. Deb, Simultaneous topology, shape and size optimization of truss structures by fully stressed design based on evolution strategy, *Engineering Optimization*, 47 (2014) 1063-1084.
- [61] T.E. Müller, E.v.d. Klashorst, A Quantitative Comparison Between Size, Shape, Topology and Simultaneous Optimization for Truss Structures, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 14 (2017) 2221-2242.
- [62] S.O. Degertekin, L. Lamberti, I.B. Ugur, Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm, *Applied Soft Computing*, (2017).
- [63] L.F.F. Miguel, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, Multimodal size, shape, and topology optimisation of truss structures using the Firefly algorithm, *Advances in Engineering Software*, 56 (2013) 23-37.
- [64] R.R.d. Souza, L.F. Fadel Miguel, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, A.J. Torii, A procedure for the size, shape and topology optimization of transmission line tower structures, *Engineering Structures*, 111 (2016) 162-184.
- [65] L. Pyl, C.W.M. Sitters, W.P. De Wilde, Design and optimization of roof trusses using morphological indicators, *Advances in Engineering Software*, 62-63 (2013) 9-19.
- [66] R. Frans, Y. Arfiadi, Sizing, Shape, and Topology Optimizations of Roof Trusses Using Hybrid Genetic Algorithms, *Procedia Engineering*, 95 (2014) 185-195.
- [67] K. Hamza, H. Mahmoud, K. Saitou, Design optimization of N-shaped roof trusses using reactive taboo search, *Applied Soft Computing*, 3 (2003) 221-235.
- [68] H.C. Tran, J.K.P. Lee, Force methods for trusses with elastic boundary conditions, in, 2013.
- [69] B. Cheng, Q. Qian, H. Sun, Steel truss bridges with welded box-section members and bowknot integral joints, Part I: Linear and non-linear analysis, *Journal of Constructional Steel Research*, 80 (2013) 465-474.

- [70] G.R. Zavala, A.J. Nebro, J.J. Durillo, F. Luna, Integrating a multi-objective optimization framework into a structural design software, *Advances in Engineering Software*, 76 (2014) 161-170.
- [71] N. Kostić, M. Blagojević, N. Petrović, M. Matejić, N. Marjanović, Determination of Real Clearances Between Cycloidal Speed Reducer Elements by the Application of Heuristic Optimization, *Transactions of FAMENA*, 42 (2018) 15-26.
- [72] N. Petrovic, N. Marjanovic, N. Kostic, M. Blagojevic, M. Matejic, Sizing Optimization of Parametrically Designed Trusses, in: *13th International Conference on Accomplishments in Mechanical and Industrial Engineering, DEMI 2017*, University of Banja Luka Faculty of Mechanical Engineering, 2017, pp. 93-100.
- [73] N. Petrovic, N. Kostic, N. Marjanovic, COMPARISON OF APPROACHES TO 10 BAR TRUSS STRUCTURAL OPTIMIZATION WITH INCLUDED BUCKLING CONSTRAINTS, *Applied Engineering Letters*, 2 (2017) 98-103.
- [74] N. Petrovic, N. Marjanovic, N. Kostic, M. Blagojevic, M. Matejic, S. Troha, Effects of introducing dynamic constraints for buckling to truss sizing optimization problems, *FME Transaction*, 46 (2018) 117-123.
- [75] N. Petrovic, N. Kostic, N. Marjanovic, A COMPARISON OF TRUSS STRUCTURAL OPTIMIZATION TYPES WITH AND WITHOUT BUCKLING DYNAMIC CONSTRAINTS, in: *Conference on Mechanical Engineering Technologies and Applications*, East Sarajevo - Jahorina, 2018, pp. 484-491.
- [76] N. Petrović, N. Kostić, N. Marjanović, M. Blagojević, M. Matejić, INFLUENCE OF BUCKLING CONSTRAINTS ON TRUSS STRUCTURAL OPTIMIZATION, in: *14TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACCOMPLISHMENTS IN MECHANICAL AND INDUSTRIAL ENGINEERING*, Banja Luka, 2019, pp. 415-422.
- [77] N. Petrovic, N. Kostic, N. Marjanovic, DISCRETE VARIABLE TRUSS STRUCTURAL OPTIMIZATION USING BUCKLING DYNAMIC CONSTRAINTS, *Machine Design*, 10 (2018) 51-56.
- [78] N. Petrović, N. Kostić, N. Marjanović, V. Marjanović, Influence of Using Discrete Cross-Section Variables for All Types of Truss Structural Optimization with Dynamic Constraints for Buckling, *Applied Engineering Letters : Journal of Engineering and Applied Sciences*, 3 (2018) 78-83.
- [79] S.-J. Wu, P.-T. Chow, STEADY-STATE GENETIC ALGORITHMS FOR DISCRETE OPTIMIZATION OF TRUSSES, *Computers & Structures*, 56 (1995) 979-991.
- [80] S.-E. Kim, W.F. Chen, An Innovative Design For Steel Frame Using Advanced Analysisfootnotemark, in: *Structural Engineering Handbook*, CRC Press LLC, 1999.
- [81] I.P. Prokofjev, *Teorija konstrukcija, Građevinska knjiga*, Beograd, 1960.
- [82] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković, N. Grujović, *Metod konačnih elemenata I - Linearna analiza*, Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski Fakultet, 2010.

- [83] J. Packer, D. Sherman, M. Lecce, Design Guide 24: Hollow Structural Section Connections, American Institute of Steel Construction, Chicago, USA, 2010.
- [84] J. Wardenier, Hollow Sections in Structural Applications, Bouwen met Staal, Zoetemeer, Netherlands, 2002.
- [85] S. Timošenko, Teorija elastične stabilnosti, Naučna knjiga, Beograd, 1952.
- [86] M. Milosavljević, M. Radojković, B. Kuzmanović, Osnovi čeličnih konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd, 1963.
- [87] N. Marjanović, Optimizacija zupčastih prenosnika snage- monografija, CAD Laboratorija, Mašinski fakultet u Kragujevcu, Kragujevac, 2007.
- [88] S.S. Rao, Engineering optimization, Theory and practice, Fourth edition ed., John Wiley and Sons, Inc., 2009.
- [89] J.S. Arora, Optimization of Structural and Mechanical Systems, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., University of Iowa, USA, 2006.
- [90] S.N.Sivanandam, S.N.Deepa, Introduction to Genetic Algorithms, Springer Berlin Heidelberg New York, 2008.
- [91] D.E. Goldberg, Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1989.
- [92] C. Preisinger, Linking Structure and Parametric Geometry, Acrchitectural design, 83 (2013) 110-113.
- [93] C. Preisinger, Parametric Structural Modeling - Karamba, Karamba3D, 2012.
- [94] M. Galante, Genetic algorithms as an approach to optimize real-word trusses, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39 (1996) 361-382.
- [95] P. Hajela, E. Lee, Genetic algorithms in truss topological optimization, International Journal of Solids and Structures, 32 (1995) 3341-3357.
- [96] L.J. Li, Z.B. Huang, F. Liu, Q.H. Wu, A heuristic particle swarm optimizer for optimization of pin connected structures, Computers & Structures, 85 (2007) 340-349.
- [97] T. Xu, W. Zuo, T. Xu, G. Song, R. Li, An adaptive reanalysis method for genetic algorithm with application to fast truss optimization, Acta Mechanica Sinica, 26 (2009) 225-234.
- [98] L. Lamberti, An efficient simulated annealing algorithm for design optimization of truss structures, Computers & Structures, 86 (2008) 1936-1953.
- [99] D.L. Lamberti, C. Pappalettere, A numerical code for lay-out optimization of skeletal structures with sequential linear programming, Engineering with Computers, 19 (2003) 101-129.

- [100] L. Lamberti, C. Pappalettere, Move limits definition in structural optimization with sequential linear programming. Part II: Numerical examples, *Computers & Structures*, 81 (2003) 215-238.
- [101] A. Ahrari, A.A. Atai, Fully Stressed Design Evolution Strategy for Shape and Size Optimization of Truss Structures, *Computers & Structures*, 123 (2013) 58-67.
- [102] A. Xiao, B. Wang, C. Sun, S. Zhang, Z. Yang, Fitness Estimation Based Particle Swarm Optimization Algorithm for Layout Design of Truss Structures, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014 (2014) 1-11.
- [103] O. Hasancebi, F. Erbatur, Layout optimization of trusses using improved GA methodologies, *Acta Mechanica*, 146 (2001) 87-107.
- [104] Cold formed welded structural hollow sections of non-alloy and fine grain structural steel Part 2: Tolerances, dimensions and sectional properties, in: EN 10219-2 : 1997-11, DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin., 1997.